

# 如何生成一个引力波波形模板库？

Han Wang \*

2023 年 7 月 6 日

## 0 引言：引力波探测与匹配滤波

2015 年，地面引力波探测器 LIGO 首次直接探测到引力波信号，完成了对引力波的存在，即广义相对论预言的“最后一块拼图”的验证。而该引力波信号的来源，就是约为 36 和 29 个太阳质量的两个恒星级黑洞的并合 [1]。

地面引力波探测器的探测手段主要分为两种，模型依赖的和非模型依赖的。最早用于探测引力波的流水线是用来探测引力波暴的 Coherent WaveBurst (cWB)，这是一种非模型依赖的探测流水线 [2, 3]；2012 年 Cannon 等人开发了支持低延迟探测的 GstLAL[4, 5]，2015 年 Usman 等人基于前人的方法构建了探测流水线 PyCBC[6, 7]，对应的低延迟搜索流水线叫 PyCBC Live，二者均在 initial LIGO 中就已投入使用到信号探测当中，而他们都是模型依赖的，即需要波形模板以用来做匹配滤波搜索。

恒星级双黑洞信号多通过匹配滤波的方式进行探测——所谓匹配滤波，就是使用已知的波形模板与未知信号做匹配，求解二者的相关程度，以判定信号中是否有模板波形存在，因此需要不断更换参数组合，也就是不断更换模板，直到找到尽可能接近信号的波形，才能得到尽可能好的匹配。显然，只有信号与模板完全相同时，得到的结果是最优的，这时有

$$\rho_{\text{opt}}^2 = (h|h), \quad (1)$$

$\rho_{\text{opt}}$  被称为最优信噪比，其中

$$(h|g) \equiv 4\Re \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{g}^*(f)\tilde{h}(f)}{S_n(f)} df \quad (2)$$

是  $g$  和  $h$  的内积， $S_n(f)$  是探测器噪声的功率谱密度 (power spectral density, PSD)。 $\tilde{h}(f) = \tilde{h}(f, \lambda^\mu)$  是时间域引力波波形  $h(t)$  的 Fourier 变换， $\lambda^\mu$  代表决定波形的一系列参数。对于恒星

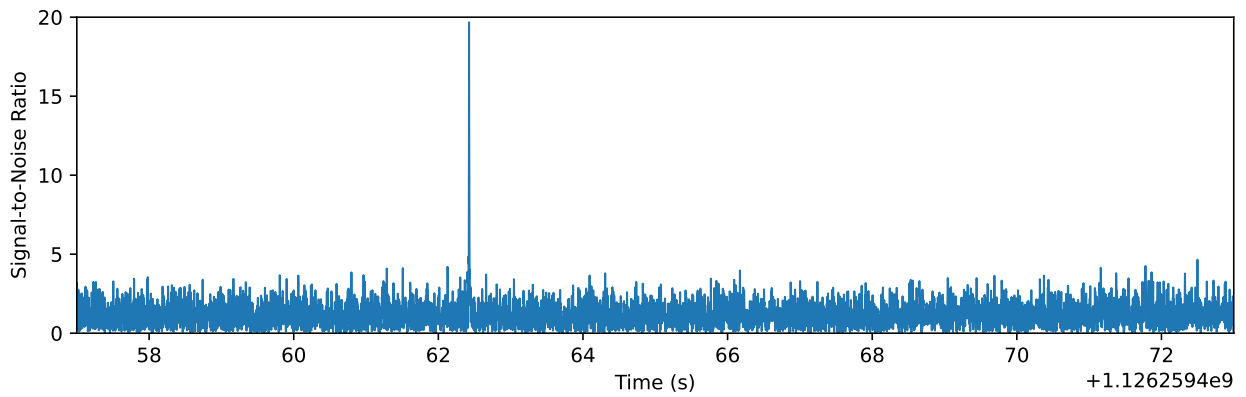
---

\*wangh657@mail2.sysu.edu.cn;  HumphreyWang

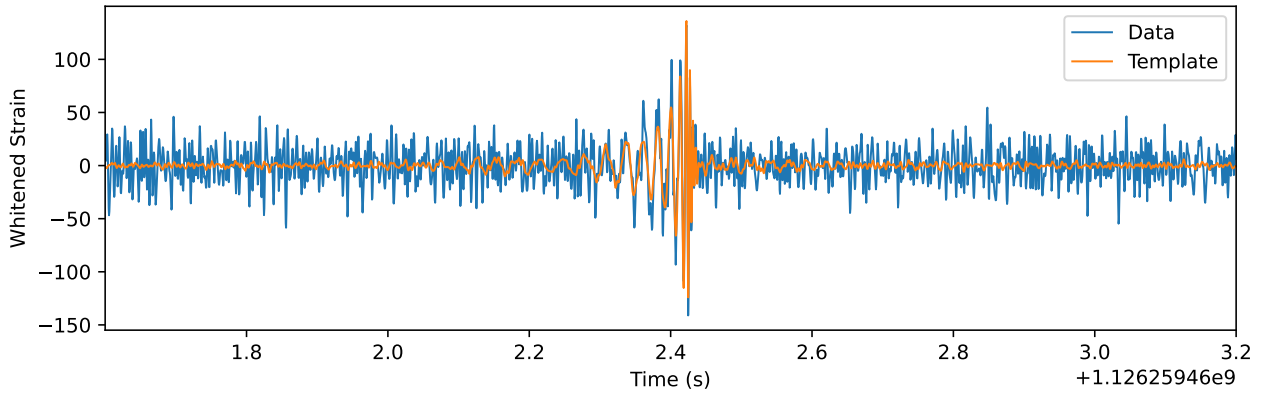
级双黑洞，地面探测器通常选取的全空间参数为

$$\lambda^\mu = (\mathcal{M}, \eta, \vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2, D_L, t_c, \phi_c, \iota, \theta, \phi, \psi),$$

共 15 个参数，其中  $\mathcal{M} = \eta^{3/5} M$  是啁啾质量， $\eta = m_1 m_2 / M^2$  为对称质量比， $M = m_1 + m_2$  为总质量，均由双黑洞质量  $m_1, m_2 (m_1 > m_2)$  给出， $D_L$  是光度距离 (luminosity distance)， $t_c, \phi_c$  是并合时间和并合相位， $\iota$  是倾向角， $(\theta, \phi)$  是赤纬和赤经，是在赤道坐标系下用来描述源空间方位的参数， $\psi$  是极化角。<sup>1</sup>



(a) We found a signal at 1126259462.42s with SNR 19.68



(b) 模板与数据在双黑洞并合时刻对齐后的时域波形（已白化）

图 1:（以 GW150914 为例）通过匹配滤波方法在数据中寻找与模板对应的信号，只有模板与信号的并合时间  $t_c$  非常相近时，匹配滤波才会得到非常显著的信噪比结果。📄 📺

在图1中，我们以 GW150914 为例，对该段数据进行匹配滤波探测。图1(a)中可以清楚地看到一个信噪比的峰值，根据这个峰值对应的时间，我们将模板与数据对齐，如图1(b)——可以看到，这正是模板与信号最“匹配”的时间。

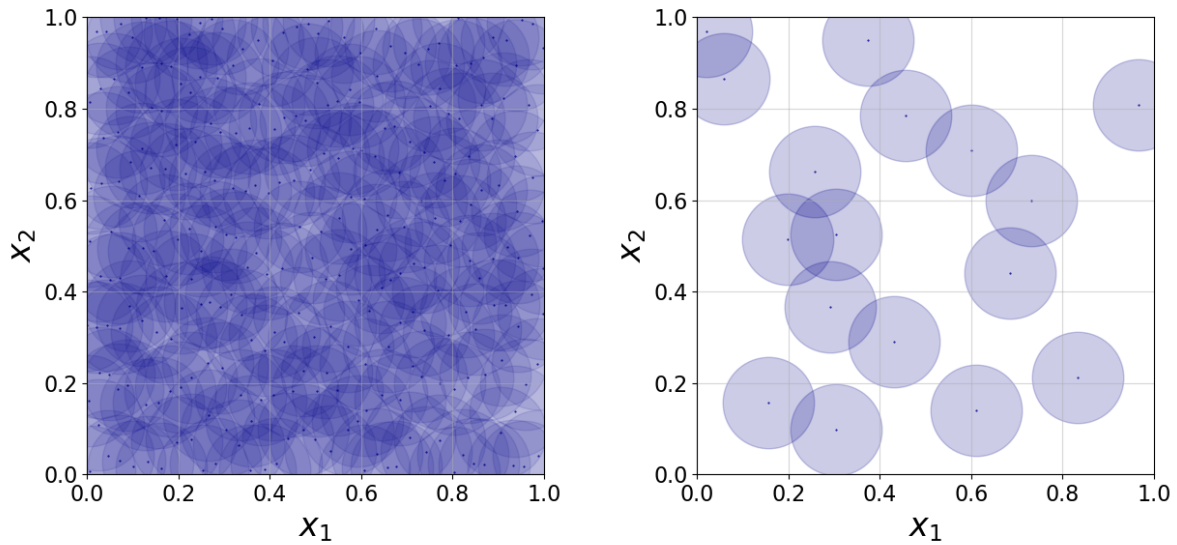
<sup>1</sup>对于空间引力波探测器，如天琴和 LISA，一般使用黄经黄纬  $(\lambda, \beta)$  来描述源的空间方位。

## 1 波形模板库

上一节我们提到，恒星级双黑洞的引力波波形由十余个参数来决定，因此，为了使参数空间中任意位置的参数组合对应的信号都有足够相近的波形模板与之匹配，匹配滤波需要构建相应的波形模板库。然而，正如我们在图1(b)中所看到的，模板往往不能完美地匹配实际的引力波信号。匹配因子 (fitting factor, FF) 可以用来描述一个波形在给定模板库情况下可以达到的最佳匹配程度：

$$FF(\lambda^\mu) \equiv \max_{\lambda^\mu} \frac{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^{\mu'}))}{\sqrt{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^\mu))(h(\lambda^{\mu'})|h(\lambda^{\mu'}))}}. \quad (3)$$

那么，对于一个足够有效的模板库，任何在其参数空间范围内的参数对应的引力波信号都应该有  $FF \geq M$ ， $M$  是我们容忍的最小匹配程度 (minimal match)，一般取  $M = 0.97$ 。



(a) 参数空间里堆了太多的模板

(b) 参数空间里模板太少，无法覆盖完全

图 2: 模板库中模板的数量太多或太少都是不合适的

有了最小匹配程度后，我们该如何构建一个合适的模板库呢？模板库中波形模板需要足够多才能覆盖整个参数空间，但模板数过多又会消耗大量的计算资源——想像面前有一片方形区域，我们手上有许多精致的小圆片，怎样用这些圆片铺满这个区域呢？我们首先想到的是尽可能地在区域里堆满圆片（图2(a)），但这些圆片是很昂贵的，这是很浪费的做法；但如果我们只放置很少的圆片（图2(b)），它们就不能覆盖整个区域了——

因此，这其中的本质问题是，如何用尽可能少的圆片覆盖指定的区域，即，如何用尽可能少的模板覆盖尽可能多的参数空间？

## 2 模板库的生成

数学上这是一个经典的覆盖问题 (The Covering Problem)，其目的是寻找厚度最小的覆盖方案。所谓厚度 (thickness)，即一个用于覆盖的  $N$  维球的体积与对应的  $N$  维基本格子的体积的比：

$$\Theta \equiv \frac{V_n R^n}{\text{vol}(\Lambda)} \geq 1, \quad (4)$$

其中  $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$  为  $N$  维单位球体积。例如图3中正方形网格对应  $\Theta = \pi/2$ ，而六边形网格对应  $\Theta = 2\pi/3\sqrt{3}$ ，因此六边形网格的覆盖更“薄”。事实上，该六边形网格的覆盖方式是二维欧式空间下的最优覆盖。[8]

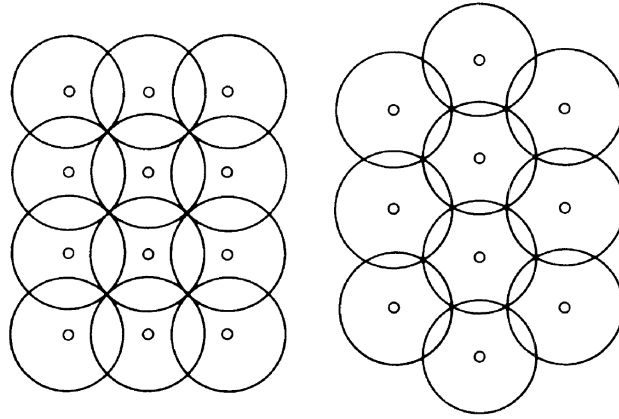


图 3: 六边形网格比正方形网格的排布方式效果更好 [8]

而对于引力波探测而言，我们面临的问题并没有这么简单。一方面，引力波对应的参数空间不止二维，更重要的是，引力波参数空间，特别是其对应的内积空间是非欧的，其度规非常复杂。[9, 10]

通过度规方式给出波形模板放置方案的实现超出了本文讨论的范围，这里我们主要介绍的是基于随机模板放置算法的模板库的生成。接下来我们将以由 Ian Harry 等人开发的程序包 `sbank` 为例 [11]，介绍一种随机模板放置的算法逻辑，程序包的主体结构如图4所示。

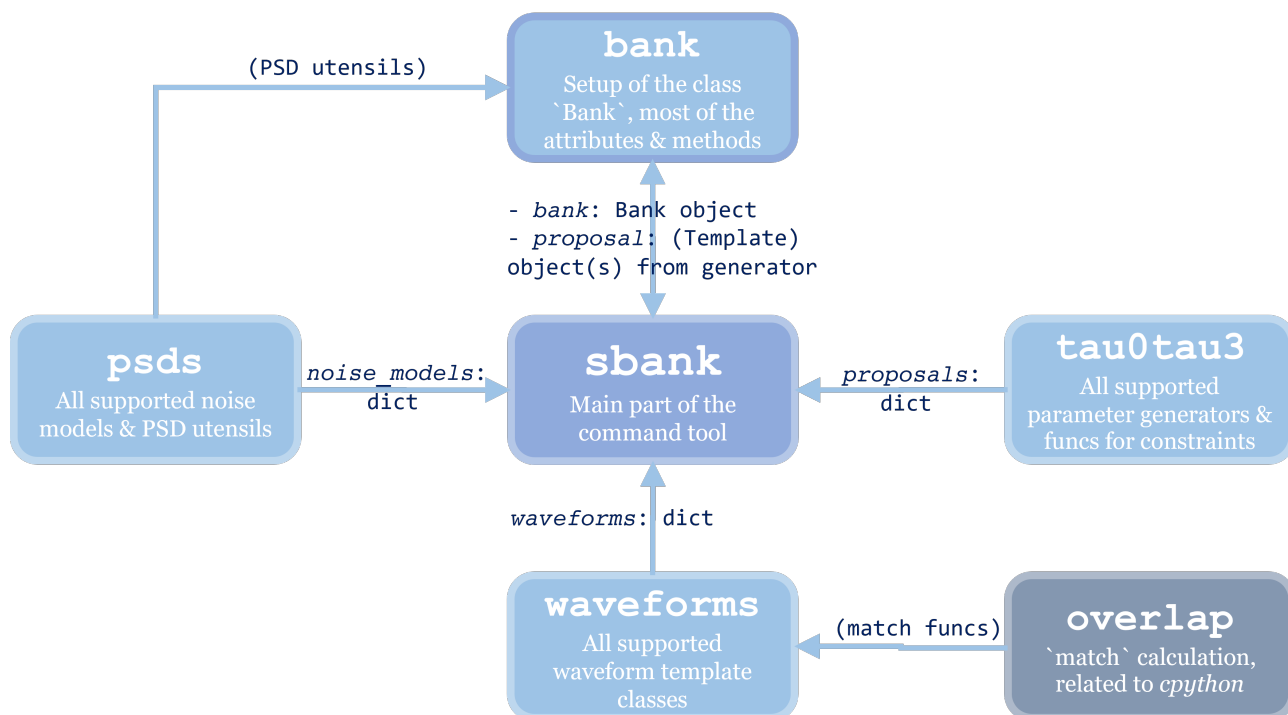


图 4: sbank 程序包的主体结构

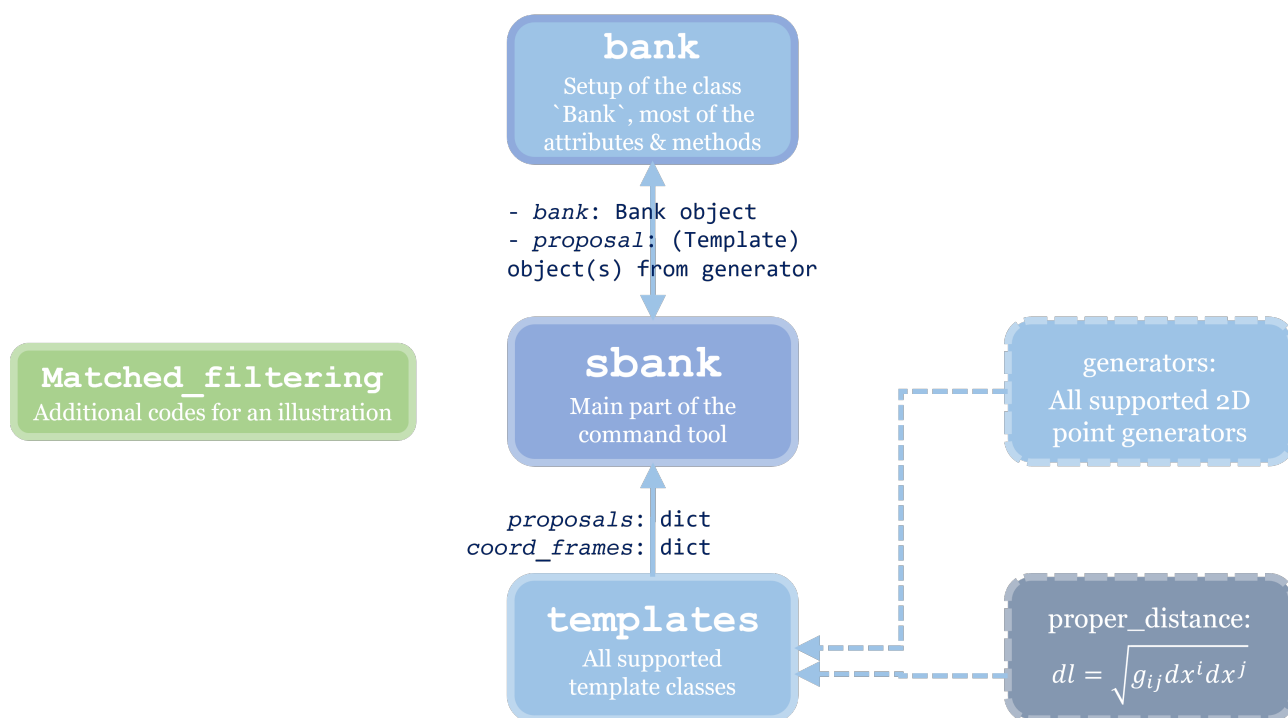


图 5: 将 sbank 精简后的程序主体结构

### 3 模板库的生成：简化模型

为了更直观地理解该程序包的主体逻辑，我们对该程序包进行了删改简化，移除了与实际引力波相关的部分，使其回归到我们前面提到的“小圆片问题”，即二维欧式空间下的覆盖问题。更改后的主体结构如图5所示。

#### 3.1 算法逻辑：模板间的距离

首先，在通过命令行输入对应参数后，程序将根据输入选取对应的生成器，以便在给定参数空间范围内按指定分布随机生成模板。

在二维欧式空间，判断两个模板之间是否足够接近，计算的是两点之间的距离，即  $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ ，广义上来说，是两点之间的固有距离，即

$$dl = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}. \quad (5)$$

在实际引力波探测中，判断两个模板之间是否足够接近，计算的是两个模板的 Overlap:

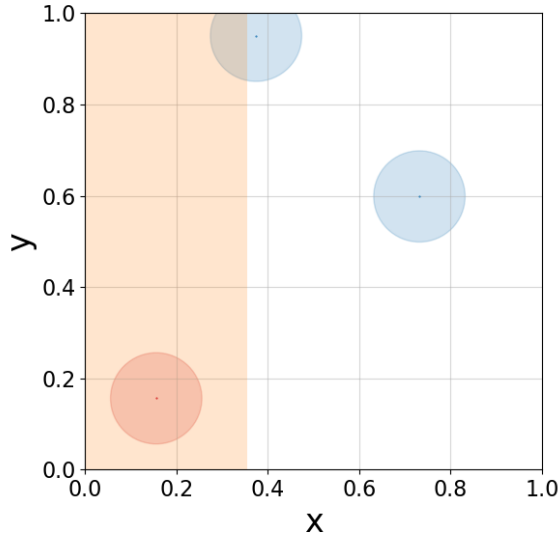
$$O(h(\lambda^\mu), h(\lambda^{\mu'})) \equiv \frac{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^{\mu'}))}{\sqrt{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^\mu))(h(\lambda^{\mu'})|h(\lambda^{\mu'}))}}. \quad (6)$$

匹配因子事实上就是整个模板库中的模板与这个信号之间的 Overlap 的最大值。

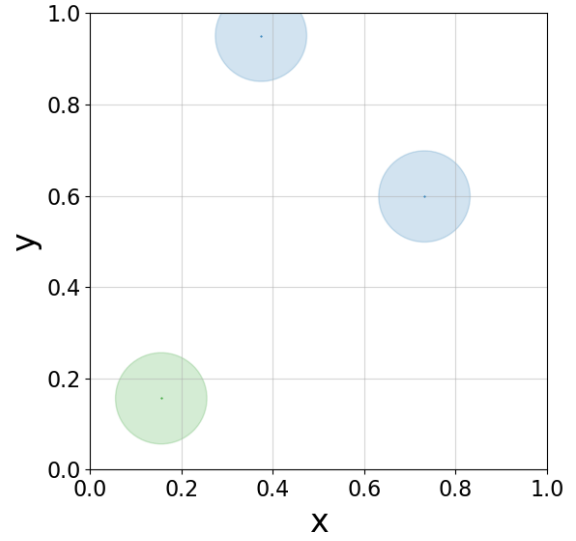
一个模板库里有很多个模板，这意味着每当一个新的候选模板加入进来，需要计算其与当前模板库中所有模板的距离——这样的做法显然是低效的，在实际引力波探测中，计算波形以及 Overlap 是很费时的部分，如何更高效地筛掉那些我们不需要的候选模板呢？

在程序中，我们指定了邻域参数 (nhood\_param) 和邻域大小 (nhood\_size) 这两个参数，即使用哪个参数作为邻域的判据及其邻域大小。这样我们事先排除了很多与候选模板相去甚远的模板，因此只需要计算候选模板与其邻域里的模板的距离即可，如图6和图7所示。

这样的处理还有一个好处，即我们可以根据邻域参数对模板进行排序，新模板可以直接嵌入到与其邻域参数的大小最接近的两个模板之间。此外，在筛选好邻域内的模板后，同样可以对这些模板排序，与候选模板的邻域参数最相近的首先计算，由于邻域参数更相近，这个模板有更大概率与候选模板距离近，进而把候选模板排除，进而提高筛选效率（如图7(b)和图8）。

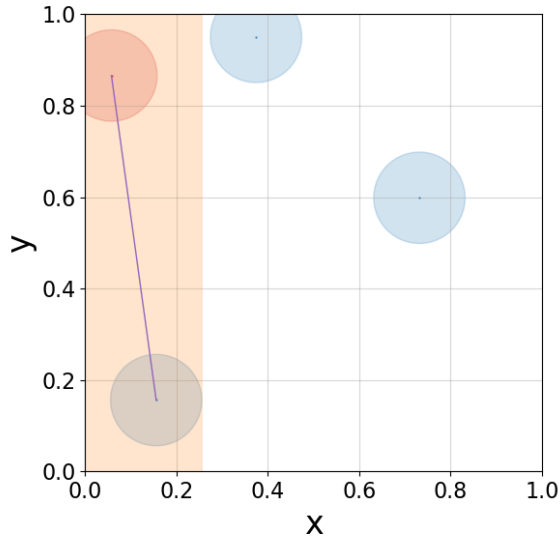


(a) 候选模板开始注入到模板库中

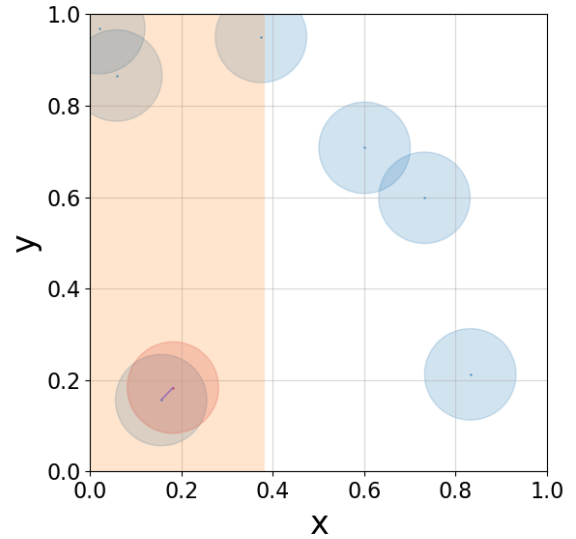


(b) 候选模板的邻域内没有模板，因此直接被接受成为新模板嵌入到模板库中

图 6: 模板库生成过程。蓝色点代表模板库已有模板，红色点代表当前候选模板，绿色点代表该候选模板被接受成为新模板。浅橙色代表的区间为红色点的邻域范围。点周围的圆形范围最外圈代表该模板库允许的模板间最远距离，对应到实际引力波探测则为最小匹配程度  $M = 0.97$ 。



(a) 邻域内的唯一一个模板与候选模板距离远，候选模板将被接受成为新模板，无需再计算其与邻域外模板的距离



(b) 邻域内的一个模板与候选模板距离过近，该候选模板将直接被排除，无需再计算其与其他邻域内模板的距离

图 7: 模板库生成过程。在二维欧式空间通过两点间距来决定模板的去留，而实际引力波探测中需要计算模板间的 Overlap。



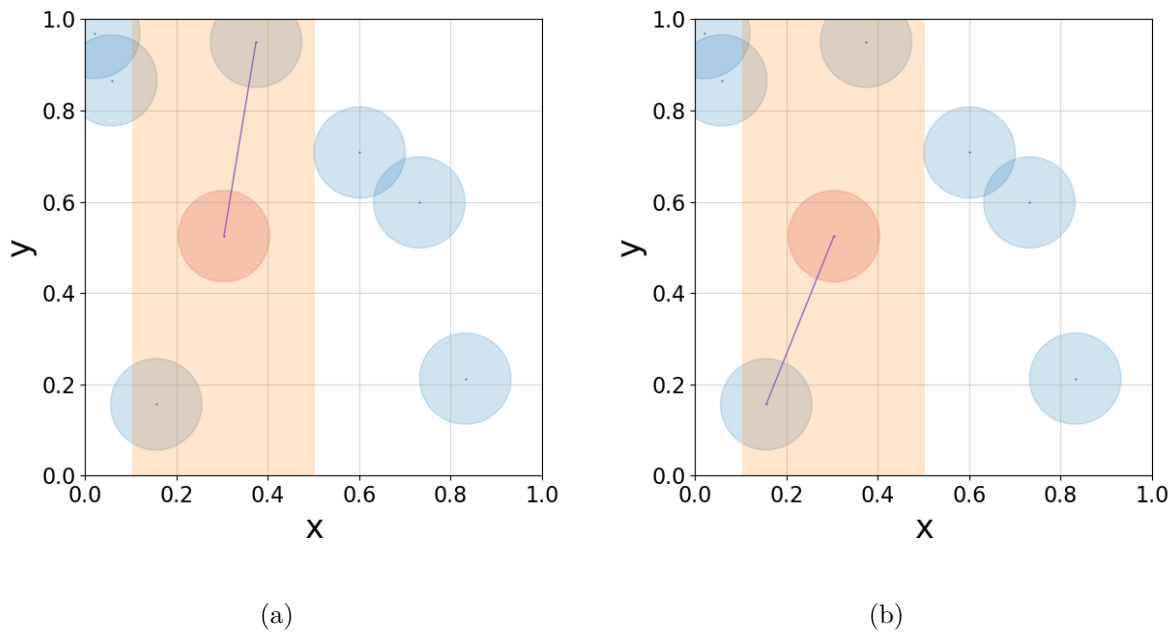


图 8: 模板库生成过程。基于邻域参数排序后，与候选模板的邻域参数最相近的模板将首先计算距离。

这里可能会有个疑问，我们这里邻域参数选的是横轴  $x$  的值，邻域大小为 0.2，从以上一系列图中可以看到，这似乎并不算是一个明智的选取，邻域的范围仍然比较大。然而这是因为我们很清楚欧式空间的样子，因此甚至可以直接用眼睛判断距离相近与否。而在实际引力波探测中，我们使用的也只是由啁啾质量（和起始频率）决定的一个时间量纲的参数  $\tau_0$ 。虽然我们不清楚实际参数空间的结构，但我们可以确定的是，啁啾质量是引力波的主导参数<sup>2</sup>，因此这样的选取是合理的。在简化模型中，我们保留了这样的单参数作为邻域参数的配置。

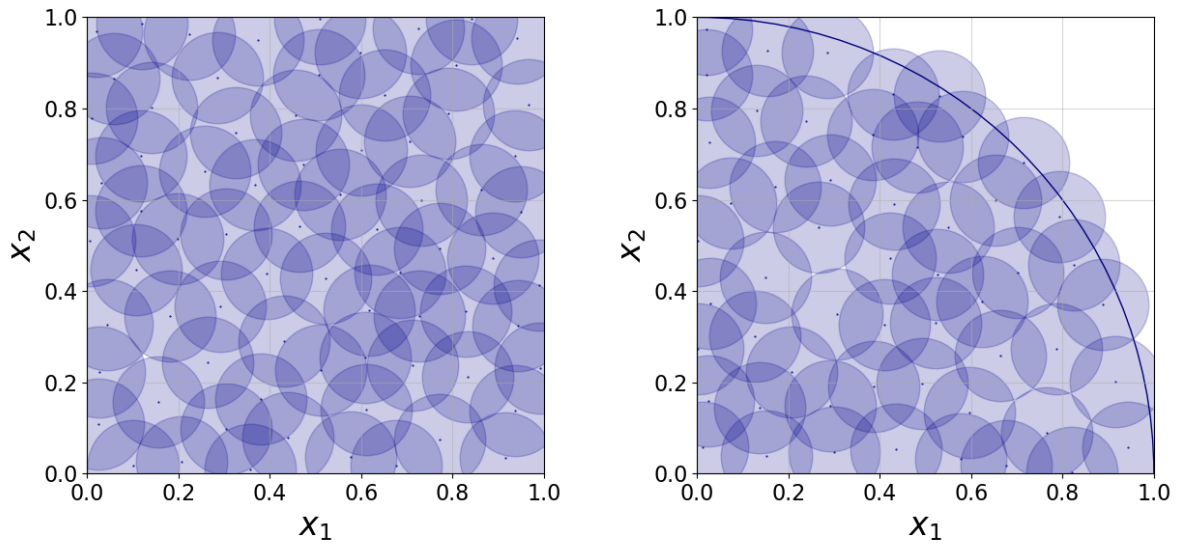
### 3.2 简化模型的拓展

首先我们需要注意的是，在上一小节，我们随机生成模板时遵循的是在  $(x, y)$  两个方向均匀分布，但这并不是绝对的。我们可以定义一个新生成器，让其遵循给定参数空间范围下极坐标的两个参数  $(r, \theta)$  均匀分布。如图9(b)，除了由于指定了  $r$  的上限是 1 导致右上角没有模板以外，其模板分布情况与上一小节的示例结果十分相似。

在实际的引力波探测中，需要结合各参数的物理意义为模板生成器选取合理的上下限和合适的参数分布。

<sup>2</sup>在生成图1的代码中 [\[1\]](#)，我们在生成模板波形时不仅只输入了双星质量两个源参数，其他的值都被缺省了，甚至还假设双星质量相等，但我们依然得到了非常显著的信噪比结果。





(a) 上一小节示例的模板库结果

(b) 极坐标均匀情况下的模板库结果

图 9: 同样在欧式空间下, 使用不同种模板生成器, 模板库结果相似。

PYTHON 类的继承使得模板类型可以更容易地进行拓展。我们可以新建一个子类, 覆写度规参数, 重新计算其本征值与本征向量, 并将该子类加入到相应的字典中, 即可拥有一个类欧式空间下的模板类:

```

1 class ScaledEuclidTemplate(BasicTemplate):
2     """The class for a scaled Euclidean coordinates, i.e. we stretch the x1-direction
3         with a factor of 2. Actually you can arbitrarily change the metric as long as it
4         is not singular, non-diagonal matrix will give a rotate ellipse, e.g. you can
5         override the metric using [[1/4, 1/4], [1/4, 1]].
6     """
7     metric = np.array([[1/4, 0], [0, 1]])
8     vals, vecs = np.linalg.eig(np.linalg.inv(metric))
9     ang = float(np.degrees(np.arctan2(vecs[1, 0], vecs[0, 0])))
10
11 proposals = {
12     'Cartesian': cartesian_uniform_generator,
13     'Polar': polar_uniform_generator,
14     'ScaledEuclidean': cartesian_uniform_generator,
15 }
16
17 coord_frames = {
18     'Cartesian': BasicTemplate,
19     'Polar': BasicTemplate,
20     'ScaledEuclidean': ScaledEuclidTemplate,
21 }

```

如图10所示, 相比  $x_1$  来说,  $x_2$  在这种情况下是主导的那个参数——这也回到了上一小节的讨论, 在生成模板库时, 往往只关注主导的几个参数, 模板库结果就足以在一定匹配程度要求下保持有效。

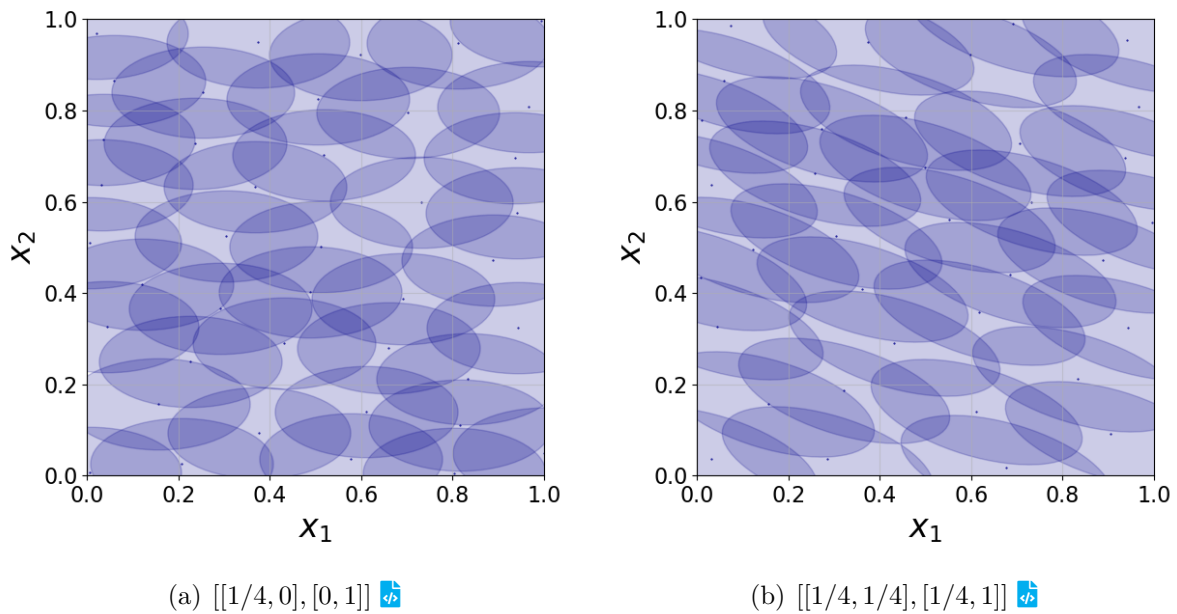


图 10: 不同度规下模板的分布情况

## 4 后记

笔者的研究课题与引力波探测相关，因此深入使用了 `sbank` 程序包。但在各种场合的汇报中，笔者大多数时候会将研究方法部分做适当的省略，因此在此之前，还尚未对 `sbank` 这部分的程序逻辑进行详尽的论述。然而单说度规、内积空间等等名词是相对抽象的，不太好理解，不够直观，于是也就有了可视化的想法，最终变成这个一直在“做减法”的小项目。

但毕竟引力波波形模板和小圆片还是“有点差别”。在不改变项目总体结构的前提下，简化版本的项目除了移除了很多代码外，依旧做了一些修改，并增加了一些用于画图，特别是模板库生成过程的画图代码。但总之，正如笔者在项目 `README.md` 中所说的，希望这些小圆片可以帮助大家更好地理解“波形模板库的生成到底在做什么”以及“一个模板库应该‘看起来’是什么样子”。

最后，感谢看到这里的你！

## 参考文献

- [1] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [2] S. Klimenko and G. Mitselmakher. A wavelet method for detection of gravitational wave bursts. *Class. Quant. Grav.*, 21(20):S1819–S1830, October 2004.
- [3] S. Klimenko et al. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. *Phys. Rev. D*, 93(4):042004, 2016.
- [4] Cody Messick et al. Analysis Framework for the Prompt Discovery of Compact Binary Mergers in Gravitational-wave Data. *Phys. Rev. D*, 95(4):042001, February 2017.
- [5] Surabhi Sachdev et al. The GstLAL Search Analysis Methods for Compact Binary Mergers in Advanced LIGO’s Second and Advanced Virgo’s First Observing Runs. *arXiv e-prints*, page arXiv:1901.08580, 1 2019.
- [6] Bruce Allen, Warren G. Anderson, Patrick R. Brady, Duncan A. Brown, and Jolien D. E. Creighton. FINDCHIRP: An Algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries. *Phys. Rev. D*, 85:122006, 2012.
- [7] Samantha A. Usman et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence. *Class. Quant. Grav.*, 33(21):215004, 2016.
- [8] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*. Springer, 1988.
- [9] Bruce Allen. Optimal template banks. *Phys. Rev. D*, 104(4):042005, 2021.
- [10] Bruce Allen. Performance of random template banks. *Phys. Rev. D*, 105(10):102003, 2022.
- [11] <https://github.com/gwastro/sbank>.