Thermal ion kinetic effects and Landau damping in fishbone modes

C.Liu, S.C.Jardin

Abstract

大规模等离子体中宏观不稳定性的动理学-磁流体力学（*MHD*）混合模拟方法可以扩展以包括热离子和高能离子的动理学效应。新的耦合方案包括在热离子和*MHD*之间同步密度和平行速度，除了压力耦合外，还确保准中性条件并避免数值误差。该新方法已在动理学-*MHD*代码*M3D-C1-K*中实施，并用于研究*DIII-D*和*NSTX*中鱼骨模式中的热离子动理学效应和朗道阻尼。发现热离子动理学效应可以导致由高能粒子驱动的非共振 $n=1$ 鱼骨模式的频率增加（对于 $q_{min}>1$），而朗道阻尼可以提供额外的稳定效果。还进行了*NSTX*中 $n=1$ 鱼骨模式的非线性模拟，并计算了对磁通面的扰动和高能粒子的传输。

1. 引言

热离子的动理效应对于针对聚变反应堆的物理研究而言可能变得更加重要，因为离子温度较高 ($T_i>$ 10keV) 且存在高能阿尔法粒子。在最近的DIII-D实验中，观察到热离子可以驱动高频啁啾模式 (Du等，2021年)、贝塔诱导的阿尔芬 - 声波特征模式 (BAAEs)或低频阿尔芬模式 (Gorelenkov等，2009年；Choi等，2021年；Ma等，2022年)。这些模式可能导致等离子体约束的退化甚至轻微破裂。因此，在ITER和未来的反应堆的数值模拟模型中必须纳入这些效应。

尽管在热离子情况下已经提出了动理学磁流体模型（Cheng，Johnson, 1999; Park等, 1999），但在混合模拟模型（Todo，Sato, 1998; Fu等, 2006; Kim, 2008）中包含热离子动理学效应是具有挑战性的，这些模型结合了粒子在细胞内（PIC）和磁流体力学（MHD）模拟。这些模型被用于模拟高能粒子（EPs）或快速离子的物理过程，后者来自中性束注入或离子回旋共振加热（ICRH）。EPs的压力或垂直电流可能与热离子或电子相当，但它们的密度或动量通常相对较小。通过在动量方程中添加相应项，可以在MHD框架中将它们的动理学效应纳入考虑，实现压力或电流的耦合。

将这种方法扩展到热离子时存在两个主要问题。首先，由于MHD密度和动量方程是通过对离子和电子动理学方程取矩导出的，当单独计算热离子动理学方程时，这些MHD方程变得多余，两种方法之间的误差可能导致数值问题甚至寄生模式。其次，由于离子和电子是分别计算的（一种作为动理学粒子，一种作为流体组分），它们之间的平行电场力需要作为连接进行计算，而这在理想MHD计算中往往缺失或被视为高阶双流体效应。可以通过使用全隐式或预测校正方法对粒子推动和MHD方程计算进行缓解（Barnes，Cheng，Parker 2008），但这会增加计算时间的消耗。

在本文中，我们描述了一种新的动理学-MHD耦合方案，该方案类似于MEGA代码中用于研究大型螺旋装置（LHD）等离子体中热离子动理学效应的方案（Sato，Todo 2019, 2020）。在这个方案中，除了MHD动量方程中的耦合项外，我们还有两个方程来连接MHD和动理学部分。一个是动理学离子与MHD之间平行速度的同步，另一个是离子密度的同步。这两个新方程的引入是为了确保准中性并避免寄生模式的产生。

在这个动理学-磁流体力学（kinetic-MHD）模型中，包括热粒子和快速粒子在内的所有离子都被建模为使用PIC方法的动理学粒子。磁流体力学方程负责计算场的演化以及电子压力和温度。由电子和离子分离引起的平行电场也被加入到离子动理学方程中。这个方案被实现在基于有限元磁流体力学代码M3D-C1（Ferraro, Jardin 2009; Jardin et al. 2012）的动理学-磁流体力学代码M3D-C1-K（Liu等人，2022）中。发现，在包含离子动理学项之后，引入半隐式方法来解决磁流体力学方程（Jardin等人，2012）对于稳定数值不稳定性是有帮助的，并且模拟可以使用大时间步长运行以节省计算时间。

使用这个新模型，我们研究了热离子的动理学效应，特别是在动理学MHD模拟中的Landau阻尼效应。我们首先在离子声波（IAW）模拟中对新的模拟模型进行了测试，并与理论得出的模式频率和阻尼率取得了良好的一致性。然后，我们使用DIII-D和NSTX平衡态研究了$n=1$（n是环向模数）的鱼骨模式，

其中q_{min}（最小安全因子）略大于1。这种鱼骨模式与非共振的（1,1）扭曲模式相关，之前已经使用无热离子动理学效应的动理学MHD模拟进行了研究（Brennan, Kim , Haye 2012; Wang et al. 2013; Shen et al. 2017, 2020）。

我们发现，对于只有快离子在动理学上处理的模拟，主导的$n=1$模式在q_{min}增大时从经典鱼骨模态过渡到Alfven本征模式（AE）类似的模式，模式频率显著增加，这与NIMROD模拟结果一致（Brennan等人，2012）。在添加了对热离子进行动理学处理之后，鱼骨模式的频率增加，增长率减小。AE类似模式分支变得稳定。这些模拟结果表明，这两种模式都受到热离子的Landau阻尼效应的强烈影响，而这在之前的动理学磁流体力学模拟中没有考虑到。此外，我们进行了鱼骨模式的非线性模拟，以研究模式饱和和对粒子输运的影响。

本文的组织安排如下。在第§2节中，我们讨论了包括热离子在内的动理学-磁流体耦合方案，包括密度和平行速度的同步。在第§3节中，我们展示了使用新方案进行的IAW模拟结果，并将其与理论结果中的朗道阻尼率进行了比较。在第§4节中，我们展示了在DIII-D平衡态中进行的$n=1$鱼骨模的数值模拟结果，包括考虑和不考虑热离子动理学效应的情况。在第§5节中，我们描述了在NSTX场景中进行类似模拟的情况，使用了更真实的电子离子分布。在第§6节中，我们展示了NSTX中鱼骨模的非线性模拟结果，重点关注其模态饱和行为。最后，在第§7节中给出了总结。

2. 具有热离子动理学效应的动理学-MHD模型

在本节中，我们介绍了在M3D-C1-K代码中实现的动理学-MHD模型。该代码最初作为扩展MHD代码M3D-C1的动理学模块开发而来，使用了与其他动理学-MHD代码（如M3D-K和NIMROD）类似的压力耦合方案（Fu等，2006；Kim，2008）。粒子运动方程、粒子权重方程和耦合方案的描述见Liu等（2022）。在新版本的M3D-C1-K中，我们将热离子和快离子都视为动理学粒子，并使用PIC方法计算它们的动力学，而电子则使用流体模型处理。具有动理学耦合的MHD方程如下：

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_\perp}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel\boldsymbol{b}\right)\cdot\nabla\boldsymbol{v}_\perp\right]=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\nabla_\perp p_e-\nabla_\perp\cdot\left[P_{i\parallel}\boldsymbol{bb}+P_{i\perp}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})\right] \\ -\nabla_\perp\cdot\left[P_{f\parallel}\boldsymbol{bb}+P_{f\perp}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})\right]+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}_\perp, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{v}_\perp\times\boldsymbol{B}+\eta\boldsymbol{J}. \tag{2.4}$$

这里，ρ是总离子质量密度，$\boldsymbol{v}_\parallel$和$\boldsymbol{v}_\perp$是沿磁场$\boldsymbol{B}$的MHD速度的平行和垂直分量，$\boldsymbol{J}$是等离子体电流密度，E是电场，ν和η是粘性和电阻率系数，$\boldsymbol{P}_\parallel$和$\boldsymbol{P}_\perp$是离子压力张量的平行和垂直分量，下标i和f代表热离子和快离子。电子压力p_e可以通过对流和扩散项计算得到。

$$\frac{\partial p_e}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel\boldsymbol{b}\right)\cdot\nabla p_e=-\gamma_e p_e\nabla\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel\boldsymbol{b}\right)\right]+n_e\nabla\cdot\left[\kappa_\perp\boldsymbol{I}+\kappa_\parallel\boldsymbol{bb}\right]\cdot\nabla\left(\frac{p_e}{n_e}\right), \tag{2.5}$$

或者作为密度和电子温度的乘积（$p_e=n_eT_e$）的结果。温度可以分别计算。

$$\frac{\partial T_e}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel\boldsymbol{b}\right)\cdot\nabla T_e=-\left(\gamma_e-1\right)T_e\nabla\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel\boldsymbol{b}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\kappa_\perp\boldsymbol{I}+\kappa_\parallel\boldsymbol{bb}\right]\cdot\nabla T_e, \tag{2.6}$$

其中γ_e是电子比热比，$\kappa_\parallel$和$\kappa_\perp$是平行和垂直热传输系数。运动离子轨道遵循导心方程。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{B^\star}\left[V_\parallel\boldsymbol{B}^\star-\boldsymbol{b}\times\left(\boldsymbol{E}-\frac{\mu}{q}\nabla B\right)\right], \tag{2.7}$$

$$m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{B^\star}\boldsymbol{B}^\star\cdot(q\boldsymbol{E}-\mu\nabla B), \tag{2.8}$$

其中，

$$\boldsymbol{B}^\star = \boldsymbol{B} + \frac{mV_\parallel}{q}\nabla\times\boldsymbol{b}, \tag{2.9}$$

$$B^\star = \boldsymbol{B}^\star\cdot\boldsymbol{b}, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{E}^\star = \boldsymbol{E} - \frac{1}{n_e e}\nabla_\parallel p_e. \tag{2.11}$$

在这里，X是粒子的导心位置，$V_\parallel$是粒子的平行速度，m是离子质量，$\mu = mV_\perp^2/2B$是磁矩，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/B$。注意电场$\boldsymbol{E}^\star$在平行方向上有一个额外项$-\nabla_\parallel p_e/n_e e$。这个项是通过在电子动量方程中忽略平行方向上的惯性项得到的。

假设离子分布是关于位置 $\boldsymbol{X}$、能量 $\mathscr{E} = (1/2)mV^2$ 和俯仰角 $\xi = V_\parallel/V$ 的函数，通过漂移动理学方程得到 δf 计算的权重方程。

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\alpha\left[\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)_1\cdot\nabla + \left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\right)_1\frac{\partial}{\partial\mathscr{E}} + \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)_1\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\ln f_0 \tag{2.12}$$

其中

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} + V_\parallel\delta\boldsymbol{b}, \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left[V_\parallel\boldsymbol{b} + \frac{mV_\parallel^2}{qB}\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b} + \frac{\mu}{qB}\boldsymbol{b}\times\nabla B\right]\cdot q\boldsymbol{E}^\star, \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{d}t} - \frac{2V_\parallel}{mV^3}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left[\boldsymbol{b} + \frac{mV_\parallel}{qB}\nabla\times\boldsymbol{b}\right]\cdot\frac{q}{m}\boldsymbol{E}^\star + \delta\boldsymbol{b}\cdot\left(-\frac{\mu}{m}\nabla B\right), \tag{2.16}$$

并且$\alpha = 1$用于线性计算，$\alpha = 1-w$用于非线性计算。或者，可以通过计算平衡场和扰动场下的运动方程结果之间的差异来获得这些$(\cdots)_1$项。最后，MHD方程中使用的热（下标i）和快速（下标f）离子的密度、平行速度和压强是通过粒子在场上的沉积来计算的。

$$\delta n_{i,f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_{i,f}}\left(w_{k_{i,f}} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0^\star}\right)S\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{k_{i,f}}\right), \tag{2.17}$$

$$\delta\rho = m_i\delta n_i + m_f\delta n_f, \tag{2.18}$$

$$\delta n_e = Z_i\delta n_i + Z_f\delta n_f, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\delta v_\parallel(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n_{e0}+\delta n_e}\Bigg[&\sum_{k_i}Z_iV_{\parallel,k_i}\left(w_{k_i} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0^\star}\right)S\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\right) - Z_in_{i0}v_{\parallel i,0} + \\ &\sum_{k_f}Z_fV_{\parallel,k_f}\left(w_{k_f} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0^\star}\right)S\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\right) - Z_fn_{f0}v_{\parallel f,0}\Bigg],\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\delta P_{\parallel i,f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_{i,f}}m_{i,f}V_{\parallel,k_{i,f}}^2\left(w_{k_{i,f}} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0^\star}\right)S\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{k_{i,f}}\right), \tag{2.21}$$

$$\delta P_{\perp i,f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_{i,f}}\mu_{k_{i,f}}B_0\left(w_{k_{i,f}} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0^\star} + \frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right)S\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{k_{i,f}}\right) \tag{2.22}$$

这里，S是粒子形状函数，$k_{i,f}$是粒子的索引，m_i和m_f是离子质量，Z_i和Z_f是离子的有效电荷，$v_{\parallel 0}$是离子平衡分布f_0的平行速度。关于粒子沉积计算的实现细节可以在Liu等人（2022年）的文章中找到。对于具有有限Larmor半径（FLR）效应的模拟，场的评估和粒子沉积都需要考虑沿回旋轨道的平均值。

这里的动理学-MHD方案与MEGA（Sato和Todo 2019, 2020）中实施的方案类似，只是我们使用压力耦合，而MEGA使用电流耦合。正如Liu等人（2022）指出的那样，这两种耦合方案在计算$v_\perp$时是等效的。与Park等人（1999）中的含热离子压力耦合方案相比，我们在离子密度和平行速度与MHD场同步方面有额外的方程，而在Park等人（1999）中，这些量是通过MHD方程计算的。例如，平行速度如下所示求解：

$$\rho\left[\frac{\partial v_\parallel}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_\perp+v_\parallel \boldsymbol{b}\right)\cdot\nabla v_\parallel\right]=-\nabla_\parallel\cdot\left[P_{i\parallel}\boldsymbol{bb}+P_{i\perp}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})\right] \\ -\nabla_\parallel\cdot\left[P_{f\parallel}\boldsymbol{bb}+P_{f\perp}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})\right]-\nabla_\parallel p_e. \tag{2.23}$$

如果假设离子能量较小，忽略梯度和曲率漂移，可以通过对动理学方程进行矩的运算来验证(2.23)的推导过程。在这里，$\nabla_\parallel p_e$是从(2.11)中的平行电场项导出的，它被用于粒子权重方程中。原则上，Park等人(1999)中的压强耦合方案与我们的耦合方案是等价的，并且模拟结果应该是一致的，尽管MHD方程中离子密度和$v_\parallel$的计算是多余的。

然而，我们发现在M3D-C1中，由于在一个时间步内依次求解流体方程和动理学方程的原因，在使用Park等人（1999）的方案进行模拟时，流体方程和动理学方程中δn和$\delta v_\parallel$的差异会随时间增加，这违反了准中性条件，并导致寄生模式超过了数值结果。因此，我们使用同步方案替换了这两个MHD方程以避免这些问题。MHD的垂直动量方程（2.1）被保留下来，因为它为动理学模拟提供了额外的信息。实际上，（2.1）可以被视为等离子体垂直电流的分解，其中$\rho\partial\boldsymbol{v}_\perp/\partial t$项表示极化电流，而压力项表示漂移和磁化电流。

离子的平行速度用于电子压力（2.5）和温度方程（2.6），假设电子和离子是一起运动的。然而，在考虑双流体效应时，由于平行电流，电子和离子速度之间存在差异。这种差异可以导致（2.5）和（2.6）中的修正项与d_i/L成正比（d_i为离子皮层深度），因此可以视为双流体项。由于我们处理的是长波模式，当前模拟模型中忽略了这些双流体项。由于同样的原因，在欧姆定律（2.4）中未包含（2.11）中使用的额外平行电场。对于小波长模式（如动理学阿尔芬波），这些双流体效应可能很重要，并将在将来进行研究。

3. IAWs的数值模拟

在本节中， 我们将在一个IAW模拟中测试M3D-C1-K的新版本。 使用MHD代码可以很容易地模拟IAW的振荡。然而，对于$T_i\sim T_e$的情况，由于平行Landau阻尼，IAWs将会被强烈阻尼，这只能通过包括热离子的动理学效应来模拟。

在模拟中，我们将热离子视为动理学粒子，电子视为流体成分。由于IAW是静电模式，我们只保留磁流体力学方程（2.5），忽略$v_\perp$项。磁流体力学方程和运动方程限制为沿波矢方向一维。对于电子压强，我们选择电子热容比$\gamma_e=1$，假设它们具有等温性质。平行速度的初始化与固定波数k的正弦函数类似，可以对p_e和p_i引起扰动并导致驻波形成。假设电子和离子密度相同，假设$Z_{\mathrm{eff}}=1$，离子温度设置为电子温度的一部分。

对于仅考虑磁流体力学(MHD)的模拟，我们发现离轴声波(IAW)引起的δp和$\delta v_\parallel$的振荡几乎没有阻尼。考虑离子动理学效应后，振荡经历了阻尼，如图1所示。我们发现，模式阻尼率与离轴声波的理论朗道阻尼率一致，以红线表示。请注意，对于$T_i/T_e>0.1$，离轴声波的朗道阻尼率γ_{LD}变得与频率ω可比，并且摄动计算不准确。在这些情况下，γ_{LD}应该从等离子体色散函数$Z(\zeta)$数值求解。在这里，我们使用Chen(2013)的经验公式来获取$0.1<T_i/T_e<1$范围内离轴声波的频率和朗道阻尼率。

$$\omega=\omega_0\sqrt{1+\frac{3T_i}{T_e}} \tag{3.1}$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{LD}}}{\omega}=1.1*\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{7/4}\exp\left[-\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2\right], \tag{3.2}$$

其中$\omega_0=k\sqrt{k_BT_e/m_i}$，$k_B$为玻尔兹曼常数。方程(3.1)的计算假设离子的热容比$\gamma_i=3$，因为它们只遭受一维压缩 (McKinstrie, Giacone , Startsev 1999; Chen 2013)。图2显示了来自M3D-C1-K模拟的不同T_i/T_e值

对应的IAW频率和阻尼率的结果。对于较小的T_i/T_e，阻尼率为零，频率接近MHD结果ω_0。对于$T_i/T_e > 0.3$，阻尼率变得与频率相当，表明IAWs被强烈阻尼。ω和γ_{LD}都接近理论结果，表明新的动理学-MHD模型成功捕捉到了Landau阻尼物理过程。

我们发现，对于大的T_i/T_e，该模式在被显著阻尼后可能会产生回响，如图3所示。这种现象是Landau阻尼模式的典型非线性行为，与耗散阻尼（Kadomtsev 1968）不同。这种效应表明，尽管由于相位混合而阻尼了模式，但粒子仍然保留了前面振荡的一些“记忆”，这在后期可以表现为回响。

4. DIII-D中鱼骨模式的线性模拟

在本节中，我们讨论了使用M3D-C1-K模拟线性的 $n = 1$ 鱼骨模，包括无热离子动理学效应和有热离子动理学效应。我们使用了DIII-D装置实验得到的平衡态，该实验是通过混合放电#125476获得的，这个平衡态之前已经被用NIMROD（Brennan等人,2012）研究过$n = 1$ MHD不稳定性。在该实验中，存在$(1,1)$的扭曲模态以及$(2,1)$和$(3,2)$的撕裂模态（LaHaye等人,2010）。我们使用了EFIT代码（Lao等人,1990）的单个平衡重建，并包括运动斯塔克效应剖面数据，通过选择放电的稳定阶段中的某个时间(3425 ms)进行重建，期间撕裂模态激发较为良好。模拟中没有考虑环向流。图4展示了平衡态的q和总压力的剖面以及磁通形状。对于这个平衡态，安全因子在$\psi/\psi_0 = 0.0625$处有最小值$q_{\min} = 1.06$，在核心附近存在很小的逆磁剪切。为了研究q剖面对鱼骨模稳定性的影响，我们对平衡态应用了Bateman尺度法（Bateman,1978），这意味着我们在保持压力和环向电流固定以及满足Grad-Shafranov方程的情况下，通过向$F^2\,(F = RB_\phi)$添加一个常数来改变环向磁场。

包括了来自中性束注入的热离子和快离子在动理-磁流体力学模拟中。这两个群体都是氘离子。热离子初始化为Maxwellian分布，密度为$n_i = n_e - n_f$（n_f是快离子密度），温度为$T_i = T_e$。快离子的能量分布是减速分布，并且在取向角上具有各向同性分布。

$$f_0 = \frac{n_f(\psi)}{\mathscr{E}^{3/2} + \mathscr{E}_c^{3/2}} \tag{4.1}$$

其中$\mathscr{E}_c = 10\mathrm{keV}$为临界能量；$f_0$具有截止能量$\mathscr{E}_{\max} = 50\mathrm{keV}$。$\mathscr{E}_c$和$\mathscr{E}_{\max}$在模拟域中都是常数。快离子密度$n_f$与总压强具有相同的分布，因此在不同的通量面上，快离子压力与总压强的比例固定为（16%）

对于线性模拟，我们使用一个二维有限元网格和MHD场在环向上的谱表示。这个二维非结构化网格有5495个等均匀分布的三角形元素。对于动理学-MHD模拟，我们使用8×10^6个粒子标记，其中一半用于快离子的模拟，另一半用于热离子。

在图5中总结了模式增长率和频率的模拟结果，其中$q_{\min}$从1.0变化到1.2。仅考虑磁流体力学效应的结果（蓝线）表明，当$q_{min} < 1.06$时，$n = 1$扭曲模式是不稳定的。当包括快离子动理学效应（红线）后，对于$q_{min} < 1.04$，模式的增长率减小，并且由于波粒共振而具有有限的频率，这些频率随着q_{min}的增加而增加。对于$q_{min} > 1.1$，仍然存在一个由快离子驱动的弱不稳定的$n = 1$模式，其频率明显高于$q_{min} < 1.06$的情况。频率的明显变化表明，主导的$n = 1$模式从鱼骨状分支变为具有不同频率的AE状分支。该模式可以是由β引发的阿尔文本振模（BAE）或磁粘性阿尔文本振模（BAAE），并且由于核心附近的反压剖面，它与反向剪切阿尔文本振模（RSAE）耦合。模式频率和增长率的结果与Brennan等人（2012年）的NIMROD结果非常接近，但是当q_{min}增大时，$q_{min} > 1.1$的增长率会持续降至零，而在Brennan等人（2012年）的研究中，增长率在大的q_{min}下几乎是一个常数。

在图5中，包括快速离子和热离子在内的模态增长率和频率显示为绿色线条。对于低频鱼骨状分支，与仅有快速离子的结果相比，模态增长率显著下降，而模态频率增加。众所周知，鱼骨模是由被限制的离子驱动的，这些离子通过经纬运动与模态产生共振。因此，热离子的动理学效应可以提供额外的驱动力，促使鱼骨模式旋转并提高模态频率。另一方面，被限制的离子的经纬运动会削弱它们对磁流体力学模式的响应，从而降低模态增长率（Sato，Todo 2019）。此外，在这些热离子模拟中，仅打开了平行电场，朗道阻尼可以进一步稳定模式。

鱼骨模式的二维结构，包括热离子，以$q_{min} = 1.04$为例，总结在图6-9中。图6显示了扰动速度流函数$(\delta\phi)$和磁通$(\delta\psi)$的模式结构。其中，$\delta\phi$在核心附近主要由$m = 1$支配，在外部区域主要由$m = 2$支配，而$\delta\psi$主要由$m = 2$支配。图7显示了电子和离子压强的结构，其类似于$\delta\phi$的结构。δp_e和δp_i之间的相似性表明了准中性条件得到满足。图8显示了快离子压强的结构，包括(2.21)和(2.22)中的平行和垂直分量。非绝热响应$(\delta p_\perp - \delta p_\parallel)$主要位于低磁场侧，因为它来自共振捕获粒子(Fu et al. 2006; Kim 2008; Liu et al.

2022)。图9显示了使用平行速度同步(2.20)的动理-MHD模拟的$\delta v_{\parallel}$与仅有快离子且没有同步的模拟结果的比较。两个结果接近且都由$m=2$主导，表明动理方程成功捕捉到了MHD系统的平行动理学。

根据模拟结果，我们发现$n=1$模式的鱼骨分支和AE-like分支都容易受到热离子的Landau阻尼影响。平行波数可以通过以下方式估计：

$$k_{\parallel} \approx \frac{1}{R}\left(n - \frac{m}{q_{min}}\right). \tag{4.2}$$

使用与快离子和$m=1$模拟得到的模式频率，对于$q_{min}=1.04$，我们有$\omega/k_{\parallel}=2.3v_{\rm th}$，对于$q_{min}=1.15$，我们有$\omega/k_{\parallel}=2.68v_{\rm th}$，其中$v_{\rm th}=\sqrt{T_i/m_i}$。因此，Landau 衰减效应对两个分支都很重要，这解释了在$q_{min}>1.06$的情况下热离子对模式的稳定化。(a)(a)频率对等离子体β值具有很强的依赖性，特别是对于仅考虑 MHD 的模拟情况，这类似于压力驱动模式。在包括离子动理学效应后，生长率对β的依赖性减弱，且模式频率几乎不依赖于β。包括Landau阻尼效应时，$n=1$模式在$q_{min}>1.06$时是稳定的。对于来自EFIT的原始平衡态，$q_{min}=1.06$，该模式处于稳定边界，可能是鱼骨模式的非线性演化和核心附近电流轮廓的平坦化的结果。

在$q_{min}=1.04$的模拟中，鱼骨类模式的频率大约为$f=6.13$kHz。在DIII-D实验中，主导的$n=1$模式在实验室参考系中被确定为频率为18kHz，(a)而环向旋转频率约为21kHz。因此，鱼骨类模式的模拟与等离子体参考系中的测量频率是一致的。

5. NSTX中鱼骨模式的线性模拟

我们在NSTX实验条件下对$n=1$模式进行了类似的研究。平衡q轮廓是从NSTX射击#134020的700 ms时刻获得的。密度和温度轮廓来自TRANSP（Ongena等人2012）计算结果。Grad-Shafranov（G-S）方程在一个具有7199个元素的M3D-C1二维网格中使用这些轮廓进行求解。我们忽略了高Z杂质的贡献，并假设所有离子都是氘离子。模拟中使用的轮廓和通量轮廓的形状如图11所示。q轮廓与EFIT q轮廓具有相同的形状，q_{min}位于$\sqrt{\psi_{norm}}=0.2$处。核心电子密度为1.04×10^{20} m^{-3}，核心电子和离子温度约为0.74keV。核心的EP贝塔与总贝塔之比为$\beta_{\rm EP}/\beta=17.3\%$。需要注意的是，与DIII-D平衡相比，NSTX的等离子体β要大得多（NSTX $\beta_{\rm on\text{-}axis}=50.8\%$，DIII-D $\beta_{\rm on\text{-}axis}=12.4\%$）。在NSTX模拟中，我们使用从局部电子温度计算得到的Spitzer电阻率，并应用一个较大的平行热传导系数$\kappa_{\parallel}$。

对于EP，我们使用NUBEAM计算中的各向异性分布。NUBEAM代码提供了从Monte Carlo计算中注入的束流离子的三维（$r,\lambda=V_{\parallel}/V,$能量$\Psi$信息（Pankin等人，2004），称为经典快离子分布。NUBEAM在磁轴附近的分布（图12a）显示，低能EPs（$\mathscr{E}<40$keV）大致与$V_{\parallel}/V\approx1$逆向传递，而高能EPs在$V_{\parallel}/V\approx0.4$处有一个分布峰值。这个初始分布非常嘈杂，使得难以在相空间中计算f_0的梯度。为了用于δf计算，我们应用了高斯平滑算子来获得平滑的分布，如图12（b）所示。然后，将这个新的分布作为f_0读入M3D-C1-K，用于粒子初始化和δf计算。EP压力的径向分布如图11所示，与TRANSP输出一致。

在讨论中关于 Bateman 缩放方法的缺点以及 $n=1$ 模式增长率对 β 的敏感依赖性问题（见第 4 节），对于 NSTX，我们采用了一个新方法来扫描 q_{min} 的值，通过固定托卡马克磁场并改变等离子体电流以适应新的 q 剖面。这种方法确保了在扫描 $q_{\rm min}$ 时 β 几乎保持不变。动理学-MHD 和仅 MHD 的 $n=1$ 线性模拟的结果总结在图 13 中。对于激发 $n=1$ 模式的 q_{min} 阈值高于 DIII-D 的结果，这得益于更大的 β。在仅包含快离子的动理学-MHD 模拟中，增长率略微降低，鲤鱼背波模式的频率几乎恒定（约为0.4 kHz），与 q_{min} 的变化无关。在 NSTX 模拟中不会出现类似AE的模式。

在包含热离子动理学效应后，类似鱼骨模式的频率显著增加，而增长率则因被困离子的视向运动和朗道阻尼而降低。如图12所示，在快离子中，被困粒子的数目（$\lambda\approx0$）相对较少，与共轭离子相比较小，这导致类似鱼骨模式的频率较低。另一方面，热离子具有各向同性分布，并可提供大量的被困离子来驱动类似鱼骨模式。图14显示了$q_{\rm min}=1.08$时类似鱼骨模式的模式结构。当$q_{\rm min}>1.14$时，朗道阻尼效应会稳定类似AE模式，这与DIII-D的结果类似。在NSTX实验中，使用软X射线诊断方法确定了螺旋扰动模式（$m=1$）和撕裂模式（$m=2$），这两种模式的协同作用可以导致快离子输运（Yang、Podestà和Fredrickson 2021）。据信，$m=2$模式主要是一种新古典撕裂模式，受EP相关电流的影响。在实验条件下（$1.1<q_{\rm min}<1.2$），M3D-C1-K仿真中的热离子边界情况下，$m=1$模式在边缘不稳定，与DIII-D情况类似，这可能是由于类似鱼骨模式的非线性饱和引起的压力和电流弛豫。实验观测到的频率在减去托卡马克旋转多普勒频率后小于5kHz，接近于$q_{\rm min}=1.1$的仿真频率。请注意，非线性饱和后的振荡频率可以低于线性结果，这是由于类似鱼骨模式的下行转频。

6. NSTX中鱼骨状模式的非线性模拟

基于线性模拟，我们在NSTX中对包括热离子动理学效应的$n = 1$类似鱼骨状模态进行非线性模拟。我们使用同样的MHD平衡和EP分布，其中$q_{min} = 1.08$，这与§5中的相同。模拟采用了三维有限元网格，非线性项被包括在MHD和δf方程中。网格由8个环形平面组成，通过环形方向上的Hermite有限元连接。这个网格足够解决$n = 1$扰动问题，因为我们在这个模拟中主要关注$n = 1$模态的增长和饱和，以及它与$n = 0$模态的非线性耦合。每个平面的网格结构与线性模拟中相同。我们在PIC模拟中使用16×10^6个粒子标记器。

非线性模拟是在NERSC的Perlmutter集群上进行的。对于每个非线性模拟，我们使用了8个节点，每个节点使用64个AMD内核和4个NVIDIA Tesla A100 GPU。GPU用于进行MHD方程矩阵元素计算和粒子推动。CPU用于通过调用PETSC库求解矩阵和计算粒子矩。 (a) 图15显示了非线性NSTX鱼骨模拟中动能和磁能的时间演化。我们发现$n = 1$模式在$t = 0.5$ ms时达到饱和点。在这一点上，峰值$\delta B/B_0$约为2.0×10^{-2}，扰动电子温度的最大值约为86eV (10% of the equilibrium on-axis T_e)。还存在由于非线性模式模式耦合而激发的$n = 0$模式。饱和后，$n = 1$模式的磁能在高水平上有一些振荡，而$n = 0$模式的能量持续增长，这意味着磁场拓扑的变化不会衰减。模式饱和后的磁通的波兰卡雷图($t = 1.2$ ms)如图16(a)所示。由于$(1,1)$模式的激发，磁轴发生了明显的偏移。螺旋边界与$q = q_{min}$的磁通轮廓重叠，这意味着大部分的磁扰动发生在反剪切区域。尽管平衡态具有$q_0 > 1.08$，但激发的模式在磁轴附近形成了一个$(1,1)$岛屿，并使得接近$q = q_{\min}$的磁场表面的磁场呈随机分布。它还在$q = 2$表面附近创建了小的$(2,1)$岛屿。

$n = 1$模式的增长会导致等离子体的输运。图16(b)显示了模式饱和前后的等离子体粒子密度的通量平均值。这个结果显示，虽然$n = 1$模式可以提供一个较大的δB场，但它只导致了等离子体粒子密度在$q = q_{min}(\rho = 0.2)$处的轻微下降（约为10%）。饱和后，根据Landau阻尼效应，模式受到影响，需要有一个有限的径向梯度来激发。然而，图16(b)是一个通量平均结果，并没有显示模式在相空间中的谐振线上梯度的变化，这可能更加重要。

请注意，非线性饱和结果与$q_{\min}$的值非常敏感，就像线性增长率一样。我们还对NSTX进行了$q_{min} = 1.1$的非线性模拟，使用相同的等离子体和EP β。我们发现，在这种情况下，模式可以在较低水平饱和。$\delta B/B_0$的饱和值约为3.3×10^{-3}，最大的δT_e约为20eV。扰动场过小，无法产生磁岛或引起明显的EP输运。考虑到在实验中q的测量误差可能会导致$q_{\min}$发生微小变化，因此很难通过数值模拟来确切回答鱼骨模式的非线性行为问题，这是目前诊断手段所无法解决的。

7. 总结

这篇论文中的新动理学-MHD模拟方法包括将所有离子视为动理学粒子，这与传统方法只处理快速离子的动理学效应有所不同。为了实现这一点，MHD方程中的一部分，包括密度方程和平行速度方程，被动理学粒子模拟同步替换，以避免冗余计算和由数值误差引起的寄生模式。其余的MHD方程仍然可以使用半隐式方法进行求解，具有较大的时间步长，这与完全动理学或回旋动理学模拟方法不同。包括热离子动理学效应对于针对ITER和具有大离子温度的聚变反应堆的宏观不稳定性模拟是重要的。

新的模拟方法已用于研究离子声波和鱼骨模式的热离子Landau阻尼。发现在与$q_{min} > 1$的平衡中驱动$n = 1$的鱼骨模式，或非共振鱼骨模式，可能会受到Landau阻尼效应的强烈影响，因为模式在平行方向的相速度与离子热速度同数量级。在使用DIII-D和NSTX平衡进行的线性模拟中，发现由快离子驱动的$n = 1$类似阿尔文模式可以被热离子稳定。因此，有必要重新审视那些由动理学-MHD代码进行的非共振鱼骨模拟，并添加热离子动理学效应。将来可以使用类似NOVA的特征值代码进一步分析大q_{min}情况下的类似阿尔文模式。

在发展动理学-MHD方法时，我们在动理学方程中包括了由电子压力计算得出的平行电场，这对于IAW模拟是必不可少的。然而，在MHD方程中，这个项没有包含在欧姆定律中。由霍尔项和电子压力驱动的平行和垂直电场等双流体项在计算与离子皮层深度相当的等离子波，如KAW和哨声波方面可能是重要的。这些双流体项已经在M3D-C1中得到发展，并用于计算它们对磁重联的影响（Beidler et al. 2016），但使用它们进行模拟需要进一步测试和改进矩阵求解器。我们计划在未来的工作中在流体和动理学方程中均使用电场进行模拟，以自洽地研究双流体效应。

REFERENCES

Barnes, D.C., Cheng, J. , Parker, S.E. 2008 Low-noise particle algorithms for extended magnetohydrodynamic closure. Phys. Plasmas 15 (5), 055702.

Bateman, G. 1978 MHD instabilities. MIT Press.

Beidler, M.T., Cassak, P.A., Jardin, S.C. , Ferraro, N.M. 2016 Local properties of magnetic reconnection in nonlinear resistive- and extended-magnetohydrodynamic toroidal simulations of the sawtooth crash. Plasma Phys. Control. Fusion 59 (2), 025007.

Brennan, D.P., Kim, C.C. , HaYe, R.J.L. 2012 Energetic particle effects on $n = 1$ resistive MHD instabilities in a DIII-D hybrid discharge. Nucl. Fusion 52 (3), 033004.

Chen, F.F. 2013 Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion: Volume 1: Plasma Physics. Springer.

Cheng, C.Z. , Johnson, J.R. 1999 A kinetic-fluid model. J. Geophys. Res. 104 (A1), 413-427.

Choi, G.J., LiU, P., Wei, X.S., Nicolau, J.H., Dong, G., Zhang, W.L., Lin, Z., Heidbrink, W.W. , HAHM, T.S. 2021 Gyrokinetic simulation of low-frequency Alfvénic modes in DIII-D tokamak. Nucl. Fusion 61 (6), 066007.

Du, X.D., Hong, R.J., Heidbrink, W.W., Jian, X., Wang, H., Eidietis, N.W., VAn ZeEland, M.A., Austin, M.E., LiU, Y., CROCKER, N.A., et al. 2021 Multiscale chirping modes driven by thermal ions in a plasma with reactor-relevant ion temperature. Phys. Rev. Lett. 127 (2), 025001.

FERRARO, N.M. , JARDIN, S.C. 2009 Calculations of two-fluid magnetohydrodynamic axisymmetric steady-states. J. Comput. Phys. 228 (20), 7742-7770.

Fu, G.Y., Park, W., Strauss, H.R., Breslau, J., Chen, J., Jardin, S. , Sugiyama, L.E. 2006 Global hybrid simulations of energetic particle effects on the $n = 1$ mode in tokamaks: internal kink and fishbone instability. Phys. Plasmas 13 (5), 052517.

Gorelenkov, N.N., Van Zeeland, M.A., Berk, H.L., Crocker, N.A., Darrow, D., Fredrickson, E., Fu, G.-Y., Heidbrink, W.W., Menard, J. , Nazikian, R. 2009 Beta-induced Alfvén-acoustic eigenmodes in national spherical torus experiment and DIII-D driven by beam ions. Phys. Plasmas 16 (5), 056107.

Jardin, S.C., Ferraro, N., BreSlaU, J. , ChEn, J. 2012 Multiple timescale calculations of sawteeth and other global macroscopic dynamics of tokamak plasmas. Comput. Sci. Disc. 5 (1), 014002.

Kadomtsev, B.B. 1968 Landau damping and echo in a plasma. Sov. Phys. Uspekhi 11 (3), 328.

KIM, C.C. 2008 Impact of velocity space distribution on hybrid kinetic-magnetohydrodynamic simulation of the (1,1) mode. Phys. Plasmas 15 (7), 072507.

La Haye, R.J., Brennan, D.P., Buttery, R.J. , Gerhardt, S.P. 2010 Islands in the stream: the effect of plasma flow on tearing stability. Phys. Plasmas 17 (5), 056110.

Lao, L.L., Ferron, J.R., Groebner, R.J., Howl, W., John, H.S., Strait, E.J. , Taylor, T.S. 1990 Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks. Nucl. Fusion 30 (6), 1035-1049.

Liu, C., Jardin, S.C., Qin, H., Xiao, J., Ferraro, N.M. , Breslau, J. 2022 Hybrid simulation of energetic particles interacting with magnetohydrodynamics using a slow manifold algorithm and GPU acceleration. Comput. Phys. Commun. 275, 108313.

MA, R.R., ChEn, L., ZoncA, F., LI, Y. , QIU, Z. 2022 Theoretical studies of low-frequency Alfvén modes in tokamak plasmas. Plasma Phys. Control. Fusion 64, 035019.

McKinstrie, C.J., Giacone, R.E. , StartseV, E.A. 1999 Accurate formulas for the Landau damping rates of electrostatic waves. Phys. Plasmas 6 (2), 463-466.

Ongena, J.P.H.E., Voitsekhovitch, I., Evrard, M. , McCune, D. 2012 Numerical transport codes. Fusion Sci. Technol. 61 (2T), 180-189.

Pankin, A., McCune, D., Andre, R., Bateman, G. , Kritz, A. 2004 The tokamak Monte Carlo fast ion module NUBEAM in the national transport code collaboration library. Comput. Phys. Commun. $159(3), 157-184$.

Park, W., Belova, E.V., Fu, G.Y., Tang, X.Z., Strauss, H.R. , Sugiyama, L.E. 1999 Plasma simulation studies using multilevel physics models. Phys. Plasmas 6 (5), 1796-1803.

Sato, M. , TODO, Y. 2019 Effect of precession drift motion of trapped thermal ions on ballooning modes in helical plasmas. Nucl. Fusion 59 (9), 094003.

Sato, M. , TODO, Y. 2020 Ion kinetic effects on linear pressure driven magnetohydrodynamic instabilities in helical plasmas. J. Plasma Phys. 86 (3).

Shen, W., WANG, F., Fu, G.Y., XU, L., LI, G. , LIU, C. 2017 Hybrid simulation of fishbone instabilities in the EAST tokamak. Nucl. Fusion 57 (11), 116035.

Shen, W., WANG, F., FU, G.Y., XU, L. , REN, Z. 2020 Hybrid simulation of fishbone instabilities with reversed safety factor profile. Nucl. Fusion 60 (10), 106016.

Todo, Y. , SATO, T. 1998 Linear and nonlinear particle-magnetohydrodynamic simulations of the toroidal Alfvén eigenmode. Phys. Plasmas 5 (5), 1321-1327.

WANG, F., FU, G.Y., BRESLAU, J.A. , LIU, J.Y. 2013 Linear stability and nonlinear dynamics of the fishbone mode in spherical tokamaks. Phys. Plasmas 20 (10), 102506.

YANG, J., PodESTÀ, M. , FredriCKSON, E.D. 2021 Synergy of coupled kink and tearing modes in fast ion transport. Plasma Phys. Control. Fusion 63 (4), 045003.