

Hybrid simulation of energetic particles interacting with magnetohydrodynamics using a slow manifold algorithm and GPU acceleration

C.Liu, S.C.Jardin

Abstract

混合方法将粒子PIC和磁流体动力学中相结合，可以用于研究高能粒子与全局等离子体模式之间的相互作用。在本文中，我们介绍了基于解决磁流体动力学方程的M3D-C1有限元代码开发的M3D-C1-K代码，该代码结合了模拟高能粒子的新开发的动力学模块。粒子推进使用一种新的算法，将Boris推进器应用于经典Pauli粒子，以模拟粒子轨道的慢流形，具有长期的精确性和可靠性。粒子推进可以使用GPU进行加速，达到显著的加速效果。粒子的矩计算使用 δf 方法，通过压力或电流耦合方案与磁流体动力学模拟相耦合。使用M3D-C1-K和 δf 方法进行了几个由高能粒子驱动磁流体动力学模式的线性模拟，包括鱼骨状模式、环向阿尔费文模式和反向剪切阿尔费文模式。与其他特征值、动力学和混合代码的先前结果达成了良好的一致性。

1. 引言

能量粒子（EPs）的物理学是等离子体物理学的一个重要领域，其约束对于国际热核聚变实验堆（ITER）和未来的聚变反应堆的成功至关重要。EPs可以与体等离子体相互作用，并驱动磁流体力学（MHD）不稳定性，这可能导致EPs的显著输运。由于与EPs相关的强动力学效应，这些物理问题必须进行全面的模拟。一种广泛使用的研究EPs的策略是混合模拟，它结合了粒子PIC和MHD模拟。在这种方法中，使用携带密度和动量的标记来描述EPs，并根据从MHD模拟中获得的电磁场推动其运动方程。使用所得到的分布函数计算EPs的矩，其中可以使用 δf 方法来减少噪声。然后将这些矩耦合到MHD方程中，以描述EPs与体等离子体之间的能量和动量交换。在模拟中使用这种耦合方案时，当EPs的运动与一些MHD模式共振时，共振区域附近的EP分布可以发生显著变化，并对模式产生强烈的反馈。与完全动力学模拟相比，其中EPs和体等离子体都使用粒子来描述，混合方法可以节省大量的模拟时间，同时保持与EP-MHD相互作用相关的基本物理效应。

在先前开发的大部分混合模拟代码中，包括MEGA [1]，M3D-K [2]，NIMROD [3]，JOEKE [4]，XTOR-K [5]，HMGC [6]和CLT-K [7]，推动粒子的方式是根据导心运动方程进行的，以减少粒子相空间的维数，并允许使用大于回旋周期的时间步长。已经观察到 [8]，使用显式积分方法如Runge-Kutta方法推进导心方程可以导致能量和动量守恒的破坏，以及长时间模拟中粒子轨道的大偏差，这是由于数值误差的累积所致。最近，一系列推动磁化粒子慢流形的方法已经被开发出来 [9]。在这些方法中，镜像力被视为额外的守恒力，这使得人们可以使用类似于Boris算法的全轨道粒子推动算法，同时使用大于回旋周期的时间步长，同时保持算法的简洁性和结构保持性质。

为了进行长时间的混合模拟以研究粒子的物理学，我们开发了一个新的混合代码M3D-C1-K。在该代码中，我们实现了 [9] 中介绍的一种慢流形算法，其本质是使用Boris算法推动经典Pauli粒子轨道的慢流形。该代码基于M3D-C1代码 [10]，使用高阶3D有限元方法作为初值问题求解MHD方程。该代码可以进行线性和非线性模拟，并且MHD方程可以使用完全隐式或半隐式方法进行积分 [11]。粒子推动采用基于粒子的并行化方法开发，并且可以在图形处理器单元（GPUs）上运行，相比在中央处理器（CPUs）上运行，速度有显著提升。除了粒子推动，M3D-C1-K还包括使用 δf 方法计算粒子分布函数的演化，并且利用粒子权重计算扰动矩。粒子分布函数的矩与MHD方程耦合，使用压强耦合或电流耦合两种方案，这两种方案利用不同阶的矩，但在物理上是等效的。该新代码已通过一些线性模拟问题的测试，包括Alfvén本

征模和鱼骨模的激发，并且结果与其他代码吻合良好。与之前的动理学-MHD代码相比，M3D-C1-K在异构CPU+GPU计算方面进行了更好的优化，适用于涉及动理学效应的长时间非线性MHD现象的模拟。

本文的组织结构如下：在第2节中，我们介绍了本代码中使用的新慢流形Boris算法，包括一个测试运行，展示了它的守恒性质。在第3节中，我们介绍了 δf 方法以及我们如何计算用于沉积的粒子权重。在第4节中，我们讨论了压力耦合和电流耦合方案以及它们在M3D-C1-K中的实现方式。在第5节中，我们展示了代码如何利用GPU实现基于粒子的并行化，以及如何在CPU和GPU之间传输数据。我们还提供了在CPU和GPU上运行粒子推动代码的比较。在第6节中，我们展示了使用这个新代码的一系列模拟结果，并与其他代码的结果进行了比较。在第7节中，我们得出结论。

2. 使用慢流形算法进行粒子推动

在M3D-C1-K中，使用混合模型来模拟等离子体的物理性质和EPs。等离子体的物理性质由通过有限元方法求解的磁流体力学（MHD）方程描述。EPs由标记表示，并使用由MHD方程获得的电磁场信息计算粒子的运动方程进行推进。然后，通过将动量信息沉积到有限元网格上，将EP信息耦合回磁流体力学（MHD）方程中。这类似于PIC模拟。这与全动理学或回旋动理学PIC模拟的不同之处在于，在全动理学模拟中，粒子密度和电流用于计算泊松方程和安培定理中的电磁场。但在混合模型中，我们使用EPs的压强或电流，并将其插入到MHD方程中。

在先前开发的混合代码中，如M3D-K [2]和NIMROD [3]，标记粒子的轨道遵循漂移或回旋动理学方程。例如，在M3D-K中实施的粒子运动方程可以写成

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{1}{B^*} \left[v_{\parallel} \mathbf{B}^* - \mathbf{b} \times \left(\mathbf{E} - \frac{\mu}{q} \nabla B \right) \right] \quad (1)$$

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{1}{B^*} \mathbf{B}^* \cdot (q\mathbf{E} - \mu \nabla B) \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{mv_{\parallel}}{q} \nabla \times \mathbf{b} \quad (3)$$

$$B^* = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b} \quad (4)$$

这里 \mathbf{E} 是电场， \mathbf{B} 是磁场， $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ 是指向 \mathbf{B} 方向的单位向量， \mathbf{X} 是导心位置， v_{\parallel} 是平行速度， μ 是磁矩， m 和 q 是粒子的质量和电荷。

动理学方程是根据在导心坐标写成的拉格朗日量通过变分原理[12]导出的。我们可以看到，在这个模型中，回旋相角是可忽略的坐标，将显式相空间从6D约化为5D。计算动理学方程的时间步长可以根据粒子的漂移运动来选择，并且可以远大于回旋周期($2\pi/\Omega$, Ω 是粒子的回旋频率)，从而节省了大量的计算时间。

运动导心方程可以使用显式积分方法（如4阶Runge-Kutta(RK4)方法）来计算。虽然RK4方法在每个步骤中最小化数值误差，但已经发现长时间模拟中误差可能会累积导致非物理结果[8]。例如，在托卡马克几何中，对于一个在静态磁场中运动的无碰撞粒子，如果使用RK4方法进行粒子推进，环向角动量（ $P_{\phi} = q\psi + mv_{\parallel}RB_{\phi}/B$, ψ 是一种极向磁通，而 ϕ 是环向方向）和动能（ $E = (1/2)mv_{\parallel}^2 + \mu B$ ）将不会被保持恒定，导致粒子轨道偏离其原始漂移运动面[13]。这个问题对于具有较大平行动量的粒子，如在聚变反应中产生的高能粒子或逃逸电子等能量较高的粒子，可能更为严重。为了解决这个问题，发展了辛算法[8,14]和保结构方法[15]，这些方法在积分运动方程时被设计为保持物理Casimir不变量。

关于这一点，在M3D-C1-K中，除了导心方程的RK4积分之外，我们还实施了一种体积保持的慢流形Boris算法作为粒子推动的替代方法。Boris算法已广泛用于在磁场中推动粒子。研究表明，它具有出色的长时间精度[16]。由于它是为磁化粒子的完整轨道积分而开发的，时间步长被选择得远小于回旋周期。然而，研究表明[9]，通过引入像有效电力一样行为的镜像力项，可以使用Boris算法计算磁化粒子轨道的慢流形。慢流形提供了一种新颖的理解“导心”概念的方式，不需要复杂的坐标变换，也不会相空间中引入非局部性[17,18]。镜像力项将产生梯度漂移效应，而曲率漂移则由Boris算法本身给出。该算法可以描述为：

$$\frac{\mathbf{X}_l - \mathbf{X}_{l-1}}{\Delta t} = \mathbf{V}_{l-1/2}, \quad (5)$$

$$\frac{m}{q} \frac{\mathbf{V}_{l+1/2} - \mathbf{V}_{l-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{X}_l) + \frac{\mathbf{V}_{l+1/2} + \mathbf{V}_{l-1/2}}{2} \times \mathbf{B}(\mathbf{X}_l) \quad (6)$$

其中 $\mathbf{E}^\dagger = \mathbf{E} - \mu \nabla B$, 而 \mathbf{X}_l 和 $\mathbf{V}_{l-1/2}$ 描述了 l 和 $l-1/2$ 时间步骤上慢流形的位置和速度。虽然方程 (6) 看起来像一个含有 $\mathbf{V}_{l+1/2}$ 的隐式形式, 但可以根据 [16] 中的方法显式计算出来。

根据[9]中的讨论, 通过在 \mathbf{E}^\dagger 中考虑镜像力, 该算法可以用于推动具有比原先时间步长 $2\pi/\Omega$ 更大的粒子, 只要粒子靠近慢流形[1]。注意在Boris算法中, \mathbf{X} 和 \mathbf{V} 位于不同的时间上, 时间差为 $1/2\Delta t$, 这类似于跳跃法的积分方法。为了在初始时间步骤中引导Boris算法, 我们使用RK4方法将导心动力学方程 (方程 (1) - (4)) 从 \mathbf{X}_0 推进到 \mathbf{X}_1 , 然后使用 $(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)/\Delta t$ 作为 $\mathbf{V}_{1/2}$, 以确保标记点靠近粒子运动的慢流形。

为了验证Boris算法的缓慢流体保持性质, 我们进行了一个测试运行, 推动没有电场的静态磁场中的粒子。模拟设置在类似于DIII-D托卡马克的几何形状中, 次半径 $a = 0.67$ m, 主半径 $R = 1.67$ m, 轴向磁场 $B = 2$ T。测试了两个粒子。一个是 $v_{\parallel} = 2.4 \times 10^6$ m/s 和 $v_{\perp} = 7 \times 10^5$ m/s 的通行粒子。另一个是 $v_{\parallel} = 7 \times 10^5$ m/s 和 $v_{\perp} = 2.4 \times 10^6$ m/s 的捕获粒子。两者都在低场侧初始化。对于使用RK4的导心方程的积分, 我们使用时间步长 $\Delta t = 3.2 \times 10^{-7}$ s $\approx 5(2\pi/\Omega)$, 对于使用缓慢流体Boris算法, 我们使用较小的时间步长 $\Delta t' = 1/4\Delta t$, 它给出了与RK4相似的总计算时间。图1显示了使用这两种方法的粒子的垂直角动量 P_ϕ 和能量 E 的误差。我们可以看到, RK4的数值误差会累积并在长时间模拟中达到显著水平, 而Boris算法的误差始终有限。Boris算法对于 P_ϕ 和 E 的长时间保持性能表现更好, 尤其是对于具有较大 v_{\parallel} 的通行粒子, 尽管其益处只在长时间模拟 ($t > 500$ ms) 中显著。对于短时间模拟, 由于它是从高阶积分方法推导出来的, RK4的误差较小。

模拟结果表明, 虽然慢流形鲍里斯算法具有更好的守恒性, 对于大部分最新的动理学-MHD模拟来说, 这一优势并不显著。然而, 我们已经通过M3D-C1-K展示了高能电子模拟的显著优势, 并将在以后的出版物中详细介绍。此外, 慢流形鲍里斯算法在M3D-C1-K中的使用可以相对于RK4加快速度, 这将在第5节中讨论。

3. δf 方法和粒子权重计算

使用分布函数计算动理粒子的矩。为了减少数值噪声, 我们使用 δf 方法来计算 EP 分布函数的变化, 这意味着对于每个标记点, 除了其坐标外, 我们还需要计算 $\delta f = f - f_0$ 或粒子权重 $w = \delta f/f$ 在粒子推动过程中的演化。这里, f_0 是平衡 EP 分布函数。 δf 方法可以应用于线性模拟, 或者非线性模拟中扰动量不远离其平衡值的情况。例如, 在阿尔文波频率啁啾模拟中就是这种情况。然而, 对于具有显著变化量的非线性模拟, 使用这种方法并没有好处, 而应该使用全 δf 方法。

δf 的演化可以写作

$$\frac{d\delta f}{dt} = -\frac{df_0}{dt} \quad (7)$$

这个公式是从粒子Vlasov方程 $df/dt = 0$ 推导出来的。方程(7)亦可写成对 w 的演化形式。

$$\frac{dw}{dt} = -(1-w) \frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dt} \quad (8)$$

在粒子模拟中, dw/dt 这一项表示粒子质量随轨迹的变化, 并且可以在粒子推动过程中计算得出。在线性模拟中, 粒子轨迹仅使用平衡场来计算。另外, 在方程 (8) 中的 $(1-w)$ 项将被替换为 1, 以使方程 (8) 仅包含线性项。对于非线性模拟, 粒子轨迹计算将包括平衡场和扰动场两者。

在上述方程中, df_0/dt 表示平衡分布通过扰动场的变化, 因为当只有平衡场时, $df_0/dt = 0$ 。假设平衡中没有电场, P_ϕ 、 E 和 μ 在没有扰动的情况下是守恒量。因此, f_0 的时间导数可以写成:

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{dP_\phi}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial P_\phi} + \frac{dE}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial E} \quad (9)$$

并且可以通过使用链式法则, 从 f_0 的解析表达式计算出 $\partial f_0/\partial P_\phi$ 和 $\partial f_0/\partial E$ 。在这里, 我们假设 μ 不随扰动场改变, 遵循导心的近似。由于 P_ϕ 和 E 只会受到扰动场的影响而改变, 它们的时间导数可以表示为

$$\frac{dP_\phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)_1 \cdot \nabla \psi + \left(\frac{dv_\parallel}{dt} \right)_1 mRB_\phi/B \quad (10)$$

$$\frac{dE}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_1 + \mu \frac{\partial B_{1\parallel}}{\partial t} \quad (11)$$

在线性模拟中, $(\dots)_1$ 项可以表示为

$$\left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)_1 = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} + v_\parallel \frac{\mathbf{B}_1}{B_0} \quad (12)$$

$$\left(\frac{dv_\parallel}{dt} \right)_1 = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/B - \mathbf{b}_0 \cdot \mu \nabla B_{1\parallel} \quad (13)$$

其中, \mathbf{E}_1 和 \mathbf{B}_1 为扰动的电场和磁场, $B_{1\parallel} = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{B}_1$ 。这些方程是从导心运动方程推导出来的, 并在线性模拟中用于减少数值误差。对于非线性模拟, 可以通过计算包括所有扰动场的Boris算法中 $d\mathbf{X}/dt$ 和 dv_\parallel/dt 与仅使用平衡场的 $(d\mathbf{X}/dt)_0$ 和 $(dv_\parallel/dt)_0$ 之间的差异来获得。为了包含所有的非线性贡献, 类似地计算 $\partial B_{1\parallel}/\partial t$ 和 $\nabla B_{1\parallel}$ 通过比较有和无扰动场的结果。

为了考虑到与回旋半径相当的小空间尺度上的物理效应, 即有限回旋半径 (FLR) 效应, 可以在上述方程中使用轨道平均的场 $\langle \mathbf{E}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{B}_1 \rangle$ 来代替在导心处评估的场 $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ 。

$$\langle \mathbf{E}_1 \rangle (\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X} - \boldsymbol{\rho}_L) d\mathbf{x} d\theta \approx \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \mathbf{E}_1(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_{L,j}). \quad (14)$$

这里, $\boldsymbol{\rho}_L = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b}/\Omega$ 是回旋半径矢量, \mathbf{v}_\perp 是垂直于磁场的粒子速度, 由 μ 计算得出, θ 是回旋相位角。积分可以使用4点平均方案[20, 21]进行近似计算, 其中 $\boldsymbol{\rho}_{L,j}$ 是4个长度为 $|\boldsymbol{\rho}_L|$ 的矢量, 在 θ 上均匀分布。此外, 针对与粒子磁矩相关的 B_\parallel 项, 应该在有效的拉莫半径 $\rho_L/\sqrt{2}$ 处进行回旋平均, 如[22]中讨论的那样。这些项包括方程(11)中的第二项、方程(13)中的第二项, 以及Boris算法在进行非线性模拟时用于计算有效电场的镜像力项。

计算粒子权重的变化需要同时获取粒子的 \mathbf{v} 和 \mathbf{x} (用于场的评估) 的信息。在使用Boris算法推进粒子时, 我们取 $\mathbf{v}_l = (\mathbf{v}_{l-1/2} + \mathbf{v}_{l+1/2})/2$, 并在权重方程的积分中使用 \mathbf{x}_l 和 \mathbf{v}_l 。

得到 δf 或 w 后, 可以从中计算动量。平行和垂直的压强可以如下计算:

$$\delta P_\parallel(\mathbf{x}) = \int m v_\parallel^2 w f B^* dv_\parallel d\mu d\theta \approx \sum_k m v_\parallel^2 w_k \frac{f_k}{g_k} B^* S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (15)$$

$$\delta P_\perp(\mathbf{x}) = \int \mu B \left(w + \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \right) f B^* dv_\parallel d\mu d\theta = \sum_k \mu B \left(w_k + \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \right) \frac{f_k}{g_k} B^* S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k). \quad (16)$$

这里, \sum_k 表示所有粒子标记的求和, B^* 表示相空间体积, 并被用作相空间积分的雅可比行列式, S 表示用于粒子沉积的形状函数。在计算 δP_\perp 时, 考虑了由于 B_\parallel 变化所引起的垂直压强的变化。这里 g 表示已加载标记的分布, 其取决于标记的初始化方式。如果标记在相空间中均匀初始化, 则 $g = B^*$, 求和中应包含 f , 或者在权重演化方程中包含额外的 f/g 项, 就像在M3D-K [2]中一样。在M3D-C1-K中, 我们使用蒙特卡洛方法按照相同的分布函数 f_0 初始化标记, 以减少标记的总数量同时保持低噪声水平。通过此实现, 在模拟过程中, 标记分布将遵循 $B^* f$ 的演化, 可以忽略Eqs. (15)和(16)中求和中的 f/g 项。

请注意, 根据方程 (15) 和 (16), 积分雅各比矩阵 B^* 的改变也会影响粒子矩。例如, 当受到压缩磁场的影响时 ($(\nabla \times \mathbf{E} \neq 0)$), 最初在空间和能量上均匀的粒子分布可以被 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 速度压缩并形成梯度。这种效应可以通行粒子推动来捕捉, 因为它相当于求解一个连续性方程, 正如[20]所指出的那样, 因此 $g = B^* f$ 可以保持不变。然而, 它不能被 df_0/dt 项所捕捉, 因为最初的粒子分布函数中没有梯度。为了解决这个问题, 我们可以按照[23]的讨论, 使用 $d = w + (1-w)B_1^*/B^*$ 来替换方程 (15) 和 (16) 中的求和中的 w , 这也是在M3D-K实现中使用的。对于线性模拟, d 的定义是 $d = w + B_1^*/B^*$, 只保留线性项。请注意, 通过这一附加项和方程 (16) 中的 $B_{1\parallel}/B_0$ 项, 在垂直方向上, 等离子体粒子可以表现出热容比 $\gamma = 2$ 的行为。

在有限元表示中, 可以使用Galerkin方法计算方程 (15) 和 (16) 中的求和, 以获得粒子压力场, 通过与测试函数 v_i 相乘并在元素中进行积分。这可以写成

$$\int v_i \delta P_{\parallel} J d\mathbf{x} = \sum_k w_k m v_{k,\parallel}^2 \int v_i(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}, \quad (17)$$

$$\int v_i \delta P_{\perp} J d\mathbf{x} = \sum_k w_k \mu_k B(\mathbf{x}_k) \int v_i(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}. \quad (18)$$

多项式系数可以通过求解质量矩阵获得。如果我们将 S 视为一个 δ 函数，积分可以简化，并且整个计算变得更加简单。然而，由于在M3D-C1中使用高阶多项式作为测试函数，得到的压力场可能会出现尖峰。可以使用一个不同的 S ，如具有有限宽度的帐篷函数，以获得更平滑的结果，但这意味着在计算粒子位置处的场时，我们还需要使用具有有限宽度的形状函数，以使整个方案自治，这可能会使粒子推动复杂化并降低计算速度。对于第6节讨论的线性模拟，我们使用 δ -函数作为粒子的形状函数。

在包含FLR效应的模拟中，应通过回缩变换计算压力沉积，并采用4点平均的轨道平均方案进行计算。在方程（17）和（18）中的 $S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ 项应该被替换为 $1/4 \sum_{j=1}^4 S(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k - \boldsymbol{\rho}_j)$ ，这意味着每个粒子在其回旋轨道上会对4个点的压力沉积做出贡献。这种实现与方程（14）中的场评估是一致的。

4. MHD方程的耦合

在计算磁流体力学方程中，我们假设高能粒子的密度（ n_h ）相比于体离子密度（ n ）较小。在这种情况下，高能粒子的主要贡献在于磁流体力学的动量方程中。根据不同对磁流体动量方程的理解假设，可以使用压力耦合或电流耦合方案来表示这个贡献。

如果我们假设磁流体力学动量方程描述了包括高能粒子和其余离子和电子（体等离子体）在内的总动量的变化，那么应该包括与高能粒子动量变化和力相关的项。在这种情况下，磁流体力学动量方程可以写为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) + \frac{\partial \mathbf{K}_h}{\partial t} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p - \nabla \cdot \mathbf{P}_h \quad (19)$$

其中 ρ 是等离子体的总密度， \mathbf{V} 是等离子体的总速度。 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ 是总电流， p 是等离子体的总压强， $\mathbf{P}_h = P_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} + P_{\perp} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b})$ 是总的等离子体压强张量。为了使用 δf 方法的结果，可以从平衡力平衡方程中减去。

$$\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_0 + \nabla p_{h0} \quad (20)$$

只计算扰动场的演化。在这里我们假设等离子体的平衡压强是各向同性的[2]。动量方程则变为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) + \frac{\partial \mathbf{K}_h}{\partial t} = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_1 - \nabla \delta p - \nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h, \quad (21)$$

其中， $\mathbf{J}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1$ ， $\delta \mathbf{P}_h$ 是通过 δf 的计算得到的，类似于方程（15）和（16）。这种方法被称为“压强耦合”，并且在M3D-K [2]中实现。需要注意的是，在M3D-K中，假设EP动量相对于体动量来说较小，忽略了 $\partial \mathbf{K}_h / \partial t$ 项。

如果我们假设磁流体力学动量方程只描述了等离子体整体的动量变化，并不包括高能粒子（EPs），那么它应该改为：

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = (\mathbf{J} - \mathbf{J}_h) \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (22)$$

对于各向异性平衡电子压力，还有额外的项来自于与扰动磁场相关的项 $\nabla \cdot [(P_{\parallel 0} - P_{\perp 0}) \mathbf{b}\mathbf{b}]$ 。其中 \mathbf{J}_h 是电子离子流，而 $\mathbf{J} - \mathbf{J}_h$ 是来自于扩散等离子体的电流。在这里，电子离子流通过 \mathbf{J}_h 与MHD方程耦合，而不是通过 \mathbf{P}_h ，因此这个方法被称为“电流耦合”。需要注意的是，在这个方程中，我们没有包括扩散等离子体上的电力 $-qn_h \mathbf{E}$ ，这是因为扩散等离子体是非中性的。原因是这一项将取消部分由于电子流离子流的 $\mathbf{J}_h \times \mathbf{B}$ 项，因为 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移会导致离子和电子以相反的速度移动并且他们的电流会相互抵消。

被平行运动引起的电流 \mathbf{J}_h （ $J_{h,\parallel}$ ），漂移运动引起的电流（ $\mathbf{J}_{h,D}$ ）和由回旋运动的电场粒子引起的磁化电流（ $\mathbf{J}_{h,M}$ ）都包含在其中。前两种电流可以使用导心运动方程或经过拉回变换后的慢流形Boris方法的结果来计算[27]。请注意， $J_{h,\parallel}$ 不会对动量方程中的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 力产生贡献。 $\mathbf{J}_{h,M}$ 可以如下计算[27]：

$$\mathbf{J}_{h,M}(x) = \int \dot{\rho} \delta(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x}) f B^* d^3 \mathbf{X} d v_{\parallel} d \mu d \theta = \nabla \times \mathbf{M} \quad (23)$$

其中, $\mathbf{M} = P_{\perp} \mathbf{b}/B$ 。如果我们采用漂移动理学极限, 并选择一个包括曲率和梯度漂移的简单表示形式的漂移速度,

$$\mathbf{v}_D = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB} \nabla \times \mathbf{b} + \frac{\mu}{qB} \mathbf{b} \times \nabla B \quad (24)$$

那么 $\mathbf{J}_h \times \mathbf{B}$ 可以简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_h \times \mathbf{B} &= \left[q \int \mathbf{v}_D f d^3 \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{M} \right] \times \mathbf{B} \\ &= P_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - P_{\perp} \nabla \ln B \times \mathbf{b} \times \mathbf{b} - \nabla \times \left(\frac{P_{\perp}}{B} \mathbf{b} \right) \times \mathbf{B} \\ &= [\nabla P_{\perp} + \nabla \cdot [(P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b}]] \times \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (25)$$

与耦合压强方案中的 $\nabla \cdot \mathbf{P}_h$ 项接近, 只是这里通过 $\times \mathbf{b} \times \mathbf{b}$ 算子消除了平行于 \mathbf{b} 的分量。这意味着我们可以使用从方程(15)和(16)计算得出的 \mathbf{P}_{\parallel} 和 \mathbf{P}_{\perp} 的结果, 用于压强和电流耦合方案, 而不是单独计算 \mathbf{J}_h 。电流耦合的策略与MEGA [1]中使用的方法相同。对于包含FLR的模拟, 这个关系仍然有效, 因为 \mathbf{J}_h 和 \mathbf{P}_h 都应通过回推变换来计算。

在进行 δf 模拟时, 应该像方程(21)中那样减去平衡力平衡方程。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_{h0}) \times \mathbf{B}_1 + (\mathbf{J}_1 - \delta \mathbf{J}_h) \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - \nabla \delta p. \quad (26)$$

方程(25)中的压强项应该被替换为 δP_{\parallel} 和 δP_{\perp} , 从而得到 $\delta \mathbf{J}_h \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)$ 的结果。假设平衡EP电流 \mathbf{J}_{h0} 垂直于 \mathbf{B}_0 并满足力平衡 $\mathbf{J}_{h0} \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_{h0}$, 则 $\mathbf{J}_{h,0} \times \mathbf{B}_1$ 的这个力可以写成

$$\mathbf{J}_{h,0} \times \mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_0 \frac{\mathbf{B}_1}{B_0} \cdot \nabla p_{h0} \quad (27)$$

这种简化的电流耦合方案也被引入到MEGA代码中[1]。

注意, 在[25]中的压强耦合方案中, 只有 $\nabla \cdot \mathbf{P}_h$ 的垂直部分被添加到动量方程中, 这与公式(25)的结果完全相同, 相当于简化的电流耦合方案。之所以只包括垂直部分, 是因为假设体等离子体和EP的垂直运动都由 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移主导, 那么垂直方向上的 \mathbf{K}_h 与 $\rho \mathbf{V}$ 相比要小得多, 因为 $n_h \ll n$, 可以安全地忽略。然而, 在平行方向上 $\partial \mathbf{K}_h / \partial t$ 不能被忽略, 体等离子体和EP的动量演化必须分别计算。在M3D-C1-K中实施的压强耦合方案中, 我们仍然包括 $\nabla \cdot \mathbf{P}_h$ 项的所有分量, 并在所有方向上忽略 $\partial \mathbf{K}_h / \partial t$, 以遵循M3D-K中的实施方法。我们发现, 在我们进行的所有模拟中, 这两种耦合方案给出几乎相同的结果, 在数值稳定性上没有差异, 这将在第6节中讨论。这些结果表明, 在这些情况下, EP的平行动量项对最终结果几乎没有影响。

5. GPU粒子推动加速

M3D-C1代码是使用消息传递接口(MPI)的分布式内存并行化模型开发的。整个3D网格被分解为与CPU进程数量相同的子域。每个进程负责计算一个子域的MHD方程矩阵元素, 并且仅管理其中的场变量内存。这被称为"基于域的并行化"。在为M3D-C1-K开发粒子推进代码时, 我们使用了混合同行化模型, 该模型采用了"基于粒子的并行化"和"共享内存模型"进行粒子推进。我们发现, 如果坚持使用基于域的模型, 代码将需要处理粒子从一个子域移动到另一个子域的问题, 这将涉及不同进程或线程之间频繁的通信, 从而大大降低计算速度。在基于粒子的并行化中, 每个并行线程独立处理一个粒子的推进, 在可多个时间步长内与其它线程无关。场信息在所有的GPU之间进行复制。因此, 这个模型适用于使用GPU进行大规模并行计算。这种基于粒子的并行化策略也在许多回旋动理学代码中使用, 如GTC [28]和GTS。

在M3D-C1-K的发展中，我们利用GPU加速粒子推动和粒子权重计算，这是动理学模块中耗时最长的部分。粒子推动代码是使用OpenACC开发的。OpenACC是一种类似于OpenMP的编码标准，它提供了一系列指令，帮助编写并行计算代码，简化主机和加速设备（如GPU）之间的数据通信操作。我们还使用OpenMP在多核CPU上实现了粒子推动的多线程并行化，这样代码可以在仅使用CPU运行，或者通过设置编译指令与GPU一起运行。MHD方程有限元矩阵的计算和矩阵求解仍由M3D-C1代码使用CPU完成。

在基于粒子的并行化实现中，每个粒子推动线程都必须能够访问整个网格中的电磁场信息，以便粒子可以在网格中任意位置移动，而无需执行额外的通信。这意味着在MHD计算之后，必须从每个CPU进程中收集场信息，并上传到每个GPU的共享内存中。对于大多数现代GPU来说，内存足够大以存储整个3D网格的场信息。在CPU进程上进行的数据收集利用了MPI3引入的MPI共享内存（SHM）模型，可以加速同一计算节点上进程之间的通信。对于不同节点之间的通信，使用经典的消息通信接口。在推动完成之后，需要将粒子信息从GPU下载，并分配到每个MPI进程的分布式内存中。数据分配工作以及用于压力或电流耦合的 P_{\parallel} 和 P_{\perp} 的计算是使用CPU进行的。

在M3D-C1-K中，场与粒子是分别演化的。场根据磁流体动理学方程演化，并使用隐式或半隐式方法进行积分[11]。在模拟中，我们发现，与半隐式方法一样，磁流体动理学的时间步长不受Courant-Friedrichs-Lewy（CFL）条件的限制，即使EP计算是显式的。这意味着半隐式算子[29]足够强大，可以抑制粒子推动过程中显式方法带来的数值不稳定性。粒子的推动和权重计算在两个相邻磁流体动理学时间步长的积分之间进行。为了提高粒子轨道计算的精确性，它具有粒子推动的子循环。在子循环开始之前进行场信息的传递，这可以节省CPU和GPU之间的通信时间。在子循环过程中，场被假设为静态。

在图2中显示了M3D-C1-K粒子推进代码在CPU和GPU上的性能基准。将代码无需对算法进行任何修改移植到GPU后，使用RK4推进1600万粒子50步时，我们获得约11倍的加速。基准测试在Summit集群上使用四个节点进行。CPU运行使用了8个IBM POWER9 CPU，每个处理器上有22个SIMD多核（SMC）。GPU运行使用了24个NVIDIA Tesla V100 GPU。模拟设置在一个具有类似DIII-D几何形状的3D网格中，每个平面有4个环向面和5679个元素。粒子在3D网格中均匀分布，服从麦克斯韦分布。

在图2中也显示出，当在GPU上使用200步和1/4时间步长的RK4使用慢流面Boris算法时，会加快速度。这种加速是通过简化Boris算法中场的计算来实现的。在M3D-C1-K中，电磁场使用标量和矢量势 (ϕ, \mathbf{A}) 来表示。在粒子推动过程中，在特定点评估场 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 时，需要多项式的导数。因此，如果计算类似导心方程中的磁场曲率项，就需要计算多项式的二阶导数，在使用3D网格时可能会耗费时间。通过对使用RK4的粒子推动代码进行分析，发现大部分时间都花在计算多项式的二阶导数上。当使用Boris算法时，不需要磁场曲率项，并且梯度项 $\nabla \mathbf{B}$ 可以通过将 \mathbf{B} 视为额外的标量场轻松计算，因此只需要多项式的一阶导数。

通过进一步优化，比如改善GPU内存访问的合并以及使用单精度浮点运算，可以实现更高的加速。对于本文展示的具有高能离子的模拟，发现粒子推动的计算时间已经接近于CPU用于MHD计算的计算时间，因此进一步优化粒子推动对整体性能并不是至关重要的。对于未来具有更高能量离子或逃逸电子的模拟，粒子推动的优化仍然重要。

6. 模拟结果

在本节中，我们展示了M3DC1-K的线性模拟结果，包括鱼骨模式、环向阿尔文特征模式（TAE）和反剪切阿尔文特征模式（RSAE）。我们将这些结果与其他代码的结果进行了比较，包括模式频率、增长率和结构。

6.1. 线性鱼骨模拟

对于线性鱼骨模拟，我们按照[2]中的设置进行了跟踪，其中包括在大纵横比圆形托卡马克中进行线性鱼骨模拟的基准研究，使用的设置也用于[3]中NIMROD和M3D-K之间的基准研究。测试选择了半径为1 m，小半径为0.361925 m的圆形托卡马克。等离子体由氢离子组成，其密度均匀为 $n_0 = 2.489 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 。总压力分布为 $p(\psi) = p_0 \exp(-\psi/0.25)$ ，其中 ψ 是极向标准化磁通，从磁轴处的0到边界处的1。中心压力 $p_0 = 16335 \text{ Pa}$ ，中心总等离子体贝塔 β_{total} 为8%。磁轴处的托卡马克场为 $B_r = 1 \text{ T}$ 。安全因子 (q) 分布由一个解析表达式给出，

$$q = q_0 + \psi \left[q_1 - q_0 + (q'_1 - q_1 + q_0) \frac{(1 - \psi_s)(\psi - 1)}{\psi - \psi_s} \right] \quad (28)$$

其中 $q_0 = 0.6$ 和 $q'_0 = 0.78$ 是 q 在 $\psi = 0$ 处的值和导数， $q_1 = 2.5$ 和 $q'_1 = 5.0$ 是 q 在 $\psi = 1$ 处的值和导数。 $\psi_s = (q'_1 - q_1 + q_0) / (q'_0 + q'_1 - 2q_1 + 2q_0)$ 。

EPs的密度分布与等离子体压力分布具有相同的形状。在动量空间中，其遵循一个由各向同性的减速分布给出的分布。

$$f(v) = \frac{H(v_0 - v)}{v^3 + v_c^3} \quad (29)$$

其中 $v_0 = 3.9 \times 10^6$ m/s是EPs的最大速度， $v_c = 0.58v_0$ 是临界速度。对于所有流通面， v_0 和 v_c 的值相同。由于EP密度和压力与等离子体压力具有相同的空间分布，我们可以通过改变EP密度和体等离子体压力的值来改变 $\beta_h/\beta_{\text{总}}$ 的比值（其中 β_h 是EP的压力beta），同时保持总体压力分布不变。请注意，在初始化EP分布时，我们没有像[2]中的计算那样考虑通过和约束粒子的 ψ 的平均值。相反，我们只使用局部 ψ 的值进行EP初始化。为了满足[2]中所使用的规范化洛尔半径非常小的要求， $\rho_L = v_0/(\Omega a) = 0.0125$ ，我们使用了减小的EP离子质量 $m_{EP} = 0.11m_H$ （其中 m_H 是氢原子的质量）。这可以帮助减小EP的有限轨道宽度（FOW）效应。

使用托卡马克模式数 $n = 1$ 进行线性模拟的结果如图3所示，包括使用压强耦合和电流耦合方案进行的模拟。模拟中未考虑FLR效应。我们可以看到，生长率(γ)和实频率(ω)与M3D-K和NIMROD的结果非常吻合，除了在大 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 时的模式实频率。当 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 从0增加到0.75时，由于EP的响应，模式从理想的MHD串扭模式变为具有有限实频率的鳍骨模式。模式的生长率在 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 从0变化到0.25时减小，然后在 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 从0.25增加到0.75时增加。实频率在 $\beta_h = 0$ 时为零，并随着 β_h 的增加几乎线性增加。使用压强耦合和电流耦合方案进行的模拟结果几乎相同。

被扰动的极向磁通($\delta\psi$)、扰动的平行电子压力(δp_{\parallel})以及扰动的平行和垂直电子压力之间的差异($\delta p_{\perp} - \delta p_{\parallel}$)的模式结构在图4中显示。注意，电子压力的非绝热响应($\delta p_{\perp} - \delta p_{\parallel}$)局限在低磁场侧，表明这个压力扰动主要来自通过与鱼骨模式共振的约束粒子。粒子压力的结果因为使用了 δ 粒子形状函数和高阶多项式作为测试函数而带有一些噪音。模式结构的结果与[3]中的NIMROD模拟结果一致。

6.2. TAE模拟

对于TAE线性模拟，我们使用了[30]中提到的设置，该设置还用于[31]中的NIMROD TAE模拟。模拟是在一个大纵横比托卡马克($R = 10$ m, $a = 1$ m)中进行的。轴向磁场为 $B_T = 3$ T。体离子是氢离子，具有均匀密度 $n_0 = 2 \times 10^{19}$ m $^{-3}$ 。体等离子体压力设置为常数，以避免压力梯度驱动模式，即 $p = 6408$ Pa。安全系数分布为 $q(r) = 1.71 + 0.16(r/a)^2$ 。请注意，在 $r = 0.5a$ 处有一个有理面 $q = 1.75$ 。

能量较高的氘离子的密度轮廓如下：

$$n(s) = n_0 c_3 \exp \left(-\frac{c_2}{c_1} \tanh \frac{\sqrt{s} - c_0}{c_2} \right) \quad (30)$$

其中 $s = \psi_r/\psi_t(a)$ 是归一化的环流量。 $n_0 = 1.4431 \times 10^{17}$ m $^{-3}$ 是在 $s = 0$ 处的EP密度。系数 $c_0 = 0.49123$ ， $c_1 = 0.298228$ ， $c_2 = 0.198739$ 和 $c_3 = 0.521298$ 。该EP密度剖面在有理磁面 $q = 1.75$ 处有很大梯度，可以驱动TAE。EP在速度空间中以Maxwellian分布初始化，具有均匀温度 T_f 。

线性TAE的模拟在 $n = 6$ 时进行。图5展示了TAE的增长率和频率作为电子等离子体温度的函数，其中包括了从M3D-C1-K模拟中在零拉莫半径（ZLR）极限情况下和通过四点回旋平均考虑了FLR效应的结果。这些结果与其他代码的模拟结果进行了基准化 [30]。我们可以看到，M3D-C1-K的结果与回旋动力学、混合MHD和特征值代码的结果非常接近。在考虑FLR效应后，对于 T_f 较高的情况，模式的增长率显著下降，因为在这些情况下，电子等离子体的拉莫半径较大。TAE的频率也略有下降。我们同时进行了压强耦合和电流耦合的模拟，并且模式的增长率和频率都是相等的。

被扰动的极向涡流 ($\delta\phi$) 的模式结构，来自包含以FLR效应的 $T_f = 400$ keV的M3D-C1-K模拟结果，在图6中展示。径向结构表明该模式局域在 $r = 0.5a$ 的有理闭合面附近，并且由 $m = 10$ 和 $m = 11$ 的谐波主导，这与该模式位于 $q = 1.75 = 0.5 \times (10 + 11)/n$ 的有理闭合面一致。

6.3. RSAE模拟

我们还在M3D-C1-K中进行了线性RSAE模拟。对于这些模拟，我们使用了来自实验诊断的等离子体平衡和EP分布的真实托卡马克几何形状。平衡由DIII-D的shot # 159243在805 ms获得，期间启动了氖束注入并激发和测量了一系列RSAE [32,33]。模拟遵循[34]中的设置，该设置中涉及了许多特征值、回旋动力学和混合-MHD代码进行线性基准测试。平衡场，包括压力剖面，是从平衡代码动力学EFIT的结果中读取的，该代码考虑动能离子在计算Grad-Shafranov (GS) 方程时的贡献。如[34]中的图3所示，安全因子 q 剖面在 $\rho = 0.4$ 处有一个最小点 ($q_{\min} = 2.94$)，其中 ρ 是托卡马克流量的归一化平方根)。EP分布被近似为各向同性的Maxwell分布。在这里，我们使用了来自动力学EFIT的EP密度和温度剖面，其中EP压力通过从计算得到的总压力中减去测量得到的热压力来估计。M3D-C1-K模拟中使用的体等离子体和快离子的密度和温度剖面已经与[34]中使用的数据进行了仔细比较，以确保它们之间存在良好的一致性。

使用这个平衡，我们使用M3D-C1-K进行了 $n = 3 - 6$ 的线性模拟。RSAE的实频率和增长率的结果如图7所示，同时还包括了其他代码在[34]中给出的结果。M3D-C1-K的结果与其他初始值MHD和回旋动力学代码的结果相符合。随着 n 值的增加，模式频率增加，而增长率在 $n = 4$ 和5时最大。对于这些模拟，我们考虑了FLR效应，并发现FLR会导致类似于TAE模拟中发现的模式增长率的下降。图8展示了 $n = 4$ RSAE模拟的模式结构，包括不同 m 谐波的 $\delta\phi$ 的径向结构和二维偏直结构。扰动场局限在 $q = q_{\min}$ 磁面附近，并且被 $m = 12$ 分量所主导，这与RSAE物理学($q_{\min} \approx m/n$)和[34]中其他代码的结果一致。

7. 结论

在本文中，我们引入了基于M3D-C1 MHD代码开发的新代码M3D-C1-K，该代码包含了动理学效应的粒子模拟。粒子的运动使用标记点来描述，并采用一种新的慢流面Boris算法进行推动。这种新算法可以在长时间模拟中提供良好的守恒性质。此外，它可以简化场强计算并加速粒子推动。粒子模拟通过使用 δf 方法来计算粒子的矩，并通过压力或电流耦合到MHD方程中。粒子推动代码已经移植到GPU上运行，与CPU版本相比，速度提高了11倍。线性鱼骨模拟和线性阿尔文模式模拟，包括TAE和RSAE，都已经进行，并且结果与其他代码的先前结果很好地吻合。

M3D-C1-K基于M3D-C1，该模型利用半隐算法进行具有大时间步长的MHD计算。为了将动理学部分融入到这个框架中，我们分别集成了MHD方程和粒子方程，并引入了粒子推动的子循环。鉴于MHD方程仍然使用不受CFL条件限制的大时间步进演化，且在GPU上进行粒子推动非常快速，我们认为M3D-C1-K适用于模拟涉及动理学效应的长时间MHD现象，包括带频率扫频和模式耦合的EP驱动阿尔费文模式的非线性演化，以及与EP相互作用的皱缩模式或撕裂模式。对于这些模拟，计算时间在CPU上的用于MHD计算和在GPU上的粒子推动是可比较的。对于涉及短时间尺度的波粒相互作用的现象，如全局阿尔费文本征模式 (GAE) 或压缩性阿尔费文本征模式 (CAE)，需要采用小的MHD时间步长，这可能导致MHD计算占据了大部分计算时间。为了更好地模拟这类问题，我们计划进一步优化MHD计算并利用GPU实现。

代码中使用的新的慢流面Boris算法最初是为了保持物理结构和保存运动常数而开发的，这可以提高长时间模拟的可信度。正如第2节所讨论的，对于只有几百毫秒的典型EP模拟，这个优势并不显著，因为RK4可以提供类似数量级的绝对数值误差。对于更长时间的模拟，Boris算法的好处可能更为重要。此外，对于模拟具有较大平行速度的粒子（如高能电子），这个优势可能更加重要。这些电子可以通过感应电场作为逃逸电子产生，或通过等离子体波与外部电流驱动产生，并可以与MHD模式相互作用。考虑到高能电子的速度可以接近光速，因此具有能够保持回旋动量并保持粒子轨道形状的粒子推动算法至关重要，如[35, 19]所讨论的。因此，慢流面Boris算法是使用高能电子进行非线性MHD模拟的一个很好的选择。然而，粒子推动算法仍然可以进一步优化并结合场的演化来提高数值稳定性，例如在[36]中所做的那样，这将在未来的工作中完成。

REFERENCES

- [1] Y. Todo, T. Sato, *Phys. Plasmas* 5 (5) (1998) 1321-1327.
- [2] G.Y. Fu, W. Park, H.R. Strauss, J. Breslau, J. Chen, S. Jardin, L.E. Sugiyama, *Phys. Plasmas* 13 (5) (2006) 052517.
- [3] C.C. Kim the NIMROD Team, *Phys. Plasmas* 15 (7) (2008) 072507.
- [4] G.T.A. Huysmans, O. Czarny, *Nucl. Fusion* 47 (7) (2007) 659-666.
- [5] H. Lütjens, J.-F. Luciani, *J. Comput. Phys.* 227 (14) (2008) 6944-6966.
- [6] S. Briguglio, G. Vlad, F. Zonca, C. Kar, *Phys. Plasmas* 2 (10) (1995) 3711-3723.
- [7] J. Zhu, Z.W. Ma, S. Wang, *Phys. Plasmas* 23 (12) (2016) 122506.
- [8] H. Qin, X. Guan, *Phys. Rev. Lett.* 100 (3) (2008) 035006.
- [9] J. Xiao, H. Qin, *Comput. Phys. Commun.* 265 (2021) 107981.
- [10] N.M. Ferraro, S.C. Jardin, *J. Comput. Phys.* 228 (20) (2009) 7742-7770.
- [11] S.C. Jardin, N. Ferraro, J. Breslau, J. Chen, *Comput. Sci. Discov.* 5 (1) (2012) 014002.
- [12] R.G. Littlejohn, *J. Plasma Phys.* 29 (01) (1983) 111-125. [13] H. Qin, X. Guan, W.M. Tang, *Phys. Plasmas* 16 (4) (2009) 042510.
- [14] C.L. Ellison, J.M. Finn, J.W. Burby, M. Kraus, H. Qin, W.M. Tang, *Phys. Plasmas* 25 (5) (2018) 052502.
- [15] J. Liu, Y. Wang, H. Qin, *Nucl. Fusion* 56 (6) (2016) 064002.
- [16] H. Qin, S. Zhang, J. Xiao, J. Liu, Y. Sun, W.M. Tang, *Phys. Plasmas* 20 (8) (2013) 084503.
- [17] J.W. Burby, *J. Math. Phys.* 61 (1) (2020) 012703.
- [18] J.W. Burby, E. Hirvijoki, *J. Math. Phys.* 62 (9) (2021) 093506.
- [19] C. Liu, C. Zhao, S.C. Jardin, N. Ferraro, C. Paz-Soldan, Y. Liu, B.C. Lyons, *Plasma Phys. Control. Fusion* (2021).
- [20] W.W. Lee, *J. Comput. Phys.* 72 (1) (1987) 243-269.
- [21] W.X. Wang, Z. Lin, W.M. Tang, W.W. Lee, S. Ethier, J.L.V. Lewandowski, G. Rewoldt, T.S. Hahm, J. Manickam, *Phys. Plasmas* 13 (9) (2006) 092505.
- [22] L. Chen, Y. Lin, X.Y. Wang, J. Bao, *Plasma Phys. Control. Fusion* 61 (3) (2019) 035004.
- [23] E.V. Belova, R.E. Denton, A.A. Chan, *J. Comput. Phys.* 136 (2) (1997) 324-336.
- [24] W. Park, S. Parker, H. Biglari, M. Chance, L. Chen, C.Z. Cheng, T.S. Hahm, W.W. Lee, R. Kulsrud, D. Monticello, L. Sugiyama, R. White, *Phys. Fluids, B Plasma Phys.* 4 (7) (1992) 2033-2037.
- [25] W. Park, E.V. Belova, G.Y. Fu, X.Z. Tang, H.R. Strauss, L.E. Sugiyama, *Phys. Plasmas* 6 (5) (1999) 1796-1803.
- [26] C. Zhao, C. Liu, S.C. Jardin, N.M. Ferraro, *Nucl. Fusion* 60 (12) (2020) 126017.
- [27] H. Qin, W.M. Tang, *Phys. Plasmas* 11 (3) (2004) 1052-1063.
- [28] W. Zhang, W. Joubert, P. Wang, B. Wang, W. Tang, M. Niemerg, L. Shi, S. Taimourzadeh, J. Bao, Z. Lin, in: *International Workshop on Accelerator Programming Using Directives*, Springer, 2018, pp. 3-21.
- [29] D.D. Schnack, D.C. Barnes, Z. Mikic, D.S. Harned, E.J. Caramana, *J. Comput. Phys.* 70 (2) (1987) 330-354.
- [30] A. Könies, S. Briguglio, N. Gorelenkov, T. Fehér, M. Isaev, P. Lauber, A. Mishchenko, D.A. Spong, Y. Todo, W.A. Cooper, R. Hatzky, R. Kleiber, M. Borchardt, G. Vlad, A. Biancalani, A. Bottino, ITPA EP TG, *Nucl. Fusion* 58 (12) (2018) 126027.
- [31] Y. Hou, P. Zhu, C.C. Kim, Z. Hu, Z. Zou, Z. Wang, *Phys. Plasmas* 25 (1) (2018) 012501.
- [32] C.S. Collins, W.W. Heidbrink, M.E. Austin, G.J. Kramer, D.C. Pace, C.C. Petty, L. Stagner, M.A. Van Zeeland, R.B. White, Y.B. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* 116 (9) (2016) 095001.
- [33] W.W. Heidbrink, C.S. Collins, M. Podestà, G.J. Kramer, D.C. Pace, C.C. Petty, L. Stagner, M.A. Van Zeeland, R.B. White, Y.B. Zhu, *Phys. Plasmas* 24 (5) (2017) 056109.
- [34] S. Taimourzadeh, E.M. Bass, Y. Chen, C. Collins, N.N. Gorelenkov, A. Könies, Z.X. Lu, D.A. Spong, Y. Todo, M.E. Austin, J. Bao, A. Biancalani, M. Borchardt, A. Bottino, W.W. Heidbrink, R. Kleiber, Z. Lin, A. Mishchenko, L. Shi, J. Varela, R.E. Waltz, G. Yu, W.L. Zhang, Y. Zhu, *Nucl. Fusion* 59 (6) (2019) 066006.
- [35] X. Guan, H. Qin, N.J. Fisch, *Phys. Plasmas* 17 (9) (2010) 092502.
- [36] Z.X. Lu, G. Meng, M. Hoelzl, P. Lauber, *J. Comput. Phys.* 440 (2021) 110384.