

Partially Linearized Algorithms in Gyrokinetic Particle Simulation

A.M.Dimits, W.W.Lee

Abstract

在本文中，我们开发了一种具有时间可变权重的粒子模拟算法，用于回旋动理学Vlasov-Poisson系统。主要目的是使用这些算法来消除梯度驱动微湍流模拟中特定的非线性，以评估各种非线性效应的相对重要性。希望通过使用这些方法，能够更好地理解托卡马克中的输运机制和尺度。这些算法的另一个应用是改善模拟等离子体的数值特性。例如，这些算法的实施可以使我们抑制模拟中固有的数值噪声，并且还可以调节高速粒子的权重，从而消除相关的高频振荡。本文给出了在片状几何结构中应用这些算法研究漂移型不稳定性的实例。我们注意到，这项研究工作是非线性等离子体模拟中粒子代码首次成功使用加权算法的案例。

1. 介绍

在这篇论文中，我们开发并应用了部分线性化的粒子模拟算法，其中粒子具有时间变化的权重，用于解决等离子体微不稳定性的回旋动理学模拟中的以下问题：

- 在漂移波模拟中去除所选的非线性项，以评估这些非线性项的相对重要性。
- 通过调节快速移动粒子的权重，抑制这些模拟中的高频振荡，以改善模拟等离子体的数值特性。
- 通过减少模拟粒子的自由传播运动引起的内在数值噪音。

在过去的二十年中，粒子模拟一直是在聚变、空间和粒子束等离子体[1-3]领域研究非线性动力学现象的重要工具。标准粒子代码使用具有恒定权重的粒子来求解Klimontovich方程。该方程以连续形式且无源，并通过跟踪粒子在自洽场的影响下的轨迹来解决。关于其他可能的非线性动力学模拟方法，即所谓的Vlasov代码模拟方法[4]，我们的经验相对较少。在该方法中，通过使用特征方法数值求解Vlasov方程。与该方法相关的困难与需要速度空间网格有关，这阻碍了其更广泛的应用。这些困难包括（1）与粒子模拟相比需要更多的计算资源，尤其是对于多维模拟，以及（2）与相空间细丝化相关的精度问题。

然而，Vlasov代码与粒子代码相比具有几个明显的优势。例如，可以轻松地打开和关闭控制方程中的各种非线性项，以评估它们的相对重要性。此外，还可以为初始扰动指定任意低的级别，以更好地评估波的线性增长或阻尼（这对于研究接近平衡的等离子体的边缘稳定现象尤为有用）。这些特殊特点确实在一个模式耦合的Vlasov代码中得到了应用，用于确定漂移不稳定性的饱和和输运机制[5,6]。这个代码是在观察到漂移不稳定性的2.5维回旋动理学粒子模拟中，产生的涨落谱仅由少数几个不稳定模式主导。

然而，将这个Vlasov代码扩展到包含更多不稳定模式是不实际的，也无法将这些特性纳入常规的粒子代码中，这些代码使用恒定权重的粒子。这些困难促使我们开发了具有可变粒子权重的回旋动理学粒子模拟算法[7]。权重的时间依赖性是非线性化回旋动理学Vlasov（或Klimontovich）方程中平行加速度和/或背景非均匀性效应后（但非线性的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流不是线性化的）源项的结果。在本文中，我们在2.5维模拟中使用部分线性化方案，以确定非线性平行加速度是否在观察到的非线性饱和和粒子输运中起到任何作用，并且使用“多尺度模型”的模拟中观察到的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的不对称性是否确实是物理的[8,9]。随着时间的推移，这些算法将证明在三维微湍流研究中是有用的。

一个目前部分线性化算法的重要应用是改善模拟等离子体的数值特性，例如时间步长、网格间距和噪声水平。例如，通过将预定的权重 $e\phi(\mathbf{x})/T_e$ 分配给快速运动的电子，从而对它们施加类似玻尔兹曼响应，我们可以消除模拟中不良的高频振荡。离子声波（以及相关的漂移型波）成为系统中唯一的本征模式，从而显著改善了数值特性。然而，我们将在后面讨论此处存在的复杂性。由于模拟中使用了有限数量的粒子，过多的数值噪声是近些年关注的问题[10]。例如，噪声水平有时可能足够高，以至于所感兴

趣的物理不稳定被抑制 [10]。这在不稳定性较弱时尤其如此。通过当前的算法，初始固有噪声通常可以通过简单地将分布函数的零阶部分的贡献清零来完全消除。这是对完全线性化粒子模拟方案 [12] 中使用的噪声抑制技术 [11] 的一个简单扩展。最近，Kotschenreuther [13] 和 Parker 和 Lee [14] 还对完全非线性粒子模拟的减噪方案进行了研究。我们稍后将对此进行备注。

有两种基本的粒子模拟方法可用于解决部分线性化系统。在我们所称的标准方法中，由Freidberg等人提出 [12]（另见Cohen等人 [15]），Klimontovich分布函数相对于相空间中的部分线性化零阶粒子轨迹进行一阶展开。然后得到波动相空间量的适当运动方程。得到的分布函数是部分线性化Klimontovich方程的精确解。这种方法已在参考文献[8]中进行研究。即使当这些渐近项代表小项时，由于平衡运动和源项之间的拍频而产生的问题也被发现。在我们开发的第二种方法中，部分线性化Klimontovich方程中包含分布函数的零阶梯度的项被表达为只包含场量和已知函数的源项（即，所有导数都明确计算）。这导致粒子权重成为数值因子，而不是包含在标准方法中作用于 δ 函数的导数的量。这个事实使得我们的方法在许多应用中比标准方法更具灵活性。

论文的组织结构如下。第2节简要回顾了Vlasov-Poisson系统的回旋动理学形式和漂移波的回旋动理学粒子模拟技术。第3节描述了具有时变权重的部分线性化粒子模拟算法。第4节给出了适用于回旋动模拟的方程。第5节讨论了在原始回旋动理学粒子模拟漂移波中观察到的现象及其与部分线性化加权粒子算法结果的比较。第6节讨论了噪声减少问题和高频振荡的抑制。总结和结论在第7节中包括。

2. 回旋动理学粒子模拟和漂移波应用

让我们简要回顾一下应用于漂移波模拟中的回旋动理学形式和技巧。回旋动理学粒子模拟方案使用标准粒子模拟方法来解决基于众所周知的回旋动理学排序的方程组。

$$\frac{q_\alpha \phi}{T_\alpha} \sim \frac{\omega}{\Omega_\alpha} \sim \frac{\rho_\alpha}{L} \sim \varepsilon \ll 1, \quad L \sim L_\parallel$$

其中 $\rho_\alpha \equiv v_{t\alpha}/\Omega_\alpha$, $\Omega_\alpha \equiv q_\alpha B/m_\alpha c$, $v_{t\alpha} \equiv \sqrt{T_\alpha/m_\alpha}$, $q_\alpha, m_\alpha, T_\alpha$ 分别代表物种 α 的电荷、质量和温度， c 是光速， B 是磁场强度， ϕ 是静电势， ω 是扰动的频率， L 是系统的特征垂直平衡尺度， L_\parallel 是扰动的特征平行波长。当我们指代任何一种物种且没有歧义时，我们将省略种类索引 α 。

等离子体在均匀磁场中的静电回旋动理学Vlasov方程为 [10, 16, 17]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_\parallel \bar{\mathbf{b}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} - \frac{c}{B} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{b}} \right) F \right] - \frac{q}{m} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \frac{\partial F}{\partial v_\parallel} = C(F) \quad (1a)$$

$$\Psi(\mathbf{R}) \equiv \bar{\phi} - \frac{q}{2T} \left(\frac{v_t}{\Omega} \right)^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{R}} \right|^2 \quad (1b)$$

$$\bar{\phi} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) J_0 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \quad (1c)$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v}_\perp \times \bar{\mathbf{b}}}{\Omega} \quad (1d)$$

\mathbf{x} 是粒子位置， \mathbf{v}_\perp 是垂直速度， $\bar{\phi}(\mathbf{R})$ 是回旋平均的静电势能， $F(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel, t)$ 是完全回旋平均的分布函数， $\mu \equiv v_\perp^2/2$ ，而 $C(F)$ 是碰撞算子。静电势能 ϕ 由回旋动理学泊松方程给出，对于单一离子种类 i ，形式为

$$\nabla^2 \phi - \frac{\tau(\phi - \bar{\phi})}{\lambda_D^2} + \left(\frac{\rho_s}{\lambda_D} \right)^2 \nabla_\perp \cdot \left[\frac{(n^i - n_0)}{n_0} \nabla_\perp \phi \right] = -4\pi e (\bar{n}^i - n^e) \quad (1e)$$

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \Gamma_0(k_\perp^2 \rho_i^2) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1f)$$

$$\bar{n}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \int F(\mathbf{k}) J_0 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) d\mu dv_\parallel \quad (1g)$$

并且其中 $\tau \equiv T_e/T_i$, $\rho_s \equiv c_s/\Omega_i$, $c_s \equiv \sqrt{T_e/m_i}$, k_\perp 是垂直波数, $\lambda_D \equiv \sqrt{T_e/4\pi n_0 e^2}$ 是电子德拜长度, n_0 是背景离子数密度, n^α 是 α 种粒子的数密度, $\Gamma_0(b) \equiv I_0(b)e^{-b}$ 。对于离子, $C(F) = 0$ 。对于电子, 有限回旋半径效应可忽略, 所以 $\Psi = \bar{\phi} = \tilde{\phi} = \phi$ 。电子的俯仰角散射通过Monte-Carlo模型来保留, 采用Lorentz碰撞算子[6]。

$$C(F_e) = \frac{v_{ei}}{2 \sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sin \xi \frac{\partial F_e}{\partial \xi} \right) \quad (1h)$$

这里 v_{ei} 是电子俯仰角散射频率, 在这些研究中被认为是与速度无关的, 而 ξ 是俯仰角。由于波的平行相速度通常小于电子热速度, 逃逸电子的数量应该是可忽略的。模拟中粒子离散性引起的内在碰撞时间比典型运行时间[6]要大几个数量级。

通过回旋动理学系统, 不再需要跟踪粒子回旋运动的细节。由此产生的松弛时间步长和网格大小要求使得低频率 ($\omega \ll \Omega_i$) 微不稳定性在非线性饱和区域的模拟得以进行[10]。这代表了在理解这些微不稳定性的非线性演化路径中的一个重要进展[5,6,16,18,19]。

为了使用周期性几何结构模拟由空间梯度驱动的系统, 我们对标准源项的梯度使用了一种简单的粒子守恒的推广形式, 该形式在线性理论[20]和非线性流体模拟[21]中经常使用。方程(1a)中的垂直速度被修改为 [10]。

$$\mathbf{v}_{\text{perp}} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\frac{c}{B} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} + \kappa \Psi \right] \times \bar{\mathbf{b}} \quad (1i)$$

其中, $\kappa \equiv -\nabla \ln F_M = \kappa \hat{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{b}} \equiv \hat{\mathbf{z}} + \theta \hat{\mathbf{y}}$ 。其中, F_M 是具有相关密度 $n_0(x)$ 和温度 $T_0(x)$ 的背景Maxwellian分布函数。我们可以将 κ 写成 $\kappa = \kappa_n \left[1 + \eta \left(v_\parallel^2 / v_{t\alpha}^2 - \frac{1}{2} \right) \right]$, 其中 $\eta \equiv (d \ln T_0 / d \ln n_0)$, κ_n 表示密度梯度。当 $\eta = 0$ 时, 我们有 $\kappa = \kappa_n$ 。

这个速度具有重要的特性

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{perp}} = -\kappa \dot{x}$$

其中 $\dot{x} = -(c/B)(\partial \Psi / \partial y)$ 是 \mathbf{v}_{perp} 的 x 分量, $\mathbf{R} = (x, y, z)$ 。这导致了在方程(1a)的左侧增加一项

$$\frac{c}{B} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \cdot [\bar{\mathbf{b}} \times \kappa(\Psi F)]$$

3. 加权粒子法

标准的粒子模拟代码求解的动理学方程的一般形式是Klimontovich密度 f 的连续性方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \partial_i (V_i f) = 0 \quad (2)$$

其中, 重复的下标表示对所有相空间分量进行求和,

$$f(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^N \delta^D(\mathbf{X} - \mathbf{X}_j(t))$$

j 是粒子索引, N 是粒子数, D 是单粒子相空间的维数, \mathbf{X} 是相空间坐标向量, $\mathbf{V} \equiv d\mathbf{X}/dt$ 。因此, 一般认为, 只要初始条件选择适当并且场按照使模拟无碰撞的方式计算, 方程 (2) 的单个解实现应足够代表形式上与方程 (2) 相同的Vlasov方程的解。"

为了推导我们的算法, 首先对Vlasov方程中要线性化的项进行了近似, 近似形式为 $g(\mathbf{X}, t) f^{(0)}$, 其中 g 是相空间坐标和时间的某个函数, $f^{(0)}$ 是零阶分布函数, 在没有要线性化的项的情况下解Vlasov方程。替换的正当性取决于所做的具体替换。对于去除平行非线性, 将平行加速度项 $\partial f / \partial v_\parallel \rightarrow -v_\parallel f^{(0)} / v_i^2$ 替换为回旋动理学Vlasov方程(1a)中的项, 使得

$$g = -\frac{q}{m} E_\parallel \frac{v_\parallel}{v_i^2}$$

合理替换的理由是观察到如果 $f^{(0)}$ 是一个 Maxwellian 分布，那么这个替换是有效的，并且如果 δf 是 $f^{(0)}$ 和初始 Maxwellian 分布之间的偏差，那么 $g\delta f$ 相对于陀螺动理学小参量而言要比 $gf^{(0)}$ 小一个阶。对于去除非线性的 κ 项，类似的替换可以进行。

$$\kappa \frac{\partial}{\partial y}(\psi f) \rightarrow \kappa \frac{\partial}{\partial y}(\psi f^{(0)}) \rightarrow \kappa f^{(0)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3)$$

所以我们有

$$g = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

这再次被认为是有效的，因为方程 (3) 中的表达式之间的差异比最后一个表达式小一个陀螺运动小参数的阶数。然后方程可以写成以下形式：

$$\frac{df}{dt} + \left(\partial_i V_i^{(0)} \right) f = g(X, t) f^{(0)}$$

具备以下特征：

$$\frac{dX}{dt} = V^{(0)}(X, t) = \frac{d}{dt} X^{(0)}(t)$$

解的形式为：

$$f(X, t) = f(X_0, 0) \left[1 + \int_0^t dt' g(X', t') \right] \times \exp \left[- \int_0^t dt' \partial_i' V_i^{(0)}(X', t') \right]$$

其中 $X' \doteq X^{(0)}(t')$ ，而 $X_0 \doteq X^{(0)}(0)$ 。使用

$$f^{(0)}(X, t) = f(X_0, 0) \exp \left[- \int_0^t dt' \partial_i' V_i^{(0)}(X', t') \right]$$

可以重写为

$$f(X, t) = f^{(0)}(X, t) \left[1 + \int_0^t dt' g(X', t') \right]$$

应用这一原理到粒子模拟中，我们有

$$f^{(0)}(X, t) = \sum_j \delta^D(X - X_j^{(0)})$$

所以

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \sum_j \delta^D(X - X_j^{(0)}(t)) \left[1 + \int_0^t dt' g(X_j^{(0)}(t'), t') \right]. \quad (4)$$

这个公式非常适合粒子模拟。新方案需要为每个粒子存储额外的两个变量，以考虑一阶速度扰动和空间位移。对于我们的应用来说，这增加了不到30%。下面将总结实施的算法。

4. 加权粒子方法的特定应用

4.1. 线性化- E_{\parallel} 算法

经过对平行加速度项进行部分线性化的回旋动理学Vlasov方程为：

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \left\{ [\mathbf{v}_{E \times B} + (\kappa \Psi + \theta v_{\parallel}) \hat{\mathbf{y}}] f^{(1)} \right\} - \frac{q}{m} \frac{v_{\parallel}}{v_i^2} E_{\parallel} f^{(0)} = C(f^{(1)}) \quad (5a)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \{ [\mathbf{v}_{E \times B} + (\kappa \Psi + \theta v_{\parallel}) \hat{\mathbf{y}}] f^{(0)} \} = C(f^{(0)}) \quad (5b)$$

其中 $\mathbf{v}_{E \times B} \doteq (q/m\Omega)\bar{\mathbf{b}} \times \nabla_{\perp} \Psi$ 和 $E_{\parallel} \doteq (\partial/\partial z)\Psi$ 。依据公式(4)，它们的解为

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \sum_j \left(1 + \frac{v_{\parallel j}^{(0)} v_{\parallel j}^{(1)}}{v_t^2} \right) \times \delta(\mathbf{R}_{\perp} - \mathbf{R}_{\perp j}^{(0)}) \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel j}^{(0)}) \quad (5c)$$

其中

$$v_{\parallel j}^{(1)} = \frac{q}{m} \int_0^t dt' E_{\parallel}(\mathbf{R}_{\perp j}^{(0)}(t'), t') \quad (5d)$$

$\mathbf{R}_{\perp} \doteq (x, y)$ ，以及 $\mathbf{R}_j^{(0)}(t)$ 和 $v_{\parallel j}^{(0)}(t)$ 是遵循初始条件并具有零平行加速度演化的轨迹。

4.2. 线性化- E_{\parallel} & κ 算法

确定多尺度模型非线性的影响是很有意义的。受之后将描述的线性化- E_{\parallel} 代码和全回旋动理学代码结果的一致性所启发，我们删除了平行和多尺度的非线性性。则线性化在这种情况下是严格的，因为麦克斯韦分布是零级Vlasov方程的解。得到的方程为：

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot [(\mathbf{v}_{E \times B} + \theta v_{\parallel} \hat{\mathbf{y}}) f^{(1)}] + \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y} F_M - \frac{q}{m} E_{\parallel} \frac{v_{\parallel}}{v_t^2} F_M = C(f^{(1)}) \quad (6a)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot [(\mathbf{v}_{E \times B} + \theta v_{\parallel} \hat{\mathbf{y}}) f^{(0)}] = C(f^{(0)}) \quad (6b)$$

假设初始的Vlasov分布函数是空间均匀的Maxwellian分布，并且在整个时间内保持不变。相应的Klimontovich分布函数为：

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \sum_j \left(1 + \kappa \Delta x_j^{(0)} + \frac{v_{\parallel j}^{(0)} v_{\parallel j}^{(1)}}{v_t^2} \right) \times \delta(\mathbf{R}_{\perp} - \mathbf{R}_{\perp j}^{(0)}) \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel j}^{(0)}), \quad (7)$$

此算法是粒子守恒的，容易通过位置和平行速度的Vlasov方程一阶积分得到 $(d/dt)N^{(1)}(t) = 0$ 来证明，其中 $N^{(1)}(t)$ 是粒子密度的一阶贡献。其中零阶轨迹既没有平行加速度也没有 κ 项。

注意，在方程(7)中，应该将 $\Delta x_j^{(0)}$ 视为在时间上连续而不是在空间上周期性的，这样可以避免在仿真盒子的 x 边界产生密度不连续的情况。为了简化，本节中的方程是在 (x, y, z, v_{\parallel}) 上写的。它们可以很容易地推广到 $(x, y, z, \mu, v_{\parallel})$ 。

方程(6a)可以通过写成 $f^{(1)} = \Psi F_M + h$ 来等同于Frieman和Chen的方程中静电、平板磁场极限的情况[22]。然而，目前的方法通过解极化漂移的影响方程(1e)，保留了回旋动理学粒子模拟公式[10]的有利稳定性特性。这使得该方法比直接显式求解Frieman-Chen方程更加隐式。我们注意到，这种部分线性化的方法很容易推广，以处理磁场几何和电磁效应的其他复杂性。

如果有的话，模拟碰撞的随机速度 δv_c 最方便地保留为 $V^{(0)}$ 的一部分。可以直接证明，以这种方式正确处理碰撞。Shanny、Dawson和Greene [23] 以及Boozer和Kuo-Petravic [24] 等碰撞模型都包括添加一种随机平行速度，该速度的统计属性与真实的纵向散射 v_{\parallel} 相同。在任何变量集中，俯仰角碰撞算符由广义的扩散项和（可能为零的）阻力项组成。只要无碰撞特征保持平滑，在线性化后离散化，线性化不会改变扩散项。阻力项在线性化后甚至更加稳健。

4.3. 守恒定律

上述算法遵守的守恒定律在本质上是有趣的，也是对实施和数值误差的诊断检查时非常有用的。给定由方程(1)给出的系统的守恒定律已经在其他地方进行了讨论[10,8,18]，并在此简要总结。在没有梯度驱动项和碰撞的情况下，存在一个守恒的粒子数、平行动量、能量，以及类似于Krall和Trivelpiece讨论的形式的无限数量的类熵量。使用方程(1i)的梯度驱动项时，只要进行以下替换（将 f 替换为 $\hat{f} \equiv \exp(-\kappa x)f$ ，将 $\int d\mathbf{R} dv_{\parallel} d\mu$ 替换为 $\int d\mathbf{R} dv_{\parallel} d\mu \exp(\kappa x)$ ），相同的守恒定律仍然成立。方程(1i)的碰撞项会破

坏动量和熵的守恒性。在参考文献[10]中的标准回旋动理代码中，总动量和能量约束是有用的诊断工具，而粒子数守恒是显而易见的。通常不计算守恒的熵，因为这需要离散化的速度空间，粒子代码的结构本身就被设计成避免这种情况。在参考文献[16,5,6,18]中，能量守恒已被广泛用作诊断代码的调试工具。对于带有非线性梯度模型项的线性化- E_{\parallel} 系统，由方程(1)守恒的量不再完全守恒，尽管误差项比量本身的回旋动理小量参数高一个阶数。因此，在弱梯度极限下，它们的守恒性变得精确。

由于线性化的 E_{\parallel} 和 κ 模型可以从一个保守粒子数、动量、能量和广义熵的系统中进行系统的多尺度展开，因此它对这些量的扰动具有守恒定律。其中之一，Gibbs自由能的二次项已经被Kotschenreuther [13]提出作为一种诊断量（尽管该论文中给出的在无穷粒子数极限下方程（12）的源项消失的观点似乎是不正确的）。我们也实现了一个基于这个量的诊断工具，并主要用于调试目的。表示该量非守恒的源项测量了模拟粒子对势能采样误差以及网格分辨率的影响。由于这不是一个直接衡量物理波动与噪音诱导波动之比的指标，因此使用具有不同粒子数的运行进行直接检查，以确立对于粒子数的收敛性。构建一个其守恒精度可以衡量与粒子数的收敛性的量是一个有趣的未来研究课题。

5. 部分线性化算法下的漂移波模拟

在回旋动理学漂移波模拟中使用的几何形状是一个带有一个可忽略位置坐标 z 的平板。磁场是均匀的，并且倾斜于 z 轴， $\mathbf{B} = B(\hat{\mathbf{z}} + \theta\hat{\mathbf{y}})$ ，其中 $\hat{\mathbf{z}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 分别是 z 和 y 方向的单位向量。平行波数则为 $k_{\parallel} = \theta k_y$ 。倾斜角 $\theta (\ll 1)$ 在无剪切平板模型中是一个常数。如上所定义，背景梯度（对于我们的多尺度模型）在 x 方向上。由于无剪切系统具有平移不变性，我们可以假设粒子和波在 x 和 y 方向上都是周期性的。模拟参数为： $L_x \times L_y = 32\Delta \times 32\Delta$ ，其中 Δ 是网格尺寸， N （每种物种的模拟粒子数） $= 128 \times 128$ ， $m_i/m_e = 1837$ ， $\tau = T_e/T_i = 4$ 或 100 ，粒子尺寸 $= 2\Delta$ ， $\theta = 0.002$ 或 0.01 ， $\rho_s = 4.286\Delta$ ， $\kappa\rho_s = 0.214$ ， $(k_x\rho_s, k_y\rho_s) = (0.842m, 0.842n)$ ， $\omega_*/\Omega_i = 0.18n$ ，其中 $(m, n) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ， $v_{ei}/\Omega_i = 0$ 或 0.001 ， $\Omega_i\Delta t = 1.09, 2.18$ 或 5.45 ， Δt 是代码中使用的时间步长。代码中将 $k_x = 0$ 的静电势设为零，即 $\phi(m=0, n \neq 0) = 0$ ，以满足多尺度模型中的 $|k_x| \gg |\kappa|$ 的要求[10]。为简单起见，我们还将 $\phi(m \neq 0, n=0) = 0$ [5,6]。

根据Lee和他的同事的论文中使用的习惯，接下来的大部分内容中使用的单位制为：长度按 ρ_s 缩放，时间按 Ω_i^{-1} 缩放，密度按平均密度 n_0 缩放，静电势按 T_e/e 缩放，其中 e 是电子的无符号电荷。

图1显示了静电势振幅的时间演化历史($m=1, n=\pm 1$)，用 ϕ_{\pm} 表示。这是一个典型的半相干回旋动理学漂移波运行的情况，其中 $\theta = 0.002, \tau = 100, v_{ei} = 0.001$ 和 $\Delta t = 1.09$ 。它们是模拟中的主要波动，并且线性理论表明它们也对应于系统中最不稳定的模式，其中 $\omega = \pm 0.034 + 0.027i$ [5,6]。该运行的半相干空间电势图案与文献[5,6]中所示的类似，正如本文中所详细讨论的所有运行的情况一样。在发展的线性阶段测量到的值与理论非常一致，其他观察到的现象可以总结如下[5,6,8]：

1. 不稳定性的时间演化可以分为准本征模、线性、饱和和稳态阶段
2. 除了与 $(1, \pm 1)$ 模式相关的 ϕ, n^e 和 \bar{n} ，密度中也观察到了非线性生成的 $(2, 0)$ 和 $(0, 2)$ 模式的涨落。
3. 在后线性阶段，+和-模式以非线性修正的实频率振荡。这些非线性修正包括：
 - 频率向上偏移为 $\omega_r \simeq \pm 0.055$ ，
 - 频率展宽，
 - +和-模之间的频率差意味着相速度 ω/k_x 具有净的 x 分量。
 - 幅度波动（在平均值约为7%的基础上）由于+和-模式之间的能量交换导致。
4. 一个稳态的粒子通量，主要是由正模和负模导致的，其数值远小于准线性理论中的通量。它随着 v_{ei} 的增加而增加，随着 θ 的减小而减小。

我们已经进行了基于线性化的 E_{\parallel} 算法的漂移波模拟。（在实际代码中，同时移除了离子和电子平行非线性，尽管在这种情况下对离子运动的影响微不足道。）图2和图3分别显示了静电势和由此产生的电子粒子通量的时间历史，其中后者是使用[10]算出的。

$$\langle \Gamma_{ex} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 + w_j) \mathbf{V}_{E \times B} \cdot \hat{\mathbf{x}},$$

其中

$$\mathbf{V}_{E \times B} \equiv -\frac{c}{B} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{b}}$$

而 w_j 是线性化的贡献部分。由于使用的参数与图1中的参数相同，可以明显看到两次运行之间有一个令人满意的定性（尽管不是定量）一致性。例如，线性化的 E_{\parallel} 运行在稍高的水平上饱和，达到 9%，并且振荡频率稍高，约为 $\omega_r \simeq \pm 0.067$ 。在演化的“稳态”阶段，两次运行的粒子通量值以及频率差异（ x 相速度）是相似的（应将图3与参考文献[9]的图4进行比较）。然而，在线性化的 E_{\parallel} 运行中，+和-模式之间的能量交换水平降低了。

因此，尽管部分线性化代码和原始代码的结果存在量化差异，但它们表明相同的饱和机制正在起作用。这与我们之前的研究 [8, 9] 中描绘的饱和机制的图像一致，即非线性阶段中增加的实频率需要更高的饱和水平，以使离子的非线性能够发挥作用，从而维持粒子的双极性扩散。

为了证明非线性模拟中图3所示的平行加速阶段对电子通量降低的物理机制，我们使用了方程 (5a) - (5d) 的非自洽实现。该代码跟踪回旋中心的运动，并使用与图1中所示的时间演化和空间结构相似的静电势 ϕ_{\pm} 。因此，该代码与线性化的 E_{\parallel} 代码相同，只是省略了根据回旋动力学泊松方程计算自洽势的步骤。从图4可以看出，这种非自洽代码成功地模拟了通量的降低。基本机制是平行共振的除存，通过粒子在径向扩散时权重的减少来表示。扩散的电子回旋中心权重减少导致加权通量以及共振处的总加权电子数减少，如图5所示。

现在我们讨论非线性平行加速项对不同模拟参数的影响。对于 $v_{ei} = 0, \tau = 100, \theta = 0.002$ ，线性化的 E_{\parallel} 运行和完全非线性运行的一致性在定量和定性上都比 $v_{ei} = 0.001$ 更加接近。然而，对于 $\tau = 4, v_{ei} = 0.001$ 和 0.002 ，线性化的 E_{\parallel} 代码中的饱和水平增加和上移频率偏差比 $\tau = 100$ 更大。对于较大的 θ ，我们预计全代码与线性化的 E_{\parallel} 代码之间的差异将更大，模拟结果证实了这一点。图6展示了完全非线性运行的结果，而图7展示了线性化的 E_{\parallel} 运行的结果，分别对应于 $\tau = 4, v_{ei} = 0, \theta = 0.01$ 和 $\Delta t = 2.18$ 的情况。线性理论预测 $\omega = \pm 0.06 + 0.011i$ 。正如我们所看到的，线性增长被噪声所掩盖（尽管在信号经过滤波后可以清晰地看到），特别是在完全非线性运行中更加明显。图6中电势的饱和水平平均小于 1%，具有 $\omega_r = \pm 0.045$ ，而图7中我们有 $e\phi/T_e = 5\%$ 和 $\omega_r = \pm 0.04$ 。因此，我们确实看到当 k_{\parallel} 较大时，平行加速度非线性即非线性 E_{\parallel} 项变得重要，这与通常的理解相一致。这些结果作为线性化的 E_{\parallel} 算法用于理解微湍流性质的有用示例。图6的一个重要方面是不稳定性的稳态涨落水平几乎与由 $|e\phi/T_e| \simeq 1/(k_{\perp} \rho_s \sqrt{N}) \simeq 0.66\%$ 给出的内在数值噪声相同，其中 N 是模拟粒子的总数[10]。噪声是否干扰了不稳定性的问题将在下一节中讨论，同时还将介绍减少噪声的方案。

使用线性化的 $-E_{\parallel} \& \kappa$ 代码进行了模拟运行。对于这样的代码，非线性性仅来自 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流，因此它与大部分当前理解所基于的模型相同。对于与图6和图7相同的参数，结果表明，在线性增长停止之后，至少一种模式（+或-）仍然存在持续的长期增长，振幅超过 $e\phi/T_e \simeq 10\%$ 。对于 $\theta = 0.002$ ，也观察到了相同的行为。这种长期增长的原因也可以从我们之前的工作[8,9]中给出的图像中理解。在由方程 (7) 指定的算法中，一个粒子的权重可以在其沿 x 方向移动时线性地增加或减少而没有限制。因此，在具有非线性径向传播的半相干饱和态中，密度的主导模式可以在 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 束俘获的粒子群流动时无限制地增长。从物理上讲，这种增长表示了 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 束俘获的粒子群的到达，这些粒子群起源于越来越高密度的区域。这样的系统代表了一个密度剖面，其中密度从 $-\infty$ 一直运行到 $+\infty$ 。多尺度模型中的非线性驱动项限制了密度和电势的主导模式的长期增长，因为它们受到相干径向对流的影响，有效地模拟了包含在平衡密度剖面中的密度的上限和下限。另一个观察结果是，两种不稳定模式之间的能量交换减少，表明非线性的 E_{\parallel} 和 κ 效应以及离子的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 非线性是交换的原因。在这些运行中，零阶粒子通量应保持为零，因为模拟等离子体的初始分布是空间均匀的Maxwell分布，并且 $\phi(\mathbf{k} = 0) = 0$ 。任何与零偏离的情况都是代码中的数值或统计误差的度量。

更多湍流模拟的初步研究（详细结果将在未来发表的文章中呈现），其中包含了许多不稳定模式，结果表明去除非线性的 κ 项在湍流情况下几乎没有影响。实际上，模式的饱和水平和导致的通量与完全非线性代码的对应运行基本相同。因此，我们可以得出结论，在饱和状态是湍流（空间不相干）且具有比平均梯度尺度短的特征径向尺度时，多尺度模型驱动项的非线性部分几乎没有影响。非线性和线性 κ 项的模拟比较将在下一节进一步讨论。

6. 使用时间变化权重的长时间步长和噪声抑制

本节将详细研究在部分线性化算法中使用时间变化权重的方法，以增加时间步长和网格间距，并降

低模拟中的噪声水平。首先，我们从对平行电场线性化的权重方程开始讨论。根据4.1节，我们有：

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{q}{m} \left(\frac{v_{\parallel}^{(0)}}{v_t^2} \right) E_{\parallel} \left(\mathbf{x}_j^{(0)} \right) \quad (8)$$

其中 $w_j \equiv v_{\parallel j}^{(1)} v_{\parallel j}^{(0)} / v_t^2$ 和 $d/dt \cong \partial/\partial t + v_{\parallel} \partial/\partial x_{\parallel}$ 。对于对慢波做出快速响应的粒子，我们有 $\partial/\partial t \ll v_{\parallel} \partial/\partial x$ ，即 $\omega \ll k_{\parallel} v_{\parallel}$ 。在这里，我们还假设这些粒子满足 $|\mathbf{V}_{E \times B} \cdot \mathbf{V}_{\perp}| \ll |v_{\parallel} \partial/\partial x_{\parallel}|$ 。由于 $E_{\parallel} = -\partial\Psi/\partial x_{\parallel}$ 和 $v_t^2 = T/m$ ，我们得到第 j 个电子的表达式，

$$w_j = e\Psi \left(\mathbf{x}_j^{(0)} \right) / T_e \quad (9)$$

慢粒子的零阶轨迹仍然受下面的方程控制

$$\frac{d\mathbf{x}_j^{(0)}}{dt} = \mathbf{V}_{E \times B, j} + \kappa\Psi \left(\mathbf{x}_j^{(0)} \right) \hat{\mathbf{y}} + v_{\parallel j}^{(0)} \bar{\mathbf{b}} \quad (10a)$$

$$\frac{dv_{\parallel j}^{(0)}}{dt} = 0 \quad (10b)$$

现在给出快粒子的运动方程为：

$$\frac{d\mathbf{x}_j^{(0)}}{dt} = \mathbf{V}_{E \times B, j} + v_{\parallel j}^{(0)} \bar{\mathbf{b}} \quad (11)$$

相反，我们可以使用方程（10b）来描述。这是因为绝热粒子不再受外部驱动的影响。（在方程（11）中，与快速粒子的平行漂移相比， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 项要小得多。）对于这个包含慢速和快速粒子的系统，相应的分布函数仍然是：

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \sum_{j=1}^N (1 + w_j) \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(0)} \right) \delta \left(v_{\parallel} - v_{\parallel j}^{(0)} \right) \quad (12)$$

其中 w_j 由方程（8）或（9）给出。对于线性化的 E_{\parallel} 与 κ 情形，方程（8），（9），（10b）和（11）仍然有效，而方程（12）变为

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \sum_{j=1}^N \left(1 + w_j + \kappa \Delta x_j^{(0)} \right) \times \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(0)} \right) \delta \left(v_{\parallel} - v_{\parallel j}^{(0)} \right), \quad (13)$$

其中 $\Delta x_j^{(0)}$ 由下式给出，对于慢粒子：

$$\frac{d\Delta x_j^{(0)}}{dt} = -\frac{q}{m\Omega} \frac{\partial\Psi \left(\mathbf{x}_j^{(0)} \right)}{\partial y} \quad (14)$$

对于快粒子：

$$\frac{d\Delta x_j^{(0)}}{dt} = 0 \quad (15)$$

方程（15）再次表明不均匀性对于绝热粒子没有影响。

在聚变和空间物理学中，我们经常面临这样一种情况，其中相关频率满足 $|\omega/k_{\parallel} v_{te}| \ll 1$ 的条件，其中 v_{te} 是电子的热速度。因此，由于大多数电子的速度远远快于这类低频波的相速度 ω_r/k_{\parallel} ，我们可以假设它们的响应几乎是玻尔兹曼式的，即根据式(9)准绝热。根据式(12)，扰动密度则具有着众所周知的形式。

$$\delta n^e = \int f^{(1)} dv_{\parallel} = \sum_{j=1}^N \left[e\Psi \left(\mathbf{x}_j^{(0)} \right) / T_e \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(0)} \right) = (e\Psi/T_e) n_0 \quad (16)$$

其中 $n_0(x)$ 是零阶数密度，对于多尺度模型， $n_0(x) = n_0$ 。当共振电子效应不重要时，这是一个非常有用的近似。例如，在模拟离子温度梯度漂移不稳定性[18]时，在回旋动理学泊松方程中使用了这样的电子密度响应，因此在模拟中实际上不需要推动电子。

然而，方程（16）完全忽略了具有 $v_{\parallel} \simeq \omega/k_{\parallel}$ 的共振粒子的非绝热效应，这些效应可以通过逆朗道阻尼引发各种低频微不稳定性。我们即将描述的方案提供了一种恢复这种重要的波粒相互作用的方法。例如，我们可以使用方程（9）来描述绝热电子（ $v_{\parallel j}^{(0)} \gg \omega/k_{\parallel}$ ），并应用方程（8）来描述其余的电子群体以捕捉非绝热响应。然后将得到的电子的 w_j 插入到方程（12）或（13）中。在线性化的 $-E_{\parallel}$ 算法中，在没有碰撞的情况下， $v_{\parallel j}^{(0)}$ 不会更新，因此不需要重新标记粒子。（然而，在存在碰撞和/或非线性 E_{\parallel} 的情况下， $v_{\parallel j}^{(0)}$ （或 $v_{\parallel j}$ ）会随时间变化，需要重新标记粒子。这个方案的这个方面目前正在研究中[26,27]。

使用方程（9）的明显数值优势是消除高频振荡，例如静电剪切-阿尔芬波， $\omega_H \equiv (k_{\parallel}/k) \sqrt{m_i/m_e} \Omega_i$ [10]，从模拟等离子体中。通过去除冷流体动力学电子响应（在 $(\omega_r/k_{\parallel} \geq v_{te})$ 的条件下），这些正常模式简单地不再存在。因此，模拟中的时间步长限制不再由高频波产生（ $\omega_H \Delta t \lesssim 1$ ）而强制。相反，它被Courant条件取代 $k_{\parallel} v_{te} \Delta t \lesssim 1$ [10]。虽然这两个条件对于 $k_{\perp} \rho_s \simeq 1$ 的模式是相同的，但数值上的含义却完全不同。在没有 ω_H 模式的情况下，我们有一个独特的情况，其中快粒子与慢波共存，因为 $\omega \ll k_{\parallel} v_{te}$ 。因此，可以使用轨道平均方案将时间步长有效增加到 $\omega \Delta t \lesssim 1$ [10,28]。在本文中，将采用一个更简单的替代方案。去除 ω_H 模式后，栅格间距的限制也被放宽 [10]，这使得能够模拟具有 $\Delta x \gg \rho_s$ 的大系统。

另一个消除高频振荡的结果是减少数字噪声（对于 $k_{\perp} \rho_s < 1$ ），因为模拟中只剩下与离子声波相关的正常模式[10]。然而，噪声的减少取决于正常模式的阻尼率，通常非常小。因此，在许多情况下，除非引入人为阻尼，否则不应期望实际实现由于消除这些振荡而产生的噪声减少。然而，当使用方程（10b）和（11）时，得到的粒子运动在配置空间中不可压缩，噪声可以降低，将在后续讨论。

为了使用时间变化的权重来增加时间步长并减少噪声，让我们重新访问图6和图7中所示的模拟运行，但在稍微不同的情况下作出。为了突出全非线性模拟和部分线性化算法之间的相似性，我们在代码中设置 $\phi(m, n) = \phi^*(m, -n)$ 。这个约束在一定程度上模拟了剪切系统，并在之前的研究中进行了详细研究[5, 6, 8, 9, 18]。通过这样做，我们消除了+和-模式之间的能量交换，这被认为主要是由非线性速度空间和非线性 κ 效应引起的。因此，三波耦合过程，在这个过程中，+和密度模式的非线性 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 耦合导致了电子（和离子）的(2,0)-模态密度扰动，成为模拟中的主要非线性过程。结果如图8所示。在这里，理论预测的线性频率和增长率与之前相同，非线性饱和水平由[29]给出。

$$\left| \frac{e\phi}{T_e} \right| = \frac{\sqrt{\pi} \omega_r (\omega_* - \omega_r)}{2 k_{\parallel} \sqrt{m_i/m_e} k_{\perp}^2 \rho_s^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2 / 2)} \simeq 0.72\%$$

简化的准线性理论给出了 $|e\phi/T_e| = \text{Im}(\omega/\Omega_i)/(k_{\perp} \rho_s)^2 = 0.78\%$ [5]，其中 ω_r 是真实频率。虽然测量到的真实频率（ $\omega_r \simeq 0.06$ ）和饱和振幅（ $|e\phi/T_e| \simeq 0.6\%$ ）与理论预测非常一致，但线性增长再次完全被噪音掩盖。这是因为饱和振幅几乎与之前讨论的固有噪音水平0.66%相同。波的相速度为 $v_{ph} = \omega_r/k_{\parallel} = 0.17 v_{te}$ 。由于 $\omega_r \ll k_{\parallel} v_{te}$ ，可以利用基于绝热电子响应的权重方案来改善模拟等离子体的数值性质，即增加时间步长并减少噪音。

6.1. 线性化 E_{\parallel} 模型

为了实现线性化 E_{\parallel} 模型的这些目标，有一种简单的方法是利用常见的近似，即快速电子在微扰方式下绝热地对波动做出响应，同时保持它们的零阶分布 $f^{(0)}$ 不随时间变化（因此，对于均匀加载情况，快速粒子的分布保持空间均匀）。然后，我们可以假设具有 $|v_{\parallel j}^{(0)}| \gg v_{ph}$ （ $\equiv \omega/k_{\parallel}$ ）的粒子的轨迹遵循方程（10b）和

$$\frac{d\mathbf{x}_j^{(0)}}{dt} = 0 \quad (17)$$

其中， v_{ph} 代表感兴趣的最高“相关”相速度。换句话说，我们无需完全推动快电子，尽管仍会考虑到其绝热响应。通过去除零阶自由流动，我们不仅摆脱了由 ω_H 模式和当 $v_{ph} < v_{te}$ 时的通常Courant条件 $k_{\parallel} v_{te} \Delta t < 1$ 所施加的限制。最重要的是，与快电子方程（12）中的单位项相关的内在数值噪声主要因素现在完全被抑制了。使用对离子和慢电子使用方程（8）和（10），其中 $|v_{\parallel j}^{(0)}| \leq 0.3 v_{te}$ ，以及对快电子使

用方程 (9), (17) 和 (10b), 其中 $|v_{\parallel j}^{(0)}| > 0.3v_{te}$, 分布由方程 (12) 给出, 且 $\Omega_e \Delta t = 5.45$ 的模拟运行显示出明显的线性增长, 但其稳态波动水平略低于图8的水平。这是因为在模拟中, 无法用有限数量的粒子准确表示绝热粒子的零阶背景分布。在此方案中, 快粒子的密度贡献来自单位项, 是时间上的不为零但恒定的值。

更好的处理无碰撞情况的方法是使用方程(12)和(16)来考虑快速粒子, 并替换结果,

$$(n^e)_{\text{fast}} = \text{erfc}(v_{\parallel \text{cut}})(1 + e\Psi/T_e)n_0, \quad (18)$$

直接转换为回旋动理学泊松方程, 其中 erfc 是补偿误差函数, $v_{\parallel \text{cut}} = 0.3v_{te}$ 是截止速度。因此, 我们只需要在相空间中填充慢电子和离子, 并且在代码中只推动这些粒子。这样可以大大节省计算资源。这种情况下的时间历史如图9所示。显然, 与图8中完全非线性的结果相比, 噪声水平大大降低, 但总体行为非常相似。在这种情况下, 初始噪声主要来自于 $v_{\parallel \text{cut}}$ 以下的电子的自由流动运动, 离子的贡献很小。线性阶段在不稳定性增长的两个数量级上清晰可见。现在让我们将该方案与每个时间步骤跟踪快速粒子的方案进行比较。(例如, 在碰撞和/或非线性平行加速重要且我们需要重新标记粒子时, 这是必要的。)在这里, 离子和慢电子仍然与之前相同地使用方程 (8), (10a) 和 (10b) 处理, 但是快速电子则使用方程 (10b) 和 (11) 推动, 并且其绝热权重由方程 (9) 给出。由于这是线性化的 E_{\parallel} 方案, 方程 (12) 用于分布。如前所述, 数值噪声源于方程 (12) 中的单位项, 其是由于 $d\mathbf{x}_j^{(0)}/dt = v_{1j}^{(0)}\hat{\mathbf{b}}$ 的自由流动而产生的结果。我们可以保持粒子运动的完整性并删除其对方程 (12) 中单位项的贡献, 原因是均匀加载的快速粒子的零阶轨迹具有时不变性质。

在0.8%的饱和振幅方面, 其值非常接近理论值。频率和增长率被测量为 $\omega_r + i\gamma = 0.04 + 0.008i$, 略低于线性预测值。这种差异可能是由于正常模式方法与模拟求解的初始值问题之间的差异, 以及在饱和之前的非线性效应造成的。图9中模拟的另一个有趣方面是时间步长。在 $\Delta t = 5.45$ 的情况下, 它满足 $\omega\Delta t (= 0.22) < 1$ 和 $k_{\parallel}v_{\parallel \text{cut}}\Delta t (= 0.59) < 1$ 的条件, 而且远大于迄今为止模拟运行中使用的 Δt 。这里的结果作为一个示例, 表明使用这种方案可以改善模拟等离子体的数值特性, 而不会损失物理效应。

现在让我们将该方案与在每个时间步长跟踪快速粒子的方案进行比较。(例如, 在碰撞和/或非线性平行加速度重要时, 我们必须重新标记粒子, 这时候这种方案就变得必要。)在这种情况下, 离子和慢电子仍然像之前那样使用方程 (8)、(10a) 和 (10b) 进行处理, 但是快速电子则使用方程 (10b) 和 (11) 进行推动, 并且它们的绝热权重由方程 (9) 给出。由于这是线性化的 E_{\parallel} 方案, 所以在分布上使用方程 (12)。正如前面所述, 内在的数值噪声源于方程 (12) 中的单位项, 是由于快速粒子的自由流动运动 $d\mathbf{x}_j^{(0)}/dt = v_{1j}^{(0)}\hat{\mathbf{b}}$ 的结果。我们可以保持粒子运动的完整性, 并消除它们对单位项的贡献, 而不是使用方程 (17) 来处理快速电子, 以使它们对方程 (12) 中的单位项的贡献变为时间无关。原因在于均匀加载的零阶轨迹具有时间不变性质。

$$\partial f^{(0)}(v_{\parallel} > v_{\parallel \text{cut}})/\partial t = 0 \quad (19)$$

即, 快粒子的背景分布在配置空间中保持均匀和不可压缩。在实践中, 我们可以在模拟中计算自洽场时, 要么保持快粒子的 $f^{(0)}$ 的时间无关部分, 要么完全忽略它。尽管在这种方案中时间步长必须减小, 但噪声水平仍然保持低水平。对于 $\theta = 0.01$ 、 $\tau = 4$ 、 $v_{ei} = 0$ 和 $\Delta t = 2.18$, 基于这种快速运动绝热电子方案的 ϕ_{\perp} 的时间历史如图10所示, 其中实际频率为 $\omega_r = 0.045$, 饱和振幅为 $|e\phi/T_e| \simeq 0.7\%$ 。除了线性阶段中噪声干扰稍微更突出外, 这些结果与图9中的结果非常相似, 其中使用方程(18)来解释绝热电子响应。

6.2. 线性化- E_{\parallel} & κ 模型

因为对于所有的粒子 (离子、慢电子和快电子) 零阶轨迹都由线性化的 E_{\parallel} 和 κ 算法的方程 (10b) 和 (11) 给出, 时间不变性质扩展到所有粒子, 现在变为

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

而方程 (13) 中的单位项可以忽略 (或设为常数), 以适用于所有粒子。当发生这种情况时, 仿真中的内在数值噪音将被完全消除。实际上, 我们将单位项中的1替换为一个非常小的常数, 以提供较低水平的人工噪音, 以促使物理不稳定性增长。我们使用方程 (8) 和 (14) 对所有粒子的受扰动量进行了仿真, 即未使用绝热近似, 并对 ϕ 施加对称条件, 参数取 $\theta = 0.01$, $\tau = 4$, $v_{ei} = 0$ 和 $\Delta t = 2.18$ 。为

了为仿真提供初始噪音，我们保留了由离子引起的 $f^{(0)}$ 贡献的时间变化。结果如图11所示。如预期，初始噪音水平比图9和图10要低，因为电子的自由流动运动已完全消除。（为了获得更低的初始噪音，可以引入人工扰动，而不使用离子流动噪音。）不稳定性的增长现在跨越了近三个数量级，其中 $\omega = 0.045 + 0.008i$ 和 $|e\phi/T_e|_{\text{sat}} \simeq 0.6\%$ 。线性增长几乎完美。（最为重要的是，不稳定性的线性和非线性行为几乎与参考文献[5]中的图4完全相同，该参考文献通过一个Vlasov模耦合代码解决了分布函数 f 在 (\mathbf{k}, q) 空间中的问题，即傅里叶变换的 $(\mathbf{x}, v_{\parallel})$ 空间。）由于存在 ω_H 振荡，使用目前的方案[10]可能无法增加时间步长。然而，我们始终可以使用方程（9），（10b），（11）和（15）中规定的算法处理快速电子以消除高频振荡。我们使用 $\Delta t = 2.18$ 进行了这样的运行，结果与图11中的结果几乎完全相同，只是 $|\phi_+|$ 的非线性振荡稍微更高一些。为了增加 Δt ，我们再次对快速电子使用方程（18），而只对离子和慢电子使用方程（13）。与图11中的相同参数（除了 $\Delta t = 5.45$ ）相比，我们再次重现了如图12所示的几乎相同的 ϕ_+ 时间历史。从图9-12的结果中，我们还可以得出结论，模拟中测量得到的频率和增长率略微偏离线性预测的原因是使用了正常模式方法来计算频率和增长率，而模拟解决了一个初始值问题。

6.3. 比较和讨论

让我们现在使用快速电子响应的直接替代方案，将方程（18）代入无对称条件 $\phi(m, n) \neq \phi^*(m, -n)$ 的回旋动理学方程中。图13显示了线性化的 $-E_{\parallel}$ 运行中， $\tau = 4, \theta = 0.016 v_{\text{ci}} = 0, \Delta t = 2.18$ 和 $v_{\parallel \text{cut}} = 0.3 v_e$ 时 ϕ_+ 的时间演化，其中使用方程（8），（10a），（10b）和（12）计算了离子和慢电子的响应。演化与图7中所示的相似，但噪声大大减小。这也证实了当 k_{\parallel} 很大时，速度空间的非线性确实对不稳定性的饱和非常重要。（当我们在相同的模拟中使用 $\Delta t = 5.45$ 时，观察到了数值不稳定。可能的原因是由于大的饱和振幅，某些模式满足 $k_{\perp} \mathbf{V}_{E \times B} \Delta t > 1$ 。）对应的低噪声/长时间步长的线性化 $E_{\parallel} \& \kappa$ 运行再次无法以适当的水平饱和，其中一个模式主导另一个模式。这种行为可能与在流体模拟中观察到的流结构有关 [30]。

虽然上述方案中，将快速电子响应直接代入回旋动理学泊松方程在增加无碰撞等离子体的 Δt 时效果良好，但在必须跟踪快速粒子的情况下，应该探索使用轨道平均方案[28]的可能性。除了碰撞和平行加速度之外，磁场剪切和三维几何结构的存在，使得存在 $k_{\parallel} = 0$ 的区域，可能也使其成为必要。这是因为当 k_{\parallel} 接近零时，我们可能无法对快速粒子使用 $v_{\parallel \text{cut}}$ 。然而，在存在剪切的系统中， ω_H 模式停止存在[10]，轨道平均方案仍然适用。

本节所描述的各种模型需要不同程度的实证验证。当用于所有粒子时，线性化的 E_{\parallel} 和 κ 模型可以被视为在扰动尺度远小于平衡径向尺度的范围中的严格模型，这是回旋动理学排序中的一个要素。因此，只有当回旋动理学方程本身有效时，该模型才有效。另一方面，各种分割速度空间方案将需要经验测试，以确保在速度空间的某个区域中，模型使用时不会丢失重要的相互作用。这样的分割方案在许多情况下可能效果良好。例如，对于离子温度梯度驱动湍流而言，不稳定波的相速度约为离子热速度 v_{ti} 的量级。因此，为了模拟电子与不稳定波以及它们之间的拍动的相互作用，只需要在一个宽度为几倍 v_{ti} 的速度区间内考虑完全的(例如，部分线性化的漂移动理学)电子动力学。这个区间仅包含很小一部分电子，并且电子在其边界处的Courant条件比完整电子群的条件要容易满足得多。

7. 总结和结论

在本文中，我们开发了部分线性化的粒子模拟算法，其中粒子的权重是随时间变化的。这些算法被应用于去除回旋动理学模拟中选择的非线性因素，以评估这些非线性因素的重要性，并抑制内在的数值噪声，增加模拟中的时间步长 Δt 。（大网格间距的问题将在其他地方讨论。）

正如我们在1987年首次报道的那样[7]，并且如图1和图2所示，去除平行加速非线性对小 θ ($\equiv k_{\parallel}/k_y \ll 1$) 情况下漂移波的回旋动理学模拟结果没有显著的定性影响[6]。这可以通过我们之前的工作[8,9]中所做的论证来理解。简而言之，当波动水平达到一定点时，饱和现象发生，此时(线性)非共振离子的粒子通量与共振电子的粒子通量达到平衡。从图8和图9-12的比较可以看出，在满足 ϕ 的对称条件的情况下，低噪声/长时间步部分线性化算法对于捕捉更大 θ 情况下漂移不稳定性的基本物理也是足够的。此外，粒子代码和Vlasov模式耦合代码的结果一致性证明了 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流引起的三波耦合仍然是这些情况下非线性饱和的主要原因。另一方面，如图6和图7所示，当 θ （或 k_{\parallel} ）较大且去除 ϕ 的对称条件时，平行加速非线性对饱和有所影响。目前尚无针对这种情况的定量正确理论。在本研究中，我们将新的算法应用于产生半相干态的模拟。它们用于更复杂几何形状下的更湍流态将在其他地方进行报告。

对于空间上的（半）相干态，发现在Lee等人[5]、Federici等人[6]和Lee和Tang[18]的模拟中，所谓的多尺度模型[10]中非线性项的消除会导致线性增长达到饱和后的波的分泌增长。这是因为，与使用保守多尺度项的代码不同，密度的主要模式可以在相干对流的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 捕获粒子群的情况下无限增长。然而，如果施加了势函数的对称性条件，则可以消除半相干模拟中的分泌增长。对于导致湍流状态的模拟的初步结果表明，多尺度模型中的非线性项对湍流饱和态几乎没有影响。

正如多位算法作者强调的那样，我们的线性化 $E_{\parallel} \& \kappa$ 方案能够消除在标准粒子模拟中描述平衡时所涉及的噪声。对于小幅度涨落的模拟，这可以比标准粒子代码获得巨大的噪声优势。当径向涨落尺度远小于梯度尺度并且物理参数接近驱动涨落的失稳边缘时，就会出现这种情况。加权粒子方案的一个有趣扩展是速度空间分裂，其中在速度空间的不同子区域中使用不同的粒子运动响应或方程。通过假设快速粒子的权重是绝热的，可以从模拟中消除高频振荡，并且如我们在本文中所示，甚至可以消除由 Courant 条件施加的对 Δt 的限制。在电磁模拟中，这种技术特别有助于抑制快速电子的自由运动引起的数值噪声。这种技术在模拟接近边缘稳定性的情况下也有望特别有用，因为线性解析响应可能对大部分速度空间足够，因此非线性（回旋动理学或漂移动理学）动力学可能仅在狭窄的共振区域内需要。这个有趣的可能性目前正在研究中，并将在其他地方报道。

另一个现有算法的重要应用是可以进行有意义的比较[32]，比较回旋动理粒子代码和包含有限回旋半径效应的流体代码的结果。为了在粒子代码中考虑碰撞耗散效应，我们可以使用洛伦兹模型来描述电子碰撞[23,24]，并使用新开发的回旋动理模型来描述离子间碰撞[33]。

正如我们之前提到的，使用部分线性化算法进行噪声减小的方法是对最初用于完全线性化代码的加权粒子技术的修改和扩展[11]。Kotschenreuther [13]和Parker和Lee [14]开发了完全非线性的泛化方法，允许引入平行非线性。这些新颖的方法值得追求。在波动水平较小且平行非线性可忽略的区域，这些方案具有与我们的线性化 $E_{\parallel} \& \kappa$ 方案相同的噪声优势。如果波动选择增长到大幅度，这些方案中保留的平行非线性项变得重要，尽管在这个区域内与标准粒子模拟相比的噪声优势丧失了。

REFERENCES

- [1] J. M. Dawson, *Rev. Mod. Phys.* 55, 403 (1983).
- [2] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (McGraw-Hill, New York, 1985).
- [3] R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981)
- [4] T. P. Armstrong, R. C. Harding, C. Knorr, and D. Montgomery, *Methods of Computational Physics* 9, 29 (1970)
- [5] W. W. Lee, J. A. Krommes, C. Oberman, and R. A. Smith, *Phys. Fluids* 27, 2652 (1984)
- [6] J. F. Federici, W. W. Lee, and W. M. Tang, *Phys. Fluids* 30, 425 (1986).
- [7] A. M. Dimits and W. W. Lee, "Partially Linearized Gyrokinetic Particle Simulation of Drift Instabilities," *Proceedings, 12th Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, San Francisco, California, 1987, paper PW23.
- [8] A. M. Dimits, Ph.D. thesis, Princeton University, 1988
- [9] A. M. Dimits and W. W. Lee, *Phys. Fluids B* 3, 1558 (1991)
- [10] W. W. Lee, *J. Comput. Phys.* 72, 243 (1987).
- [11] J. A. Byers, "Noise Suppression Techniques in Macroparticle Models of Collisionless Plasmas," *Proceedings, Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, NRL, Washington, DC, 1970, p. 496
- [12] J. P. Freidberg, R. L. Morse, and C. W. Nielson, "Numerical Methods for Studying Linear Stability of Highly Inhomogeneous Plasmas," *Proceedings, Third Annual Numerical Plasma Simulation Conference*, Stanford University, CA, 1969.
- [13] M. Kotschenreuther, *Bull. Am. Phys. Soc.* 34, 2107 (1988); *Proceedings, 14th International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, Annapolis, MD, 1991, paper PT20.
- [14] S. E. Parker and W. W. Lee, *Phys. Fluids B* 5, 77 (1993).
- [15] B. I. Cohen, S. P. Auerbach, J. A. Byers, and H. Weitzner, *Phys. Fluids* 23, 2529 (1980)
- [16] W. W. Lee, *Phys. Fluids* 26, 556 (1983).
- [17] D. H. E. Dubin, J. A. Krommes, C. Oberman, and W. W. Lee, *Phys. Fluids* 26, 3524 (1983).
- [18] W. W. Lee and W. M. Tang, *Phys. Fluids* 31, 612 (1988).
- [19] R. D. Sydora, T. S. Hahm, W. W. Lee, and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.* 64, 2015 (1990).
- [20] W. M. Tang, *Nuclear Fusion* 18, 1089 (1978)
- [21] W. Horton, R. D. Estes, and D. Biskamp, *Plasma Phys.* 22, 663 (1980); W. Horton, *Phys. Rep.* 192 (1990).
- [22] E. A. Frieman and L. Chen, *Phys. Fluids* 25, 502 (1982)
- [23] R. Shanny, J. M. Dawson, and J. M. Greene, *Phys. Fluids* 10, 1281 (1967).
- [24] A. Boozer and G. Kuo-Petravic, *Phys. Fluids* 24, 851 (1981).
- [25] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973), Section 9.15.
- [26] W. W. Lee, T. S. Hahm, and J. V. W. Reynders, "Considerations of Electron Dynamics in a Gyrokinetic Plasma," *Sherwood Theory Conference*, paper 3D2, 1989.
- [27] J. V. W. Reynders, Ph.D. thesis, Princeton University, 1992.
- [28] B. I. Cohen, T. A. Brengle, D. B. Conley, and R. P. Freis, *J. Comput Phys.* 38, 45 (1980).
- [29] A. M. Dimits, *Phys. Fluids B* 2, 1768 (1990).
- [30] J. F. Drake, P. N. Guzdar, and A. B. Hassam, *Phys. Rev. Lett.* 61, 2205 (1988).
- [31] T. Tajima and F. W. Perkins, in *Proceedings, Sherwood Fusion Theory Conference*, 1983, paper 2P9.
- [32] A. M. Dimits, J. F. Drake, and W. W. Lee, "Kinetic Effects on Ion Temperature Gradient Driven Turbulence," *Sherwood Theory Conference*, 1990, paper 3D27.
- [33] X. Q. Xu and M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids B* 3, 627 (1991).