Influence of trapped thermal particles on internal 扭曲 modes in high temperature tokamaks

T. M. Antonsen, Anders Bondeson

Abstract

使用漂移动理学理论研究了热俘获粒子对$n=1$内扭曲模的影响。发现磁流体力学(*MHD*)结果发生了显著改变，而且在非零旋转频率下通常出现临界稳定性。对于相等的电子和离子温度，俘获粒子显著增加了$q=1$处临界极向β值，超过了*MHD*值。对于不等的电子和离子温度，与更热的粒子的漂移共振变得越来越不稳定，并且对于足够不等的温度，这将导致在理想-*MHD*阈值以下不稳定。处理俘获热粒子需要考虑电势的影响。对于内扭曲模而言，该电势具有弱稳定性。此外，有限β将不稳定的、几乎是静电的俘获粒子模式耦合到了内扭曲模上。在高β下，俘获粒子模式的热涨落能导致显著的内部扭曲位移。

1 简介

托卡马克的中央区域经常出现所谓的锯齿振荡，伴随着热能和磁通的周期性重新分布。引发这种松弛的是内部的$n=1$扭曲模（其中n是托卡马克的环向模数）。这种模式几乎使等离子体的内部区域产生刚性位移。对其抑制或控制被认为在现在和未来的托卡马克中都非常重要。在此，我们只关注其理想且最稳定的形式，其生长时间尺度为等离子体理想导电时间尺度。

众所周知，在托卡马克中，内部扭曲模式的稳定性可以受到能量高、磁场俘获的粒子的强烈影响。[1-5]本文的目的是要显示热俘获的粒子也显著改变了理想的内部扭曲模的稳定边界。这种效应的一个简单估计，基于低频动理学能量原理，[6-8]可以如下进行。对于一个纵横比大的圆形托卡马克，缺少动理学效应的理想磁流体动理学(MHD)理论[9]中的内部扭曲模的势能为

$$\Delta W_{\mathrm{MHD}} \approx c_{\mathrm{MHD}} \varepsilon_{q=1}^{4} \left(\beta_{pc}^{2}-\beta_{p}^{2}\right) \xi^{2} R_{0} B_{0}^{2}, \tag{1}$$

其中$c_{q\approx 1}$是$q=1$表面的逆长宽比，ξ是中央区域的位移，R_0是托卡马克的主半径，B_0是磁场的强度。此外，c_{MHD}是一个与剖面有关的系数，β_p是在$q=1$表面估计的极向β值，而β_{pc}是理想磁流体力学不稳定所需的临界β_p值。通常情况下，β_{pc}对于有圆形概貌和圆形截面的等离子体而言在0.1至0.2的范围内，[9]但是当剪切较弱和/或者截面是椭圆形时它可以更低。[10] 系数c_{MHD}与中心剪切成正比（也就是与$1-q_0$成正比）。使用低频能量原理[6-8]来估计磁场俘获的热粒子的贡献，可以计算得到。

$$\Delta W_{\text{trapped}} \approx c_{\mathrm{LF}} \varepsilon_{q=1}^{2} \varepsilon_{q=1}^{1/2} \left(\varepsilon_{q=1} \beta_{p}\right) \xi^{2} R_{0} B_{0}^{2} \tag{2}$$

数值系数c_{LF}表示在分布函数和剖面上的积分。（附录中关于大纵横比的计算给出$c_{LF} \approx \sqrt{2}/7 \approx 0.20$，其中假设了一个抛物线压力剖面，该剖面满足$4\pi p_0 = B_0^2 \varepsilon_\alpha^2 \beta_p$，其中$\varepsilon_a = a/R$为环流器的逆纵横比。）因假设位移仅限于$q=1$表面内部，因此因素$\varepsilon_{q=1}^2$是结果；$\varepsilon_{q=1}^{1/2}$为被俘获并经历不利托卡马克场弯曲的粒子的比例；$\varepsilon_{q=1}\beta_p$表示$q=1$表面上的压力梯度。需注意，被俘获的热粒子对$\Delta W_{\mathrm{MHD}}$和$\Delta W_{\text{trapped}}$都有贡献。它们对$\Delta W_{\mathrm{MHD}}$的贡献具有破坏性，但几乎被它们对$\Delta W_{\text{trapped}}$的贡献所抵消。由于只有环流粒子，其主要经历有利的托卡马克场弯曲，它们对势能的贡献似乎是稳定的。

将以上估计相结合，理想不稳定性的条件，包括俘获粒子的影响，变为：

$$\beta_{p}^{2}-\left(c_{\mathrm{LF}} / c_{\mathrm{MHD}}\right) \varepsilon_{q=1}^{-1/2} \beta_{p}>\beta_{pc}^{2} \tag{3}$$

由于β_{pc}通常远小于$\left(c_{\mathrm{LF}} / c_{\mathrm{MHD}}\right) \varepsilon_{q=1}^{-1/2}$，热俘获粒子对$n=1$内部扭结模有很强的稳定作用，尤其是当$1-q_0$很小时。这可以解决整个锯齿循环期间 q 低于 1 的实验观察结果与预测 $q_0<1$ 时相当不稳定的行为的

流体理论结果之间的明显矛盾。值得注意的是，流体模拟通常符合Kadomtsev模型[12]中的完全重联，而电阻-磁流体动理学分析[13]表明，大多数具有$q_0 < 1$的剖面是线性不稳定的。热俘获粒子的稳定性之前已经由Hastie和Hender[14]使用Kruskal-Oberman[15]方法或“高频率”能量原理进行了考虑。在这里，我们考虑了模式频率与漂移频率相当的情况，并应用了漂移动理学理论[6-8]。

俘获粒子的稳定作用是由于它们无法对与粒子绕环旋转所需时间相比缓慢发展的长笛状扰动做出响应。由于俘获粒子大部分时间都在不利磁曲率区域，消除它们对扰动势能的贡献会非常稳定。在特别的情况下，对于由平均曲率驱动的$n = 1$内部扭曲，其$\Delta W_{\mathrm{MHD}} = O\left(\varepsilon_{q=1}^4\right)$，与强气球模相反，后者仅局限在不利曲率区域并具有$\Delta W_{\mathrm{MHD}} = O\left(\varepsilon^3\right)$。如果从平均曲率敏感的模式中消除俘获粒子的贡献，通过方程(3)可以得到剩余通行粒子的效应可能是稳定的，当$\beta_p < \left(c_{\mathrm{LF}}/c_{\mathrm{MHD}}\right)\varepsilon_{q=1} - 1/2$时。类似的论述也适用于受到俘获粒子效应影响的Mercier模式。然而，由于俘获粒子经历了不利曲率，这种稳定性并不稳定。（低频能量原理在这种情况下既不提供必要的稳定性准则，也不提供充分的稳定性准则。）事实上，具有能量粒子的等离子体仍然容易受到以托卡马克中的中性注入为特点的干扰的影响，其发展时间尺度与环流频率相匹配。这种不稳定性会导致一些托卡马克中观察到的"鱼骨"振荡。我们将展示这种漂移共振对于热俘获粒子起到重要作用。然而，当粒子的温度接近相等时，俘获电子和离子的环流方向相反，等离子体更不受鱼骨不稳定性的影响。

现在的计算是理想的，但最初的动机来自电阻磁流体力学。线性电阻磁流体力学计算[13]对内部扭曲模式的稳定性给出了极高的俘获条件。然而，实验上只在锯齿崩溃前观察到大尺度的不稳定性，并且认为在大部分锯齿周期中，q_0保持在小于1的水平。有很多迹象表明，电阻磁流体力学的稳定性阈值过于严格，例如与实验观测到的$q = 1$处的极向β值进行比较。正如本文所示，热俘获粒子对内部扭曲模式具有强大的稳定作用，这种稳定作用可以帮助使电阻磁流体力学（以及其他非理想理论）更好地与实验结果相符。

2 公式

为了研究热俘获粒子对理想的 $n = 1$ 模式的影响，我们扩展了环形、电阻性磁流体力学（resistive MHD）代码 MARS [17]，加入了俘获粒子的功能。目前的版本应用了回弹平均漂移动理学理论 [7] 来描述俘获粒子，并结合了理想情况下的特性。MHD和静电势。因此，该模型包括内部扭结模和静电俘获粒子模之间的相互作用。我们考虑“准理想”的扰动，其中包括由标量势引起的平行电场，但磁重联被排除在外。平行电场在扰动俘获粒子密度存在的情况下是必需的以保持准中性。扰动电场以位于平衡磁场垂直方向的位移和静电势 Φ 表示。

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\xi \times \mathbf{B} - \nabla\Phi \tag{4}$$

由于回弹平均漂移动理学方程导致以下二次型形式：[7]

$$\Delta W_T\left(\xi^*, \xi, \Phi^*, \Phi\right) = K + \Delta W_f + \Delta W_\Phi + \Delta W_k = 0 \tag{5}$$

其中，通过对共轭量进行变分，可以得到确定 Φ 和 ξ 的 Euler 方程。定义出现在 ΔW_T 中的量如下。动能为

$$K = -\frac{1}{2}\omega^2 \int d^3x \rho_m \xi^* \cdot \left(\xi + \frac{ic}{\omega B}\mathbf{b} \times \nabla\Phi\right), \tag{6}$$

其中，ρ_m是质量密度。"流体"对势能的贡献为

$$\Delta W_f = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\frac{1}{4\pi}\left(|\mathbf{Q}\times\mathbf{b}|^2 + \left|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b} - \frac{4\pi}{B}\xi\cdot\nabla p\right|^2 \xi^*\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{b}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{B}\right) - 2\xi^*\cdot\kappa\xi\cdot\nabla p\right], \tag{7}$$

其中$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\nabla}\times(\xi\times\mathbf{B})$是扰动磁场。静电势的绝热贡献给出

$$\Delta W_\Phi = \frac{1}{2}\int d^3x \rho_\Phi |\Phi|^2, \tag{8}$$

其中

$$\rho_\Phi = \sum_j q_j^2 \int d\Gamma \frac{\partial f_{0j}}{\partial \varepsilon} = -\sum_j q_j^2 n_j / T_j.$$

在等式（8b）中，第二个等号适用于麦克斯韦等离子体，我们将在整个过程中假设如此。此外，q_j, n_j和T_j表示第j种物质的电荷，数密度和温度。势能的动理学贡献为

$$\Delta W_k = -\frac{1}{2}\int d^3x \sum_j \left\langle\left\langle \int_{\text{trapped}} d\Gamma \frac{Df_{0j}}{D\varepsilon}|H|^2 \right\rangle\right\rangle, \tag{9}$$

在此我们引入了符号表示

$$\frac{Df_{0j}}{D\varepsilon} = \frac{\omega\partial f_{0j}/\partial\varepsilon - (nc/q_j)\,\partial f_{0j}/\partial\psi}{\omega - \langle\omega_{dj}\rangle + i\nu_{\text{eff}}} = -\frac{f_{0j}}{T_j}\frac{\omega - \omega_{*j}\left[1+\eta_j\left(\varepsilon/T_j - 3/2\right)\right]}{\omega - \langle\omega_{dj}\rangle + i\nu_{\text{eff}}}$$

并且第二个等式再次假设麦克斯韦分布。单括号表示俘获电子的回弹平均$\langle\cdot\rangle = \left(\int \cdot dl/v_n\right)/\left(\int dl/v_\parallel\right)$。双括号表示对偏角$\chi$的平均$\langle\langle\cdot\rangle\rangle = \int \cdot Jd\chi / \int Jd\chi$，用于将极向积分转化为轨道积分。$J$是从通量坐标$(\psi,\chi,\phi)$到实空间的雅可比因子。速度空间中的积分元素为。

$$d\Gamma = \sum_\pm \frac{2\pi B}{m}\frac{\sigma(\varepsilon-\mu B)d\varepsilon d\mu}{\sqrt{2m(\varepsilon-\mu B)}}, \tag{10}$$

其中σ是Heaviside函数，$\varepsilon = mv^2/2$，$\mu = mv_1^2/2B$。扰动能量H定义为

$$H = \left\langle\left[\mu(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b} + \xi\cdot\nabla B) + mv_\parallel^2 \xi\cdot\kappa + q\Phi\right]\times\exp[in\phi(\chi)]\right\rangle \tag{11}$$

指数因子考虑到沿着场线的环向变化，$\kappa = \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}$。如果平衡磁场表示为$\mathbf{B} = \nabla\alpha\times\nabla\psi$，其中$\alpha = \phi - \int^\chi q_l d\chi'$，那么$\phi(\chi) = \int^\chi q_l d\chi'$。涡流动和曲率漂移频率为

$$\omega_{*j} = -n\frac{cT_j}{q_j n_j}\frac{\partial n_j}{\partial\psi}, \quad \langle\omega_{dj}\rangle = n\left\langle \mathbf{v}_{dj}\cdot\nabla\alpha\right\rangle, \tag{12}$$

其中，磁漂移速度为 $\mathbf{v}_{dj} = (c\mathbf{b}/q_j B)\times\left(m_j v_\parallel^2\kappa + \mu\nabla B\right)$。温度梯度的强度由 $\eta_j = d(\ln T_j)/d(\ln n_j)$ 表示，而 ν_{eff} 则是碰撞引起的一个有效去俘获速率。

我们的模型包括对俘获粒子的漂移和温度抗磁效应进行考虑，但对于循环粒子的漂移效应则没有。循环离子的抗磁漂移在靠近$q=1$有理面的小惯性层中可能非常重要。这是通常负责磁流体力学(MHD)不稳定的有限洛仑兹半径稳定效应。然而，该稳定效果被俘获粒子漂移共振产生的无碰撞耗散所打破。我们在这里考虑的抗磁效应更加稳健，它们取决于等离子体中大范围密度和温度梯度，而不是在有理面周围的小惯性层中易于局部平坦化的梯度。[3,5]

要在数值上实现由方程(5)-(12)定义的特征值系统，我们通过将位移沿着平衡磁场的两个垂直分量进行分解，同时将第三个分量替换为静电势来修改MARS代码[17]。扰动量在ψ方向上用有限元展开（通常为$N_\psi = 100-150$个元），在极向角χ上用傅里叶级数展开（通常在本文处理的圆形平衡中为$N_\chi = 5-10$个傅里叶分量）。这里，通过对动量角和能量（通常为$N_\mu = 64$和$N_\varepsilon = 200$）进行数值积分来计算假设的特征值$\omega = \omega_0$的ΔW_k。然后，离散化方程可以通过对ξ和Φ的展开系数求导得到ΔW 的离散化形式的导数。特征值系统具有$A(\omega)X = 0$的形式，其中X是解向量，A是一个方阵。由于方程（9）中的动能积分，A对特征频率ω具有非平凡的依赖性，特征值通过牛顿迭代找到。对于ω，给出一个猜测值ω_0，并在$\delta\omega = \omega - \omega_0$处将方程展开线性化。

$$\left(A(\omega_0) + \delta\omega\frac{\partial A}{\partial\omega}\right)X = 0 \tag{13}$$

其中$\partial A/\partial\omega$通过数值微分得到。方程（13）通过逆向向量迭代法（在MHD特征值问题中为标准方法[17]）求解$\delta\omega$。该过程重复多次，将ω_0替换为新值$\omega_0 + \delta\omega$，直到特征值收敛。通常需要大约五次迭代。

物理参数和平衡态。对于数值计算，我们考虑针对电子和离子的各向同性的麦克斯韦分布，但允许非等温度，$T_e \neq T_i$。通过显式打开和关闭静电势，我们可以分离出静电效应。在首先描述的情况中，我们忽略碰撞，因为该模式具有比有效碰撞频率大得多的增长率或旋转频率。

我们已经分析了一个具有圆形横截面和长径比$R/a=4$的平衡序列，这些平衡是使用CHEASE平衡代码计算得到的[18]。在中心的$q<1$区域，剪切比较弱：$q_0\approx 0.93$且$\rho_{q=1}\approx 0.45$ [其中$\rho=(V/V_{\mathrm{tot}})^{1/2}$ 是归一化的较小半径，V是流束面围成的体积]。如引言中所述，弱中心剪切使得ΔW_f较小，因此模式更加敏感于非MHD效应，包括俘获粒子的效应。边界处的q值取决于压强，范围从2.3到2.6，假设是在小半径的1.2倍处有一个导电壁。压强分布在$\rho<0.55$处有$dp/d\psi=$常数，在$q=1$表面的β_p值适中的峰值为$p_0/\langle p\rangle\approx 2.4$。这些平衡的特征是它们在$q=1$表面的极向beta，记作$\beta_p$。对于这个平衡序列，内部扭曲理想MHD的阈值为$\beta_{pc}\approx 0.09$。我们考虑两组物理参数，称为“小型托卡马克”：$B_0=1.5$ T, $R_0=0.6$ m，和“大型托卡马克”：$B_0=3.5$ T，$R_0=3.0$ m。在两种情况下，电子密度为$n_e=2\times10^{19}$ m^{-3}，离子为氘离子。我们经常提到一个“标准”情况，其中电子和离子温度相等，$\eta=1.5$和$\beta_p=0.4$，远高于MHD阈值。图1显示了标准情况下的$I^*=\langle\langle j_\phi/R\rangle\rangle$，安全因子$q$和等离子体压强$p$的剖面。相应的峰值温度分别为大型和小型托卡马克情况下的26keV和4.8keV，因此忽略碰撞是合理的。为了了解漂移动理学结果与磁流体力学结果的关系，我们使用一个乘子f来表示ΔW中的非MHD项，方程(5)。这个乘子实际上对应于俘获粒子的数量；$f=0$表示MHD，其中$\Gamma=0$，而$f=1$表示物理俘获粒子密度。频率和增长率以托卡马克阿尔文频率为单位给出。

3 $\Phi=0$的俘获粒子效应

3.1 稳定和复共轭分叉

为简化起见，我们首先考虑非静电模式，设定$\Phi=0$。图2展示了模式的增长率和旋转频率随俘获粒子倍增器的变化情况。该图适用于大型托卡马克参数和标准情况$T_e=T_i$，$\eta=1.5$，$\beta_p=0.4$。一个明显的特点是存在两个本征值分支：其中一个在$f\to 0$时趋近于MHD解，另一个在某些正值$f=f_m$(≈ 0.28对于这个特定情况)时出现了零增长率。这发生在低频能量原理在临界点$\omega=0$时，

$$\Delta W_{\mathrm{lf}}^{(\omega=0)}=\Delta W_f+f_m\Delta W_k^{(\omega=0)}=0$$

方程(9)和(11)显示，对于各向同性分布，在$\Delta W_k^{(\omega=0)}$中不涉及Φ的所有项[以及Kruskal-Oberman能量原则$\Delta W_k^{\mathrm{KO}}=\Delta W_k(\omega_*=\langle\omega_d\rangle=0)$]仅通过压力依赖于粒子分布，即不依赖于密度和温度分布。这意味着第二分支出现的f_m值仅取决于MHD量而不是例如η或ω_*/ω_A。因此，对于各向同性分布且Φ可忽略的情况下，ΔW的高频和低频极限都不依赖于密度分布。$\Phi=0$的数值结果表明，特征值对η的变化非常不敏感。此外，在托卡马克操作区域内，相对于ω_*/ω_A，结果对$\omega_*/\omega_{\mathrm{A}}$的依赖变化很小。

图2显示，当f增加时，MHD分支稳定，而第二分支变得不稳定。事实上，当$\Delta W_{\mathrm{lf}}^{(\omega=0)}<0$时，第二分支是稳定的，当$\Delta W_{\mathrm{lf}}^{(\omega=0)}>0$时则是不稳定的，这表明在存在具有不利漂移的粒子时，零频率能量原理既不必要也不充分。在某个中间点$f=f_c$(≈ 0.52在图1中)，这两个分支合并，并且对于$f>f_c$，它们形成一个复共轭对，一直保持过稳定直到$f=1$。（在图2中未显示具有相反旋转频率的复共轭解。）这两个旋转分支与鱼骨模式有关。我们注意到，对于具有麦克斯韦分布和$T_e=T_i$的情况，随着俘获粒子数量的增加，这些模式变得越来越稳定。

图3展示了第二分支在$f=0.35$（它刚刚出现后不久）和不稳定旋转模在$f=1$时的极向傅里叶分量正常位移$\left[\xi_s=\xi\cdot\nabla s, s=(\psi/\psi_{\mathrm{edge}})^{1/2}\right]$。第二分支在$f=0.35$的位移类似于正常 MHD 内部扭曲的位移。因此，在$f\approx 0.52$的合并之前，两个分支之间的差异与模的动能而不是流体方面有关，即与ΔW_k和K的频率依赖性有关。

3.2 与MHD 驱动、漂移频率和温度比的依赖

在图2中，当$\beta_p=0.4$时，物理上有意义的情况$f=1$是超稳定的。为了阐明其他参数值的行为，图4展示了本征值与不同MHD驱动能量β_p的俘获粒子乘子之间的关系。对于$\beta_p=0.13$，略高于理想MHD阈值，模式在任何分岔发生之前就以非常少的俘获粒子稳定下来；对于$\beta_p=0.20$，模式首先发生分岔，在$f\approx 0.45$处以非零频率稳定下来，并保持稳定直至$f=1$；对于$\beta_p=0.4$，发生了分岔，但模式在$f=1$处

仍然是超稳定的。在远远超过MHD阈值的$\beta_p = 0.6$情况下，模式仍然保持不稳定，对于$f = 1$有一个实际的增长率。显然，对于这个平衡序列（以及大型托卡马克参数），β_p中包括俘获粒子的稳定阈值位于0.2和0.4之间。图5展示了具有$\beta_p = 0.2, f = 0.45$的近临界情况的位移结构。该模式以有限的旋转频率$\left(\omega/\omega_A \approx 5.6\times10^{-3}\right)$接近临界点，这在$q \approx 1 \pm \omega/\omega_A$处产生对数奇点，可以在图5中识别出来。

图6显示了被俘获粒子效应如何依赖于漂移频率与阿尔芬波频率之比，可以看作是机器尺寸的度量。不同曲线给出了小型和大型托卡马克参数下的增长率和频率与被俘获粒子乘子f的关系，以及Kruskal-Oberman结果（对应于无限大托卡马克的情况，其中$\omega_* = \langle\omega_d\rangle = 0$）。我们看到有限的$\omega_*/\omega_A$在模式频率较小时具有稳定作用($f < 0.7$)，但在模式旋转较快时具有不稳定作用($f > 0.85$)。这表明了漂移共振引起的不稳定化。

对于不等温度情况$T_i/T_e = 3, \beta_p = 0.4$和"小托卡马克"参数，图7更清楚地展示了漂移共振引起的不稳定性。在这种情况下，电子和离子漂移方向旋转的模现在具有不同的增长率，与图2中等温度情况相比，热种类方向旋转的分支已经被不稳定化，而另一个分支已经被稳定化。图7中的离子分支不稳定化由漂移共振引起的现象与鱼骨模的不稳定性相同。这也适用于等温度情况下的旋转模。然而，当$T_i = T_e$时，增长率会随着俘获粒子乘子的增加而减小。

4 静电势的改变

4.1 分叉图

当我们将静电势Φ纳入方程(4)-(11)中时，出现了一类新的模式：主要是静电势的俘获粒子模式。（在零beta的极限下这些模式是纯静电。）当前的描述中，我们忽略了香蕉宽度有限的效应，因此它们的增长率由每个流面上的局部条件决定，并构成不稳定的连续态。在数值上，这些模式在静电势Φ中表现为delta函数，并且在有限的beta下，它们通过压力与电磁扰动耦合。标准情况和“大型托卡马克”参数下的俘获粒子倍增因子对应的特征值如图8所示。通过与图2进行比较，我们可以看到对于内部扭曲解，Φ具有稳定作用，但该效应很弱。图2的主要修改是添加了一系列不稳定的静电态模式，其增长率延伸到标记为“连续边界”的线。

在图8中，第二个电磁分支在大约相同的$f(\approx 0.3)$处变得不稳定，就像非静电力学情况一样。然而，当加入静电势时，它会分裂成一对共轭的复频率，这将离散模式与静电连续谱分开。当生长率略高于连续谱边缘（大约$5\times10^{-4}\omega_A$)时，离散模式会分裂为两个具有实生长率的模式：一个是类似于非静电力学情况的电磁分支，另一个是主要为静电模式。

这种离散的、静电的、被困的粒子模的增长率仅略高于连续谱的边缘，与几倍$10^{-4}\omega_A$的距离分离开。该模的主要特征是以局部为中心的ψ面周围的本地静电增长率达到最大时的局部、连续的Φ扰动。

4.2 静电捕获粒子模式及其对 $q < 1$ 区域的影响

尽管俘获粒子模式主要影响外部区域，但它们对于中央的$q < 1$区域的动理学非常重要，因为它们与有限β下的内部扭结模式耦合。在标准配置$\beta_p = 0.4$，$\eta = 1.5$，$f = 1$下，这种耦合的俘获粒子-内部扭结模式的示例如图9和图10所示。图9展示了位于$\gamma = 3.56\times10^{-3}\omega_A$的离散模式，略高于连续谱，而图10展示了位于$\gamma = 3.2\times10^{-3}\omega_A$的连续谱中的一种模式。在这两种情况下，$\Phi$的扰动都相当局部化。然而，对于常规的离散模式，$\Phi$是平滑的，而对于连续模式，$\Phi$具有两个类似于delta函数的峰值。

耦合模式的增长率通常非常接近静电连续谱的边缘，并且它们的能量主要由峰值远在$q = 1$区域外的Φ扰动主导。这些模式的内部孔激波部分最好被视为被俘获粒子模式诱导的扰动。(这种情况的更为知名的例子是外部场误差驱动大振幅撕裂模式时，当抗性撕裂稳定性参数Δ'很小且为负时[19])。讨论耦合模式的稳定阈值似乎没有用。相反，我们考虑由俘获粒子模式的热涨落引起的内部孔激波位移的大小。我们假设存在一个静电涨落，使得$e\phi_{\max}/T \approx \rho_{L_i}/L_n$，其中$\rho_{Li}$是离子拉莫半径，$L_n$是密度尺度长度，并使用数值计算的模式结构获取相应的内部孔激波位移。图11显示了与图4中相同平衡序列的结果，其中包括两个不同的密度剖面。一个是通过固定$\eta = 1.5$从压力剖面推导而来的。对于这个剖面，俘获粒子模式峰值位于$q = 2$附近。另一个密度剖面更尖，$n = n_0\left(1-1.6\rho^2+0.8\rho^4\right)$，俘获粒子模式峰值位于$q \approx 1.4$。如图11所示，对于尖峰的密度剖面，位移可以变得非常大。然而，产生这种效果所需的密度集中是相当大的。$\eta = 1.5$剖面更符合托卡马克的典型情况，对于这个剖面，内部孔激波位移仅在高β_p时显著。图11的

一个显著特点是，诱导的内部孔激波位移随压力的增加呈极速增长。在JET（Joint European Tokamak [21]）中已经观察到中心区域位置的波动约为1 mm或略小[20]。

与本文先前讨论的模式相比，俘获粒子模式对碰撞非常敏感，因为它们的增长率较小并且模式局部化于等离子体边缘，其碰撞频率较高。如果将碰撞建模为具有适当ν_{eff}的方程（9b），那么本地静电增长率$\gamma(\psi)$将变为复数，而在低β_p情况下，我们将无法找到没有径向奇点的全局静电模式。因此，当$\beta_p < 0.25$时，碰撞会显著减小诱导的扭曲位移。目前对俘获粒子模式的描述明显太粗糙，无法精确估计全局模式受碰撞破坏的时机。我们相信图11中的结果可以视为诱导位移的上限。

图11展示的结果对于非理想边界层理论应用于内部扭曲模的有效性是感兴趣的。线性理论的一个众所周知的困难是全局模的稳定性取决于发生在薄层中的动力学，对于波动非常敏感。本计算给出了内部扭曲模需要考虑的最小层宽的明确估计。对于电子密度为$n_e = 2\times10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}$和氘离子（$R_0/a = 4$和抛物线压力剖面），离子洛尔半径约为$1\ \mathrm{cm}\times\beta_p^{1/2}$。根据图11，在$\eta = 1.5$剖面下，热静电扰动引起的位移与离子洛尔半径相当，当$\beta_p \approx 0.3$；在更尖峰的剖面下，$\beta_p \approx 0.15$。

5 稳定性阈值

在将现有计算结果与之前的理想MHD结果[9,10]进行比较时，最重要的问题是具有实际捕获粒子数量 $(f = 1)$ 的稳定性阈值。我们已经证明热捕获粒子对内部扭曲模式有很强的影响，并且这些影响主要具有稳定作用。（这里不讨论在第IV节B中讨论过的零频率耦合捕获粒子-内部扭曲模式的情况。）图12显示了通过MHD和漂移动理学理论计算得出的理想内部扭曲模式增长率与β_p之间的关系，其中采用了几种不同的假设：包括和不包括静电势Φ，以及不同的温度比T_i/T_e（所有参数均为“小型托卡马克”参数）。这些平衡状态下的理想MHD阈值约为$\beta_{pc,\mathrm{MHD}} \approx 0.09$，而Kruskal-Oberman能量原理给出的阈值为$\beta_{pc,Ko} \approx 0.39$。对于相等温度的漂移动理学阈值低于Kruskal-Oberman的结果：$\beta_{pc} = 0.32$（对于非静电计算$\Phi = 0$的情况，$\beta_{pc} = 0.23$）。

关于不等温度的影响，我们注意到漂移动理学和高频能量原理之间存在一些差异。在漂移动理学模型中，不等温度是不稳定的，但在高频能量原理中没有影响。对于 $T_i/T_e = 1.5$，漂移动理学阈值降至 $\beta_{pc} = 0.12$($\beta_{pc} = 0.10$（$\Phi = 0$），并且对于 $T_i/T_e = 3$，它甚至低于磁流体力学(MHD)阈值 $\beta_{pc} = 0.05$（$\beta_{pc} = 0.06$（$\Phi = 0$））。因此，完整的漂移动理学理论显示出随着温度比的增加而不稳定，因为漂移共振的存在，而 Kruskal-Oberman 原理不显示出任何对温度比的依赖。此外，Kruskal-Oberman 的结果不受静电势的影响，因为磁力以一种使得准中性得以维持 $\Phi = 0$ 的方式影响粒子。

数值结果表明，静电势对内部旋转吉克模式具有微弱的稳定影响。这种稳定效应在温度相等时最为明显。在温度比较大时，电位被较冷物种所"短路"，对ρ_Φ有很大贡献，详见方程（8b）。

与理想磁流体力学相比，漂移动理学理论预测，在电子和离子温度大致相等时，热俘获粒子会引起强烈的稳定作用。在温度比较大的情况下，俘获粒子中温度更高的那一方会通过漂移共振来促进内部扭曲的不稳定性。在足够大的温度比率下（取决于参数，一般大于2），漂移共振会导致低于理想MHD临界点的不稳定性。在这方面，以及在其物理起源上，这种不稳定性类似于鱼骨不稳定性。[1]

References

[1] L. Chen, R. B. White, and M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 52, 1122 (1984).
[2] R. B. White, P. H. Rutherford, P. Colestock, and M. N. Bussac, Phys. Rev, Lett. 60, 2038 (1988); R. B. White, M. N. Bussac, and F, Romanelli, ibid. 62, 539 (1989).
[3] B. Coppi and F. Porcelli, Phys. Rev, Lett. 57, 2272 (1986).
[4] C. Z. Cheng, Phys. Fluids B 2, 1427 (1990).
[5] F. Porcelli, Plasma Phys. Controlled Fusion 33, 1601 (1991), and references contained therein.
[6] I. M. Antonsen, J_1, B. Lane, and J. J. Ramos, Phys. Fluids 24, 1465 (1981).
[7] T. M. Antonsen and Y. C. Lee, Phys. Fluids 25, 132 (1982).
[8] J. W. Van Dam, Y. C. Lee, and M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 25, 1349 (1982).
[9] M. N. Bussac, R. Pellat, D. Edery, and J. L. Soulé, Phys. Rev. Lett. 35, 1638(1975)
[10] H. Lütjens, A. Bondeson, and G. Vlad, Nucl. Fusion 32, 1625 (1992)
[11] R. C. Wolf, J. O'Rourke, A. W. Fdwards, and M. von Hellerman, Nuci Fusion 33, 663 (1993), and references therein.
[12] B. B. Kadomtsev, Sov. J. Plasma Phys. 1, 389 (1975) [Fiz. Plasmy 1, 710(1975)].
[13] A. Bondeson, G. Vlad, and H. Lütjens, Phys. Fluids B 4, 1899 (1992).
[14] R. J. Hastie and T. C. Hender, Nucl. Fusion 28, 585 (1988).
[15] M. D. Kruskal and C. R. Oberman, Phys. Fluids 1, 275 (1958).
[16] J. W. Connor and R. J. Hastie, Phys. Rev. Lett. 33, 202 (1974); Phys, Fluids 19, 1727 (1976).
[17] A. Bondeson, G. Vlad, and H. Lütjens, in Advances in Simulation and Modeling of Thermonuclear Plasmas, in Proceedings of the International Atomic Energy Agency Technical Committee Meeting, June 1992, Montréal (International Atomic Energy Agency, Vienna 1993), p. 306.
[18] H. Lütjens, A. Bondeson, and A. Roy, Comput. Phys. Commun. 69, 287(1992).
[19] A. H. Reiman, Phys. Fluids B 3, 2617 (1991).
[20] P. A. Duperrex, A. Pochelon, A. W. Edwards, and J. A. Snipes, Nucl. Fusion 32, 1161 (1992).
[21] P. H. Rebut and the JET team, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. 1986. Proceedings of the 11th International Conference, Kyoto (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1987), Vol. 1, p. 31