A fully nonlinear characteristic method for gyrokinetic simulation

S.E.Parker, W.W.Lee

Abstract

一个新的方案，通过一组沿特征线演化扰动部分的分布函数来解决完全非线性的回旋动理学方程。这种低噪声非线性特征线方法用于粒子模拟是部分线性加权方案的延伸，并且可以被认为是对现有的δf方法的改进。该新方法的一些特点包括能够保留所有非线性项，特别是与速度空间相关的项，采用常规的粒子加载技术，并且在数值收敛极限下保留原始回旋动理学系统的守恒性质。使用新方法研究了一个孤立了平行速度非线性的一维漂移波模型。给出了一个饱和振幅的模耦合计算结果，与模拟结果符合良好。最后，将该方法扩展到一般几何的电磁回旋动理学方程中。

1. 介绍

在等离子体动力学模拟（以及粒子在电场中模拟）中存在一个重大问题，通常需要使用相当大数量的粒子来解决感兴趣的物理问题。担忧的是，由于有限数量的粒子导致的热涨落（或噪声）和两到六维相空间的采样（或分辨率）不足可能会模糊所建模的物理过程。例如，托卡马克等离子体中存在的宽带密度涨落通常具有小于1%的平均水平。因此，为了正确解析此类等离子体，需要使用非常大数量的粒子，使得$N_{\text{tot}} > 1/(\delta n/n)^2 \approx 10^6$。[1]早期，Beyers等人认识到通过“平静的初始状态”[2,3]和通过在平衡轨迹上跟踪扰动量的线性化技术[2,4,5]可以改善噪声特性。最近，Dimits和Lee [6]开发了一种线性和“部分线性”的低噪声方案，通过允许粒子权重随时间演化。在线性方案中，粒子权重沿着平衡轨迹变化。在部分线性化方案中，通过将该漂移添加到平衡（零阶）轨道中，保留了$E\times B$非线性。也进行了其他研究[7,8]，这些方法通常被称为δf方法，但迄今为止没有报告保留了平行速度非线性的方案。因此，这些方案的正确性尚未得到验证。

这里提出的非线性特征线方法在思路上与以前的加权方案相似；[6]但是演化了完全非线性的轨迹，并且采用粒子权重的一致演化方程。我们首先介绍了静电场平板情况下的新方法及其粒子数、动量和总能量的守恒性质。然后，我们展示了一个无剪切平板上的简单一维漂移波不稳定性的回旋运动模拟。该模型隔离了$E_\parallel \partial_{v_\parallel} \delta f$的非线性，并使我们能够研究相关的非线性物理。我们提出了一种三波模耦合理论，给出饱和水平$e|\phi|/T_e \approx 5.5\gamma^2/\left(k_\parallel v_{te}\right)^2$，远低于Sagdeev和Galeev的计算结果[9]，$e|\phi|/T_e \approx \frac{1}{4}\left(k_\perp \rho_s\right)^2$。在线性频率和增长率方面，理论与模拟之间存在极好的一致性。非线性饱和的幅度也与我们的理论预测一致。还研究了模拟等离子体的守恒性质。结果发现，只有在使用足够多的粒子、小时间步长和小网格单元大小时，才能在模拟的非线性阶段实现数密度、动量和能量的守恒。最后，我们讨论了非线性特征线方法在一般电磁（非均匀平衡磁场）回旋运动方程中的应用。

2. 非线性特征线方法

正如之前提到的，先前已经研究过只演化扰动部分分布函数的方案[6-8]。人们认识到，通过只演化扰动部分分布δf，可以消除因使用有限粒子数而产生的平衡态f_0的初始噪声[2,4-6,8]。我们在这里提出的方案类似于先前提出的δf方法[7,8]，但我们考虑到了特征线的离散表示，就像部分线性化方案一样[6]。

让我们开始以熟悉的方式写出分布函数$f(\mathbf{R}, v_\parallel, \mu, t)$，其中$f = f_0 + \delta f$，其中$\mathbf{R}$是导引中心坐标，$v_\parallel$是平行于磁场的速度，$\mu \equiv v_\perp^2/(2\Omega)$是磁矩并被假定为常数($\dot{\mu} = 0$)，$\Omega \equiv eB/(mc)$，$f_0$是平衡背景分布且不随时间变化，$\delta f$是分布的扰动时间相关部分。对于$(k_\perp \rho_i)^2 < 1$，静电场下的回旋动理学方程为[10,11]。

$$\partial_t \delta f + \mathbf{v}_E \cdot \nabla \delta f + v_\parallel \nabla_\parallel \delta f + (q/m) E_\parallel \partial_{v_\parallel} \delta f = -\mathbf{v}_E \cdot \nabla f_0 - (q/m) E_\parallel \partial_{v_\parallel} f_0 \tag{1}$$

其中，$\rho_i \equiv v_{ti}/\Omega_i$ 是离子的回旋半径，$\mathbf{v}_E \equiv c\mathbf{E}/B \times \hat{\mathbf{b}}$ 是 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移。在小 $(k_\perp \rho_i)^2$ 极限下，相应的回旋动理学泊松方程为

$$(\rho_s/\lambda_{\mathrm{D}})^2 \nabla_\perp^2 \phi = -4\pi e(n_i - n_e), \tag{2}$$

其中 $\rho_s \equiv \sqrt{\tau}\rho_i, \tau \equiv T_e/T_i, \lambda_{\mathrm{D}} \equiv \sqrt{T_e/(4\pi n_0 e^2)}$ 是德拜长度,且

$$n = \int \delta f dv_\parallel d\mu \tag{3}$$

方程(1)的特征线（或轨迹）是

$$\dot{v}_\parallel = (q/m)E_\parallel, \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = v_\parallel \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_E, \tag{5}$$

而且沿着这些特征线， δf 正在改变，因为方程（1）的右边不为零。δf 沿着轨道的演化方程是

$$\delta f = -\nabla_E \cdot \nabla f_0 - (q/m)E_\parallel \partial_{v_\parallel} f_0. \tag{6}$$

现在，我们只需要解方程（4）-（6）。乍一看，有人可能考虑加载大量的特征线（或粒子），每个特征线都有自己的δf，在时间上演化系统，然后将δf加权到网格中以获得场量。然而，我们需要仔细检查δf如何在数值上表示，并确定是否正确地解决了方程(1)或(6)。

我们从定义“粒子权重”开始

$$w_i \equiv \left.\frac{\delta f}{g}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i, v_\parallel = v_{\parallel i}, \mu=\mu_i, t} \tag{7}$$

其中δf是物理分布的扰动部分，g是数值上加载和演化的粒子分布函数。在这一点上，g不一定等于物理分布函数。类似于部分线性加权方案[6]，不同的是现在演化的是完全非线性轨迹。在模拟中，δf表示为

$$\delta f(\mathbf{R}, v_\parallel, \mu, t) = \sum_{i=1}^{N} w_i \boldsymbol{S}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_i)\delta(v_\parallel - v_{\parallel i})\delta(\mu-\mu_i) \tag{8}$$

其中N是粒子的总数，S是粒子的形状函数。根据方程(7)中w_i的定义，方程(8)很容易得到，使用$g = \Sigma_{i=s}^{N}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_i)\,\delta\left(v_\parallel - v_{\parallel i}\right)\delta(\mu-\mu_i)$，并假设所有网格量相对于粒子尺寸具有小的空间（或长波长）变化，从而可以使用以下关系：

$$\sum_i u(\mathbf{R}_i) S(\mathbf{R}-\mathbf{R}_i) = \sum_i [u(\mathbf{R}) - (\mathbf{R}-\mathbf{R}_i)\cdot\nabla u(\mathbf{R}) + \cdots] S(\mathbf{R}-\mathbf{R}_i) \tag{9}$$

$$\approx u(\mathbf{R}) \sum_i S(\mathbf{R}-\mathbf{R}_i) \tag{10}$$

其中 u 是任意的空间函数。这类似于假设粒子的空间形状是一个 δ 函数。在模拟中，每个粒子（或轨道）与一个相空间体元相对应。该体元的形状可能会扭曲，但体积保持不变。

接下来，通过对方程（7）进行全时导数，并利用$\dot{g}=0$以及方程（6），我们得到

$$\dot{w}_i = -\left(\mathbf{v}_E \cdot \frac{\nabla f_0}{g} + \frac{q}{m} E_\parallel \frac{\partial_{v_\parallel} f_0}{g}\right)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_i, v_\parallel = v_\parallel, \mu=\mu_i, t} \tag{11}$$

解方程 (11) 的一种方法是注意到函数 g 满足完全非线性的回旋动理学方程，因此 g 沿轨道是恒定的。然后可以使用关系式 $g\left(\mathbf{R}_i, v_{\parallel i}, \mu_i, t\right) = g\left[\mathbf{R}_i(t=0), v_\parallel(t=0), \mu_i, t=0\right]$。由于初始加载是任意的，例如，可以加载一个与相空间变量无关的均匀分布 $g(t=0)=\mathrm{const}$，这似乎是 Kotschenruether 提出的方法[8]。

通常对于低频微不稳定性，共振速度小于粒子的热速度。因此，速度空间中的非均匀加载（例如，Maxwellian分布）比均匀加载更加理想，因为在波与分布函数$(\omega/k_\parallel = v_\parallel)$共振的地方存在更高的相空间分辨率（即更多的粒子）。现有δf方案[8]中与非均匀加载相关的一个问题是需要额外的粒子数组（或计

算）来跟踪$g_i(t=0)$。此外，对于初始位于分布尾部处具有较小$g_i(t=0)$值的粒子，即方程(11)的分母，可能会导致数值困难。这些是使用方程(11)来评估w_i以及$g_i=g_i(t=0)$可能具有的一些潜在缺点。

我们现在介绍非线性特征线方法，这种方法可以避免这些问题。首先，与常规粒子模拟中一样，我们将粒子使用平衡分布$g(t=0)=f_0$进行加载（其中g是粒子分布）。然后，在假设适当的数值分辨率的前提下，仿真过程中的分布满足$g=f=f_0+\delta f$。利用关系式$1/f=(1/f_0)(1-\delta f/f)$，结合式(8)和(11)，我们得到

$$\dot{w}_i=-(1-w_i)\left(v_E\cdot\frac{\nabla f_0}{f_0}+\frac{q}{m}E_\parallel\frac{\partial_{v_\parallel}f_0}{f_0}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i,v_\parallel=v_{\parallel i},\mu=\mu_i,t}. \tag{12}$$

方程(12)以及方程(4)，(5)和(8)是新非线性特征线方法的关键。像往常一样，使用方程(2)和(3)来完成模拟时间循环。方程(12)中的平衡梯度是使用平滑解析表达式f_0来评估的。除了作为零阶轨迹扰动出现的非线性项[方程(4)，(5)中的$E_\parallel$和$\mathbf{v}_E$]外，在方程(12)中权重的演化中还有额外的因子$(1-w_i)$。这个因子对于非线性物理和模拟等离子体的守恒性质非常重要，它描述了源项中f_0和$f(t)$之间的差异，如方程(11)所示。对于$g_i(t=0)\neq f_i(t=0)$的任意加载情况，方程(12)右侧的因子$(1-w_i)$需要替换为因子$[f_i(t=0)/g_i(t=0)-w_i]$。在这种情况下，需要额外的粒子数组来跟踪常量$f_i(t=0)/g_i(t=0)$。对于大多数应用程序，$\delta f(t=0)/f(t)=0)$非常小，因此$f_0\approx f(t=0)$，并且区分平衡态f_0和初始条件$f(t=0)$是没有必要的。

现在让我们讨论与新的非线性加权方案相关的总粒子数、动量和总能量的守恒。首先，我们通过对方程(1)取零速度矩来研究"粒子数"的变化。利用方程(8)并假设w_i的和在初始时几乎为零，我们可以得到

$$\sum_i w_i(t)=0 \tag{13}$$

动量守恒可以通过对方程（1）进行一阶速度矩求得，

$$\partial_t\left(\int v_\parallel\delta f d\mathbf{R}d\mu dv_\parallel\right)-\frac{q}{m}\left(\int nE_\parallel d\mathbf{R}\right)=0 \tag{14}$$

由于(2)式和(8)式，

$$\sum_\alpha m_\alpha\sum_i v_{\parallel\alpha i}w_{\alpha i}=0 \tag{15}$$

在公式（3）中给出了n，α代表粒子。为了计算能量的变化，我们对离子和电子的方程（1）进行了二阶速度矩的计算，并使用了公式（2）。同样，如果在$t=0$时将粒子权重和场设置为零，则模拟应该保持以下能量守恒：

$$\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{2}\sum_i\left(\mu_{\alpha i}+v_{\parallel\alpha i}^2\right)w_{\alpha i}+\left(\frac{\rho_s}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right)^2\frac{1}{8\pi}\int|\nabla_\perp\phi|^2d\mathbf{R}=0 \tag{16}$$

我们期望在大量粒子和良好的空间和时间分辨率的极限下，方程（13）-（16）适用于模拟等离子体。在下一节中，我们将检验在有限粒子数的模拟中这些守恒性质的有效性。这个重要的练习既是对所提出方案的形式正确性的验证，也是对其实用性的测试。最重要的是，我们将展示该方案是传统粒子方法的有用替代方案。

3. 一维漂移波模拟

我们现在使用新方法提供模拟结果，检验线性和非线性物理以及守恒性质。为简单起见，我们选择一个一维漂移波问题作为例子。在这个一维模型中，没有$E\times B$非线性，因此$E_\parallel\partial_{v_\parallel}\delta f$非线性是饱和的唯一机制。这是在之前的方案[6]中被忽略的项，假设在更实际的二维和三维几何中，$E\times B$非线性是主导的饱和机制。然而，在具有细长模式的情况下（例如，$k_x<k_y$），这可能并不正确，我们稍后将讨论。此外，正如引用文献10和11所建议的，$E_\parallel\partial_{v_\parallel}\delta f$非线性对于梯度驱动的微不稳定性的稳定输运可能很重要。

在这个问题中，一个空间维度y是垂直于空间梯度的，梯度在x方向，并且几乎垂直于磁场，$\hat{\mathbf{b}}=\hat{\mathbf{z}}+\theta\hat{\mathbf{y}},\theta<1$。在这里，$x$和$z$都是扰动量的可忽略坐标。对于离子和电子的一维版本的方程(1)为：

$$\partial_t \delta f + \theta_{v_\parallel} \partial_y \delta f - \alpha\theta \partial_y \phi \partial_{v_\parallel} \delta f = -\kappa \partial_y \phi f_0 - \alpha\theta \partial_y \phi \left(v_\parallel / v_t^2\right) f_0, \tag{17}$$

其中$\alpha = (1, -m_i/m_e)$分别表示离子和电子；我们使用无量纲的磁流体动力学单位$y/\rho_s \to y, \Omega_i t \to t, v_\parallel / c_s \to v_\parallel$和$e\phi/T_e \to \phi$。对于这个问题，我们使用$\kappa \equiv -\partial_x \ln n_0$，并假设了Maxwell分布的平衡态。在一维中，磁流体动力学的泊松方程或者"准中性"条件为：

$$\partial_{yy}\phi + \delta n_i = \delta n_e \tag{18}$$

我们使用在第II节中解释的新方法进行一维回旋动理学模拟来求解这些方程。此外，我们还采用了一种利用Fibonacci数列的安静启动技术[3]。为了进一步减少噪音，我们还采用了一个截断方案[6]：

$$w_i = \phi\left(x_i\right) \tag{19}$$

对于快速粒子，$v_{\parallel i} \gg \omega / k_\parallel$。这里，$\phi_n$初始扰动，其中$n$是感兴趣的傅立叶谐波。由于我们的目的是研究非线性电子动力学，我们在模拟中也线性化了离子运动，通过在方程（17）中舍弃$\partial_{v_\parallel} \delta f$项来实现，在方程（4）中让$\dot{v}_\parallel = 0$，并在方程（12）中去掉$(1 - w_i)$修正。

第一次运行的参数如下所示: $T_e/T_i = 1, m_i/m_e = 1837$, 磁场倾斜角度 $\theta = 0.01$, 粒子尺寸为 $1 (= \rho_s)$, 时间步长为 $\Delta t = 1, \kappa = 0.2$, 系统尺寸为 $L = 16\Delta x$, 网格尺寸为 $\Delta x = 0.5$, 总粒子数 $N_{\text{tot}} = f_{16} = 987$, 其中 f_{16} 表示第十六个斐波那契数。对于速度 $v_\parallel \geqslant 1.8 v_{te}$ 的粒子，使用公式 (19) 计算它们的权重。在选择这些参数的情况下，支配不稳定模式是 $n = 1$ 谐波或 $k = 2\pi/L \simeq 0.8$ 模式。

图1(a)展示了$n = 1$傅里叶模式的静电势随时间的演化。其中实部为实线，虚部为虚线。在线性和非线性演化的平均过程中，模式频率为$\omega \simeq 0.075$。图1(b)展示了该模式幅度随时间的对数变化。明显可见呈现线性增长然后突然非线性饱和。测得的线性增长率为$\gamma \simeq 0.012$，饱和幅度为$\phi \simeq 1.1\%$。图2(a)展示了在$t = 500$时的空间平均扰动$\delta f_{e0} (\equiv \langle \delta f \rangle)$，并给出了在$v_\parallel = 0.2 v_{te}$处的共振点。

将 δf_{e0} 在 $v_\parallel$ 中积分，我们得到 $|\Sigma_i w_i / N_{\text{tot}}|$ 在饱和时 ($t = 500$) 大约为 1.3×10^{-4}，在运行结束时增加了2.5倍；这样粒子守恒就偏离了公式 (13)。这个线性演化阶段的差异可以从以下事实中理解：从公式 (17) 得到的一维连续方程在 x 中不包含通常的粒子通量项。为了验证这一点，我们采用了来自Rath和Kaw的一维方程进行了模拟[12]，通过将用于 κ 相关项的 f_0 替换为总 f，可以从公式 (17) 中获得这一方程。在那个模拟的线性阶段，粒子守恒几乎完美，只有在非线性阶段由于数值噪声而出现了不准确性。由于与粒子非守恒相关的问题很小，并且公式 (17) 与更一般的方程公式 (1) 密切相关，我们选择不进一步使用Rath-Kaw方程。

模拟的另一个有趣方面是，当我们求解方程（17）时，还同时遵循方程$\dot{f} = 0$的演化，使用相同的运动方程组和

$$f\left(y, v_\parallel, t\right) = \sum_{i=1}^{N} S\left(y - y_i\right) \delta\left(v_\parallel - v_{\parallel i}\right). \tag{20}$$

总分布函数f在$t = 500$时的示意图如图2(b)所示。由于其不规则性以及δf_{e0}几乎无法辨认，这使得使用该信息进行守恒性诊断，更不用说进行场的求解，变得不可能。

由于使用线性离子响应，模拟中无法满足方程(15)给出的动量守恒。然而，我们可以使用方程(14)来检查类似的性质。在一维系统中，它变为 [13]

$$\frac{d}{dt}\left\langle \int v_\parallel \delta f_e dv_\parallel \right\rangle + \frac{m_i}{m_e}\theta \left\langle \Gamma_e \right\rangle = 0, \tag{21}$$

其中$\Gamma_e \equiv -\partial_y \phi n_e$是粒子通量，$\langle \cdots \rangle$表示空间平均。因此，在模拟中我们得到了动量变化率与粒子通量之间的关系，如图3(a)所示。在此，使用了频率滤波器来平滑dp_e/dt的数据，并且归一化常数n_0是平均数密度。显然，通量的数值噪声相当大，并且这两个量之间存在$O\left(10^{-4}\right)$的差异。根据公式(16)，能量守恒变为

$$\left\langle \int \delta f v_\parallel^2 dv_\parallel \right\rangle / n_0 v_t e^2 + \left\langle \left|\partial_y \phi\right|^2 \right\rangle = 0 \tag{22}$$

这在图3(b)中显示。再次，结果非常嘈杂，动能和场能之间的差异也为$O\left(10^{-4}\right)$。然而，考虑到模拟中使用的粒子数量很小，这些结果实际上是相当不错的。我们提醒读者，这是通过使用(1)非线性特征线方法、(2)安静起始技术和(3)非随机初始扰动来实现的。

然而，非线性饱和后的守恒性误差有些麻烦，因为我们的最终目标是使用此方案研究长时间稳态现象。为了改善这些结果，我们进行了一系列运行，并发现需要大幅提高数值精度。为了说明这一点，我们现在展示一个运行结果，其中$\Delta t = 0.2$，$N_{\text{tot}} = 46368$个粒子在一个64网格系统（$\Delta x = 1/8$）上，粒子大小为$\rho_s/2$。所有其他参数保持不变。图4(a)和4(b)显示了模式的演化历史。与前一情况相比，模式的频率（在演化的线性和非线性部分上取平均）略微增加到$\omega \approx 0.088$，饱和水平略微降低到$\phi \simeq 1\%$，而增长率保持在$\gamma \simeq 0.012$。一个重要的区别是，当粒子被捕获并执行反弹运动时，非线性阶段的数值（包括噪声）误差保持较小。这一特征在图5(a)和5(b)中的扰动分布函数δf_{e0}和f的诊断中清楚地表现出来。然而，对于在$t = 500$时测量的扰动分布，速度空间中的不对称性仍然存在，并且饱和时总粒子数的相应差异$|\Sigma_i w_i/N_{\text{tot}}|$约为$1.35 \times 10^{-4}$，与之前较少粒子运行的情况类似。现在的区别是，这种差异在饱和后并没有恶化。该差异的来源在前面已经讨论过。然而，图5(a)和5(b)中的分布的整体平滑性来自数值精度的提高。有趣的是，即使具有这种类型的精度，δf_{e0}的扰动在总f诊断图5(b)中仍然不太可辨。这是因为扰动仅略高于热涨落水平$\phi = 1/\sqrt{N_{\text{tot}}}k \approx 0.6\%$的两倍。因此，根据引用文献6，可以推测即使使用这么多粒子进行总f模拟，结果也不会像这个新方案那么干净。然而，由于没有可用的方案来解决形如$\dot{f} = -\kappa \partial_y \phi f_0$的方程，这个观点无法进一步验证。该情况下对应的流量和能量诊断如图6(a)和6(b)所示。从图中可以看出，这两个量的守恒性接近完美。这里的暗示似乎是，为了获得合理的守恒性质，仍然需要使用大量的粒子，并具备足够的空间和时间分辨率。另一方面，传统的粒子模拟将需要更多的资源。然而，如果只对线性增长和非线性饱和感兴趣，现在的方案在计算资源上能够显著节省。

4. 非线性饱和

最不稳定模式的非线性饱和(例如，在上述的仿真结果中，将 $n = \pm 1$ 看成是由于平行速度的非线性质引起的，而不是由于$E \times B$ 对流引起的)。普遍认可的是，$E \times B$非线性质在简单的一维模型中是不存在的，在（更真实的）高维模型中是饱和驱动波的主要非线性质。然而，正如文献10中所证明的，平行非线性质确实在饱和中发挥了作用。第三节的仿真结果表明，饱和水平要远低于 $e|\phi|/T_e \sim \frac{1}{4}(k_\perp \rho_s)^2$，正如Sagdeev和Galeev所预测的那样。此外，在托卡马克几何中，漂移型模式在径向上是伸长的($k_r < k_\theta$)，至少在线性阶段应该会减少 $E \times B$ 对饱和的影响。另外，平行非线性质可能在确定由微湍流引起的稳态输运过程中起重要作用。一维模型使我们能够孤立平行非线性质并研究相关物理问题。

在本节中，我们考虑了电子的两种最快增长模式($n = \pm 1$)与δf_0之间的三波耦合的简单情况。饱和发生在电子分布在共振点$k_\parallel v_\parallel = \omega$处变陡的时候。由于$E_\parallel \partial_{v_\parallel} \delta f$非线性，势能的饱和幅度是利用准线性估计得到的，这与参考文献10中给出的$E \times B$非线性饱和漂移波的计算类似。以下，我们使用下标"1"来标记最快增长模式及其共轭复数形式，其中$k = 2\pi n/L$，L为系统长度，n为傅里叶模式数。[注意$\delta f_1(k) = \delta f_1^*(-k)$.]主导的漂移-动理学电子方程为。

$$\partial_i \delta f_1 + i k_\parallel v_\parallel \delta f_1 + i\left(\omega_* - k_\parallel v_\parallel\right)\phi_1 f_0 + i\left(m_i/m_e\right) k_\parallel \phi_1 \partial_{v_\parallel} \delta f_0 = 0, \tag{23}$$

$$\partial_i \delta f_0 - 2\left(m_i/m_e\right) k_\parallel \phi_1 \partial_{v_\parallel} \operatorname{Im}\left(\phi_1 \delta f_1^*\right) = 0, \tag{24}$$

其中，$\omega_* = \kappa k$（用回旋动理学单位表示），f_0是背景的 Maxwellian 分布，δf_0是由于模式耦合而导致的背景非线性变化。扰动电子密度为$\delta n_{e1} = \int \delta f_1 dv_\parallel$。对于离子，我们假设一种流体响应，因为$\left|\omega/k_\parallel\right| > v_{ti}$，离子密度的连续性方程变为：

$$\partial_t \delta n_{i1} + i\omega_* \delta n_{i1} = 0 \tag{25}$$

通过使用Vlasov（欧拉）模拟，可以求解方程（18）和（23）-（25），并且应该得到与前一节粒子模拟相同的结果。然而，为了得到解析估计，我们假设δf_1,n_{i1}和ϕ_1对$e^{-i\omega t}$有依赖关系，其中$\omega = \omega_r + i\gamma$，且$|\omega_r/\gamma| > 1$。然后，扰动可以表示为

$$\delta f_1 = \left(f_0 - \frac{\left(\omega_* - \omega_r\right)}{\left(k_\parallel v_\parallel - \omega\right)} f_0 - \frac{m_i}{m_e} \frac{k_\parallel}{\left(k_\parallel v_\parallel - \omega\right)} \partial_{v_\parallel} \delta f_0\right) \phi_1. \tag{26}$$

假设γ很小，我们可以使用以下关系式

$$\frac{1}{\left(k_{\|}v_{\|}-\omega\right)}=\frac{k_{\|}v_{\|}-\omega_r+i\gamma}{\left|k_{\|}v_{\|}-\omega\right|^2}\approx i\pi\delta\left(k_{\|}v_{\|}-\omega_r\right) \tag{27}$$

为了得到电子密度响应性

$$\delta n_{c1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta f_1 dv_{\|}=\left(1-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k_{\|}v_{te}}\left(\omega_*-\omega_r\right)-\frac{m_i}{m_e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k_{\|}}{\left(k_{\|}v_{\|}-\omega\right)}\partial_{v_{\|}}\delta f_0 dv_{\|}\right)\phi_1, \tag{28}$$

从这里我们得出以下的非线性色散关系：

$$1+k^2-\frac{\omega_*}{\omega}-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k_{\|}v_{te}}\left(\omega_*-\omega_r\right)-\frac{m_i}{m_e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k_{\|}}{\left(k_{\|}v_{\|}-\omega\right)}\partial_{v_{\|}}\delta f_0 dv_{\|}=0. \tag{29}$$

忽略非线性项（最后一个右侧项），我们得到熟悉的线性结果[10]。

$$\omega_r=\omega_l\equiv\omega_*/\left(1+k^2\right), \tag{30}$$

$$\gamma=\gamma_l\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(k_{\|}v_{te}\right)}\frac{\omega_l}{\left(1+k^2\right)}\left(\omega_*-\omega_l\right). \tag{31}$$

模拟预测的线性频率和增长率分别为$\omega_l=0.0976$和$\gamma_l=0.0134$，这与图1和图4中显示的结果非常接近。通过对δf_1的线性响应，可以估算背景的非线性响应。

$$\delta f_0=\pi\left(m_i/m_e\right)\left(k_{\|}/\gamma\right)\left|\phi_1\right|^2\left(\omega_*-\omega_l\right)\partial_{v_{\|}}\left[\delta\left(k_{\|}v_{\|}-\omega_l\right)f_0\left(v_{\|}\right)\right]. \tag{32}$$

将方程（32）代入方程（29），我们得到关于ϕ_1振幅的非线性色散关系：

$$1+k^2-\frac{\omega_*}{\omega}-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k_{\|}v_{te}}\left(\omega_*-\omega_l\right)\left[1-2\frac{k_{\|}^4}{\gamma_l^4}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2\left|\phi_1\right|^2\right]=0. \tag{33}$$

从这个方程，再次假设$|\gamma/\omega|<1$，我们得到相同的实频率$\omega_r=\omega_l$，但是对于增长率的准线性值为

$$\gamma=\gamma\left\{1-2\left[\left(k_{\|}v_{te}\right)^4/\gamma_l^4\right]\left|\phi_1\right|^2\right\}. \tag{34}$$

在饱和时$\gamma=0$，势能的饱和水平可以表示为

$$\left|\phi_1\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma_l^2}{\left(k_{\|}v_{te}\right)^2} \tag{35}$$

使用模拟参数 $k_{\|}=\theta 2\pi/L=0.00785, m_i/m_e=1837$ 和 $\gamma_l=0.0134$，预测的饱和振幅为 $\left|\phi_1\right|=0.11\%$，比图1和图4中模拟结果的水平小一个数量级。因此，上述近似过度高估了平行非线性对饱和的影响。

接下来，为了改进这个初步估计，我们使用谐振分母的原始形式，即方程（27），同时使用完整的非线性项 δf_1 来计算 δf_0，即，

$$\delta f_0=\frac{m_i}{m_e}k_{\|}\left|\phi_1\right|^2\left(\omega_*-\omega_r\right)\partial_{v_{\|}}\left[\frac{f_0}{\left|k_{\|}v_{\|}-\omega_r\right|^2}\times\left(1+\frac{m_i}{m_e}\frac{k_{\|}}{\left(\omega_*-\omega_l\right)}\frac{\partial_{v_{\|}}\delta f_0}{f_0}\right)\right]. \tag{36}$$

如果准线性近似成立，这个二阶常微分方程可以求解得到δf_0，然后可以在公式（29）中使用，从而得到饱和水平的准确预测。公式（36）中包含的额外项考虑了平行束缚对饱和的影响。为了得到一个更简单的估计，我们首先使用δ-函数的关系式，即公式（27），将其带入公式（36），得到

$$\delta f_0=(1-\alpha)f_0|_{v_{\|}=\omega_r/k_{\|}}\left(m_i/m_e\right)k_{\|}\left|\phi_1\right|^2\times\left(\omega_*-\omega_l\right)\partial_{v_{\|}}\left|k_{\|}v_{\|}-\omega\right|^{-2}, \tag{37}$$

其中

$$\alpha = -\frac{m_i}{m_e}\frac{k_\parallel}{\omega_* - \omega_l}\frac{\partial_{v_\parallel}\delta f_0}{f_0}\bigg|_{v_\parallel=\omega_r/k_\parallel}$$

然后，将方程（37）代入方程（29），假设$\left|\omega/k_\parallel\right| < v_{ter}$并进行积分，我们得到饱和振幅的以下关系：

$$|\phi_1| = (2/\sqrt{1-\alpha})\gamma_l^2/\left(k_\parallel v_{re}\right)^2. \tag{38}$$

假设对于δf_1采取线性响应，就如在推导公式(35)时所做的那样，使得$\alpha=0$，我们得到$|\phi_1| = 0.32\%$。这个结果与模拟结果相比更接近，但仍然偏低。

估计α的方法是通过对方程（36）关于$v_\parallel$ 进行导数，并在$v_\parallel = \omega_r/k_\parallel$处进行求值得出

$$\begin{aligned}\partial_{v_\parallel}\delta f_0\big|_{v_\parallel} = \frac{\omega_r}{k_\parallel} = \frac{m_i}{m_e}k_\parallel|\phi_1|^2\{(\omega_*-\omega_l)f_0\left(v_\parallel\right)\partial_{v_\parallel}^2\left|k_\parallel v_\parallel-\omega_r\right|^{-2} \\ +\frac{m_i}{m_e}k_\parallel\left[\left(\partial_{v_\parallel}\delta f_0\right)\partial_{v_\parallel}^2+\left(\partial_{v_\parallel}^3\delta f_0\right)\right]\times\left|k_\parallel v_\parallel-\omega_r\right|^{-2}\}_{v_\parallel=\omega_r/k_\parallel}\end{aligned} \tag{39}$$

在这里，我们忽略了$f_0\left(v_\beta\right)$的导数，因为相对于$\left|k_\parallel v_\parallel-\omega_r\right|^{-2}$它变化缓慢。我们还忽略了$\partial_{v_\parallel}^2\delta f_0$项，假设$\delta f_0$具有以下形式：

$$\delta f_0 = C(t)v_\parallel \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\Delta v_\parallel^2(t)}\right), \tag{40}$$

其中$u=\left(v_\parallel-\omega/k_\parallel\right)$，$C$和$\Delta v_\parallel$与$v_\parallel$无关，并且$\Delta v_\parallel \approx \sqrt{2|\phi_1(t)|(m_i/m_e)}$是捕获区域的宽度[见图5(a)]. 根据方程(40)，我们可以证明当$v_\parallel = \omega,k$时，$\partial_{v_\parallel}^2\delta f_0\big|_{v_\parallel=\omega,k} = 0$。此外，我们可以使用$\partial_{v_\parallel}^3\delta f_0 = -\left(3/\Delta v_\parallel^2\right)\partial_{v_\parallel}\delta f_0$的关系，得到一个关于$\alpha$的方程，即，

$$\alpha = 2z^2/\left(2z^2+\frac{3}{2}z+1\right), \tag{41}$$

其中$z=\left(v_{tc}k_\parallel\right)^2/\gamma_1|\phi_1|$。现在我们可以将这个近似值$\alpha$代入方程（38）中，得到以下的三次方程：

$$\frac{3}{8}z^3-\frac{7}{4}z^2-\frac{3}{2}z-1=0 \tag{42}$$

解方程（42），我们得到

$$|\phi_1| = 5.48\left[\gamma_1^2/\left(k_\parallel v_{te}\right)^2\right] \tag{43}$$

沿着两个具有负实部的虚根。方程（43）根据我们的模拟参数得出$|\phi_1| = 0.87\%$，这与图1和图4中的结果非常吻合。我们还尝试了使用线性值δf_1进行迭代解，得到第一次迭代$\delta f_0^{(1)}$，然后使用方程（36）中的$\partial_{u\parallel}\delta f_0^{(1)}$来预测$\delta f_0^{(2)}$，依此类推。然而，这个过程并没有收敛。

5. 一般非线性特征线方法

在本节中，我们将之前在第二节中讨论的非线性方案扩展到一般的电磁回旋动理学方程。我们像以前一样，通过将$f(\mathbf{z},t) = f_0(\mathbf{z})+\delta f(\mathbf{z},t)$写成，其中$\mathbf{z}=\left(\mathbf{R},v_\parallel,\mu\right)$，$f_0(\mathbf{z})$是一个满足$\dot{\mathbf{z}}_0\cdot\partial_z f_0(\mathbf{z})=0$的平衡分布。使用非均匀平衡$B$场的电磁回旋动理学方程[17−20]，并将$\dot{\mathbf{z}}$写成平衡和扰动部分，$\dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{z}}_0+\dot{\mathbf{z}}_1$，$\delta f$的方程为

$$\partial_t\left(B^*\delta f\right)+\partial_z\cdot\left(\dot{\mathbf{z}}B^*\delta f\right) = -\dot{\mathbf{z}}^1\cdot\partial_2 f_0, \tag{44}$$

其中$\mu\equiv mv_1^2/(2B)$是独立于时间的，并且通过演化平衡和扰动轨迹来求解。

$$\dot{\mathbf{R}}^0 = \frac{1}{B^*}\left[v_\parallel\mathbf{B}^{*0}+(c/e)\hat{\mathbf{b}}\times\mu\nabla B^0\right] \tag{45}$$

$$\dot{v}_{\parallel}^{0}=-\frac{1}{B^{*}}\left[\mathbf{B}^{*0}\cdot(\mu/m)\nabla B^{0}\right] \tag{46}$$

$$\dot{\mathbf{R}}^{1}=\frac{1}{B^{*}}\left[v_{\parallel}\delta\mathbf{B}_{\perp}+(c/e)\hat{\mathbf{b}}\times\mu\nabla\delta B_{\parallel}+c\hat{\mathbf{b}}\times\nabla\delta\phi\right] \tag{47}$$

$$\dot{v}_{\parallel}^{1}=-\frac{1}{B^{*}}\left[\mathbf{B}^{*0}\cdot\left(\frac{\mu}{m}\nabla\delta B_{\parallel}+\frac{e}{m}\nabla\delta\phi+\frac{e}{mc}\partial_{l}\delta A_{\parallel}\hat{\mathbf{b}}\right)+\delta\mathbf{B}_{1}\cdot\frac{\mu}{m}\nabla B^{0}\right] \tag{48}$$

其中 $\hat{b}=\mathbf{B}^{0}/B^{0}, \mathbf{B}^{*}=\mathbf{B}^{0}+\delta\mathbf{B}_{1}+(mc/e)v_{\parallel}\nabla\times\hat{\mathbf{b}}, B^{*}=\hat{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{B}^{*}, \mathbf{B}^{*0}=\mathbf{B}^{0}+(mc/e)v_{\parallel}\nabla\times\hat{\mathbf{b}}$，且 $\mathbf{B}^{0}$ 是平衡磁场。

该特征线（或粒子）遵循完全非线性轨迹 $\mathbf{z}=\mathbf{z}^{0}+\mathbf{z}^{1}$，并且 δf 可通过以下方式表示

$$B^{*}\delta f(\mathbf{z},t)=\sum_{i}w_{i}\delta\left(\mathbf{z}-\mathbf{z}_{i}\right). \tag{49}$$

我们定义g为代表粒子分布的光滑分布函数（在这一点上，g不一定等于物理分布函数f），并假设

$$B^{*}g(\mathbf{z},t)=\sum_{i}\delta\left(\mathbf{z}-\mathbf{z}_{i}\right) \tag{50}$$

将方程（49）代入方程（44）并使用方程（50），我们得到

$$\dot{w}_{i}=-\left(\dot{\mathbf{z}}^{1}\cdot\frac{\partial_{z}f_{0}}{g(\mathbf{z},t)}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{i}t}=-\dot{\mathbf{z}}^{1}\cdot\frac{\partial_{z}f_{0}\left(\mathbf{z}_{i}\right)}{g\left(\mathbf{z}_{i},t=0\right)}, \tag{51}$$

这就是方程（11）的推广。如果我们像之前一样取$g=f=f_{0}+\delta f$，我们得到

$$\dot{w}_{i}=-\left(1-w_{i}\right)\left(\dot{\mathbf{z}}^{1}\cdot\frac{\partial_{z}f_{0}}{f_{0}}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{i},t} \tag{52}$$

这个沿着w_{i}的演化方程以及非线性轨迹方程（45）-（48）的方程组是在第II节介绍的新方法的更一般的版本。

6. 讨论

我们开发了一种新的非线性特征线方法，以一致的方式保留了所有非线性。然而，这并不排除在物理上不重要的情况下忽略各种非线性项的可能性。实际上，各种项可以很容易地被"开关"来测试它们的物理效果。我们还看不到将这种方法应用于其他Vlasov-Maxwell系统的即时困难，其中初始分布的导数是已知的且有限的。对于强不稳定性，扰动变得很大$\delta f/f\approx 1$，噪声特征线恢复到常规粒子模拟的特征线。然而，在这种情况下，线性相位将更准确地被解析。最好的情况是，新方法捕捉到了常规粒子方案的物理特征线，具有改进的统计特征线。最差的情况是，该方案对于小扰动表现出线性行为（噪声特征线非常低），对于大扰动表现出完全非线性行为（伴随的热噪声），并且在两个极端之间始终保持过渡。我们能够获得良好的能量守恒。然而，与捕捉漂移波模型的相关物理所需的粒子数相比，需要非常大的粒子数。在第三节选择的参数下，饱和静电能和相关电子动能变化仅为总电子热能的0.01%。因此，不足为奇需要相对较大的粒子数、较小的时间步长和精细的网格来解析这个小的动能变化（总能量的0.01%）。

这个一维漂移波模型使我们能够分离出$E_{\parallel}\partial_{v_{\parallel}}\delta f$非线性以及相关的非线性物理。采用模式耦合理论得到的饱和水平远低于基于Sagdeev和Galeev的能量平衡计算的估计值（对于我们选择的参数）。模拟结果与我们的估计很好地吻合。由于这种新的较低饱和幅度，平行速度非线性可能在微湍流中发挥比以前认为的更重要的作用，尽管过去的研究已经表明了这种倾向。此外，现有的托卡马克几何的线性理论预测了一个沿径向延伸的膨胀型模式结构，因此会减小$E\times B$非线性的饱和效果。

最后，非线性特征线方法被扩展到一般的电磁回归动力学方程。这些方程在三维环托拟真模拟中的应用是一个正在进行的工作，并将在将来报告。

REFERENCES

[1] W. W. Lee, J. Comput. Phys. 72, 243 (1987).
[2] J. A. Byers (private communication, 1970).
[3] J. Denavit and J. M. Walsh, Comments Plasma Phys. Controlled Fusion 6. 209 (1981).
[4] B. I. Cohen, S. P. Auerbach, J. A. Byers, and H. Weitzner, Phys. Fluids 23, 2529(1980).
[5] A. Friedman, R. N. Sudan, and J. Denavit, J. Comput. Phys. 40, 1(1980)
[6] A. M. Dimits and W. W. Lee, "Partially linearized algorithms in gyrokinetic particle simulation," to appear in J. Comput. Phys.
[7] T. Tajima and F. W. Perkins (private communication, 1983).
[8] M. Kotschenruether, Bull. Am. Phys. Sot. 34,2107 (1988).
[9] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, Nonlinear Plasma Theory (Benjamin, New York, 1969).
[10] W. W. Lee, J. A. Krommes, C. R. Oberman, and R. A. Smith, Phys. Fluids 27, 2652 (1984)
[11] W. W. Lee and W. M. Tang, Phys. Fluids 31, 612 (1988).
[12]. Rath and P. K. Kaw, "Nonlinear drift phase-space structures," to appear in J. Plasma Phys.
[13] W. M. Nevins, Phys. Fluids 22, 1681 (1979),
[14] S. C. Cowley, R. M. Kulsrud, and R. Sudan, Phys. Fluids B 3, 2767 (1991).
[15] F. Romanelli, L. Chen, and S. Briguglio, Phys. Fluids B 3, 2496 (1991).
[16] S. E. Parker and W. W. Lee, Bull. Am. Phys. Soc. 36, 2280 (1991).
[17] T. S. Hahm, W. W. Lee, and A. J. Brizard, Phys. Fluids 31, 1940 (1988).
[18] T. S. Hahm, Phys. Fluids 31, 2670 (1988).
[19] A. J. Brizard, J. Plasma Phys. 41, 541 (1989).
[20] A. J. Brizard, Ph.D. thesis, Princeton University, 1990.