图像处理之逆透视变换

——智能车背景理论知识系列专题讲座之一

主讲人：虞坤霖

目录

第零章 前言

- 本文以智能车摄像头图像处理为背景
- 解决了根据图像信息逆透视变换得到赛道信息的问题
- 以线性变换阵作为理论基础给出了矩阵变换公式

第一章 基础知识

- 点的表示
- 向量的表示
- 线性变换
- 线性变换的表示

点的表示

- 三维空间中的点用1×4的矩阵表示：
- (x, y, z, 1)
- 一般的：
- (x, y, z, w) 与 (x/w, y/w, z/w, 1)
- 表示同一点
- 其中 w==1 为标准型

向量的表示

- 三维空间中的向量用1×4的矩阵表示：
- (x, y, z, 0)
- 最后一位不得非零，否则表示点

点与向量之间的运算

- 向量±向量=向量
- 点±向量=点
- 点±点±点=点

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{n} & \frac{y}{n} & \frac{z}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

线性变换

- 变换即映射，记为：$f: X \to Y$ 或 $\mathrm{y} = f(x)$
- 满足如下两个条件的变换为线性变换

$$\alpha y = f(\alpha x)$$

$$y_1 + y_2 = f(x_1 + x_2)$$

- 或简记为：

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

四维向量空间

- 三维点由1×4的矩阵表示
- 三维向量由1×4的矩阵表示
- 1×4的矩阵构成四维向量空间

四维向量空间中线性变换的表示

- 对于三维空间中的点和向量，都由四维向量表示
- 四维向量空间中线性变换可由四阶方阵表示

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

四维向量空间中线性变换的表示

- 若将四维向量看成行向量，则线性变换可表示成对四维向量右乘变换阵的形式：

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

- A是线性变换阵，前者表示三维点，后者表示三维向量
- 乘法按照矩阵相乘的计算法则计算

线性变换的表示

- 也可将四维向量看成列向量，此时线性变换可表示为左乘线性变换阵
- 相应的变换阵转置

$$A^T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

第二章基本线性变换

- 恒等变换
- 变换阵分区
- 平移变换
- 缩放变换
- 旋转变换
- 切变变换
- 投影变换
  - 平行投影变换
  - 透视投影变换
- 组合变换
- 逆变换

恒等变换

- 任意三维点与向量乘以单位阵后不变

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

变换阵分区

旋转缩放与切变变换区

透视变换区

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)$$

平移变换区

平移变换

- 平移变换只对点有效，对向量无效

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\Delta x & y+\Delta y & z+\Delta z & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

缩放变换

- 主对角线前三维能分别缩放某个维度
- 第四维整体缩放所有维度

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ & & & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & \gamma z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{w}x & \frac{\beta}{w}y & \frac{\gamma}{w}z & 1 \end{pmatrix}$$

旋转变换

- 二维旋转变换：
- 已知点 (x_0, y_0)
- 求该点绕原点逆时针旋转θ后的坐标 (x, y)

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0) \\ y = g(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ y = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \end{cases}$$

$$(x, y) = (x_0, y_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = (x_0, y_0)A$$

二维旋转变换

设初始点 为(x_0, y_0)，以原点为中心逆时针旋转θ后得新点(x, y)

$$re^{i\theta_0}$$

$$\begin{cases} x_0 = r\cos\theta_0 \\ y_0 = r\sin\theta_0 \end{cases}$$

$$re^{i\theta_0}e^{i\theta}$$

$$= re^{i(\theta_0+\theta)}$$

$$= r[\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)]$$

$$= r[(\cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta) + i(\sin\theta_0\cos\theta - \sin\theta_0\cos\theta)]$$

$$= (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta) + i(y_0\cos\theta - x_0\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta \\ y = y_0\cos\theta - x_0\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

推广到三维旋转变换

- 沿Z轴正方向旋转的旋转变换阵
- （旋转方向用右手法则确定）

$$\begin{pmatrix} x & y & z_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

各个方向的旋转变换阵

$$\mathrm{Z}:\begin{pmatrix} x & y & z_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}:\begin{pmatrix} x_0 & y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta & \\ & \sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y}:\begin{pmatrix} x & y_0 & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & & \sin\theta & \\ & & & \\ -\sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

切变变换

- 在第x列y行（第一列第二行）放一个系数k
- 点的y、z坐标不变，x坐标增加
- y越大，x增加得越多
- 正方形被拉伸为梯形

$$
\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ k & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} x_0 + ky_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix}
$$

投影变换

- 平行投影变换（Z方向）

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

投影变换

- 透视投影变换
- 空间中任意一点与(-d,0,0)点的连线与Y,Z平面的交点

$$
\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & & & -\frac{1}{d} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & y_0 & z_0 & \frac{d-x_0}{d} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \frac{dy_0}{d-x_0} & \frac{dz_0}{d-x_0} & 1 \end{pmatrix}
$$

投影变换

- (-d,0,0)为投影点，Y,Z平面为投影面
- 同理，以(0,-d,0)为投影点，X,Z平面为投影面的变换阵，以(0,0,-d)为投影点，X,Y平面为投影平面的透视变换阵分变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & -\frac{1}{d} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -\frac{1}{d} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

组合变换

- 将两个或以上基本变换阵相乘，得到组合变换阵
- 相乘的顺序表示基本变换执行的顺序

$$P_0 A = P_1$$

$$P_1 B = P_2$$

$$P_0 AB = P_2$$

$$C = AB$$

$$P_0 C = P_2$$

逆变换

- 变换阵的逆矩阵表示其对应变换的逆变换

$$P_0 A = P_1$$

$$P_0 A A^{-1} = P_1 A^{-1}$$

$$P_0 = P_1 A^{-1}$$

第三章 智能车摄像头透视变换阵

- 坐标系
- 坐标变换
- 坐标变换阵
- 透视变换阵

坐标系

- 世界坐标系（W）
  - 在地面选取两个垂直的方向为X,Y轴
  - 竖直向上为Z轴
- 智能车坐标系（C）
  - 正右方为X轴
  - 前进方向为Y轴
  - 竖直向上为Z轴
- 摄像头坐标系（G）
  - 视线方向为Z轴负方向
  - 正右方为X轴
  - 正上方为Y轴

坐标变换

- 将摄像头坐标与智能车坐标重合（摄像头质心置于智能车质心处并向下看）
- 将摄像头向上平移一个高度h
- 摄像头沿X轴旋转一个仰角
- 摄像头沿着Z轴方向透视
- 如此可由智能车坐标得摄像头坐标

坐标变换

- 将摄像头固定，上述过程可等价为：
  - 智能车以及赛道向下平移一个高度h
  - 智能车以及赛道沿X负方向旋转一个仰角
  - 智能车以及赛道沿着摄像头Z轴方向透视

坐标变换阵

- 向下平移（h为平移高度）

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -h & 1 \end{pmatrix}$$

坐标变换阵

- 沿X轴负方向旋转

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

坐标变换阵

- 沿Z轴方向透视变换

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -\frac{1}{d} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

透视变换阵

- 将上述三者相乘即可得到透视变换阵

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -h & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -\dfrac{1}{d} \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{d} \\ 0 & -\sin\theta & 0 & -\dfrac{\cos\theta}{d} \\ 0 & h\sin\theta & 0 & 1+\dfrac{h\cos\theta}{d} \end{pmatrix}
$$

第四章 不可逆与信息丢失

- 透视变换阵不可逆
- 不可逆的意义

透视变换阵不可逆

- 上一章得到的透视变换阵第三列为零
- 则其可表示为其他三列的线性组合
- 故该矩阵的不满秩
- 故该矩阵不可逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{d} \\ 0 & -\sin\theta & 0 & -\dfrac{\cos\theta}{d} \\ 0 & h\sin\theta & 0 & 1+\dfrac{h\cos\theta}{d} \end{pmatrix}$$

透视变换阵不可逆

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -\frac{1}{d} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 该矩阵在计算时的一个因子已经是奇异的了
- 这个奇异性导致相乘后的矩阵也是奇异的
- 归根结底在于投影变换将三维空间的点映射到二维空间，信息丢失。
- 不同的点可能映射到相同的点，故无法求出其逆变换

不可逆的意义

- 从映射关系上看，不可逆是因为不是一一映射，不同的值映射到相同的象
- 从信息的角度看，变换时有部分信息丢失，所以无法还原
- 从空间的角度看，三维空间变为二维空间，丢失了一个维度
- 从矩阵的角度看，矩阵奇异，第三列的代数余子式为零，不存在逆矩阵。

第五章 逆透视变换阵的求解与应用

- 补充信息使透视变换阵可逆
- 求逆矩阵
- 补充信息的几何意义
- 逆透视变换阵的应用

补充信息使透视变换阵可逆

- 只要将透视变换阵的主对角线全部补充为1即可

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -h & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (1) & -\frac{1}{d} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & (\sin\theta) & -\frac{\sin\theta}{d} \\ 0 & -\sin\theta & (\cos\theta) & -\frac{\cos\theta}{d} \\ 0 & h\sin\theta & (-h\cos\theta) & 1+\frac{h\cos\theta}{d} \end{pmatrix}$$

求逆矩阵

- 将修改的透视变换阵求逆

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & -\dfrac{\sin\theta}{d} \\ & -\sin\theta & \cos\theta & -\dfrac{\cos\theta}{d} \\ & h\sin\theta & -h\cos\theta & 1+\dfrac{h\cos\theta}{d} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta & \\ & \sin\theta & \cos\theta + \dfrac{h}{d} & \dfrac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

求逆矩阵

- 如此我们便得到了逆透视变换阵
- （以下将三角函数简记为首字母）

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c+\dfrac{h}{d} & \dfrac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

补充信息的几何意义

- 假设被变换点为P，则：

$$P_C = P_G \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c+\frac{h}{d} & \frac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G & y_G & z_G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c+\frac{h}{d} & \frac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G & cy_G + sz_G & -sy_G + cz_G + \frac{hz_G}{d} + h & \frac{z_G + d}{d} \end{pmatrix}$$

补充信息的几何意义

- 为求得小车坐标系下点的坐标，需知道摄像头坐标下的Z坐标（深度）。
- 由此可见，透视变换阵新加入的信息是摄像头看到的每个像素点的深度信息。
- 根据上述公式，只要知道点在图像上的位置以及深度信息，即可求得小车坐标系下对应的坐标。
- 而根据摄像头图像只能知道点在图像上的位置。如何得到深度信息呢？

逆透视变换阵的应用

- 上一节中发现，为完成逆透视变换，需先知道摄像头的深度信息，而实际上摄像头本身无法测得该信息。
- 回忆透视变换的过程发现，透视变换阵将三维空间映射到二维空间，补充信息后的透视变换将三维空间映射到三维空间。
- 即如果知道摄像头的深度信息，可以还原出小车坐标系下完整的三维信息
- 而赛道本身是二维的，我们不需要逆透视变换出三维空间，故现在的思路是，利用赛道是二维的这一点解出摄像头深度信息。

逆透视变换阵的应用

- 已知智能车坐标系下赛道的Z坐标为0，故

$$\begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G & cy_G + sz_G & -sy_G + cz_G + \dfrac{hz_G}{d} + h & \dfrac{z_G + d}{d} \end{pmatrix}$$

$$\because z_C = 0$$

$$\therefore -sy_G + cz_G + \frac{hz_G}{d} + h = 0$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{sy_G - h}{c + \dfrac{h}{d}}$$

逆透视变换阵的应用

- 代入原公式可得

$$P_C = P_G \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c+\dfrac{h}{d} & \dfrac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G & y_G & \dfrac{sy_G - h}{c+\dfrac{h}{d}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c+\dfrac{h}{d} & \dfrac{1}{d} \\ & & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(dc+h)x_G}{sy_G+dc} & \dfrac{(dc+h)y_G - hds}{sy_G+dc} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第六章 用逆透视变换阵处理图形

- 图像与图形的区别
- 赛道的图形表示方法
- 对图形逆透视变换

图像与图形的区别

- 图像与图形就是通常所说的位图与矢量图
- 图像由像素矩阵构成，每个像素记录通道的强度
- 图形由描述图形的点、曲线方程、方程的参数组成。
- 摄像头捕获的是图像，即像素矩阵
- 对摄像头拍摄的赛道进行提取的本质就是将图像提取为图形的过程。

赛道的图形表示方法

- 最常见的赛道的图形表示方法是离散点列
- 即用离散点列的连线作为赛道的近似描述
- 其中点的Y坐标为该点在图像上对应的行号
- 点的X坐标为该点在所在行上的左右偏移量
- 这种方法可以表示赛道的边线，也可以表示中心线

对图形逆透视变换

- 如果对图像进行逆透视变换，则要对每个像素点所处位置进行变换，计算量过大，而且还要在像素之间插值，这样做不现实
- 对图形逆透视变换，只需对离散点列变换，计算量是完全可以接受的。

对图形逆透视变换

- 首先分析图像，得到每一行上赛道边线或中线的坐标，如此得到一列离散点列
- 每一个点有一个横纵坐标，单位为像素，根据感光阵列的大小（若干毫米）将坐标变换到实际摄像头上，单位变为米
- 根据每个点的X、Y坐标计算出Z（深度）
- 将每个点的坐标代入逆透视变换公式中得到智能车坐标系下的坐标

附 线性变换阵在空间定位中的应用