Bi-Maxwellian, slowing-down, and ring velocity distributions of fast ions in magnetized plasmas

Dmitry Moseev, Mirko Salewski

Abstract

我们讨论了解析的适用于基础等离子体建模的快速离子速度分布函数，以*ITER*托卡马克为例进行了说明。在托卡马克和仿星器中，麦克斯韦分布是离子和电子的最为普遍的模型。双麦克斯韦分布和漂移（双）麦克斯韦分布是扩展，分别允许各向异性和整体等离子体流动。例如，在离子回旋共振频率范围内通过波加热产生的快速离子通常用双麦克斯韦分布或所谓的尾温度来描述。环形分布可作为任意分布的基本构建块或在稳定性研究中作为尾部峰的基础。各向同性减速分布是对于聚变α粒子的良好模型。各向异性减速分布在各向异性粒子源典型的中性束注入中出现。我们通过物理推导这些分布函数，并在理论家和实验家常用的各种坐标系统中提供了解析模型。我们还计算了分布函数在诊断视线上的一维投影，以获得有关测量的洞察。

1 简介

也许，在所有物理学中，最广为人知的粒子速度分布函数是麦克斯韦分布函数或麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布函数，在大多数物理教育课程中都有介绍，参见参考文献1-3。麦克斯韦的开创性想法是使用速度分布函数$f(\mathbf{v})$来描述气体的状态，其中$\mathbf{v}$是速度。在他1860年的论文[4]中，他基于两个要求介绍了他的分布函数。首先，函数应该具备球对称性，反映出各向同性。其次，速度分量应该是可分离的，反映出三个坐标方向的独立性。麦克斯韦分布是唯一满足这两个要求的分布。（但是，如果考虑相对论效应，速度分量就不可分离[3]）在1867年，他证明了碰撞不会改变他的分布，而无需引用他的两个最初的要求[5]。波尔兹曼在接下来的十年中证明了在一个给定粒子数和给定能量的孤立系统中，麦克斯韦分布是最可能的分布，并且碰撞会将任何分布推向它，即它是唯一的稳定解[6,7]。由麦克斯韦分布描述的粒子集合被称为热平衡，这对于稀薄气体在中等温度下是一个很好的近似。

然而，托卡马克和仿星器中的等离子体从未处于完全热平衡状态。聚变等离子体比环境热得多，并迅速损失热量。这种热损失必须通过聚变反应或辅助加热的热源来平衡，这使得即使在稳态等离子体中也无法形成热平衡。例如，与麦克斯韦分布不同，聚变α粒子的速度分布函数在出生速度之前具有近似于$1/v^3$形式的尾部。[8-10]由中性束注入（NBI）和离子回旋频率范围内的电磁波加热（ICRF）产生的高能粒子群在速度空间中甚至高度各向异性。[11-15]尽管如此，常常假定麦克斯韦分布能够成功近似描述大多数等离子体。

本教程回顾了麦克斯韦分布以及在等离子体情景中与聚变或辅助加热相关的速度分布函数：漂移麦克斯韦分布和双麦克斯韦分布、环状分布、各向同性和各向异性的减速分布。在每种情况下，我们讨论了分布的一维投影，这对于沿着特定方向（如视线）进行诊断非常重要。这些分析速度分布函数具有许多应用：快速建模等离子体放电、解释与聚变等离子体诊断测量结果、使理论研究和计算机代码可行，或者用作基准计算机代码。它们可以作为在转向高保真度代码之前了解放电的第一步，并且可以在新型托卡马克或仿星器中辅助诊断设计，因为可能还不知道确切的分布函数。

我们将在等离子物理学中最常见的坐标系中介绍这些常见的速度分布函数。通常并没有明确说明或明显显示分布函数实际指的是什么。实验者倾向于考虑完全转化的分布函数，其中包括所有的雅各比和归一化因子。然而，许多理论家倾向于将方便的变量代入到三维笛卡尔速度分布函数中，而实际上并没有对其进行变换。

完全3D函数可以用3D笛卡尔、圆柱和球坐标来描述。在磁约束聚变等离子体中，速度分布函数在磁场矢量周围关于轴对称（有时称为回旋对称）近似成立，这是由于带电粒子快速回旋的原因。轴对称函数可以用两个坐标来描述，通常选择为2D笛卡尔或(E,p)坐标。其中E是能量，而p表示

$$p = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{v}||\mathbf{B}|} \tag{1}$$

是粒子的螺旋角，在这里$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别代表速度和磁场向量。（如果磁场和电流点方向相反，则该定义有时可能带有负号，所以顺流的通行离子具有正螺旋角）有时候，分布被假设是各向同性的。[4] 各向同性的函数可以用一个坐标，常用的是速度或能量来描述。最后，沿特定方向投影的速度分布是许多诊断方法中的另一个重要的一维描述。基础速度分布一般上是在某种程度上的各向异性的。因此，投影中会有一些信息丢失。

本文的组织结构如下：第二节介绍了聚变等离子体物理中使用的各种坐标系。第三节将麦克斯韦方程组转化为这些坐标系。第四节讨论了漂移双麦克斯韦分布，第五节则介绍了拓扑上不同的环状分布，其方程非常相似。第六节回顾了粒子的各向同性和非各向同性粒子源的减速情况。第七节简要概述了一个具有三个运动恒量参数化的全局相空间分布函数的模型。第八节总结了本教程。

2 各坐标的分布函数

一般而言，相空间分布函数是六维的，包括三个位置空间维度和三个速度空间维度。相空间分布函数 $f^{6\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 指定了一个无穷小相空间体积$(d\mathbf{x},d\mathbf{v})$内的粒子数量$d\,\mathrm{N}$。

$$d\,\mathrm{N} = f^{6\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{x}d\mathbf{v} \tag{2}$$

$f^{6\mathrm{D}}$ 的单位是 $\mathrm{s}^3/\mathrm{m}^6$。在本教程中，我们考虑仅与三个速度空间维度相关的局部速度分布函数。在微元位置空间体积元素 $d\mathbf{x}$ 中，速度分布函数被定义为：

$$d\,\mathrm{N} = f^{3\mathrm{D}}(\mathbf{v})d\mathbf{v}d\mathbf{x}. \tag{3}$$

将两边除以$d\mathbf{x}$，引入密度 dn 到无穷小速度空间体积 $d\mathbf{v}$ 中。

$$dn = f^{3D}(\mathbf{v})d\mathbf{v} \tag{4}$$

单位为$f^{3\mathrm{D}}$也是$\mathrm{s}^3/\mathrm{m}^6$。密度通过积分得到，为分布函数提供归一化条件。

$$n = \int f^{3\mathrm{D}}(\mathbf{v})d\mathbf{v} \tag{5}$$

在等离子体物理文献中常用各种表示分布函数的方法。我们首先考虑适用于聚变等离子体的便捷的三维笛卡尔速度坐标系。磁化等离子体中的粒子在磁场矢量周围快速旋转，因此速度分布函数在很大程度上关于磁场$\mathbf{B}$是轴对称的。因此，将其中一个坐标轴与磁场矢量对齐是有益的。这个轴被称为$v_{\|}$，$v_{\perp 1}$和$v_{\perp 2}$是垂直于磁场的速度分量。速度分布函数$f^{3\mathrm{D}}_{\mathrm{Car}}(v_{\|},v_{\perp 1},v_{\perp 2})$给出了在一个无穷小速度空间体积中的密度。

$$dn = f^{3\mathrm{D}}_{\mathrm{Car}}\left(v_{\|},v_{\perp 1},v_{\perp 2}\right)dv_{\|}dv_{\perp 1}dv_{\perp 2}. \tag{6}$$

函数不依赖于回旋相位 γ。因此，引入柱坐标 $\left(v_{\|},v_{\perp},\gamma\right)$ 是有优势的。

$$v_{\perp 1} = v_{\perp}\cos\gamma, \tag{7}$$

$$v_{\perp 2} = v_{\perp}\sin\gamma. \tag{8}$$

$v_{\perp}$是垂直速度，与$v_{\perp 1}$和$v_{\perp 2}$有如下关系：

$$v_{\perp} = \sqrt{v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2}. \tag{9}$$

将$v_{\perp 1}$和$v_{\perp 2}$的替换为3D轴对称函数在两个坐标$v_{\|},v_{\perp}$中给出了一个便于表示的方式，即$f^{3\mathrm{D}}_{\mathrm{Car}}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)$，因为可忽略的回转相位$\gamma$被消除。无穷小速度空间体积中的密度为

$$dn = f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right) dv_{\parallel} dv_{\perp 1} dv_{\perp 2}. \tag{10}$$

这种替换不能将速度分布函数转化为柱坐标$\left(v_{\parallel}, v_{\perp} \cdot \gamma\right)$的变换。分布函数$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$仍然表示3D笛卡尔速度空间密度，但是它是用柱坐标参数化的。速度分布函数可以形式上地写为$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\left(v_{\perp 1}, v_{\perp 2}\right)\right)$，以明确$v_{\perp}$对底层笛卡尔坐标$v_{\perp 1}$和$v_{\perp 2}$ [方程（9）]的依赖关系，但通常不这样做。要完全转换为柱坐标，我们还需要用柱坐标表示速度空间体元。从笛卡尔坐标到柱坐标的转换的雅可比行列式为

$$J = \det\left|\frac{\partial\left(v_{\parallel}, v_{\perp 1}, v_{\perp 2}\right)}{\partial\left(v_{\parallel}, v_{\perp}, \gamma\right)}\right| = v_{\perp}, \tag{11}$$

以致小速度空间内的密度由以下公式给出

$$dn = f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right) v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} d\gamma. \tag{12}$$

通过对 γ 进行积分，可以方便地减少维度。然后密度由以下表达式给出：

$$dn = 2\pi v_{\perp} f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right) dv_{\parallel} dv_{\perp}. \tag{13}$$

使用TRANSP/NUBEAM代码[16]计算的分布函数通常以(E,p)坐标的形式呈现。这个坐标系可能是在研究速度或分布函数的实验者中最常见的。$\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$和$(E,p)$之间的2D坐标变换为：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m\left(v_{\parallel}^{2}+v_{\perp}^{2}\right), \quad v_{\parallel} = p\sqrt{\frac{2E}{m}}, \\ p &= \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{v_{\parallel}^{2}+v_{\perp}^{2}}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{1-p^{2}}\sqrt{\frac{2E}{m}}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中m是粒子质量。等式（1）中的轴位定义和等式（14）中的变换表明，轴位$p \in [-1;1]$。它是所谓轴位角的余弦。正向和反向变换的雅可比矩阵为。

$$\begin{aligned} J_{v_{\parallel}, v_{\perp} \to E, p} &= \left|\frac{\partial(v_{\parallel}, v_{\perp})}{\partial(E, p)}\right| = \frac{1}{m\sqrt{1-p^{2}}}, \\ J_{E, p \to v_{\parallel}, v_{\perp}} &= \left|\frac{\partial(E, p)}{\partial(v_{\parallel}, v_{\perp})}\right| = \frac{m v_{\perp}}{\sqrt{v_{\parallel}^{2}+v_{\perp}^{2}}}. \end{aligned} \tag{15}$$

无穷小面积$dEdp$内的密度为

$$dn = 2\pi\sqrt{\frac{2E}{m^{3}}} \int_{Car}^{3D}\left(p\sqrt{\frac{2E}{m}}, \sqrt{1-p^{2}}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) dEdp. \tag{16}$$

有时候，人们使用速度来代替能量。速度是

$$v = \sqrt{v_{\parallel}^{2}+v_{\perp 1}^{2}+v_{\perp 2}^{2}}. \tag{17}$$

两个二维坐标系$\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$和$(v,p)$之间的坐标变换是：

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{\parallel}^{2}+v_{\perp}^{2}}, \quad v_{\parallel} = pv, \\ p &= \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{v_{\parallel}^{2}+v_{\perp}^{2}}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{1-p^{2}v}. \end{aligned} \tag{18}$$

正向和反向转换的雅可比行列式分别为$\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$和$(v, p)$

$$J_{v_{\parallel},v_{\perp}\to v,p}=\frac{v}{\sqrt{1-p^2}},\quad \mathrm{J}_{v,p\to v_{\parallel},v_{\perp}}=\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}^2+v_{\perp}^2}. \tag{19}$$

无穷小面积 $dvdp$ 中的密度是

$$dn=2\pi v^2 f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(pv,\sqrt{1-p^2}v\right)dvdp \tag{20}$$

也可以通过将密度从(E,p)坐标系[(Eq.(16)]变换到(v,p)坐标系来得到这个结果。这些坐标系是由动能的通常定义相互关联的。

$$E=\frac{1}{2}mv^2. \tag{21}$$

正向和反向转换速度和能量之间的雅可比矩阵为：

$$J_{v\to E}=\frac{dv}{dE}=\frac{1}{\sqrt{2mE}},\quad J_{E\to v}=\frac{dE}{dv}=mv. \tag{22}$$

在等离子物理中，与回旋对称函数由两个变量描述不同，各向同性分布函数仅由一个变量描述，通常是速度或能量。如果将球坐标(v,η,ζ)代入各向同性分布函数，两个角度将消失，我们可以将各向同性分布函数写为$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)$。该函数代表了一个在球坐标中参数化的3D笛卡尔速度空间密度。在无穷小的速度空间体积元中的密度为

$$dn=v^2\sin\zeta f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)dvd\eta d\zeta, \tag{23}$$

其中$v^2\sin\zeta$是从笛卡尔坐标到球坐标的雅可比行列式。由于各向同性函数$f_{Car}^{3D}(v)$不依赖于角度，密度可以通过对角度进行积分，仅表示为速度的函数。

$$dn=4\pi v^2 f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)dv. \tag{24}$$

能量是另一个受欢迎的坐标。用能量来表示，我们得到

$$dn=4\pi\sqrt{\frac{2E}{m^3}}f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)dE \tag{25}$$

转换到这些不同坐标的分布函数可以与3D笛卡尔坐标系相关联。前因子含有相关的雅可比行列式和积分角度或固角分别的因子2π或4π。

$$f_{cyl}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel},v_{\perp}\right)=v_{\perp}f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel},v_{\perp}\right), \tag{26}$$

$$f_{Car}^{\mathrm{2D}}\left(v_{\parallel},v_{\perp}\right)=2\pi v_{\perp}f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\parallel},v_{\perp}\right), \tag{27}$$

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p)=2\pi v^2 f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(pv,\sqrt{1-p^2}v\right), \tag{28}$$

$$f_{Ep}^{\mathrm{2D}}(E,p)=2\pi\sqrt{\frac{2E}{m^3}}f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(p\sqrt{\frac{2E}{m}},\sqrt{1-p^2}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right), \tag{29}$$

$$f_{v}^{\mathrm{1D}}(v)=4\pi v^2 f_{Car}^{\mathrm{3D}}(v), \tag{30}$$

$$f_{E}^{\mathrm{1D}}(E)=4\pi\sqrt{\frac{2E}{m^3}}f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right). \tag{31}$$

在等离子物理学文献中常见的速度或能量分布函数可能包括或不包括对可忽略角度进行积分的因子2π或4π，也可能包括或不包括从直角坐标到各种坐标系的雅可比行列式。通常情况下，坐标系或无穷小体积元并未明确说明，因此作者意指的坐标系可能并不立即清楚。理论家通常会使用在柱坐标中参数化的三维笛卡尔速度分布函数。实验家则通常倾向于在广泛使用的TRANSP/NUBEAM代码中包括雅可

比行列式和对可忽略角度进行积分。只有包含所有项，才能获得这些变量的分布函数。例如，在绝大多数关于基础物理学和统计物理学的教科书中，如参考文献2中，一维麦克斯韦速度分布和麦克斯韦能量分布确实包含相关的雅可比行列式和因子4π。

在诊断应用中，我们常常对沿着诊断线的速度分布函数感兴趣。一些例子包括电荷交换复合光谱学，包括快离子的Dα光谱学，汤姆逊散射和集体汤姆逊散射，中子发射光谱学以及伽玛射线光谱学[17]。对各向同性函数的投影与方向无关，因此可以通过对三个坐标的函数$f^{3\mathrm{D}}(\mathbf{v})$进行积分来找到，这在教科书中经常展示。一般情况下，三维速度空间中的任意函数被投影为：

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{3D}(\mathbf{v})\delta(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}-u)d\mathbf{v} \tag{32}$$

其中$g(u)$是投影速度分布函数，u是投影到单位向量$\hat{\mathbf{u}}$上的速度，δ是Dirac δ-function。对于在速度空间中的轴对称3D函数，通过使用所谓的权重函数可以对可忽略的回旋角积分进行解析计算。[18] 在$(v_\parallel,v_\perp)$-空间和(E,p)-空间中，方程(32)分别变为，[19]

$$\begin{aligned} g(u,\phi)&=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{Car}}\left(v_\parallel,v_\perp,u,\phi\right) f_{\mathrm{Car}}^{2\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right) dv_\parallel dv_\perp \\ g(u,\phi)&=\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} w_{Ep}(E,p,u,\phi) f_{Ep}^{2\mathrm{D}}(E,p)dpdE, \end{aligned} \tag{33}$$

其中ϕ是投影方向单位向量$\hat{\mathbf{u}}$与磁场之间的角度。由于轴对称性，一个角度足以描述投影方向。在$\left(v_\parallel,v_\perp\right)$-空间和$(E,p)$-空间中的权重函数分别为[19]。

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{Car}}\left(v_\parallel,v_\perp,u,\phi\right)&=\frac{1}{\pi v_\perp\sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{u-v_\parallel\cos\phi}{v_\perp\sin\phi}\right)^2}} \\ w_{Ep}(E,p,u,\phi)&=\frac{1}{\pi\sqrt{(1-p^2)2E/m}\sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{u/\sqrt{2E/m}-p\cos\phi}{\sqrt{1-p^2}\sin\phi}\right)^2}} \end{aligned} \tag{34}$$

这部分完成了对聚变等离子物理文献中遇到的最常见的速率或能量分布函数的讨论。最后，我们指定获取每个函数的完整密度的界限，这为我们提供了一个归一化条件，我们将在接下来的内容中强制执行所有分布。在每种情况下，密度都是通过对速度空间进行积分得到的。

$$n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_{\perp1},v_{\perp2}\right) dv_\parallel dv_{\perp1}dv_{\perp2}, \tag{35}$$

$$n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right) dv_\parallel dv_{\perp1}dv_{\perp2}, \tag{36}$$

$$n=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{cyl}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right) dv_\parallel dv_\perp d\gamma \tag{37}$$

$$n=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{Car}}^{2\mathrm{D}}\left(v_\perp,v_\perp\right) dv_\parallel dv_\perp \tag{38}$$

$$n=\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} f_{\mathrm{Ep}}^{2\mathrm{D}}(E,p)dEdp \tag{39}$$

$$n=\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} f_{vp}^{2\mathrm{D}}(v,p)dvdp \tag{40}$$

$$n=\int_0^{\infty} f_v^{1\mathrm{D}}(v)dv \tag{41}$$

$$n=\int_0^\infty f_E^{1\mathrm{D}}(E)dE \tag{42}$$

$$n=\int_{-\infty}^\infty g^{1\mathrm{D}}(u)du \tag{43}$$

相反地，一个可以强制要求相应的积分为1，以获得一个概率密度函数。

3 各种坐标系中的麦克斯韦分布

首先，我们用第二节讨论的坐标系来说明速度分布函数的转化过程，以普通的麦克斯韦分布函数为例。麦克斯韦分布函数是物理学中最为广为人知的分布函数之一，因此作为第一个实际例子十分合适。它可以写成以下形式：

$$f^{3\mathrm{D}}(\mathbf{v})=\frac{n}{\pi^{3/2}v_t^3}\exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_t^2}\right), \tag{44}$$

v_T是热速度。

$$v_T=\sqrt{2T/m} \tag{45}$$

T 是以能量为单位的温度。从开尔文到焦耳的转换使用玻尔兹曼常数 $k=1.38\times10^{-23}$ J/K，从电子伏特到焦耳的转换则使用 1.6×10^{-19} J/eV。指数函数的前系数确保了在 3D 速度空间上的积分给出密度。麦克斯韦在 3D 笛卡尔坐标系中可以写成

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_{\perp1},v_{\perp2}\right)=\frac{n}{\pi^{3/2}v_T^3}\exp\left(-\frac{v_\parallel^2+v_{\perp1}^2+v_{\perp2}^2}{v_T^2}\right). \tag{46}$$

在图1(a)中，展示了具有$v_{\perp2}=0$的函数片段。参数设置为模拟ITER中典型等离子体的情况。密度可以从方程（35）中的三重积分获得，由于可以分离为三个相同形式的积分的乘积，所以很容易求解。

$$\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{v_x^2}{v_t^2}\right)dv_x=\sqrt{\pi}v_t, \tag{47}$$

所以方程(35)满足。

由于磁化等离子体的轴对称性，我们可以用$\left(v_\parallel,v_\perp\right)$坐标来描述麦克斯韦分布。

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right)=\frac{n}{\pi^{3/2}v_t^3}\exp\left(-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{v_T^2}\right). \tag{48}$$

如在第II节中所提到的，该表示是指一个在柱坐标中参数化的3D笛卡尔速度空间密度。图1(b)展示了$\left(v_\parallel,v_\perp\right)$坐标系中的麦克斯韦。请注意，$\left(v_\parallel,v_{\perp1},v_{\perp2}\right)\in(-\infty;\infty)$，而$v_\perp\in[0;\infty)$。完全转换到3D柱坐标的麦克斯韦函数是

$$f_{cyl}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right)=\frac{nv_\perp}{\pi^{3/2}v_t^3}\exp\left(-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{v_t^2}\right). \tag{49}$$

方程（48）和（49）的不同之处在于$v_\perp$，它是从笛卡尔坐标系转换到柱坐标系的Jacobian。然而，方程（49）通常不以这种形式使用，而是在回旋角γ上积分得到二维笛卡尔坐标系中的麦克斯韦，即$f_{\mathrm{Car}}^{2\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right)$，其中$v_\perp>0$且没有暗示的第三个方向。

$$f_{\mathrm{Car}}^{2\mathrm{D}}\left(v_\parallel,v_\perp\right)=\frac{2nv_\perp}{\sqrt{\pi}v_t^3}\exp\left(-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{v_t^2}\right). \tag{50}$$

这个二维笛卡尔坐标系中的最大韦氏分布在图1(c)中示出。由于雅可比$v_\perp$，在2D$(v_\parallel, v_\perp)$ 坐标系中，速度空间的各向同性并不明显，这可能是为什么图1(b)中的表示方式常常更受欢迎的原因。根据方程(14)和(15)进行转换后，二维(E,p)空间中的最大韦氏分布如下：

$$f_{\mathrm{Ep}}^{\mathrm{2D}}(E) = n\sqrt{\frac{E}{\pi T^3}}\exp\left(-\frac{E}{T}\right), \tag{51}$$

在等离子体物理学中，由于各向同性，忽略的间距不会出现。在图1(d)中以(E,p)坐标系来表示的麦克斯韦分布。

在(v,p)坐标系下，麦克斯韦函数为：

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v) = \frac{2nv^2}{\sqrt{\pi}v_t^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right), \tag{52}$$

再次，其中p不出现。

接下来，我们转向以速度、能量和投射速度为自变量的一维描述。除了磁化等离子体之外，这些描述在许多物理情况中也很有用，因此经常在基础和统计物理的教科书中涉及。在三维笛卡尔速度空间中，用球坐标(v,η,ζ)对麦克斯韦分布进行参数化。

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v) = \frac{n}{\pi^{3/2}v_t^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_t^2}\right). \tag{53}$$

将麦克斯韦完全转换成3D球坐标为：

$$f_{sph}^{\mathrm{3D}}(v,\zeta) = \frac{nv^2\sin\zeta}{\pi^{3/2}v_t^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_t^2}\right). \tag{54}$$

被积函数中与 η 和 ζ 的积分，但不包括 v，可以立刻得到速度的 1D 分布。

$$f_v^{\mathrm{1D}}(v) = \frac{4nv^2}{\sqrt{\pi}v_T^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \tag{55}$$

以$\mathrm{s/m^4}$为单位。根据公式（22），通过坐标变换，可以从公式（55）得到最大韦尔分布的能量分布或能谱。

$$f_E^{\mathrm{1D}}(E) = 2n\sqrt{\frac{E}{\pi T^3}}\exp\left(-\frac{E}{T}\right). \tag{56}$$

方程（55）和（56）也可以通过积分方程（52）和（51）分别得出，这是因为麦克斯韦是各向同性的且不依赖于螺旋角，所以会得到一个因子二。

$$f_E^{\mathrm{D}}(E) = \int_{-1}^{1} f_{Ep}^{\mathrm{2D}}(E,p)\,dp = 2f_{Ep}^{\mathrm{2D}}(E), \tag{57}$$

$$f_v^{\mathrm{1D}}(v) = \int_{-1}^{1} f_{Ep}^{\mathrm{2D}}(v,p)\,dp = 2f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v). \tag{58}$$

方程（57）和（58）适用于任何各向同性的速度分布函数。

最后，对于许多依赖多普勒频移的诊断方法来说，麦克斯韦的一维投影非常重要。由于麦克斯韦是各向同性的，该投影在由单位向量$\hat{\mathbf{u}}$描述的任意方向上都是相同的。由于三个相互垂直的坐标是可分离的，因此我们只需要对三个积分中的两个进行计算，就可以得到沿任意坐标轴的投影速度分布函数。

$$g(u) = \frac{n}{\sqrt{\pi}v_T}\exp\left(-\frac{u^2}{v_T^2}\right). \tag{59}$$

1D投影速度u的分布在任何方向上都具有一维麦克斯韦的形式。我们注意到$u\in(-\infty,\infty)$，而$v,E\in[0,\infty)$。

这完成了将普通麦克斯韦转换为融合等离子体物理中最常见的速度空间和能量空间坐标系以及在一个特定方向上诊断上重要的投影。第 IV 节给出了用于漂移双麦克斯韦的方程。

4 漂移双麦克斯韦

在磁约束聚变等离子体中，离子通常不处于热平衡状态，而是在一定程度上具有各向异性。允许热平衡偏离的一种方式是在平行和垂直于磁场方向上存在不同的温度，例如，由于各向异性等离子体加热方案的结果。[20] ICRF与离子的回旋耦合，回旋发生在垂直方向。这增加了垂直于磁场的速度分量。 NBI也可以优先在平行或垂直方向加热。在这种情况下，我们可以考虑一个具有平行温度$T_\parallel$和垂直温度$T_\perp$的双麦克斯韦速度分布函数。[13,21-25] ICRF加热获得的垂直温度非常高，有时被称为尾温度。等离子体也可能整体相对于坐标系漂移。由于整体漂移不会改变平衡态，可以通过Galilean变换引入漂移。[2] 我们首先考虑完全任意漂移的三麦克斯韦速度分布函数，使用三维笛卡尔坐标

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel, v_{\perp 1}, v_{\perp 2}\right) = \frac{n}{\pi^{3/2} v_{t,\parallel} v_{t,\perp 1} v_{t,\perp 2}} \times \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{t,\parallel}^2} - \frac{\left(v_{\perp 1} - v_{d\perp 1}\right)^2}{v_{t,\perp 1}^2} - \frac{\left(v_{\perp 2} - v_{d\perp 2}\right)^2}{v_{t,\perp 2}^2}\right), \tag{60}$$

其中

$$v_{t,\parallel} = \sqrt{2T_\parallel/m}, \tag{61}$$

$$v_{t,\perp 1} = \sqrt{2T_{\perp 1}/m}, \tag{62}$$

和

$$v_{t,\perp 2} = \sqrt{2T_{\perp 2}/m} \tag{63}$$

方程（60）对于磁化等离子体并不典型，因为垂直方向上的温度由于快速回旋而相同。因此，双麦克斯韦的基本假设是 $T_{\perp 1} = T_{\perp 2} = T_\perp$，而 $T_\parallel$ 可以是不同的。相应的热速度定义为：

$$v_{t,\perp} = \sqrt{2T_\perp/m} \tag{64}$$

因此，$v_{t,\perp 1} = v_{t,\perp 2} = v_{t,\perp}$。进一步，可以选择其中一个垂直坐标方向与垂直漂移速度分量对齐，而不损失一般性，例如，$v_{d\perp 1} = v_{d\perp}$ 和 $v_{d\perp 2} = 0$。

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel, v_{\perp 1}, v_{\perp 2}\right) = \frac{n}{\pi^{3/2} v_{t,\parallel} v_{t,\perp}^2} \times \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{T,\parallel}^2} - \frac{\left(v_{\perp 1} - v_{d\perp}\right)^2 + v_{\perp 2}^2}{v_{t,\perp}^2}\right). \tag{65}$$

将柱坐标代入方程(8)，得到

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel, v_\perp, \gamma\right) = \frac{n}{\pi^{3/2} v_{t,\parallel} v_{t,\perp}^2} \times \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{t,\parallel}^2} - \frac{v_\perp^2 - 2v_\perp v_{d\perp}\cos\gamma + v_{d\perp}^2}{v_{t,\perp}^2}\right). \tag{66}$$

在任何坐标系下，任意漂移的双麦克斯韦分布可以用三个坐标来描述。回旋角γ出现在方程（66）中，因为在磁化等离子体中常见的垂直漂移会打破实验室参考系中的轴对称性。可以通过在垂直方向进行坐标变换，使得导心参考系中的$v_{d\perp} = 0$来恢复轴对称性。

平行漂移不会破坏轴对称性。对于许多等离子体情景而言，纯粹的平行漂移双麦克斯韦模型也是一个有用的模型，因为实验室帧中平行方向的漂移往往比垂直方向的漂移大得多。对于$v_{d\perp} = 0$，回波角γ消失了，我们得到了在柱坐标中参数化的关于B轴对称的平行漂移双麦克斯韦模型。

$$f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel, v_\perp\right) = \frac{n}{\pi^{3/2} v_{t,\parallel} v_{t,\perp}^2} \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{T,\parallel}^2} - \frac{v_\perp^2}{v_{t,\perp}^2}\right). \tag{67}$$

在包括Jacobian的三维柱坐标表示中，我们有

$$f_{cyl}^{3\mathrm{D}}\left(v_\parallel, v_\perp\right) = \frac{n v_\perp}{\pi^{3/2} v_{t,\parallel} v_{t,\perp}^2} \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{t,\parallel}^2} - \frac{v_\perp^2}{v_{t,\perp}^2}\right). \tag{68}$$

该表达通常没有三维笛卡尔相空间密度那样有用，其中更容易在图表中发现平行和垂直温度的各向异性。在二维笛卡尔（$(v_\parallel, v_\perp)$）相空间中，平行漂移双麦克斯韦分布为：

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{2D}}\left(v_\parallel, v_\perp\right) = \frac{2nv_\perp}{\sqrt{\pi}v_{t,\parallel}v_{t,\perp}^2}\exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - v_{d\parallel}\right)^2}{v_{t,\parallel}^2} - \frac{v_\perp^2}{v_{t,\perp}^2}\right), \tag{69}$$

在二维(E,p)空间中，根据第（14）和（15）式。

$$f(E,p) = n\left(\frac{E}{\pi T_\perp^2 T_\parallel}\right)^{1/2} \times \exp\left(-\frac{\left(p\sqrt{E} - \sqrt{\frac{m}{2}}v_{d\parallel}\right)^2}{T_\parallel} - \frac{\left(1-p^2\right)E}{T_\perp}\right). \tag{70}$$

从第三节可以推导出各向同性的麦克斯韦分布，通过设定$T = T_\parallel = T_\perp$和$v_{d\parallel} = 0$。如图2所示，与图1中的标准ITER情景相比较，漂移双麦克斯韦分布在各坐标系中展示了漂移和温度各向异性的影响。

将方程(70)沿着螺旋角的方向积分，以获得双麦克斯韦的能谱是很直观的。但由于双麦克斯韦是一个二维函数，能谱和速度分布似乎不直接有用。然而，理解依赖多普勒频移的诊断，双麦克斯韦的1D投影是重要的。[25] 基于函数的各向同性，之前在第III节给出了各向同性麦克斯韦的1D投影。对于有方向性的双麦克斯韦，1D投影很明显取决于方向，并且因此计算起来并不直接。尽管如此，方程（33）中的积分可以在轴对称的双麦克斯韦中解析求解，也就是没有垂直漂移的双麦克斯韦。[25] 任何垂直漂移都可以通过伽利略变换来处理。经过伽利略变换和积分后，我们发现任意漂移的双麦克斯韦有一个直观的1D投影。[25]

$$g(u) = n\left(\frac{m}{2\pi T_u}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\left(u-u_d\right)^2}{2T_u}\right), \tag{71}$$

我们在沿着视线方向引入了u坐标上的有效温度。

$$T_u = T_\perp \sin^2\phi + T_\parallel \cos^2\phi \tag{72}$$

和一个有效的u漂移

$$u_d = v_{d\parallel}\cos\phi + v_{d\perp}\cos\beta, \tag{73}$$

其中，β是垂直漂移与视线之间的夹角。因此，方程（71）的形式是在投影速度u中漂移的一维麦克斯韦。方程（71）将用于测量温度和漂移速度（称为“旋转”）的漂移一维麦克斯韦与具有相同一维投影的二维任意漂移双麦克斯韦相关联。这种不确定性只能通过附加信息来解决，例如附加测量。图3中比较了沿不同方向漂移的双麦克斯韦的一维投影。在磁场垂直方向，各向异性的双麦克斯韦具有对称的投影。平行漂移的影响在$\phi = 0°$时最大。

5 环形分布

在磁约束聚变等离子体中，速度分布函数在大速度处具有局部最大值通常是不希望的，这种情况被称为"尾部凸起"。尾部凸起是一种可以驱动等离子体不稳定性的自由能源。这种尾部凸起可以通过环状分布来描述，有时在稳定性计算中这样做[26,27]。在各种坐标系中，高斯环状分布如图4所示。环状分布也可以用作在中性束流注入（NBI）开启后立即出现的快离子模型。在出生后不久，NBI离子具有束流的速度，但由于离子的回旋运动，很快在三维速度空间中形成了环状分布。最后，环状分布可以作为任意速度分布函数的基本构建模块，可以通过添加具有不同速度的环状分布来构建这些分布[14,19,28]。

作为一个理想化模型，我们首先可以考虑冷环状分布[29,30]。在这种情况下，零宽度限制下的高斯分布被狄拉克 δ 函数取代。冷环状分布可以在二维速度空间中表示为一个单点。在三维笛卡尔坐标系、三维柱坐标系、二维笛卡尔坐标系以及(E,p)坐标系中，冷环状分布为：

$$f_{Car}^{3D}\left(v_\parallel, v_\perp\right) = \frac{n}{2\pi v_\perp}\delta\left(v_\parallel - v_{0\parallel}\right)\delta\left(v_\perp - v_{0\perp}\right) \tag{74}$$

$$f_{cyl}^{3D}\left(v_{\|},v_{\perp},\gamma\right)=\frac{n}{2\pi}\delta\left(v_{\|}-v_{0\|}\right)\delta\left(v_{\perp}-v_{0\perp}\right) \tag{75}$$

$$f_{\mathrm{Car}}^{2D}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)=n\delta\left(v_{\|}-v_{0\|}\right)\delta\left(v_{\perp}-v_{0\perp}\right) \tag{76}$$

$$f_{\mathrm{E}p}^{2D}(\mathrm{E},p)=n\delta\left(\mathrm{E}-\mathrm{E}_0\right)\delta\left(p-p_0\right) \tag{77}$$

通过对方程（77）在动量空间进行积分，并进行速度变换，可以获得能量谱和一维速度分布。

$$f_{\mathrm{E}}^{1D}(E)=n\delta\left(E-E_0\right) \tag{78}$$

$$f_{\mathrm{v}}^{1D}(v)=n\delta\left(v-v_0\right) \tag{79}$$

这些函数中丢失了投影信息，因此这些一维表示不一定代表环状分布，而其他二维函数也可能具有相同的能量和速度谱。

冷环状分布的一维投影对于依赖多普勒位移的诊断非常有用，因为它显示了在可测量的光谱中，离子在速度空间的特定点的痕迹。将方程（76）代入方程（33）并进行积分，得到：

$$g(u)=\frac{n}{\pi v_{0\perp}\sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{u-v_{0\|}\cos\phi}{v_{0\perp}\sin\phi}\right)^2}} \tag{80}$$

方程（80）与投影方程[19]中速度分量 u 的概率密度函数成正比（乘以一个因子 n）。

$$u=v_{0\|}\cos\phi+v_{0\perp}\sin\phi\cos\gamma \tag{81}$$

分布函数以 $v_{0\|}\cos(\phi)$ 为中心，并且具有宽度 $2v_{0\perp}\sin(\phi)$，因为 $\cos(\gamma)$ 的范围在 $[-1,1]$ 之间。投影的环状分布示例如图5所示。

通过将狄拉克 δ 函数替换为正态分布，可以得到一个温暖的环状分布[31–33]。尺度的选择遵循积分速度空间得到密度的要求。在二维笛卡尔坐标系中，我们得到：

$$f_{\mathrm{Car}}^{3D}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)=\frac{n}{\pi^2\omega_{\|}\omega_{\perp}v_{\perp}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_{\perp}}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{\left(v_{\|}-v_{0\|}\right)^2}{\omega_{\|}^2}-\frac{\left(v_{\perp}-v_{0\perp}\right)^2}{\omega_{\perp}^2}\right) \tag{82}$$

以及在柱坐标参数的三维笛卡尔速度空间中：

$$f_{\mathrm{Car}}^{3D}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)=\frac{n}{\pi^2\omega_{\|}\omega_{\perp}v_{\perp}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_{\perp}}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{\left(v_{\|}-v_{0\|}\right)^2}{\omega_{\|}^2}-\frac{\left(v_{\perp}-v_{0\perp}\right)^2}{\omega_{\perp}^2}\right) \tag{83}$$

其中 $\omega_{\|}$ 和 $\omega_{\perp}$ 分别是环状分布在平行和垂直方向上的高斯宽度。这里，误差函数出现是因为正态分布被限制在 $v_{\perp}>0$。对于 $v_{0\perp}\gg w_{\perp}$，方程（82）中的缩放因子趋近于 $n=(\pi\omega_{\|}\omega_{\perp})$，对应于未被截断的正态分布的缩放。最后，我们将环状分布转换为(E,p)坐标：

$$f_{\mathrm{Ep}}^{2D}(E,p)=\frac{2n}{\pi\omega_{\|}\omega_{\perp}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_{\perp}}\right)+1\right)}\frac{1}{m\sqrt{1-p^2}}\exp\left(-\frac{\left(p\sqrt{2E/m}-v_{0\|}\right)^2}{\omega_{\|}^2}-\frac{\left(\sqrt{(1-p^2)2E/m}-v_{0\perp}\right)^2}{\omega_{\perp}^2}\right) \tag{84}$$

一个对温热环分布的投影的解析表达式将是有用的，然而目前还不可得。因此，需要通过一种关于**B**轴对称的任意分布函数的形式化进行数值计算[34]。冷环和温环分布的投影具有双峰形状（图5）。

6 各向同性和各向异性减速分布

本节讨论各向同性和各向异性的减速分布。一个核聚变反应堆必须通过聚变反应释放的热量来平衡等离子体的热损失，以维持稳态等离子体。聚变能量通过在D$(T,\mathrm{n})\alpha$聚变反应中生成的3.5MeV的α粒子与等离子体相耦合。α粒子通过碰撞将它们的能量传递给能量较低的等离子体粒子，这些粒子的平均能量约低两个数量级。各向同性的减速分布描述了具有各向同性分布的高能离子由于与热背景等离子体中的电子和离子碰撞而经典减速的过程[8-10]。它是对于在聚变反应中生成的α粒子的速度分布的良好模型，因为可以相当准确地假设初始分布是各向同性的[35]。（然而，NBI离子进入DT反应的方向偏向以及漂移轨道拓扑引入了一些各向异性，同样，阿尔芬本性模也可能产生一些各向异性[36]。）

中性粒子束注入是如今最常见的高能粒子源。与来自聚变反应的α-粒子在出生速度上大致具有各向同性分布不同，通过中性粒子束电离而生成的快速离子在磁场相对于中性粒子束的几何形状下具有较小的偏转范围。因此，这种非均匀源的离子会产生非均匀的速度分布函数。注入能量约为10keV – 1MeV。离子在初始注入能量下出生，并且对于正离子源，也会以一半和三分之一的能量出生，这是由于带有单一电荷的分子（例如氘束中的D_2^+和D_3^+）的加速。这种分布可以相对准确地用非均匀减速分布来描述。

减速过程可以用一个福克-普朗克方程来进行解析描述，该方程基于几个简化假设。在这里，我们介绍基本思想以及得出两种分布所需的假设。我们假设关于磁场矢量存在轴对称性，快离子密度较小，并且速度在一定范围内。

$$v_{t,i} \ll v_f \ll v_{t,e}, \tag{85}$$

其中$v_{t,i}$和$v_{t,e}$分别是热离子和电子的速度。

$$v_{t,i} = \sqrt{\frac{2T_i}{m_i}}, \quad v_{t,e} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}. \tag{86}$$

对于这些条件，我们可以导出一个在(v,p)坐标中参数化的齐次Fokker-Planck方程，带有一个各向异性的源项 [12]。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}}{\partial T} =& \frac{1}{\tau_{\mathrm{s}} v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(v^3+v_{\mathrm{c}}^3\right) f_{Car}^{3\mathrm{D}}\right) + \frac{\mathrm{Z}_2 v_{\mathrm{c}}^3}{2\tau_{\mathrm{s}} v^3}\frac{\partial}{\partial p}\left(\left(1-p^2\right)\frac{\partial f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}}{\partial p}\right)\\ &+ \frac{1}{\tau_{\mathrm{s}} v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^2}{m_f}\left(T_e+\frac{v_{\mathrm{c}}^3}{v^3}T_i\right)\frac{\partial f_{\mathrm{Car}}^{3\mathrm{D}}}{\partial v}\right) + \mathrm{S} = 0.\end{aligned} \tag{87}$$

τ_{s}是Spitzer减速时间，由以下公式给出：

$$\tau_{\mathrm{s}} = \frac{3(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0^2 m_f T_e^{3/2}}{\mathrm{Z}_f^2 e^4 m_e^{1/2} n_e \ln\Lambda}, \tag{88}$$

其中ε_0是真空介电常数，m_f是快离子质量，Z_f是快离子的电荷数，而$\ln\Lambda$是库仑对数。v_{c}是电子阻力等于离子阻力的交叉速度，计算公式为：

$$v_{\mathrm{c}} = \left(\frac{3\sqrt{\pi} m_e}{4m_f}\mathrm{Z}_1\right)^{1/3} v_{t,e}. \tag{89}$$

有效的电荷数 Z_1 和 Z_2 是由以下公式给出的：

$$\mathrm{Z}_1 = \sum_i \frac{n_i m_f Z_i^2}{n_e m_i}, \tag{90}$$

$$\mathrm{Z}_2 = \sum_i \frac{n_i Z_i^2}{n_e \mathrm{Z}_1}. \tag{91}$$

对于$n_{\mathrm{D}} = n_T = n_e/2$，我们得到$Z_1 = 5/3$。$S$是源项，我们将根据各向同性和各向异性情况分别给出。

当我们寻求稳态解时，将方程（87）左侧的时间导数设为零。右侧的第一项是唯一具有一阶导数的项，描述了粒子的摩擦减速。第二项和第三项具有二阶导数，因此在速度空间中具有扩散特性：第二项称为入射角散射，第三项称为速度扩散。速度扩散是唯一导致粒子速度大于初始速度的项，因此在$v > v_b$时非常重要。我们关注速度低于初始速度$v < v_b$的情况，此时速度扩散项相对减速项较小。因此，我们在接下来的讨论中将忽略速度扩散项。我们现在分别在第六节A和第六节B中解决具有各向同性和各向异性源项的方程。

6.1 各向同性减速分布

我们从更简单的各向同性减速分布开始，并寻求稳态解，在忽略小的速度扩散项的情况下。[8-10,35] 此外，我们假设源项是各向同性的，并且离子出生速度为

$$\mathrm{S}(v) = \frac{\mathrm{S}_0 \delta\left(v_b - v\right)}{4\pi v^2}. \tag{92}$$

为了模拟α粒子分布函数，S_0是聚变反应速率。

$$\mathrm{S}_0 = n_{\mathrm{D}} n_T \langle \sigma v \rangle. \tag{93}$$

出生速度为$v_b = 1.3 \times 10^7$ m/s，对于能量为3.5MeV 的α粒子。由于等向源项，漂移角扩散项消失。简化的福克-普朗克方程变为

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(v^3 + v_{\mathrm{c}}^3\right) f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)\right) + \frac{\mathrm{S}_0 \tau_{\mathrm{s}} \delta\left(v - v_{\mathrm{b}}\right)}{4\pi} = 0. \tag{94}$$

对于$v \neq v_b$，$\left(v^3 + v_c^3\right) f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)$必须是一个常数$C$，因为$\delta$-函数为零。进一步，对于$v > v_b$，由于没有加速度，我们忽略了速度扩散，因此分布为零。因此，我们可以将解写成：

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v) = \mathrm{C}\frac{\mathrm{H}\left(v_b - v\right)}{v^3 + v_{\mathrm{c}}^3}. \tag{95}$$

方程(95)代入方程(94)并在出生速度的小范围内进行积分，得到

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}_0 \tau_{\mathrm{s}}}{4\pi} \tag{96}$$

最后，由速度v[12,20,37,38]参数化的三维笛卡尔分布函数。

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v) = \frac{\mathrm{S}_0 \tau_{\mathrm{s}}}{4\pi} \frac{\mathrm{H}\left(v_b - v\right)}{v^3 + v_c^3}. \tag{97}$$

这个放慢分布的表示被绘制在图6中，用于典型的ITER参数。

对于快离子模拟，方便的做法是用快离子密度n来表示前置系数$S_0 \tau_s / 4\pi$。这个关系可以通过在三维速度空间上进行积分来建立。由于减速分布函数是各向同性的，而方程（95）中的变量是速度，所以在球坐标下积分最容易。在球坐标下，各向同性的减速分布函数是：

$$f_{sph}^{\mathrm{3D}}(v, \zeta) = \frac{\mathrm{S}_0 \tau_{\mathrm{s}}}{4\pi} \frac{v^2 \sin\zeta \,\mathrm{H}\left(v_b - v\right)}{v^3 + v_c^3}. \tag{98}$$

集成给出

$$n = \frac{\mathrm{S}_0 \tau_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{v^2 \sin\zeta \,\mathrm{H}\left(v_b - v\right)}{v^3 + v_{\mathrm{c}}^3} d\eta \, d\zeta \, dv = \frac{\mathrm{S}_0 \tau_s}{4\pi} \int_0^{v_b} \frac{4\pi v^2}{v^3 + v_c^3} dv \tag{99}$$

在这里，我们根据Heaviside函数改变了v的上积分限。剩下的v的积分给出了快离子密度、源速率和减速时间之间的所需关系。

$$n = \frac{S_0 \tau_s}{3} \ln\left(1 + \left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right). \tag{100}$$

实际时间 $\tilde{\tau}_s$ 是一个粒子从 v_b 减速到零的时间，由 $n=\mathrm{S}_0\tilde{\tau}_s$ 给出。

$$\tilde{\tau}_s=\frac{\tau_s}{3}\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right). \tag{101}$$

在这里提到的以速度参数化的各向同性三维笛卡尔减速分布由快离子密度给出。

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v)=\frac{3n}{4\pi\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)}\frac{\mathrm{H}(v_b-v)}{v^3+v_c^3}. \tag{102}$$

在三维笛卡尔坐标系$\left(v_{\|},v_{\perp1},v_{\perp2}\right)$中，方程(102)变成了

$$f_{Car}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\|},v_{\perp1},v_{\perp2}\right)=\frac{3n}{4\pi\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)}\frac{\mathrm{H}\left(v_b-\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp1}^2+v_{\perp2}^2}\right)}{\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp1}^2+v_{\perp2}^2}^3+v_c^3}. \tag{103}$$

被以$\left(v_{\|},v_{\perp}\right)$进行参数化的各向同性3D笛卡尔慢化分布函数是

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)=\frac{3n}{4\pi\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)}\frac{\mathrm{H}\left(v_b-\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp}^2}\right)}{\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp}^2}+v_{\mathrm{c}}^3} \tag{104}$$

2D笛卡尔坐标以$\left(v_{\|},v_{\perp}\right)$中

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{2D}}\left(v_{\|},v_{\perp}\right)=\frac{3n}{2\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)}\frac{v_{\perp}\mathrm{H}\left(v_b-\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp}^2}\right)}{\sqrt{v_{\|}^2+v_{\perp}^2}^3+v_{\mathrm{c}}^3} \tag{105}$$

将方程（105）转化为(E,p)空间得到：

$$f_{\mathrm{Ep}}^{\mathrm{2D}}(\mathrm{E})=\frac{3n}{4\ln\left(1+\left(\frac{E_b}{E_c}\right)^{3/2}\right)}\frac{\sqrt{E}H(E_b-E)}{E^{3/2}+E_c^{3/2}} \tag{106}$$

这里，交叉能量为

$$E_c=\frac{1}{2}m_\alpha v_c^2 \tag{107}$$

可以用电子温度来表示

$$E_c=\left(\left(\frac{3\sqrt{\pi}Z_1}{4}\right)^2\frac{m_\alpha}{m_e}\right)^{1/3}\ \mathrm{T}_e \tag{108}$$

对于 $n_D=n_T=0.5n_e$，我们得到 α 粒子的交叉能量：

$$\mathrm{E_c}=33\ \mathrm{T}_e \tag{109}$$

在类似的(v,p)速度-动量空间中，各向同性的减速分布为：

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v)=\frac{3n}{2\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)}\frac{v^2\mathrm{H}(v_b-v)}{v^3+v_{\mathrm{c}}^3} \tag{110}$$

图7在不同的坐标系中绘制了预期在 ITER 中出现的各向同性减速分布。

通过将方程（102）与 $4pv^2$ 相乘，根据方程（30），得到一维速度分布。

$$f_v^{1D}(v) = \frac{3n}{\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)} \frac{v^2 \mathrm{H}(v_b - v)}{v^3 + v_c^3} \tag{111}$$

通过对变量进行变换[方程（22）]，可以得到减速分布的能量谱。

$$f_E^{1D}(E) = \frac{3n}{2\ln\left(1+\left(\frac{E_b}{E_c}\right)^{3/2}\right)} \frac{\sqrt{E} H(E_b - E)}{E^{3/2} + E_c^{3/2}}. \tag{112}$$

图8说明了ITER预期的各向同性减速分布的能量谱。聚变α粒子和其他快离子的能谱是ITER中能量粒子诊断的测量要求[39]。可以通过对Eqs. (106)和(110)分别在俯仰角上积分来获得减速分布(Eqs. (112)和(111))的能量和速度谱，这会导致一个因素2因为减速分布是各向同性的。对能量的积分给出了快离子密度。

$$\int_0^{E_b} \frac{\sqrt{E}}{E^{3/2} + E_c^{3/2}} dE = \frac{2}{3} \ln\left(1+\left(\frac{E_b}{E_c}\right)^{3/2}\right). \tag{113}$$

为了考虑实验室参考系中的能量分布，我们可以用互补误差函数替换阶跃函数，这不会改变上述积分，并且具有以下属性：

$$\lim_{\Delta E \to 0} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{E - E_b}{\Delta E} = H(E_b - E). \tag{114}$$

能量分布如下:

$$f_E^{1D}(E) = \frac{3n}{4\ln\left(1+\left(\frac{E_b}{E_c}\right)^{3/2}\right)} \frac{\sqrt{E}}{E^{3/2} + E_c^{3/2}} \operatorname{erfc} \frac{E - E_b}{\Delta E}. \tag{115}$$

然而，出于简单起见，我们将在接下来的讨论中使用海维赛德函数作为理想模型。

由于变量不容易分离，减速分布的一维投影不像麦克斯韦那样容易计算。然而，我们根据等式(33)明确计算了投影，使用了权重函数形式。在(E, p)空间中，积分很直接，因为各向同性的减速分布不依赖于射线。因此，我们可以先对射线积分权重函数w，然后再对能量积分。结果如下：

$$\begin{aligned} g(u) = &\frac{n}{4v_c \ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right)} \times \left(\ln\left(\left| \frac{v_b^2 - v_b v_c + v_c^2}{u^2 - |u| v_c + v_c^2} \right| \left(\frac{|u| + v_c}{v_b + v_c} \right)^2 \right) \right. \\ &\left. + 2\sqrt{3} \left(\arctan \frac{2v_b - v_c}{\sqrt{3} v_c} - \arctan \frac{2|u| - v_c}{\sqrt{3} v_c} \right) \right) \end{aligned} \tag{116}$$

据我们所知，直到现在为止，等式(116)还没有被发表。这是一个有用的方程，用于融合等离子体中α粒子诊断的基本建模。与我们期望的各向同能函数相同，该投影不依赖于视线与磁场之间的角度。各向同能减速分布的一维投影如图9所示。与麦克斯韦相比，尾部被截断并抬升了。投影减速函数在出生速度处没有突变，就像函数f_{Car}^{3D}一样。

6.2 各向异性减速分布

一个有用的分析函数来建模NBI速度分布函数在40年前就已经发现了[11,12]。如今，NBI分布函数经常用几种计算机代码计算，其中考虑到了空间效应[40]，例如TRANSP模块NUBEAM[16]或ASCOT[41]。最近还可以通过速度空间层析成像直接测量NBI分布函数[14,42]。这里描述的NBI分布函数的分析模型提供了有用的指导，用于比较测量和模拟结果[43]。该模型是简化的Fokker-Planck方程的稳态解。

$$\frac{1}{\tau_s v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(v^3+v_c^3\right)f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}\right)+\frac{Z_2 v_c^3}{2\tau_s v^3}\frac{\partial}{\partial p}\left(\left(1-p^2\right)\frac{\partial f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}}{\partial p}\right)+\mathrm{S}=0. \tag{117}$$

这里将各向异性源项S设定为速度的δ函数和一个展宽的角度函数$K(p)$。

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{K}(p)dp=1 \tag{118}$$

各向异性的源项是Fokker-Planck方程的稳态解可以用Legendre多项式在以(v,p)坐标为参数的3D笛卡尔相空间密度的展开表示

$$\mathrm{S}(v,p)=\frac{\mathrm{S}_0\delta\left(v-v_b\right)\mathrm{K}(p)}{4\pi v^2}. \tag{119}$$

$$f_{\mathrm{Car}}^{\mathrm{3D}}(v,p)=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{S}_0\tau_s}{v^3+v_c^3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)u^{l(l+1)}p_l(p)\mathrm{K}_l\mathrm{H}\left(v_b-v\right) \tag{120}$$

或完全转换为 (v,p)-坐标

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p)=\frac{\mathrm{S}_0\tau_s v^2}{v^3+v_c^3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)u^{l(l+1)}p_l(p)\mathrm{K}_l\mathrm{H}\left(v_b-v\right), \tag{121}$$

其中

$$u=\left(\frac{v_b^3+v_c^3}{v^3+v_c^3}\frac{v^3}{v_b^3}\right)^{\mathrm{Z}_2/6}, \tag{122}$$

$$\mathrm{K}_l=\int_{-1}^{1}\mathrm{K}(p)p_l(p)dp. \tag{123}$$

Legendre多项式$P_l(p)$是顺序为l的多项式。前几个Legendre多项式是

$$\begin{aligned}&p_0(p)=1,\quad p_1(p)=p\\&p_2(p)=\frac{1}{2}\left(3p^2-1\right),\quad p_3(p)=\frac{1}{2}\left(5p^3-3p\right)\end{aligned} \tag{124}$$

更高阶的勒让德多项式可以通过邦内递推公式计算得到。

$$p_{l+1}(p)=\frac{2l+1}{l+1}pp_l(p)-\frac{l}{l+1}p_{l-1}(p) \tag{125}$$

由于Legendre多项式在$[-1;1]$上是正交的，因此几个重要的积分变得非常简单。由于快离子密度仅依赖于方程（121）中的$l=0$的第一项。

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p)=p_0(p)f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p), \tag{126}$$

积分螺旋角方面的积分在所有$l>0$的情况下都是零，由于正交性。

$$n=\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1}f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p)dpdv=\mathrm{S}_0\tau_s\int_0^{v_b}\frac{v^2}{v^3+v_c^3}dv=\frac{\mathrm{S}_0\tau_s}{3}\ln\left(1+\left(\frac{v_b}{v_c}\right)^3\right). \tag{127}$$

这个关系和各向同性减速分布[公式 (100)]相同。因此，可以从分布函数中消去 $\mathrm{S}_0\tau_s$，以快离子密度来表达分布函数的尺度。

$$f_{vp}^{\mathrm{2D}}(v,p)=\frac{3n}{\ln\left(1+\frac{v_b^3}{v_c^3}\right)}\frac{v^2}{v^3+v_c^3}\times\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)u^{l(l+1)}p_l(p)\mathrm{K}_l\mathrm{H}\left(v_b-v\right). \tag{128}$$

由于$l=0$项给出$1/2$，这个项对应于各向同性的减速分布[方程(110)]。

一个典型的注入能量为1MeV的NBI分布函数的例子，如ITER中所预期的，见图10。ITER有负离子源，因此不会出现半能量和三分之一能量的注入源。为了模拟正离子源的典型NBI分布函数，可以将全能量、半能量和三分之一能量的非等向减速函数相加。在其他坐标中给出非等向减速分布的解析表达式是很直接的。

最后，沿着视线的NBI分布函数的一维投影在快离子诊断中起着重要作用，并且强烈影响可观测谱的基本形状。图11展示了沿几个视线方向的1D投影。对于图10中给定的高各向异性NBI分布函数，可测量的谱可能对于红移或蓝移有不同程度的偏向，具体取决于视线的几何形状。对这个分布的投影的解析公式已经计算出前十个Legendre多项式。然而，由于解析表达式变得相当混乱，因此目前更方便的方法似乎是通过任意分布函数的形式主义进行数值计算。[34]

7 相空间分布函数

在这个教程中讨论的速度分布函数描述了等离子体在一个点的速度分布。在托卡马克中，全相空间分布函数可以由三个运动常数来描述，它们是能量、磁矩 μ 和规范托卡姆角动量 p_ϕ（参考文献37）。

$$E=\frac{1}{2}mv^2, \tag{129}$$

$$\mu=\frac{mv_\perp^2}{2\,\mathrm{B}}, \tag{130}$$

$$p_\phi=m\mathrm{R}\frac{\mathrm{B}_\phi}{\mathrm{B}}v_\parallel-q\Psi, \tag{131}$$

其中，R是主半径坐标，B_ϕ是托卡马克磁场的托卡马克磁场组分，Ψ是磁通的极坐标组分。相空间分布函数$f_{\mathbf{xv}}^{6\mathrm{D}}(E,\mu,p_\phi,\sigma)$完全描述了等离子体中的所有离子。二进制参数$\sigma=\mathrm{sgn}\left(v_\parallel\right)$用于标记过渡轨道是共轭还是逆行。这个标签是必要的，因为具有相同 (E,μ,p_ϕ)的共轭和逆行轨道是存在的。因此，可以将这个分布函数看作由两个三维分布函数组成。值得注意的是，相空间体积元中的粒子数量通常是

$$d\,\mathrm{N}=f_{\mathbf{xv}}^{6\mathrm{D}}(E(\mathbf{x},\mathbf{v}),\mu(\mathbf{x},\mathbf{v}),p_\phi(\mathbf{x},\mathbf{v}),\sigma)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}. \tag{132}$$

混合了位置空间和速度空间使得给出该分布的解析模型变得困难。尽管如此，相空间分布对于稳定性计算非常重要，将来可能会有可能测量它。[44]为了得到一个简单的解析模型，可以假设该分布在[45]的条件下是可分的。

$$f_{\mathbf{xv}}^{6\mathrm{D}}(E,\mu,p_\phi,\sigma)=g_1(E)g_2(\mu)g_3(p_\phi)\,. \tag{133}$$

那么，可以假设能量分布的物理模型，例如减速分布或环形分布。托卡马克中的磁场拓扑使得很难给出μ和p_ϕ的一般解析模型。据我们所知，没有完整的解析模型存在，因此我们不再进一步讨论以运动常数参数化的相空间分布函数。在星际磁场的三维情况下，无法通过三个运动常数对相空间进行参数化。

8 总结

我们讨论了几个速度分布函数的解析模型：麦克斯韦分布，漂移双麦克斯韦分布，环形分布，以及各向同性和各向异性的减速分布。普通的麦克斯韦分布，对于大多数物理学家来说是众所周知的，它可以作为一个实际的例子来描述磁聚变装置中等离子体的速度分布函数，其常用的坐标系统有三维笛卡尔坐标、球坐标和柱坐标，二维笛卡尔坐标、(E,p) 和 $(v,p)^-$ 坐标以及一维速度或能量坐标。分布函数的一维投影可以对依赖多普勒频移的测量提供洞察，例如D_α光谱学。这些分布和坐标系统常用于基础等离子体建模，例如对来自NBI、ICRF加热或聚变反应的大量等离子体或快离子速度分布进行建模。在这里讨论的解析模型可以洞察这些分布函数的基本形状，并能快速进行参数研究和诊断设计。我们的示例基于ITER相关参数进行说明。此外，它们还可以作为指导，用于解释速度分布函数和其最低矩的模拟和测量结果，包括密度、漂移速度和温度。

References

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics (Caltech, 1963).
[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, 3rd ed. (ButterworthHeinemann, 1980), Vol. 5.
[3] K. S. Thorne and R. D. Blandford, Modern Classical Physics (Princeton University Press, 2017).
[4] J. C. 麦克斯韦, Philos. Mag. 19, 19 (1860).
[5] J. C. 麦克斯韦, Philos. Trans. 157, 49 (1867).
[6] L. Boltzmann, Wien. Ber. 66, 275 (1872).
[7] L. Boltzmann, Wien. Ber. 76, 373 (1877).
[8] L. Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, New York, 1956).
[9] D. V. Sivukhin, Rev. Plasma Phys. 4, 93 (1966).
[10] T. H. Stix, Plasma Phys. 14, 367 (1972).
[11] J. G. Cordey and W. G. F. Core, Phys. Fluids 17, 1626 (1974).
[12] J. D. Gaffey, J. Plasma Phys. 16, 149 (1976).
[13] T. H. Stix, Nucl. Fusion 15, 737 (1975).
[14] M. Salewski, B. Geiger, A. Jacobsen, M. García-Muñoz, W. Heidbrink, S. Korsholm, F. Leipold, J. Madsen, D. Moseev, S. Nielsen, J. Rasmussen, M. Stejner, G. Tardini, M. Weiland, and ASDEX Upgrade Team, Nucl. Fusion 54, 023005 (2014)
[15] M. Salewski, M. Nocente, A. Jacobsen, F. Binda, C. Cazzaniga, G. Ericsson, J. Eriksson, G. Gorini, C. Hellesen, A. Hjalmarsson, V. Kiptily, T. Koskela, S. Korsholm, T. Kurki-Suonio, F. Leipold, J. Madsen, D. Moseev, S. Nielsen, J. Rasmussen, M. Schneider, S. Sharapov, M. Stejner, M. Tardocchi, and J. Contributors, Nucl. Fusion 57, 056001 (2017).
[16] A. Pankin, D. McCune, R. Andre, G. Bateman, and A. Kritz, Comput. Phys. Commun. 159, 157 (2004).
[17] D. Moseev, M. Salewski, B. Geiger, M. Garcia-Munoz, and M. Nocente, Rev. Mod. Plasma Phys. 2, 7 (2018).
[18] W. W. Heidbrink, Y. Luo, K. H. Burrell, R. W. Harvey, R. I. Pinsker, and E. Ruskov, Plasma Phys. Controlled Fusion 49, 1457 (2007).
[19] M. Salewski, S. Nielsen, H. Bindslev, V. Furtula, N. Gorelenkov, S. Korsholm, F. Leipold, F. Meo, P. Michelsen, D. Moseev, and M. Stejner, Nucl. Fusion 51, 083014 (2011)
[20] R. J. Goldston and P. H. Rutherford, Introduction to Plasma Physics (IOP Publishing, 1995).
[21] R. O. Dendy, R. J. Hastie, K. G. McClements, and T. J. Martin, Phys. Plasmas 2, 1623 (1995).
[22] W. Cooper, J. Graves, S. Hirshman, T. Yamaguchi, Y. Narushima, S. Okamura, S. Sakakibara, C. Suzuki, K. Watanabe, H. Yamada, and K. Yamazaki, Nucl. Fusion 46, 683 (2006).
[23] S. R. Huh, N. K. Kim, B. K. Jung, K. J. Chung, Y. S. Hwang, and G. H. Kim, Phys. Plasmas 22, 033506 (2015).
[24] P. H. Yoon, Phys. Plasmas 23, 072114 (2016).
[25] M. Salewski, B. Geiger, A. Jacobsen, I. Abramovic, S. Korsholm, F. Leipold, B. Madsen, J. Madsen, R. McDermott, D. Moseev, S. Nielsen, M. Nocente, J. Rasmussen, M. Stejner, M. Weiland, T. E. M. Team, and T. A. U. Team, Nucl. Fusion 58, 036017 (2018).
[26] M. Vandas and P. Hellinger, Phys. Plasmas 22, 062107 (2015).
[27] J. Sun, X. Gao, L. Chen, Q. Lu, X. Tao, and S. Wang, Phys. Plasmas 23, 022901 (2016).
[28] C. Hellesen, M. G. Johnson, E. A. Sundén, S. Conroy, G. Ericsson, J. Eriksson, H. Sjöstrand, M. Weiszflog, T. Johnson, G. Gorini, M. Nocente, M. Tardocchi, V. Kiptily, S. Pinches, S. Sharapov, and J. E. Contributors, Nucl. Fusion 53, 113009 (2013).
[29] D. Winske, C. S. Wu, Y. Y. Li, Z. Z. Mou, and S. Y. Guo, J. Geophys. Res.: Space Phys. 90, 2713, https://doi.org/10.1029/JA090iA03p02713 (1985).
[30] V. Florinski, G. P. Zank, J. Heerikhuisen, Q. Hu, and I. Khazanov, Astrophys. J. 719, 1097 (2010).
[31] T. Umeda, S. Matsukiyo, T. Amano, and Y. Miyoshi, Phys. Plasmas 19, 072107 (2012).
[32] E. J. Summerlin, A. F. Vinas, T. E. Moore, E. R. Christian, and J. F. Cooper, Astrophys. J. 793, 93 (2014).
[33] F. Hadi, P. H. Yoon, and A. Qamar, Phys. Plasmas 22, 022112 (2015).

[34] M. Salewski, B. Geiger, D. Moseev, W. W. Heidbrink, A. S. Jacobsen, S. B. Korsholm, F. Leipold, J. Madsen, S. K. Nielsen, J. Rasmussen, M. Stejner, M. Weiland, and ASDEX Upgrade Team, Plasma Phys. Controlled Fusion 5 6 105005 (2014).
[35] H. ITER Physics Expert Group on Energetic Particles, C. Drive, and I. P. B. Editors, Nucl. Fusion 39, 2471 (1999).
[36] M. Salewski, M. Nocente, B. Madsen, I. Abramovic, M. Fitzgerald, G. Gorini, P. Hansen, W. Heidbrink, A. Jacobsen, T. Jensen, V. Kiptily, E. Klinkby, S. Korsholm, T. Kurki-Suonio, A. Larsen, F. Leipold, D. Moseev, S. Nielsen, S. Pinches, J. Rasmussen, M. Rebai, M. Schneider, A. Shevelev, S. Sipilä, M. Stejner, and M. Tardocchi, Nucl. Fusion 58, 096019 (2018).
[37] P. Helander and D. J. Sigmar, Collisional Transport in Magnetized Plasmas (Cambridge University Press, 2002).
[38] C. Angiono and A. G. Peeters, Phys. Plasmas 15, 052307 (2008).
[39] A. Donne, A. Costley, R. Barnsley, H. Bindslev, R. Boivin, G. Conway, R. Fisher, R. Giannella, H. Hartfuss, M. von Hellermann, E. Hodgson, L. Ingesson, K. Itami, D. Johnson, Y. Kawano, T. Kondoh, A. Krasilnikov, Y. Kusama, A. Litnovsky, P. Lotte, P. Nielsen, T. Nishitani, F. Orsitto, B. Peterson, G. Razdobarin, J. Sanchez, M. Sasao, T. Sugie, G. Vayakis, V. Voitsenya, K. Vukolov, C. Walker, K. Young, and ITPA Topical Group on Diagnostics, Nucl. Fusion 47, S337 (2007).
[40] R. Goldston, D. McCune, H. Towner, S. Davis, R. Hawryluk, and G. Schmidt, J. Comput. Phys. 43, 61 (1981).
[41] E. Hirvijoki, O. Asunta, T. Koskela, T. Kurki-Suonio, J. Miettunen, S. Sipilä, A. Snicker, and S. Äkäslompolo, Comput. Phys. Commun. 185, 1310 (2014)
[42] M. Salewski, M. Nocente, G. Gorini, A. Jacobsen, V. Kiptily, S Korsholm, F. Leipold, J. Madsen, D. Moseev, S. Nielsen, J. Rasmussen, M. Stejner, M. Tardocchi, and J. Contributors, Nucl. Fusion 56, 046009 (2016).
[43] M. Weiland, R. Bilato, R. Dux, B. Geiger, A. Lebschy, F. Felici, R. Fischer, D. Rittich, and M. van Zeeland, ASDEX Upgrade Team, and Eurofusion MST1 Team, Nucl. Fusion 58, 082032 (2018).
[44] L. Stagner and W. W. Heidbrink, Phys. Plasmas 24, 092505 (2017).
[45] S. Pinches, L. Appel, J. Candy, S. Sharapov, H. Berk, D. Borba, B. Breizman, T. Hender, K. Hopcraft, G. Huysmans, and W. Kerner, Comput. Phys. Commun. 111, 133 (1998).