Variational approach to low-frequency kinetic-MHD in the current coupling scheme

J.W.Burby, C.Tronci

Abstract

混合动理学-*MHD*模型描述了*MHD*体流体与高能粒子系综的相互作用，该模型遵循动理学方程。在这项工作中，我们应用*Hamilton*变分原理在低频近似(即大*Larmor*频率极限)下建立了新的电流耦合动理学- *mhd*模型。更具体地说，我们制定了电流耦合方案，其中高能粒子动理学以导心或回旋中心坐标表示。当导心理论用于模拟高能粒子时，我们展示了能量守恒如何需要对标准磁化项进行修正。另一方面，在回旋动理学-*mhd*中，电荷和动量守恒导致在通常的热流密度定义中增加了额外的项，并对传统的回旋中心动理学进行了修改。所有这些新特征都是由所提出模型的潜在变分结构自然产生的。

关键词：拉格朗日力学，高能粒子，磁流体力学，混合模型

1 Nonlinear kinetic-MHD models

在过去的几十年中，高能粒子对磁流体力学稳定性的影响得到了广泛研究（参见文献[15、17、19]），这是因为它们在聚变研究中具有实际重要性。自早期对线性区域的研究以来，自洽地耦合磁流体力学和高能粒子动理学的表述一直受到广泛关注。以混合的动理学-流体描述为方便，因为对所有物种进行全动理学处理将显著增加计算成本，而忽略高能粒子的热效应和波粒相互作用则是完全流体闭合的。多年来，出现了两种主要的动理学-流体耦合策略：压力耦合[15]和电流耦合[19]。这两种变种在考虑线性模型时似乎可以互换[42]。然而，非线性压力耦合在学术界得到进一步巩固，并且其数学基础被展开[6]，从而形成了它的变分结构。

九十年代早期出现了混合动理学-MHD模型的第一批非线性扩展[16, 24, 42]，并且在[26, 58, 60]中对其一致性提出了挑战。特别是，在采用高能粒子的全轨道Vlasov轨迹假设时，研究表明Vlasov-MHD的电流耦合方案（CCS）在数学和物理上都是一致的，而压力耦合方案（PCS，在计算机模拟中最广泛使用）则缺乏精确的能量平衡，从而导致不真实的不稳定性。新的能量守恒型Vlasov-MHD压力耦合方案的变种已被提出[26, 58]，并且这些变种中似乎消除了不真实的不稳定性[60]。

如上所述，与压力耦合模拟的非线性实现相关的问题在Vlasov-MHD的CCS中得到了解决。例如，电阻CCS的变体已经成功地由Belova等人[2, 3]进行了数值实现，并且其数学基础最近在[18]中进一步探索。然而，聚变研究经常使用漂移动理学和回旋动理学近似，这严重影响了运动方程的结构。在这方面，Littlejohn的先驱性工作[34-36]展示了如何在Hamilton变分原理[36]中插入近似是获得非线性动理学近似描述的最简单和最安全的方法。这种变分方法也被Brizard [7]和Sugama [48]所利用，他们提供了回旋动理学理论的变分描述。最近，这种方法在导心运动和液晶动理学中向列分子的动力学之间揭示了一些令人意外的类比[57]。

本文重点研究完全无碰撞的混合模型。即使对于弱碰撞等离子体，这个假设可能也不完全成立（例如，请参见[4]中关于星系动理学中碰撞效应的研究）。确实，混合磁流体动理学的电阻性扩展已经存在于文献中[3]，尽管在欧姆定律中引入电阻性可能并不完全直接（例如请参见[18]的1.2节）。此外，完整的碰撞处理必然涉及到高能粒子之间的碰撞。例如，最近在[11]中开发了一个保守的回旋动理学碰撞算符，而目前在混合模型的背景下还没有可用的方法来解决这个问题。鉴于这些困难，我们将完全忽略碰撞效应。更具体地说，本文通过将理想MHD的变分描述[40]与对高能粒子的导心和回旋中心运动的变分方法相结合，提供了CCS的新的保守变体。我们认为这样的新变体是必要的，因为先前文献中的漂移动理学-磁流体动理学（DK-MHD）和回旋动理学-磁流体动理学（Gyrokinetic-MHD）模型都不能保证多种基本守恒定律。特别是，先前的模型在能量、动量和高能电荷守恒方面都不能精确保持。

在第2节中回顾了Vlasov-MHD的CCS的变分结构后，我们将转向DK-MHD（第3节）。在这种情况下，我们将展示磁化的移动偶极修正[29, 43, 44]对于确保精确的能量平衡[9]是至关重要的。在第4节中，我们转向了回旋动理学描述。为了确保我们的理论与电荷守恒一致，我们将呈现一个新的规范不变拉格朗日量，作为回旋动理学理论的基础。然后，我们将我们的新回旋动理学拉格朗日量与Newcomb的MHD变分原理相结合，以获得用于回旋动理学-MHD的守恒CCS。这个模型修正了以前工作中存在的动量和高能电荷守恒问题。

2 Vlasov-MHD

2.1 Formulation of the Vlasov-MHD model

动理学MHD的CCS首次在[42]中提出，我们将通过回顾其显式表达式来开始我们的处理，假设高能粒子服从完整轨道Vlasov动理学。该情况也在[26,58,60]中得到处理。起点是以下动理学多流体系统：

$$\rho_s\partial_t\boldsymbol{U}_s+\rho_s\left(\boldsymbol{U}_s\cdot\nabla\right)\boldsymbol{U}_s=a_s\rho_s\left(\mathbf{E}+\boldsymbol{U}_s\times\mathbf{B}\right)-\nabla\mathbf{p}_s, \tag{1}$$

$$\partial_t\rho_s+\nabla\cdot\left(\rho_s\boldsymbol{U}_s\right)=0, \tag{2}$$

$$\partial_tF+\mathbf{v}\cdot\nabla F+a_h(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}F=0, \tag{3}$$

$$\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}=\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{B}-\sum_s a_s\rho_s\boldsymbol{U}_s-\mathbf{J}_h, \tag{4}$$

$$\partial_t\mathbf{B}=-\nabla\times\mathbf{E}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=\sum_s a_s\rho_s+q_hn_h,\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0. \tag{6}$$

在这里，$s=i,e$代表流体种类（离子或电子），其带电量与质量之比为$a_s=q_s/m_s$，质量密度为ρ_s，局部压力为$\mathbf{p}_s$；$F(\mathbf{x},\mathbf{v})$表示相空间上的动理学密度，q_h表示高能粒子的电荷。使用这个符号，我们可以将高能粒子密度和电流密度写作：

$$n_h=\int F\,\mathrm{d}^3\mathbf{v},\quad \mathbf{J}_h=q_h\int\mathbf{v}F\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}.$$

为了推导混合CCS，我们首先插入通常假设MHD [22]下的假设，其中我们假定通过在Ampère定律（4）和Gauss定律（6）中形式上令$\varepsilon_0\to0$来实现准中性。然后，我们通过令第二种粒子$(s=\mathrm{e})$的质量$m_\mathrm{e}\to0$取极限，在流体方程（1）中忽略电子惯性。在这个假设下，对于$s=\mathrm{i}$和e的方程（1）求和得到

$$\rho_\mathrm{i}\partial_t\boldsymbol{U}_\mathrm{i}+\rho_\mathrm{i}\left(\boldsymbol{U}_\mathrm{i}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{U}_\mathrm{i}=\left(a_\mathrm{i}\rho_\mathrm{i}+a_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}\right)\mathbf{E}+\left(a_\mathrm{i}\rho_\mathrm{i}\boldsymbol{U}_\mathrm{i}+a_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}\boldsymbol{U}_\mathrm{e}\right)\times\mathbf{B}-\nabla\left(\mathbf{p}_\mathrm{i}+\mathbf{p}_\mathrm{e}\right), \tag{7}$$

然后变为（去掉下标i并记$\mathbf{J}=\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{B}$）

$$\rho\left(\partial_t\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}\right)=-q_hn_h\mathbf{E}+\left(\mathbf{J}-\mathbf{J}_h\right)\times\mathbf{B}-\nabla\left(\mathbf{p}_\mathrm{i}+\mathbf{p}_\mathrm{e}\right).$$

在这个阶段，为了完成CCS的表述，我们需要使用Ohm定律将电场$\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{A}-\nabla\varphi$ 表达出来[58,60]。为了当前的目的，我们将使用理想的Ohm定律$\mathbf{E}=-\boldsymbol{U}\times\mathbf{B}$，从而得到CCS动量方程（记$\mathbf{p}=\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_e$）。

$$\rho\left(\partial_t\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}\right)=\left(\mathbf{J}+q_hn_h\boldsymbol{U}-\mathbf{J}_h\right)\times\mathbf{B}-\nabla\mathbf{p},$$

以及冻结条件 $\partial_t\mathbf{B}=\nabla\times(\boldsymbol{U}\times\mathbf{B})$。我们注意到，在 CCS 中理想欧姆定律的有效性并不完全明显；尽管我们引入了与理想磁流体力学相关的常规近似，但是动理学高能粒子的存在使得从电子动量方程导出理想欧姆定律的常规推导变得复杂。然而，与混合 MHD 方案的当前努力一致，本方法的物理一致性在文献 [60] 的第 2.1 节中已得到验证。因此，在本文中我们将使用理想欧姆定律。最终，对于 Vlasov-MHD 的 CCS，可得以下一组方程：

$$\rho\partial_t\boldsymbol{U}+\rho(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}=\left(q_hn_h\boldsymbol{U}-\mathbf{J}_h+\mathbf{J}\right)\times\mathbf{B}-\nabla\mathbf{p} \tag{8}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0 \tag{9}$$

$$\partial_t F + \mathbf{v} \cdot \nabla F + a_h (\mathbf{v} - \boldsymbol{U}) \times \mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F = 0, \tag{10}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \mathbf{B}) \tag{11}$$

目前，Belova等人通过“混合和磁流体力学模拟代码”对这些方程进行了电阻性模拟[2,3]。在考虑电阻性和黏性效应后，最近已经在[18]中建立了该系统的弱解的存在性。

2.2 The variational framework for Vlasov-MHD

方程(8)-(11)的变分理论首次在[26]中提出，该论文结合了理想磁流体力学[25]和Vlasov动理学理论[14, 20, 33]的变分结构。近年来，Vlasov动理学的变分结构稍作修改，以适应相空间Lagrangian理论的普遍性[36]：附录中介绍了无碰撞动理学理论的变分框架。在这个框架中，用于耦合已知电流的Vlasov-MHD模型的欧拉变分原理如下：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L_p + L_{\mathrm{MHD}})\, \mathrm{d}t = 0 \tag{12}$$

其中 Eulerian 粒子的拉格朗日量和 MHD 的拉格朗日量由以下给出：

$$L_p = \int F(\mathbf{z},t) \left[(m_h \mathbf{v} + q_h \mathbf{A}(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{z},t) - \frac{m_h}{2} |\mathbf{v}|^2 - q_h \varphi(\mathbf{x},t) \right] \mathrm{d}^6 \mathbf{z} \tag{13}$$

$$L_{\mathrm{MHD}} = \frac{1}{2} \int \rho |\boldsymbol{U}|^2 \, \mathrm{d}^3 \mathbf{x} - \int \rho \mathcal{U}(\rho) \mathrm{d}^3 \mathbf{x} - \frac{1}{2\mu_0} \int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \mathrm{d}^3 \mathbf{x} \tag{14}$$

这里，符号的表示如下：$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 表示相空间中的欧拉坐标，$F(\mathbf{z},t)$ 是欧拉Vlasov密度（为了方便后面的使用，我们使用大写字母 F），$\varphi(\mathbf{x},t)$ 是以流体力学规范表示的静电势。

$$\varphi = \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{A} \tag{15}$$

在等离子流体模型[21, 27, 56]中出现。在本工作中，使用该规范与冻结的矢势相结合，以便与理想欧姆定律保持一致。与前一节一样，$\boldsymbol{U}(\mathbf{x},t)$表示欧拉整体速度，$\rho(\mathbf{x},t)$是整体流体的质量密度，$\mathcal{U}$是内部磁流体动理学能量。请注意，这里我们假设整体流动是等热的，因此内能仅仅是密度的函数，即$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho)$；这个简化假设可以通过遵循[25]中概述的相同步骤简单放松，从而允许包括熵动力学的绝热流动。根据相空间中的拉格朗日粒子路径$z(\mathbf{z}_0,t)$和磁流体整体的拉格朗日路径$\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t)$，分别有两个欧拉矢量场$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{U}$，使得’

$$\partial_t z(\mathbf{z}_0,t) = \mathcal{X}(z(\mathbf{z}_0,t),t), \tag{16}$$

$$\partial_t \boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t),t), \tag{17}$$

其中 $\mathcal{X}(\mathbf{z},t)$ 的分量为

$$\mathcal{X}(\mathbf{z},t) = (\mathbf{u}(\mathbf{z},t), \mathbf{a}(\mathbf{z},t)). \tag{18}$$

在Euler-Poincaré理论的核心是欧拉坐标与拉格朗日坐标之间的关系[25]; 关于在等离子体物理学中使用拉格朗日路径坐标的进一步细节，我们请读者参阅[37, 38]。

Euler变分结构的(12)式源于其对应的拉格朗日表述[26]，通过利用(12)式中MHD和相空间Vlasov作用的重新标记对称性。这种对称性的降维是连续理论中的标准工具，被称为Euler-Poincaré降维[25]。此过程强制执行以下变分关系。

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{U} &= \partial_t \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \boldsymbol{U} \\ \delta \mathcal{X} &= \partial_t \Xi + (\mathcal{X} \cdot \nabla_{\mathbf{z}}) \Xi - (\Xi \cdot \nabla_{\mathbf{z}}) \mathcal{X} \end{aligned} \tag{19}$$

其中$\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{z},t)$和$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},t)$是任意的欧拉向量场，使得$\delta z(\mathbf{z}_0,t) = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{z}(\mathbf{z}_0,t),t)$和$\delta \boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t),t)$。这些关系伴随着约束的变化。

$$
\begin{aligned}
\delta\rho &= -\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\xi})\\
\delta F &= -\nabla_{\mathbf{z}}\cdot(F\boldsymbol{\Xi})\\
\delta\mathbf{A} &= \boldsymbol{\xi}\times\nabla\times\mathbf{A}-\nabla(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}
\tag{20}
$$

上述表达式是通过对以下拉格朗日关系进行变分得到的。

$$
\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{q},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{q} &= \rho_0(\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}_0\\
F(z,t)\mathrm{d}^6 z &= F_0(\mathbf{z}_0)\,\mathrm{d}^6\mathbf{z}_0\\
\mathbf{A}(\boldsymbol{q},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q} &= \mathbf{A}_0(\mathbf{x}_0)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}_0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0,t)$ 和 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\mathbf{z}_0,t)$。然后，按照完全类似的方式进行，可以对式（21）进行时间导数运算，得到对流方程

$$
\begin{aligned}
\partial_t\rho &= -\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U})\\
\partial_t F &= -\nabla_{\mathbf{z}}\cdot(F\mathcal{X})\\
\partial_t\mathbf{A} &= \boldsymbol{U}\times\nabla\times\mathbf{A}-\nabla(\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}
\tag{22}
$$

将用于耦合到方程 $\boldsymbol{U}(\mathbf{x},t)$ 和 $\mathcal{X}(\mathbf{z},t)$ 的项。通过在变分原理 (12) 中使用变分 (19)，可以得到后者。我们提醒大家，这里我们按照标准的 Euler-Poincaré 程序进行操作，详细描述在文献 [25] 的第 7 节中（参见其中的方程 (7.2)）。

将动作的一阶变分设置为零，如(12)中所示，可以得到[26]

$$
\rho\left(\partial_t+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)\left(\boldsymbol{U}-q_h n_h\rho^{-1}\mathbf{A}\right)+q_h n_h\nabla\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{A}=-\nabla\mathbf{p}-\left(\mathbf{J}_h-q_h n_h\boldsymbol{U}-\mathbf{J}\right)\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\nabla\cdot\left(\mathbf{J}_h-q_h n_h\boldsymbol{U}\right),\tag{23}
$$

$$
q_h\partial_t\mathbf{A}+q_h\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{A}+\nabla\mathbf{u}\cdot(m_h\mathbf{v}+q_h\mathbf{A})+m_h\mathbf{a}-\nabla\left(m_h\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+q_h\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}-q_h\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{A}\right)=0,\tag{24}
$$

$$
\mathbf{u}=\mathbf{v},\tag{25}
$$

在这里我们引入了定义

$$
\mathbf{p}=\rho^2\mathcal{U}'(\rho),\quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\quad \mathbf{J}=\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{B}
$$

和

$$
n_h=\int F\,\mathrm{d}^3\mathbf{v},\quad \mathbf{J}_h=\frac{\delta L_p}{\delta\mathbf{A}}=q_h\int F\mathbf{u}\mathrm{d}^3\mathbf{v}.\tag{26}
$$

在这里，我们使用了泛函导数符号（见附录）。现在，将（25）代入（24）得到

$$
\mathbf{a}(\mathbf{z},t)=-a_h\left(\partial_t\mathbf{A}+\nabla(\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{A})\right)+a_h\mathbf{v}\times\mathbf{B}.
$$

总之，通过（22）中的第三个，我们得到

$$
\mathcal{X}(\mathbf{z},t)=\left(\mathbf{v},a_h(\mathbf{v}-\boldsymbol{U})\times\mathbf{B}\right).\tag{27}
$$

此外，通过使用关系$\partial_t n_h=-q_h^{-1}\nabla\cdot\mathbf{J}_h$（从(22)的第二个方程式中显式验证），以及

$$
\partial_t\left(n_h\rho^{-1}\mathbf{A}\right)=\mathbf{A}\rho^{-1}\nabla\cdot\left(n_h\boldsymbol{U}-q_h^{-1}\mathbf{J}_h\right),\tag{28}
$$

在(23)中，我们得到方程(8)。同时，将(27)插入(22)的第二个等式，并注意到$\nabla_{\mathbf{z}}\cdot\mathcal{X}=0$，可以得到方程(10)。此外，对(22)中的第三个等式取旋度，得到对流定律(11)。因此，我们得到了CCS中混合Vlasov-MHD模型的最终方程组(8)-(11) [26,42,58]。注意，通过使用Euler-Poincaré约化，我们能够将我们的新模

型表示为纯欧拉变量$(\boldsymbol{U},\mathcal{X},\rho,\mathbf{A},F)$，而不是拉格朗日对应变量$(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{z},\dot{\boldsymbol{z}},\rho_0,\mathbf{A}_0,F_0)$。具体来说，固定参数$(\rho_0,\mathbf{A}_0,F_0)$通过关系式(21)生成它们对应的欧拉对流量。

在低频极限下，在减少相空间[8, 12]上引入导心坐标或回旋中心坐标，而动理学由磁矩大小μ参数化。上述处理适应于此情况，无需实质性修改。事实上，Euler-Poincaré理论在导心近似下对Maxwell-Vlasov系统进行了明确的处理[9]，而回旋动理学的形式出现在[47]。这些情况的不同之处在于规范动量$m_h\mathbf{v}+q_h\mathbf{A}$和动能$m_h|\mathbf{v}|^2/2$的显式表示方式。这一点将是一个重要的区别，另一方面可以使用标准微分规则处理。

3 Drift-kinetic-MHD

最简单的低频近似Vlasov方程由导心理论[36]提供。在本节中，我们将介绍一种将MHD与导心轨迹的漂移动理学方程耦合在一起的新型CCS。在接下来的几节中，我们将使用简称“DK-MHD模型”来指代这个模型。我们的导演动理学方程的表述将基于一个变种的导心理论，该理论假设电场的所有分量是渐近小；对于允许$E\times B$速度与热速度相当的导心理论，请参见[34]。为了完整起见，我们将介绍两种不同的模型表述：第一种是通过对运动方程进行研究建立的，而第二种则基于变分方法。

3.1 Formulation of the new DK-MHD model

为了得到导心近似下的CCS，我们将从第一原理开始，将普通流体方程耦合到导心轨道的漂移动理学方程和Maxwell方程中。更具体地说，我们将从动理学多流体系统(1)-(6)开始，通过将Vlasov方程(3)替换为其导心近似来进行。而导心集合行为类似于磁化介质(这个概念在[39]中也进一步发展用于对回旋粘性MHD的研究)。这意味着高能电流的修正表达式$\mathbf{J}_h=\mathbf{J}_{\rm gc}+\nabla\times\mathbf{M}_{\rm gc}$由导心携带的电流和其固有磁化贡献的总和给出。后者是由粒子回旋引起的，通常表示为$-\nabla\times\int_\mu\mu\mathbf{b}F\,{\rm d}v_\|$（在标准导心符号中），尽管我们会看到这个表达式需要适当的修正。请注意，如果我们使用导心理论的变种，允许$E\times B$速度与导心集合的热速度相当，则磁化介质还会获得一个极化，因此高能电流将写为$\mathbf{J}_h=\mathbf{J}_{\rm gc}+\nabla\times\mathbf{M}_{\rm gc}+\partial_t\mathbf{P}_h$（总电荷的定义中也会出现极化修正）。虽然在第4节中，极化效应对于回旋动理学-MHD的发展将是至关重要的，但目前我们将遵循Littlejohn的原始方法[36]，即$\mathbf{P}_h=0$。我们强调，本节采用的是标准导心假设，即典型的回旋半径远小于磁场尺度长度，即$\rho_{\rm L}\ll B/|\nabla\mathbf{B}|$。

将动理学多流体系统（1）-（6）中的方程（3）和（4）修改如下：

$$\partial_t F+\nabla\cdot(F\mathbf{u}_{\rm gc})+\partial_{v_\|}\left(Fa_{\|{\rm gc}}\right)=0, \tag{29}$$

$$\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}=\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{B}-\sum_s a_s\rho_s\boldsymbol{U}_s-\mathbf{J}_{\rm gc}-\nabla\times\mathbf{M}_{\rm gc}. \tag{30}$$

在这里，$F(\mathbf{X},v_\|;\mu)$ 是导心相空间的动理学密度，$\mathbf{u}_{\rm gc}\left(\mathbf{X},v_\|;\mu\right)$ 是欧拉导心速度，使得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_{\rm gc}=v_\|$ 和 $\mathbf{u}_{\perp{\rm gc}}=-\mathbf{b}\times\mathbf{b}\times\mathbf{u}_{\rm gc}$ 分别是它的平行和垂直分量（回忆标准的导心符号 $\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$）。同时，$a_{\|{\rm gc}}\left(\mathbf{X},v_\|;\mu\right)$ 是欧拉平行加速度。具体来说，欧拉相空间矢量场的分量如下所示：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\rm gc}\left(\mathbf{X},v_\|;\mu\right)&=\frac{1}{B_\|^*}\left(v_\|\mathbf{B}^*-\mathbf{b}\times\mathbf{E}^*\right),\\ a_{\|{\rm gc}}\left(\mathbf{X},v_\|;\mu\right)&=\frac{a_h}{B_\|}\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{E}^*,\end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^*&\equiv\nabla\times\left(\mathbf{A}+a_h^{-1}v_\|\mathbf{b}\right),\\ \mathbf{E}^*&\equiv-\partial_t\left(\mathbf{A}+a_h^{-1}v_\|\mathbf{b}\right)-\nabla(\varphi+\mu B)\end{aligned} \tag{32}$$

而方程(31)中的所有场变量都在导心位置$\mathbf{X}$处评估。请注意，上述关系式是单个导心轨道附录A.3中方程(119)的拉格朗日对应关系。

我们回顾一下，所有导心量都依赖于磁矩不变量μ，并插入记号。

$$\int_\mu \mathcal{F}\left(\mathbf{X}, v_\|; \mu\right) \mathrm{d}v_\| = \iint \mathrm{d}\mu \mathrm{d}v_\| \mathcal{F}\left(\mathbf{X}, v_\|; \mu\right)$$

对于任意函数$\mathcal{F} = \mathcal{F}\left(\mathbf{X}, v_\|; \mu\right)$。利用这个记号，我们将导心密度和电流写成

$$n_h = \int_\mu F \ \mathrm{d}v_\|, \quad \mathbf{J}_{\mathrm{gc}} = q_h \int_\mu \mathbf{u}_{\mathrm{gc}} F \ \mathrm{d}v_\|,$$

导心磁化$\mathbf{M}_{\mathrm{gc}}$的显式表达将在稍后给出。为了推导混合CCS，我们按照第2.1节所示的相同步骤进行。首先，我们通过在（30）和（6）中令$\varepsilon_0 \to 0$来假设准中性。然后，我们在$s = \mathrm{e}$的流体方程（1）中取极限$m_{\mathrm{e}} \to 0$（相当于忽略电子惯性）。在这个假设下，方程（1）的求和得到（7），然后变为：

$$\rho\left(\partial_t \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}\right) = -q_h n_h \mathbf{E} + \left(\mathbf{J} - \mathbf{J}_{\mathrm{gc}} - \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{gc}}\right) \times \mathbf{B} - \nabla\left(\mathbf{p}_{\mathrm{i}} + \mathbf{p}_{\mathrm{e}}\right).$$

在这个阶段，我们使用欧姆定律 $\mathbf{E} = -\boldsymbol{U} \times \mathbf{B}$ 得到了CCS动量方程。

$$\rho\left(\partial_t \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}\right) = \left(\mathbf{J} + q_h n_h \boldsymbol{U} - \mathbf{J}_{\mathrm{gc}} - \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{gc}}\right) \times \mathbf{B} - \nabla \mathbf{p}, \tag{33}$$

与冻结条件（11）一起，理想欧姆定律导致了有效电场。

$$\mathbf{E}^* = -\boldsymbol{U} \times \mathbf{B} - \frac{v_\|}{a_h B} \mathbf{b} \times \mathbf{b} \times \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \mathbf{B}) - \mu \nabla B, \tag{34}$$

需要在（31）中进行替换，以便解出漂移-动能方程（29）中导心运动问题。最后，我们得到了导心近似情况下的CCS方程组：

$$\rho \partial_t \boldsymbol{U} + \rho(\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U} = \left(\mathbf{J} + q_h n_h \boldsymbol{U} - \mathbf{J}_{\mathrm{gc}} - \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{gc}}\right) \times \mathbf{B} - \nabla \mathbf{p} \tag{35}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0, \tag{36}$$

$$\partial_t f + \frac{1}{B_\|^*}\left(v_\| \mathbf{B}^* - \mathbf{b} \times \mathbf{E}^*\right) \cdot \nabla f + \frac{a_h}{B_\|^*}\left(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{E}^*\right) \partial_{v_\|} f = 0 \tag{37}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \mathbf{B}), \tag{38}$$

在其中我们引入了经过归一化的分布函数$f = F / B_\|^*$，这样

$$\mathbf{J}_{\mathrm{gc}} = q_h \int_\mu \left(v_\| \mathbf{B}^* - \mathbf{b} \times \mathbf{E}^*\right) f \ \mathrm{d}v_\| \tag{39}$$

我们回顾公式（34）。在这里，我们使用了Liouville定理的形式 [12]。

$$\partial_t B_\|^* + \nabla \cdot \left(B_\|^* \mathbf{u}_{\mathrm{gc}}\right) + \partial_{v_\|}\left(B_\|^* a_{\|\mathrm{gc}}\right) = 0. \tag{40}$$

注意 (37) 是一个导心轨迹集合的动理学方程：见附录 A.3 中的方程 (119)。

现在，为了完整，需要指定导心磁化$\mathbf{M}_{\mathrm{gc}}$的显式形式。在导心运动的标准理论中，如[36]中推导的那样，磁场是外部的，磁化向量由总磁化$-\int_\mu \mu \mathbf{b} F \ \mathrm{d}v_\|$给出[12]。这正是Todo等人的混合模拟中使用的表达式[50-55]。然而，当导心运动与麦克斯韦方程耦合，以实现电磁场的自洽演化时，磁化会带有一个运动偶极修正，从而确保能量和动量守恒。明确地说，导心磁化如下：

$$\mathbf{M}_{\mathrm{gc}} = -\int_\mu \left(\mu \mathbf{b} - \frac{m_h v_\|}{B} \mathbf{u}_{\mathrm{gc}}^\perp\right) F \ \mathrm{d}v_\| = -\int_\mu \left[\mu B_\|^* \mathbf{b} - \frac{m_h v_\|}{B}\left(v_\| \mathbf{B}_\perp^* - \mathbf{b} \times \mathbf{E}^*\right)\right] f \ \mathrm{d}v_\|, \tag{41}$$

其中$\mathbf{B}_\perp^* = -\left(m_h / q_h\right) v_\| \mathbf{b} \times \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{b}$。我们注意到，对于通常的磁化矢量$-\int_\mu \mu \mathbf{b} F \ \mathrm{d}v_\|$，其移动偶极修正已经被人们多年来认识到[29、43、44]，并且它的基本作用最近在文献[9]中得到了强调。

方程（35）-（38），连同关系（34），(39）和（41），构成了一个新的混合动理学-MHD的CCS，在高能粒子轨道的导心近似条件下。 请注意， 这个系统保留了不变量$\int \Phi(f) B_\|^* \ \mathrm{d}v_\| \mathrm{d}^3\mathbf{X}$的系列 （其

中$\Phi(f)$是f的任意函数；例如$\Phi(f)=f\log f$保持熵守恒），除了交叉螺旋度和磁螺旋度的标准表示式外，这可以通过直接计算进行验证。这或许并不奇怪，因为这些特征在高能粒子Vlasov动理学的情况下已经存在，如[26]所示。我们还指出方程（35）-（38）与先前出现在文献中的类似模型[41,50]有三个主要的不同之处：

- 标准导心理论：与[41,52,53]中的处理不同，有效磁场的平行分量$B_\|^*$未在任何地方近似为B，以保留能量守恒。这与[50]中的CCS一致，并且它是由Littlejohn的标准导心运动理论[36]得出的。
- $E\times B$漂移电流：由于前一项的影响，洛伦兹力项$q_hn_h\boldsymbol{U}\times\mathbf{B}$在流体方程(35)中被保留。如果我们假设$B_\|{}^*\simeq B$，那么这个洛伦兹力项将与(35)中的$E\times B$漂移电流贡献$\mathbf{J}_{E\times B}$抵消，因为[52,53]中所述。

$$(q_hn_h\boldsymbol{U}-\mathbf{J}_{E\times B})\times\mathbf{B}=-q_h\mathbf{B}\times\int_\mu\left(\boldsymbol{U}+\frac{1}{B_\|^*}\mathbf{b}\times\mathbf{E}\right)F\ \mathrm{d}v_\|=q_h\left[\int_\mu\left(1-\frac{B}{B_\|^*}\right)F\ \mathrm{d}v_\|\right]\boldsymbol{U}\times\mathbf{B}. \tag{42}$$

  例如，即使它不影响能量平衡，文献[50]中的CCS所提及的上述项也应保留，而在几十年来似乎被忽视了 [51,54,55].
- 能量守恒：与之前的方法不同，导心磁化在这里保留了运动偶极修正项$m_h\int_\mu B^{-1}v_\|\mathbf{u}_{\perp\mathrm{gc}}F\ \mathrm{d}v_\|$，以确保能量和动量平衡[9,29,43,44]。例如，可以验证在(35)中省略对应的项会导致（无符号限定的）能量变化率

$$\dot{E}=-\int\left[(\boldsymbol{U}\times\mathbf{B})\cdot\nabla\times\int_\mu B_\|^*\frac{m_hv_\|}{B}\mathbf{u}_{\perp\mathrm{gc}}f\ \mathrm{d}v_\|\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

  其中

$$E=\frac{1}{2}\int\rho|\boldsymbol{U}|^2\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}+\iint_\mu B_\|^*\left(\frac{m_h}{2}v_\|^2+\mu B\right)f\ \mathrm{d}v_\|\mathrm{d}^3\mathbf{x}+\int\rho\mathcal{U}(\rho)\mathrm{d}^3\mathbf{x}+\frac{1}{2\mu_0}\int|\mathbf{B}|^2\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}.$$

  我们注意到这个结果与[50]中的对应结果相矛盾，并且它不受(35)中的(42)项的影响，也不受$B_\|^*$被B替代的影响。

新的CCS中能量和动量守恒的事实是由其底层变分结构自然继承的，其推导过程类似于前一节介绍的论证。这是接下来讨论的主题。

3.2 The variational framework for $DK-MHD$

本节介绍了CCS (35)-(38)的变分表述。一种基本方法要求从(12)开始，在方括号中应用导心近似。例如，这可以通过采用Klimontovich方法来实现，从而可以应用于单粒子轨道的Lie摄动理论[13, 34, 35]。在最低阶下，Lie摄动技术的替代方法可以在LittleJohn的变分方法[36]或其在[57]中新建立的变体中找到。为了避免不必要地陷入导心近似的数学细节中，我们在这里简单地展示了如何从以下类型的Hamilton原理(12)中自然地得到方程(35)-(38)，其中欧拉粒子拉格朗日量现在被给出为

$$L_p=\iint_\mu F(\mathbf{z},t)\left\{\left[m_hv_\|\mathbf{b}(\mathbf{X},t)+q_h\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\right]\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t)-\frac{m_h}{2}v_\|^2-\mu B(\mathbf{X},t)-q_h\varphi(\mathbf{X},t)\right\}\mathrm{d}^4\mathbf{z}. \tag{43}$$

在上面的拉格朗日量中假设了$E\times B$速度远小于热速度。如果我们允许这两个速度相比较，只需从导心动能$m_hv_\|^2/2+\mu B$（例如，参见文献[12]中的方程(3.49)）中减去$E\times B$能量项$m_hB^{-2}|\mathbf{E}\times\mathbf{b}|^2/2$，从而产生额外的磁化项和极化效应[32]。在(43)中，我们将导心相空间坐标表示为

$$\mathbf{z}=\left(\mathbf{X},v_\|\right)$$

并且我们也假设了流体力学规范（15）。此外，$\mathbf{u}_{\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t)$ 和 $a_{\|\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t)$ 现在被结合成为了欧拉（相空间）导心矢量场。

$$\mathcal{X}_{\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t)=\left(\mathbf{u}_{\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t),a_{\|\mathrm{gc}}(\mathbf{z},t)\right)$$

与 (18) 相似，根据方程（16），我们有$\dot{z}(\mathbf{z}_0,t)=\mathcal{X}_{\rm gc}(z(\mathbf{z}_0,t),t)$，　其中　$z(\mathbf{z}_0,t)=\left(\mathcal{X}(\mathbf{z}_0,t),\mathcal{V}_\|(\mathbf{z}_0,t)\right)$ 表示相空间中的拉格朗日粒子路径，$\mathbf{z}_0=\left(\mathbf{X}_0,v_{\|0}\right)$ 是粒子相空间标签。注意，拉格朗日路径都由磁矩不变量 μ 参数化，因此应该作为额外的标签出现（尽管在当前符号表示中已被省略）。然而，这并不会在处理中产生实质性的困难或修改。实际上，在这一点上，问题的设定与第2节完全相似，包括变分关系（19）和（20）以及对流方程（22）。在（19）和（20）的第二个关系中现在涉及到一个导心相空间上的欧拉位移矢量场 $\Xi_{\rm gc}$，所以 $\delta\mathcal{X}_{\rm gc}=\partial_t\Xi_{\rm gc}+(\mathcal{X}_{\mathbf{gc}}\cdot\nabla_{\mathbf{z}})\,\Xi_{\rm gc}-(\Xi_{\rm gc}\cdot\nabla_{\mathbf{z}})\,\mathcal{X}_{\mathbf{gc}}$ 和 $\delta F=-\nabla_{\mathbf{z}}\cdot(F\Xi_{\rm gc})$。因此，磁流体力学方程（23）现在包含了高能电流。

$$\mathbf{J}_h=\frac{\delta L_p}{\delta\mathbf{A}}+\nabla\times\frac{\delta L_p}{\delta\mathbf{B}}=q_h\int_\mu F\mathbf{u}_{\rm gc}\mathrm{d}v_\|+\nabla\times\int_\mu F\left(m_hv_\|\frac{\partial b_i}{\partial\mathbf{B}}u^i_{\rm gc}-\mu\frac{\partial B}{\partial\mathbf{B}}\right)\mathrm{d}v_\|$$

类比于（26）中的第二个。上述第一个等式来自于导心拉格朗日量（43）对于矢势 $\mathbf{A}$ 及其旋度的依赖关系。正如在[9]中所注意到的那样，这种依赖关系导致了导心磁化强度 $\mathbf{M}_{\rm gc}=\delta L_p/\delta\mathbf{B}$ 中的移动偶极修正。然后，链式法则计算表明，

$$\mathbf{J}_h=\mathbf{J}_{\rm gc}+\nabla\times\mathbf{M}_{\rm gc} \tag{44}$$

使用(39)和(41)中的定义。

对于导心动理学，方程（24）-（25）被替换为（见附录）。

$$\begin{aligned}m_hv_\|\partial_t\mathbf{b}+q_h\partial_t\mathbf{A}+\mathbf{u}_{\rm gc}\cdot\nabla\left(m_hv_\|\mathbf{b}+q_h\mathbf{A}\right)+a_{\|\rm gc}\mathbf{b}+\nabla\mathbf{u}_{\rm gc}\cdot\left(m_hv_\|\mathbf{b}+q_h\mathbf{A}\right)\\-\nabla\left(m_hv_\|\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_{\rm gc}+q_h\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_{\rm gc}-q_h\mu B-q_h\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{A}\right)=0\end{aligned}$$

以及 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_{\rm gc}=v_\|$。回忆第（22）式, 得到了:

$$m_hv_\|\partial_t\mathbf{b}+q_h\boldsymbol{U}\times\mathbf{B}+a_{\|\rm gc}\mathbf{b}-\mathbf{u}_{\rm gc}\times\left(q_h\mathbf{B}+m_hv_\|\nabla\times\mathbf{b}\right)+q_h\mu\nabla B=0$$

和由于

$$\partial_t\mathbf{b}=-\frac{1}{B}\mathbf{b}\times\mathbf{b}\times\nabla\times\partial_t\mathbf{A}=-\frac{1}{B}\mathbf{b}\times\mathbf{b}\times\nabla\times(\boldsymbol{U}\times\mathbf{B}),$$

回到通常的导心方程的欧拉形式的方程。

$$q_h\left(\mathbf{E}^*+\mathbf{u}_{\rm gc}\times\mathbf{B}^*\right)=m_ha_{\|\rm gc}\mathbf{b},$$

使用定义（32）和关系（34）。反过来，这将返回相空间向量场$\mathcal{X}_{\rm gc}=\left(\mathbf{u}_{\rm gc},a_{\|\rm gc}\right)$，如式（31）中所示，从而产生相空间密度$F(\mathbf{z},t;\mu)$的漂移动理学方程（29），如式（22）中的第二个式子（将$\mathcal{X}$替换为$\mathcal{X}_{\rm gc}$ ）。然后，方程（28）仍然成立，流体方程（23）与（44）一起返回（35）。为了总结当前的公式，通过对（22）中的第三个方程取旋度得到（38），而在（22）的第二个方程中定义$f=F/B^*_\|$得到（37）和（39）。

尽管漂移动理学方程在混合动理学-磁流体力学模型中被广泛使用，但当漂移近似不成立时，回旋动理学理论更加适用。例如，[1]中的CCS利用回旋动理学方程来构建回旋动理学-磁流体力学混合理论。接下来的章节将专门探讨这个特定的主题。

4 Gyrokinetic-MHD

4.1 Overview of hybrid gyrokinetic-MHD modeling

更精密的低频近似可以由回旋中心理论提供，该理论与导心理论类似，是在强磁等离子体中粒子动理学的有效模型。回旋中心理论与导心理论的区别在于这两种理论对动理学电磁场所做的不同假设。总体而言，导心理论做出以下假设。

(GCA) 平行电场的量级为 $\rho_c/L\ll 1$，其中 ρ_c 是回旋半径，$L=B/|\nabla B|$ 是磁尺度。

(GCB) 电场和磁场相对于回转半径和回转频率而言，在空间和时间上变化缓慢。

在本工作中先前使用的导心理论版本中，还假设垂直电场的尺度与ρ_c/L成比例。相反，回转中心理论做出了以下替代的假设。

(GYA)电场和磁场由$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$和$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_{\rm eq}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$给出，其中$\tilde{\mathbf{E}}$和$\tilde{\mathbf{B}}$量级为$\rho_c/L_{\rm eq} \ll 1$，$L_{\rm eq} = B_{\rm eq}/|\nabla B_{\rm eq}|$

(GYB)$\tilde{\mathbf{E}}$和$\tilde{\mathbf{B}}$的平行尺度和时间尺度与ρ_c和回转频率相比都较大，而垂直尺度与ρ_c相当。

对于回旋中心理论来说，对于垂直尺度上的涨落电磁场做出的松弛假设，是其理论的额外复杂性来源。将回旋中心分布与电磁场以及其他等离子体种类耦合的任何模型都被称为回旋动理学模型。详细了解粒子回旋中心和导心的区别，请参阅[8]。

在本节中，我们将讨论将回旋中心的高能动理学系综耦合到MHD流体的混合模型，即混合回旋动理学-MHD模型。和之前讨论的漂移动理学-MHD模型一样，这些模型可以被归类为电流耦合或压力耦合。保持本文的总体主题，我们将重点讨论电流耦合方法。正如在[41]中解释的那样，GK-MHD模型可被视为粒子闭合理论，能将重要的非线性波-粒子效应和动理学湍流效应融入一个本质上基于流体的模型中。

在[42]中给出了电流耦合GK-MHD模型推导背后的简短解释。为了方便读者，我们现在将给出详细的推导。我们从（1）-（6）开始，但将Vlasov方程（3）替换为其回旋中心近似形式。

$$\partial_t F + \nabla\cdot(F\mathbf{u}_{\rm gy}) + \partial_{v_\parallel}\left(F a_{\parallel \rm gy}\right) = 0, \tag{45}$$

其中，$F = F\left(\mathbf{X}, v_\parallel\right)$是回旋中心分布函数，$\mathbf{u}_{\rm gy}$是回旋中心漂移速度，$a_{\parallel \rm gy}$是回旋中心平行加速度。一旦选择了流体状态方程（请回忆，在本工作中我们采用定压方程），回旋中心运动方程被确定，并且高能电荷和电流密度与回旋中心分布函数相关，这个系统在所知的意义上是闭合的，也就是说，有与未知数相同数量的方程，即$(\boldsymbol{U},\rho,\mathbf{B},F)$。

与之前的章节一样，为了从多流体混合系统过渡到电流耦合的GK-MHD模型，我们应用了磁流体力学（MHD）中的常规假设。根据安培定律，我们忽略了位移电流，并使用准中性代替了高斯定律。然后，将流体动量方程的总和用于得到一个单一的流体动量方程，同时假设电子动量方程的主导平衡由理想欧姆定律给出。综合考虑这些“MHD假设”，可以得到电流耦合的GK-MHD模型。

$$\rho\left(\partial_t \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}\right) = -q_h n_h \mathbf{E} + (\mathbf{J}-\mathbf{J}_h)\times\mathbf{B} - \nabla\mathbf{p} \tag{46}$$

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U}) = 0 \tag{47}$$

$$\partial_t F + \nabla\cdot(F\mathbf{u}_{\rm gy}) + \partial_{v_\parallel}\left(F a_{\parallel \rm gy}\right) = 0 \tag{48}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \tag{49}$$

$$\partial_t\mathbf{B} = -\nabla\times\mathbf{E} \tag{50}$$

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{U}\times\mathbf{B} = 0 \tag{51}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{52}$$

请注意，法拉第定律和欧姆定律可以结合使用以消除该等式系统中的电场$\mathbf{E}$。与多流体回旋动理学混合模型类似，一旦选择了单流体状态方程，回旋中心运动方程也就给出了，同时，高能电荷和电流密度与回旋中心分布函数相关，这种混合回旋动理学-磁流体力学系统方程数与未知数的数量相同。

4.2 The current-coupling model of Belova, Denton, and Chan

在[1]中报告了最完整的非线性电流耦合GK-MHD建模工作。为了简洁起见，我们将在该论文中提到的模型称为BDC模型。在BDC模型中，高能电荷和电流密度被表示为

$$q_h n_h(\mathbf{x}) = q_h \iint_\mu \langle\delta(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\rangle F \ \mathrm{d}^4\mathbf{z}, \tag{53}$$

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) = q_h \iint_\mu \langle(\mathbf{u}_{\rm gy} + \omega_c\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\rm eq})\,\delta(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\rangle F \ \mathrm{d}^4\mathbf{z}, \tag{54}$$

其中$\mathbf{z} = \left(\mathbf{X}, v_\parallel\right)$表示回旋中心相空间坐标，$\mathrm{d}^4\mathbf{z} = \mathrm{d}^3\mathbf{X}\mathrm{d}v_\parallel$，以及

$$\boldsymbol{\rho} = q_h^{-1}\sqrt{2\mu m_h B_{\text{eq}}^{-1}(\mathbf{X})}\mathbf{b}_{\text{eq}}(\mathbf{X}) \times (\cos\theta\mathbf{e}_1(\mathbf{X}) - \sin\theta\mathbf{e}_2(\mathbf{X})), \tag{55}$$

$$\omega_c = q_h B_{\text{eq}}(\mathbf{X}) m_h^{-1}, \tag{56}$$

$$\langle\cdot\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdot \mathrm{d}\theta, \tag{57}$$

由$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$构成的正交单位矢量，与$\mathbf{B}_{\text{eq}}$垂直的平面上。在这里，$\boldsymbol{\rho}$是主要回旋半径矢量，ω_c是回旋频率，θ是回旋相位。注意到$\partial_\theta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\text{eq}}$，其中$\mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b}_{\text{eq}}(\mathbf{X})$，除非另有规定。这些表达式是用回旋中心变量近似表示熟知的粒子空间电流。对于回旋中心动理学，BDC模型使用受[7]中方程启发但并非等同的回旋中心运动方程。具体来说，在BDC模型中，

$$a_{\|\text{gy}} = \frac{q_h}{m_h}\frac{\mathbf{B}^{**}}{B_\|^{**}}\cdot\mathbf{E}^{**}, \tag{58}$$

$$\mathbf{u}_{\text{gy}} = \frac{1}{B_\|^{**}}\left(\mathbf{B}^{**}v_\| + \mathbf{E}^{**}\times\mathbf{b}_{\text{eq}}\right), \tag{59}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{**} &= \mathbf{B}_{\text{eq}} + \langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\rangle, \\ \mathbf{E}^{**} &= \langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\rangle - q_h^{-1}\nabla([\mu+\delta\mu]B_{\text{eq}}) \end{aligned} \tag{60}$$

$$B_\|^{**} = \mathbf{b}_{\text{eq}}\cdot\mathbf{B}^{**}$$

在这里，$\delta\mu$ 与在$\mathbf{X}$处的一个回旋中心的回旋轨道通过的磁通量的波动成比例关系。特别地，

$$\delta\mu = -q_h B_{\text{eq}}^{-1}\left\langle\omega_c\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\text{eq}}\cdot\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\right\rangle = \frac{q_h^2}{2\pi m_h}\int_{D(\mathbf{X})}\tilde{\mathbf{B}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{61}$$

其中 $D(\mathbf{X})$ 是当 θ 从 0 增加到 2π 时由 $\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}$ 扫过的圆面，而 $\mathrm{d}S = \mathbf{b}_{\text{eq}}(\mathbf{X})\mathrm{d}S$。最后，BDC 模型采用绝热状态方程，我们在本讨论中将其替换为有定压状态方程 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\rho)$，其中 $p(\rho) = \rho^2\mathcal{U}'(\rho)$，$\mathcal{U}$ 是单流体内能密度。

注意，看起来[1]的作者不知道(61)中的第二个等式，该等式是根据Stokes定理推导出来的。这个恒等式证明了在BDC模型中，即使背景磁场是非均匀的，回旋中心运动方程也总是可以在不显式出现扰动矢量势$\tilde{\mathbf{A}}$的情况下表达。尽管这与[1]中的某个声明相矛盾，但它也使得BDC模型在理论上更加坚实。

在构造这个模型的过程中，[1]的作者特别关注了模型的守恒性质。他们声称BDC模型具有精确的能量和动量守恒定律。然而，[1]中的讨论并未说明这些守恒定律仅在背景均匀时有效，还是在更一般的背景场下也有效。为了澄清这个问题，我们检验了一些希望BDC模型满足的守恒定律。

- 能量守恒：假设周期性边界条件，系统能量的时间导数

$$E = \iint_\mu\left(\frac{1}{2}m_h v_\|^2 + [\mu+\delta\mu]B_{\text{eq}}\right)F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z} + \int\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{U}|^2 + \rho\mathcal{U}(\rho) + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x}, \tag{62}$$

  实际上，无论背景磁场的形式如何，其值都是零。
- 动量不守恒：总动量

$$\mathbf{N} = \iint_\mu m_h v_\|\mathbf{b}_{\mathbf{eq}}F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z} + \int\rho\boldsymbol{U}\mathrm{d}^3\mathbf{x}, \tag{63}$$

  满足

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = \iint_\mu \Big(& m_h v_\|\mathbf{u}_{\text{gy}}\cdot\nabla\mathbf{b}_{\text{eq}} - q_h\mathbf{u}_{\text{gy}}\times\langle\Delta\mathbf{B}\rangle - q_h\left\langle\omega_c\left(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\text{eq}}\right)\times\Delta\mathbf{B}\right\rangle \\ & -\nabla([\mu+\delta\mu]B_{\text{eq}}) - q_h\left\langle\omega_c\left(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\text{eq}}\right)\times\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\right\rangle\Big)F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z}, \end{aligned}$$

其中，$\Delta\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\rm eq}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})-\mathbf{B}_{\rm eq}(\mathbf{X})$，这个式子只有在背景磁场是均匀的情况下（即空间中恒定的）才会消失。

- 相空间体积不守恒：相空间体积增加的速率由下式给出

$$\begin{aligned}\partial_t B_\parallel^{**}+\nabla\cdot\left(B_\parallel^{**}\mathbf{u}_{\rm gy}\right)+\partial_{v_\parallel}\left(B_\parallel^{**}a_{\parallel\rm gy}\right)=&\mathbf{b}_{\rm eq}\cdot[\nabla\times\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\rangle-\langle(\nabla\times\tilde{\mathbf{E}})(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\rangle]\\&+v_\parallel\nabla\cdot\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})\rangle-\mathbf{E}^{**}\cdot\nabla\times\mathbf{b}_{\rm eq},\end{aligned}\tag{64}$$

  当背景场是均匀的时候，这也只有在背景场时才会消失。
- 热电荷不守恒：热电荷密度满足

$$\partial_t q_h n_h+\nabla\cdot\mathbf{J}_h=\iint_\mu q_h\langle(\mathbf{u}_{\rm gy}+\omega_c\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\rm eq})\cdot\nabla\boldsymbol{\rho}\cdot(\nabla\delta)(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\rangle F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z},\tag{65}$$

  表明在BDS模型中，只有当背景磁场是匀强时，高能电荷的守恒才得以实现。请注意，方程的右侧不是一个散度，这意味着电荷守恒在局部和整体上都被破坏。

总之，以上表达式表明，在背景磁场是均匀的情况下，BDC模型享有许多精确的守恒定律，但是一旦引入背景的不均匀性，除了能量守恒定律之外，其他所有定律都被破坏。

4.3 Formulation of the new GK-MHD model

在一个非均匀背景下被BDC模型打破的守恒定律是任何合理的混合模型都应该满足的明显物理约束。此外，在磁聚变装置中，背景磁场的非均匀性对于包含高能粒子效应的任何实际模型都至关重要；非均匀性负责产生许多重要的波粒共振效应。因此，我们不管背景磁场的形式如何，都不得不制定一个新的GK-MHD模型，该模型具有均匀背景BDC模型的良好守恒性质。在本节中，我们将尽量少地修改BDC模型，来制定这样的模型。

如在第4.1节中所讨论的，我们可以通过给出高能电荷和电流密度的表达式以及回旋中心动理学方程来确定一个GK-MHD模型。在我们的新GK-MHD模型中，我们将表达电荷和电流密度为

$$q_h n_h(\mathbf{x})=q_h\iint_\mu\langle\delta(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\rangle F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z}\tag{66}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_h(\mathbf{x})=&\iint_\mu q_h\langle(\mathbf{u}_{\rm gy}+\omega_c\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{b}_{\rm eq})\,\delta(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\rangle F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z}\\&+\iint_\mu q_h\left\langle\langle\mathbf{u}_{\rm gy}\cdot(\nabla_{\mathbf{X}}+\nabla_{\mathbf{x}})\,[\delta(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}-\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}]\right\rangle F\ \mathrm{d}^4\mathbf{z}\end{aligned}\tag{67}$$

以及回旋中心运动方程为

$$a_{\parallel\rm gy}=\frac{q_h}{m_h}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\cdot\mathbf{E}^*,\tag{68}$$

$$\mathbf{u}_{\rm gy}=\frac{v_\parallel\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}+\frac{\mathbf{E}^*\times\mathbf{b}_{\rm eq}}{B_\parallel^*},\tag{69}$$

其中

$$\mathbf{B}^*=\mathbf{B}(\mathbf{X})+m_h q_h^{-1}v_\parallel\nabla\times\mathbf{b}_{\rm eq}+\nabla\times\langle\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{\rho}\rangle,\tag{70}$$

$$\mathbf{E}^*=\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X})-q_h^{-1}\nabla([\mu+\delta\mu]B_{\rm eq})+\langle\langle(\nabla\times\tilde{\mathbf{E}})(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{\rho}\rangle\rangle+\nabla\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{\rho}\rangle\rangle.\tag{71}$$

请注意，由于 $\mathbf{B}^*$ 中的 $\nabla\times\mathbf{b}_{\rm eq}$ 项，方程 (69) 右侧的第一项捕捉到了曲率漂移效应，与 BDC 模型不同。这些表达式中出现的双角括号定义为：

$$\langle\langle Q\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}Q\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\langle Q\rangle\mathrm{d}\lambda,\tag{72}$$

先前在文献[10,46]中进行了介绍，并在文献[46]中进行了数值实现（[10]没有使用双括号符号，但引入了相同的参数λ）。注意，变量λ可以解释为旋转粒子回转半径矢量所扫过的圆盘上的归一化径向坐标。因此，定义我们模型的方程为(46)-(52)，其中n_h，$\mathbf{J}_h$，$a_{\|\mathrm{gy}}$，和$\mathbf{u}_{\mathrm{gy}}$由(66)-(69)给出。

当背景磁场是均匀的时候,这个模型与BDC模型一致是很容易验证的。然而，由于修改后的回旋中心动力学和高能电流密度，不论背景磁场的形式如何，这个模型具有以下的守恒律。

- 能量守恒：具体假设 MHD 流体有正压状态方程，则系统能量 (62) 守恒。请注意，该能量与 BDC 模型中的能量相同。
- 动量守恒：当背景磁场轴对称或平移对称时，相应的总动量恰好守恒。例如，假设背景场在绕 z 轴旋转时对称，则总环形动量精确守恒。

$$\begin{aligned} N_\phi = &\iint_\mu m_h v_\| \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} \cdot \mathbf{e}_z \times \mathbf{X} F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} + \int \rho \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} \mathrm{d}^3\mathbf{x} \\ &+ \iint_\mu q_h \langle\langle [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{B}_{\mathrm{eq}}(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho})] \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{X}] \rangle\rangle \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} \\ &+ \iint_\mu q_h \left\langle\left\langle \lambda \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\rho\rho} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho}) - \lambda |\rho|^2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho}) \right\rangle\right\rangle F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} \end{aligned} \tag{73}$$

  如果背景在任意空间平移下不变（这意味着$\mathbf{B}_{\mathrm{eq}}$是均匀的），那么方程(63)中的动量是守恒的。如果背景具有轴对称但不具有平移不变性，则总动量不守恒；产生背景磁场的机械结构（例如线圈）在产生零垂直力矩的同时对等离子体施加了力。
- 相空间体积守恒：相空间体积精确保留，因此 (64) 变为

$$\partial_t B_\|^* + \nabla \cdot \left(B_\|^* \mathbf{u}_{\mathrm{gy}} \right) + \partial_{v_\|} \left(B_\|{}^* a_{\|\mathrm{gy}} \right) = 0, \tag{74}$$

  其表示Liouville定理的时变形式，并且是方程(40)的回旋中心对应。
- 热电荷守恒：热电荷局部守恒，(65) 变为

$$q_h \partial_t n_h + \nabla \cdot \mathbf{J}_h = 0 \tag{75}$$

此外，我们注意到这个新模型对于交叉螺旋度、磁螺旋度以及不变量族$\int \Phi\left(F/B_\|{}^*\right) B_\|{}^* \, \mathrm{d}v_\| \mathrm{d}^3\mathbf{X}$（包括熵）的标准表达式守恒，这可以通过与[26]相似的直接计算来验证。

这个新的GK-MHD模型可以看作是BDC模型的修正版。高能电流密度和回旋中心的运动方程都包含了与背景磁场梯度成正比的修正项。这些修正项确保了模型遵守了原始BDC模型破坏的守恒定律。同时，它们还考虑了曲率漂移的影响。然而，目前还完全不清楚我们如何选择修正项，或者它们是否具有任何根本意义。因此，在接下来的两节中，我们将从第一原理出发推导出我们的新GK-MHD模型。首先，我们将简要讨论电磁场中回旋中心运动的一个技术但重要的方面。然后，我们将使用本文已经两次采用的混合变分法来系统地推导出我们的新GK-MHD模型。

4.4 Gauge invariance in single-particle gyrocenter theory

由于我们的目标是从一个变分原理派生出我们的新GK-MHD模型，所以我们必须考虑与电磁场有关的变分原理的基本事实，以及文献中现有的关于单回旋中心Lagrangian的基本事实。

第一个事实[5]：在规范变换下对称的变分原理与粒子空间电荷守恒是一致的；不具有这种对称性的变分原理与电荷守恒是不一致的。

第二个事实：尽管形式上所有阶数的回旋中心Lagrangian必须是规范不变的，但文献中许多截断的电磁单回旋中心Lagrangian在背景磁非均匀性存在时并不是规范不变的。（对于文献中哪些截断的单回旋中心Lagrangian是规范不变的，目前正在进行深入研究。）

综上所述，这两个事实意味着在我们可以导出一个粒子空间电荷守恒的变分GK-MHD模型之前，我们必须确定一个新的截断的规范不变的单回旋中心Lagrangian。本节的目的是推导出这样的单回旋中心Lagrangian。有关个体相空间轨道的变分原理的更多细节，请参见附录。

如在[7]中的解释，时变电磁场中回旋中心的运动方程应该被表示为与单个回旋中心拉格朗日量相联系的Euler–Lagrange方程。在BDC模型中与回旋中心的运动方程最接近的是单个回旋中心拉格朗日量。

$$
\begin{aligned}
\ell_0 = &\left(q_h \mathbf{A}_{\text{eq}} + m_h v_\parallel \mathbf{b}_{\text{eq}}\right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + q_h \langle \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) \rangle \cdot \dot{\mathbf{X}} \\
&- \left(\frac{1}{2} m_h v_\parallel^2 + \mu B_{\text{eq}} + q_h \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) \rangle - q_h \left\langle \omega_c \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{b}_{\text{eq}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) \right\rangle \right)
\end{aligned}
$$

这与[7]中方程（10）给出的拉格朗日有一处不同。尽管此表达式中的ρ通常通过背景磁场（根据方程（55））依赖于$\mathbf{X}$，但[7]中的ρ被假设为与$\mathbf{X}$无关。请注意，当背景磁场是均匀的，使得$\mathbf{b}_{\mathbf{eq}}$和ρ不依赖于$\mathbf{X}$时，此拉格朗日的Euler–Lagrange方程会得到BDC模型中$a_\parallel gy$和$u_g y$的表达式，即方程（58）和（59）。然而，当背景磁场不均匀时，这些Euler–Lagrange方程与BDC模型的回旋中心动理学方程不匹配。

现在考虑在规范变换下的 ℓ_0 的行为。如果用 $\tilde{\mathbf{A}}$ 替换为 $\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla\psi$，其中 ψ 是一个与时间无关的标量，则有

$$
\ell_0' = \ell_0 + \frac{q_h}{c} \langle (\nabla\psi)(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) \rangle \cdot \dot{\mathbf{X}} \tag{76}
$$

当背景磁场梯度为零时，$(\nabla\psi)(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) = \nabla(\psi(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}))$，并且很容易看出$\ell_0'$与$\ell_0$之间的差异是一个全时间导数。这意味着在背景磁场均匀时，ℓ_0是规范不变的。然而，当背景场梯度不为零时，$(\nabla\psi)(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) \neq \nabla(\psi(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})) = ([1+\nabla\boldsymbol{\rho}]\cdot\nabla\psi)\ (\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho})$，而$\ell_0'$和$\ell_0$之间的差异不是一个全时间导数。这表明，与$\ell_0$相关的Euler–Lagrange方程仅在背景场均匀时是规范不变的。出于类似的原因，文献中的许多其他单回旋中心拉格朗日量也存在这个缺陷。

为了解决这个技术问题，我们将修改拉格朗日函数ℓ_0如下。首先，我们使用简单的恒等式$Q(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}) = Q(\mathbf{X}) + \int_0^1 \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla Q(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}\lambda$将$\ell_0$重新写成

$$
\begin{aligned}
\ell_0 = &\left(q_h \mathbf{A}_{\text{eq}} + m_h v_\parallel \mathbf{b}_{\text{eq}}\right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + q_h \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\
&- \left(\frac{1}{2} m_h v_\parallel^2 + [\mu + \delta\mu] B_{\text{eq}} + q_h \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) \right) \\
&+ q_h \langle\langle \boldsymbol{\rho} \cdot (\nabla\tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \rangle\rangle \\
&- q_h \langle\langle \boldsymbol{\rho} \cdot (\nabla\tilde{\varphi})(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \rangle\rangle
\end{aligned} \tag{77}
$$

接下来，我们从ℓ_0中减去一个总时间导数，

$$
\ell_0 \to \ell_0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_h \langle\langle \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle \tag{78}
$$

在这里我们回顾一下定义（72）。请注意，在这个阶段，单回旋中心的拉格朗日函数仍然等价于ℓ_0。最后，我们用其近似形式替换总时间导数。

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_h \langle\langle \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle \approx q_h \langle\langle \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} + \partial_t \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle \tag{79}
$$

被忽略的项与背景磁场梯度成正比。得到的单回旋中心拉格朗日量，取代ℓ_0，可以表示为

$$
\begin{aligned}
\ell_{\text{gy}} \equiv &\left(q_h \mathbf{A}_{\text{eq}} + m_h v_\parallel \mathbf{b}_{\text{eq}}\right) \cdot \dot{\mathbf{X}} - \left(\frac{1}{2} m_h v_\parallel^2 + [\mu + \delta\mu] B_{\text{eq}} \right) \\
&+ q_h \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} - q_h \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) + q_h \langle\langle [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho}) + \dot{\mathbf{X}} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}+\lambda\boldsymbol{\rho})] \cdot \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle
\end{aligned} \tag{80}
$$

从回旋中心渐近展开的角度来看（参见[7]），ℓ_{gy}和 ℓ_0 一样准确。然而，当势函数经过一个规范变换时， ℓ_{gy} 只会增加一个总时间导数。因此，与 ℓ_0 关联的Euler–Lagrange方程与规范无关。在第4.5节中，我们将使用 ℓ_{gy} 来构建粒子对GK-MHD系统的拉格朗日项。

本文中所使用的方法可以“修复”现有的回旋中心拉格朗日函数，理论上可以应用于文献中的任何回旋中心拉格朗日函数。然而，修复高阶回旋中心拉格朗日函数比本节中所使用的方法更为复杂。在未来的出版物中，我们将提供一种更强大和系统的方法来推导出所有阶数的规范不变的回旋中心拉格朗日函数，并阐明其物理基础。这种系统理论的初步结果已在文献[10]中报道。

4.5 The variational framework for gyrokinetic-MHD

我们将现在提出我们新的GK-MHD模型的基于一级原理的变分推导。为了构造一个包含高能粒子和MHD流体的混合系统的Lagrangian，我们应该将两个子系统对应的Lagrangian相加。第一个子系统是回旋中心集合，其Lagrangian由下式给出：

$$
\begin{aligned}
L_p = &\iint_\mu \left[\left(q_h \mathbf{A}_{\rm eq} + m_h v_\parallel \mathbf{b}_{\rm eq} \right) \cdot \mathbf{u}_{\rm gy}(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} m_h v_\parallel^2 + [\mu + \delta\mu] B_{\rm eq} \right] F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} \\
&+ \iint_\mu q_h \left(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}_{\rm gy}(\mathbf{z}) - \langle\langle \mathbf{u}_{\rm gy}(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\rho} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X} + \lambda\boldsymbol{\rho}) \rangle\rangle \right) F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} \\
&+ \iint_\mu q_h \left(\langle\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X} + \lambda\boldsymbol{\rho}) \rangle\rangle - \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) \right) F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z}
\end{aligned} \tag{81}
$$

其中被积函数是Eulerian (Euler–Poincaré) 版本的$\ell_{\rm gy}$（见方程（80）），可以通过用$\mathbf{u}_{\rm gy}(\mathbf{z})$代替$\dot{\mathbf{X}}$来书写（见[47]）。这里$\mathcal{X}_{\rm gy} = \left(\mathbf{u}_{\rm gy}, a_{\parallel \rm gy} \right)$是欧拉相空间流体速度。注意，这个表达式与附录一致，附录描述了单粒子拉格朗日量（在本例中为$\ell_{\rm gy}$）如何用于构建无碰撞粒子分布的拉格朗日量。第二个子系统是等熵磁流体，其拉格朗日量由（14）给出，其中我们回忆$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\rm eq} + \tilde{\mathbf{A}}$，并且我们注意到若$\mathcal{U}$同时取决于密度和熵，则不会有本质困难。因此，混合系统拉格朗日量是$L = L_p + L_{\rm MHD}$，混合变分原理可写成（12），其中$S = \int L \, \mathrm{d}t$是混合作用量，符号$\delta$的确切含义将在下文描述。

混合作用S可以被视为$(z, \boldsymbol{q})$空间中路径的泛函，其中$\boldsymbol{z}(\mathbf{z}_0) = \left(\boldsymbol{X}(\mathbf{z}_0), \mathcal{V}_\parallel(\mathbf{z}_0) \right)$是回旋中心相空间流体构型映射，$\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0)$是MHD流体构型映射。为了理解这一点，首先注意到高能粒子和质量守恒意味着回旋中心分布函数和MHD质量密度与它们的初始值相关，根据（21）中的前两个式子，即

$$
\begin{aligned}
F\left(z(\mathbf{z}_0) \right) \mathrm{d}^4 z &= F_0(\mathbf{z}_0) \, \mathrm{d}^4\mathbf{z}_0, \\
\rho\left(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0) \right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{q} &= \rho_0(\mathbf{x}_0) \, \mathrm{d}^3\mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{82}
$$

接下来，请注意，根据流体配置映射 $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{q})$，欧拉流体速度 $(\mathcal{X}_{\rm gy}, \boldsymbol{U})$ 以流体配置映射为基准给出

$$
\mathcal{X}_{\rm gy}\left(\boldsymbol{z}(\mathbf{z}_0) \right) = \dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}_0) \tag{83}
$$

而方程（17），即$\mathbf{u}_{\rm gy}\left(z(\mathbf{z}_0) \right) = \dot{\boldsymbol{X}}(\mathbf{z}_0), a_{\parallel \rm gy}\left(z(\mathbf{z}_0) \right) = \dot{\mathcal{V}}_\parallel(\mathbf{z}_0)$，在这里我们通过简化记号来抑制时间依赖性。注意方程（83）只是方程（16）的回旋中心版本。刚才给出的关系足以将$F, \rho, \mathcal{X}_{\rm gy}, \boldsymbol{U}$表达为映射$\boldsymbol{z}$和$\boldsymbol{q}$的函数。为了将$\mathbf{A}$和$\varphi$表示为配置映射的函数，我们必须引用理想欧姆定律（51）。为了确保总磁场被扩散流体带动（这是欧姆定律的环绕涡度所隐含的性质），我们将如下地冻结总矢势：

$$
\left(\tilde{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0) \right) + \mathbf{A}_{\rm eq}\left(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0) \right) \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{q} = \left(\tilde{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}_{\rm eq}(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_0 \tag{84}
$$

然后，为了确保完全满足欧姆定律，我们将假设，与之前一样，φ用流体力学规范（15）表示如下：

$$
\tilde{\varphi} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{U} = \left(\mathbf{A}_{\rm eq} + \tilde{\mathbf{A}} \right) \cdot \boldsymbol{U} \tag{85}
$$

请注意方程（84）意味着总矢量势被扩散项输运，而其波动部分不被输运。还请注意（84）和（85）给出了$\tilde{\mathbf{A}}$和$\tilde{\varphi}$与流体配置映射$\boldsymbol{q}$之间的关系。最后，公式$\tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{A}} - \nabla\tilde{\varphi}$和$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$意味着电场和磁场可以用$\boldsymbol{q}$表示。因此，我们已经证明了混合拉格朗日函数中的所有项都可以用流体配置映射$z, \boldsymbol{q}$及其（第一）时间导数表示。

我们现在可以通过应用Euler-Poincaré约化理论[25]并回顾前一段中给出的关系来合理地改变混合作用S：这意味着使用以下受约束的变化来改变S。

$$
\delta F = -\nabla \cdot (F \boldsymbol{\Xi}_{\mathbf{X}}) - \partial_{v_\parallel}\left(F \Xi_{v_\parallel} \right) = -\nabla_{\mathbf{z}} \cdot (F \boldsymbol{\Xi}), \tag{86}
$$

$$
\delta\rho = -\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{\xi}), \tag{87}
$$

$$
\delta\mathcal{X}_{\rm gy} = \partial_t \boldsymbol{\Xi} + \mathcal{X}_{\rm gy} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\Xi} - \boldsymbol{\Xi} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{X}_{\rm gy}, \tag{88}
$$

$$\delta \boldsymbol{U} = \partial_t \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{U}, \tag{89}$$

$$\delta \tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B} - \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}), \tag{90}$$

其中$\boldsymbol{\Xi}(z(\mathbf{z}_0)) = \delta z(\mathbf{z}_0) = \left(\Xi_{\mathbf{X}}(z(z_0)), \Xi_{v_\parallel}(\boldsymbol{z}(\mathbf{z}_0))\right)$是欧拉相空间流体位移向量，而$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{q}(\mathbf{x}_0)) = \boldsymbol{\delta q}(\mathbf{x}_0)$是欧拉MHD流体位移向量。请注意，这四个关系与式（19）和（20）中的相应关系等价，而方程（90）与（20）中的相应关系不同，因为存在背景磁场。为了读者的便利，我们指出这些约束变化还意味着关系式

$$\delta \tilde{\varphi} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \tilde{\varphi} + \partial_t \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}, \tag{91}$$

$$\delta \tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}), \tag{92}$$

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - (\partial_t \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{B}. \tag{93}$$

使用这些关系，可以计算得到混合拉格朗日量的第一变分。

$$\begin{aligned} \delta L = & \iint_\mu \left[\Xi_{\mathbf{X}} \cdot \left(q_h \mathbf{E}^* - q_h \mathbf{B}^* \times \mathbf{u}_{\mathrm{gy}} - m_h a_{\parallel \mathrm{gy}} \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} \right) + \Xi_{v_\parallel} \left(m_h \mathbf{u}_{\mathrm{gy}} \cdot \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} - m_h v_\parallel \right) \right] F \, \mathrm{d}^4 \mathbf{z} \\ & - \int \left(\rho \left(\partial_t \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} \right) + \nabla \mathbf{p} - (\mathbf{J} - \mathbf{J}_h) \times \mathbf{B} + q_h n_h \mathbf{E} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} \mathrm{d}^3 \mathbf{x} \end{aligned} \tag{94}$$

我们回顾一下MHD流体压强的表达式$p = \rho^2 \mathcal{U}'(\rho)$，以及通常的关系$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$。在（94）中，我们省略了边界项。

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \left(\rho \boldsymbol{U} - q_h n_{\mathrm{gy}} \mathbf{A} + \mathbf{P}_h \times \mathbf{B} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} \mathrm{d}^3 \mathbf{x} \\ + & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\mu \Xi_{\mathbf{X}} \cdot \left(q_h \mathbf{A} + m_h v_\parallel \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} + q_h \langle\langle \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle \right) F \, \mathrm{d}^4 \mathbf{z} \end{aligned} \tag{95}$$

通过分部积分得出的。这些项可以通过"诺特尔定理"快速验证守恒定律。此外，高能电荷与电流密度由以下公式表示：

$$q_h n_h = q_h \iint_\mu F\left(\mathbf{x}, v_\parallel\right) \mathrm{d}v_\parallel - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{gy}} \equiv q_h n_{\mathrm{gy}} - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{gy}} \tag{96}$$

$$\mathbf{J}_h = q_h \iint_\mu \mathbf{u}_{\mathrm{gy}}\left(\mathbf{x}, v_\parallel\right) F\left(\mathbf{x}, v_\parallel\right) \mathrm{d}v_\parallel + \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{gy}} + \partial_t \mathbf{P}_{\mathrm{gy}} \equiv \mathbf{J}_{\mathrm{gy}} + \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{gy}} + \partial_t \mathbf{P}_{\mathrm{gy}}, \tag{97}$$

用回旋中心系综的极化和磁化密度给出，如（见[61]和最近在[10]中）

$$\mathbf{P}_{\mathrm{gy}} = \frac{\delta L_p}{\delta \widetilde{\mathbf{E}}}, \qquad \mathbf{M}_{\mathrm{gy}} = \frac{\delta L_p}{\delta \widetilde{\mathbf{B}}}. \tag{98}$$

确实，注意到方程(96)和(97)与已知事实[31]一致，即回旋中心系综表现出类似极化磁化介质的行为。

由于$\boldsymbol{\Xi}$和$\boldsymbol{\xi}$是任意的，并且我们可以假设F和ρ在任何地方都不消失，所以变分原理$\delta S = 0$被满足当且仅当

$$q_h \mathbf{E}^* - q_h \mathbf{B}^* \times \mathbf{u}_{\mathrm{gy}} - m_h a_{\parallel \mathrm{gy}} \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} = 0, \tag{99}$$

$$m_h \mathbf{u}_{\mathrm{gy}} \cdot \mathbf{b}_{\mathrm{eq}} - m_h v_\parallel = 0, \tag{100}$$

$$\rho \left(\partial_t \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} \right) = -\nabla \mathbf{p} - q_h n_h \mathbf{E} + (\mathbf{J} - \mathbf{J}_h) \times \mathbf{B}. \tag{101}$$

这些方程必须通过混合变分原理中隐含的演化方程加以补充，即

$$\partial_t F + \nabla \cdot (F \mathbf{u}_{\mathrm{gy}}) + \partial_{v_\parallel} \left(F a_{\parallel \mathrm{gy}} \right) = 0, \tag{102}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0, \tag{103}$$

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{U} \times \mathbf{B} = 0. \tag{104}$$

方程（99）-（101）和（102）-（104）恢复了我们的新GK-MHD模型。要看到这一点，首先观察到定义极化和磁化密度的泛函导数（98）可以被明确计算，给出

$$\mathbf{P}_{\mathrm{gy}}(\mathbf{x}) = q_h \iint_\mu \langle\langle \delta(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x}) \boldsymbol{\rho} \rangle\rangle F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z}, \tag{105}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{gy}}(\mathbf{x}) = q_h \iint_\mu \langle\langle \delta(\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x}) \boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{u}_{\mathrm{gy}} + \lambda \omega_c \partial_\theta \boldsymbol{\rho}] \rangle\rangle F \, \mathrm{d}^4\mathbf{z} \tag{106}$$

用这些表达式代入方程（96）和（97），可以直接验证方程（66）和（67）的恢复。最后，可以直接验证方程（99）和（100）重现了方程（68）和（69）。

这种对我们新的GK-MHD模型的推导使得模型的一个基本守恒定律非常清晰。本地热荷守恒是方程(96)和(97)的直接结果。另一方面，能量和动量的全局守恒定律的有效性并不那么明确。实际上，所有这些守恒定律都可以看作是诺特定理的结果。能量和动量的守恒是由于混合拉格朗日量的时间平移不变性和旋转不变性。同样，热荷守恒是由于混合拉格朗日量的规范不变性。

5 Conclusions

在本文中，我们介绍了两个在CCS中的新的非线性变分混合模型。其中第一个模型将一组导心轨迹与一个MHD体耦合起来。通过保留导心磁化的运动偶极贡献，并采用Littlejohn的变分导心方程，这个模型实现了能量和动量的精确平衡。相比之下，之前的电流耦合漂移动理学-MHD混合模型既不保留能量也不保留动量。我们的第二个模型将一组热回旋中心与一个MHD体耦合起来。通过使用从一个新的规范不变的单粒子回旋中心Lagrange量导出的回旋中心运动方程，这个模型在能量、动量和高能电荷的守恒定律上都能够确保精确性。相比之下，之前的电流耦合回旋动理学-MHD模型在背景磁场非均匀时无法保持动量和高能电荷的守恒。需要指出的是，尽管漂移动理学和回旋动理学模型都需要满足$B/|\nabla \mathbf{B}| \gg \rho_L$才能在物理上有意义，但即使违反了这个假设，这些模型的精确守恒定律仍然成立。

将精确的能量平衡纳入混合Vlasov-MHD模型中的重要性在[60]中得到了彻底的研究。那些作者已经表明，无法实现精确的能量平衡导致了非物理的不稳定性的存在。同样地，精确的动量平衡在用于研究托卡马克中的本征旋转的模型中被认为是一个重要的要素[45]，这个模型必须准确地追踪动量湍流向大气团体的转动的角动量的转移。因此，我们相信，未来，我们的新的混合模型将在托卡马克和其他聚变装置的非线性电流耦合混合模拟中发挥重要作用。此外，我们还提到，混合CCS理论也可以用来描述动能电子群体，从而扩展了它们的适用范围。

虽然在本文中我们强调了与压力耦合方法相比，电流耦合方法对于混合型等离子体研究的重要性，但我们的研究结果对于等离子体耦合模型中的从业者仍然具有重要意义。这主要是因为现有的压力耦合漂移动理学和回旋动理学等离子体混合模型似乎也存在与电流耦合模型相似的守恒定律问题。本文提出的模型则没有这些问题，可以作为新的保守压力耦合混合模型在低频近似中的基础。我们希望在未来的出版物中对这个特定话题进行更深入的探讨。在这个方向上，一种可能的策略是利用本文所提出的混合模型中的哈密顿结构，这还将使得可以进行类似于[62]中的Lyapunov稳定性研究。这些研究方向目前正在进行中。

References

[1] Belova E V, Denton R E and Chan A A 1997 Hybrid simulations of the effects of energetic particles on lowfrequency MHD waves J. Comput. Phys. 136 324-36

[2] Belova E V, Gorelenkov N N, Fredrickson E D, Tritz K and Crocker N A 2015 Coupling of neutral-beam-driven compressional Alfvén eigenmodes to kinetic Alfvén waves in NSTX tokamak and energy channeling Phys. Rev. Lett. 115015001

[3] Belova E V and Park W 1999 3D hybrid and MHD/particle simulations of field-reversed configurations Proc. USJapan Workshop and the Satellite Meeting of ITC-9 on Physics of High Beta Plasma Confinement in Innovative Fusion System (14-15 December 1998) ed S Goto and S Yoshimura (NIFS, Toki, Japan) pp 81-7

[4] Binney J and Tremaine S 2008 Galactic Dynamics (Princeton, NJ: Princeton University Press)

[5] Bleecker D 1981 Gauge Theory and Variational Principles (Reading, Mass: Addison-Wesley)

[6] Brizard A 1994 Eulerian action principles for linearized reduced dynamical equations Phys. Plasmas 1 2460-72

[7] Brizard A J 1989 Nonlinear gyrokinetic Maxwell-Vlasov equations using magnetic co-ordinates J. Plasma Phys. 41541

[8] Brizard A J and Hahm T S 2007 Foundations of nonlinear gyrokinetic theory Rev. Mod. Phys. 79 421-68

[9] Brizard A J and Tronci C 2016 Variational principles for the guiding center Vlasov-Maxwell equations Phys. Plasmas **23** 062107

[10] Burby J W, Brizard A J, Morrison P J and Qin H 2015 Hamiltonian gyrokinetic Vlasov-Maxwell system Phys. Lett. A 379 2073-7

[11] Burby J W, Brizard A J and Qin H 2015 Energetically consistent collisional gyrokinetics Phys. Plasmas 22100707

[12] Cary J R and Brizard A J 2009 Hamiltonian theory of guiding center motion 81698

[13] Cary J R and Littlejohn R G 1983 Noncanonical Hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow Ann. Phys. 151 1-34

[14] Cendra H, Holm D D, Hoyle M J W and Marsden J E 1998 The Maxwell-Vlasov equations in Euler-Poincaré form J. Math. Phys. 39 3138-57 [15] Chen L, White R B and Rosenbluth M N 1984 Excitation of internal kink modes by trapped energetic beam ions Phys. Rev. Lett. 52 1222-5

[16] Cheng C Z 1991 A kinetic-magnetohydrodynamic model for low-frequency phenomena J. Geophys. Res. 9621159

[17] Cheng C Z 1992 Kinetic extensions of magnetohydrodynamics for axisymmetric toroidal plasmas Phys. Rep. 211 1-51

[18] Cheng B, Süli E and Tronci C 2016 Existence of global weak solutions to a hybrid Vlasov-MHD Model for plasma dynamics arXiv: 1606.09583

[19] Coppi B and Porcelli F 1986 Theoretical model of fishbone oscillations in magnetically confined plasmas Phys. Rev. Lett. 57 2272-5

[20] Dewar R 1972 A Lagrangian theory for nonlinear wave packets in a collisionless plasma J. Plasma Phys. 7 267-84

[21] D'Avignon E C, Morrison P J and Lingam M 2016 Derivation of the Hall and extended magnetohydrodynamics brackets Phys. Plasmas 23062101

[22] Freidberg J P 1982 Ideal megnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems Rev. Mod. Phys. 54 801-902

[23] Freidberg J P 2014 Ideal MHD (Cambridge: Cambridge University Press)

[24] Fu G Y and Park W 1995 Nonlinear hybrid simulation of the toroidicity-induced Alfvén Eigenmode Phys. Rev. Lett. 74 1594-6

[25] Holm D D, Marsden J E and Ratiu T S 1998 The EulerPoincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories Adv. Math. 137 1-81

[26] Holm D D and Tronci C 2012 Euler-Poincaré formulation of hybrid plasma models Commun. Math. Sci. 10 191-222

[27] Ilgisonis V I and Lakhin V P 1999 Lagrangean structure of hydrodynamic plasma models and conservation laws Plasma Phys. Rep. 25 58-69

[28] Katz S 1961 Lagrangean density for an inviscid, perfect, compressible plasma Phys. Fluids 4 345-8

[29] Kaufman A N 1986 The electric dipole of a guiding center and the plasma momentum density Phys. Fluids 29 1736-7

[30] Keramidas Charidakos I, Lingam M, Morrison P J, White R L and Wurm A 2014 Action principles for extended magnetohydrodynamic models Phys. Plasmas 21092118

[31] Krommes J A 1993 Thermal fluctuations in gyrokinetic plasma at finite beta Phys. Rev. Lett. 703067

[32] Krommes J A 2013 The physics of the second-order gyrokinetic magnetohydrodynamic Hamiltonian: μ conservation, Galilean invariance, and ponderomotive potential Phys. Plasmas 20124501

[33] Low F E 1958 A Lagrangian formulation of the BoltzmannVlasov equation for plasmas Proc. R. Soc. A $248282-7$

[34] Littlejohn R G 1981 Hamiltonian formulation of guiding center motion Phys. Fluids 24 1730-49

[35] Littlejohn R G 1982 Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates J. Math. Phys. 23742

[36] Littlejohn R G 1983 Variational principles of guiding centre motion J. Plasma Phys. 29 111-25

[37] Morrison P J 1998 Hamiltonian description of the ideal fluid Rev. Mod. Phys. 70 467-521

[38] Morrison P J 2009 On Hamiltonian and action principle formulations of plasma dynamics AIP Conf. Proc 1188 329-44

[39] Morrison P J, Lingam M and Acevedo R 2014 Hamiltonian and action formalisms for two-dimensional gyroviscous magnetohydrodynamics Phys. Plasmas 21082102

[40] Newcomb W A 1962 Lagrangian and Hamiltonian methods in magnetohydrodynamics Nucl. Fusion 1962 supplement part 2

[41] Park W, Belova E V, Fu G Y, Tang X Z, Strauss H R and Sugiyama L E 1999 Plasma simulation studies using multilevel physics models Phys. Plasmas 6 1796-803 [42] Park W et al 1992 Three-dimensional hybrid gyrokineticmagnetohydrodynamics simulation Phys. Fluids B 4 2033-7

[43] Pfrisch D 1984 New variational formulation of MaxwellVlasov and guiding center theories: local charge and energy conservation laws Z. Naturforsch. 39a 1-8

[44] Pfirsch D and Morrison P J 1985 Local conservation laws for the Maxwell-Vlasov and collisionless kinetic guiding center theories Phys. Rev. A 321714

[45] Parra F I and Barnes M 2015 Intrinsic rotation in tokamaks: theory Plasma Phys. Control. Fusion. 57045002

[46] Porazik P and Lin Z 2011 Gyrokinetic simulation of magnetic compressional modes in general geometry Commun. Comput. Phys. 10 899-911

[47] Squire J, Qin H and Tang W M 2013 The Hamiltonian structure and Euler-Poincaré formulation of the ValsovMaxwell and gyrokinetic system Phys. Plasmas 20 022501

[48] Sugama H 2000 Gyrokinetic field theory Phys. Plasmas 7 $466-80$

[49] Takahashi R, Brennan D P and Kim C C 2009 A detailed study of kinetic effects of energetic particles on resistive MHD linear stability Nucl. Fusion 49065032

[50] Todo Y 2006 Properties of energetic-particle continuum modes destabilized by energetic ions with beam-like velocity distributions Phys. Plasmas 13082503

[51] Todo Y, Berk H L and Breizman B N 2012 Simulation of Alfvén eigenmode bursts using a hybrid code for nonlinear magnetohydrodynamics and energetic particles Nucl. Fusion 52033003

[52] Todo Y, Sato T, Hayashi T, Watanabe K, Horiuchi R, Takamaru H, Watanabe T-H and Kageyama A 1996 VlasovMHD and particle-MHD simulations of the toroidal Alfvén eigenmode Proc. 16th Int. Conf. Plasma Physics Controlled Nuclear Fusion Research (Montreal) Paper IAEA-FI-CN64/D2-3

[53] Todo Y, Sato T, Watanabe K, Watanabe T H and Horiuchi R 1995 Magnetohydrodynamic Vlasov simulation of the toroidal Alfvén eigenmode Phys. Plasmas 2 2711-6

[54] Todo Y, van Zeeland M A and Heidbrink W W 2016 Fast ion profile stiffness due to the resonance overlap of multiple Alfvén eigenmodes Nucl. Fusion 56112008

[55] Todo Y, van Zeeland M A, Bierwage A and Heidbrink W W 2014 Multi-phase simulation of fast ion profile flattening due to Alfvèn eigenmodes in a DIII-D experiment Nucl. Fusion 4104012

[56] Tronci C 2013 A Lagrangian kinetic model for collisionless magnetic reconnection Plasma Phys. Control. Fusion 55 035001

[57] Tronci C 2016 From liquid crystal models to the guiding center theory of magnetized plasmas Ann. Phys. 371 323-37

[58] Tronci C 2010 Hamiltonian approach to hybrid plasma models J. Phys. A: Math. Theor. 43375501

[59] Tronci C and Camporeale E 2015 Neutral Vlasov kinetic theory of magnetized plasmas Phys. Plasmas 22020704

[60] Tronci C, Tassi E, Camporeale E and Morrison P J 2014 Hybrid Vlasov-MHD models: Hamiltonian versus nonHamiltonian Plasma Phys. Control. Fusion 56095008

[61] Tronci C, Tassi E and Morrison P J 2015 Energy-Casimir stability of hybrid Vlasov-MHD models. J. Phys.A 48 185501

[62] Ye H and Kaufman A N 1992 Self-consistent theory for ion gyroresonance Phys. Fluids B 41735