

**Instituto Politécnico Nacional**  
**Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas**  
**Integración de un Sistema Robótico**

## Seguimiento de Trayectoria con Robot Antropomórfico

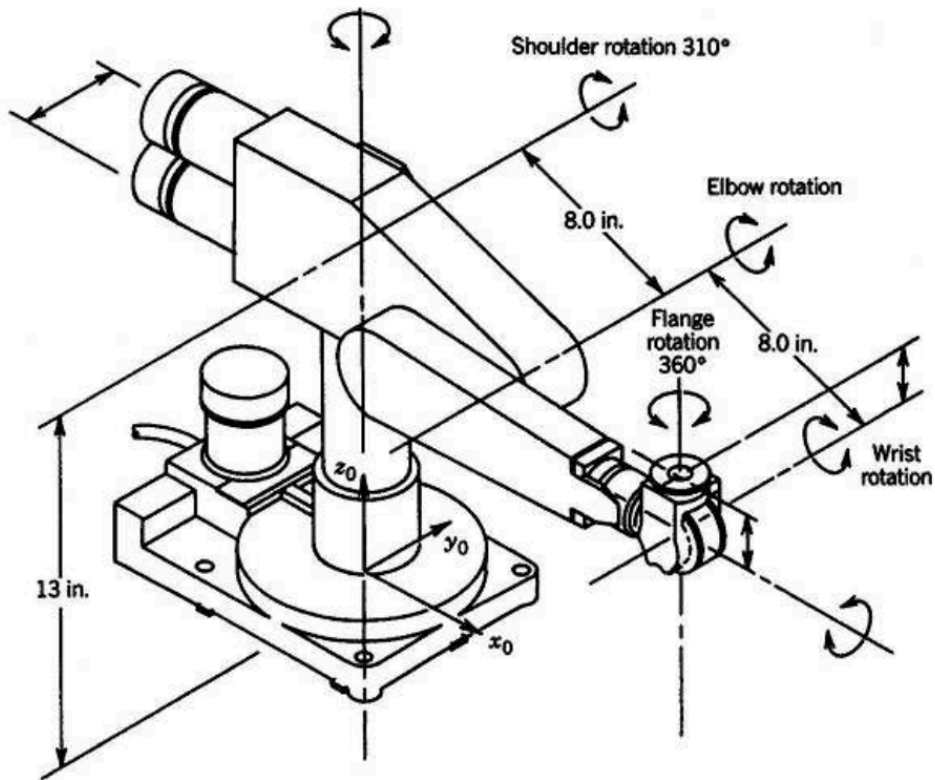
Equipo 6:

- Fierro De La Rosa Abril Evangelina
- Islas Estrada Luis Rafael
- Luna Reyes Rodrigo
- Montero Rasgado Josué Emiliano

### Table of Contents

Robot Puma.....	1
Cinemática Directa.....	2
La representación de Denavit - Hartenberg.....	4
Cinemática Inversa.....	5
7. Robot PUMA 260 con Muñeca Esférica.....	9
a) Coordenadas Deseadas del Centro de la Muñeca.....	9
b) Posición Inversa.....	9
c) Orientación Inversa.....	11

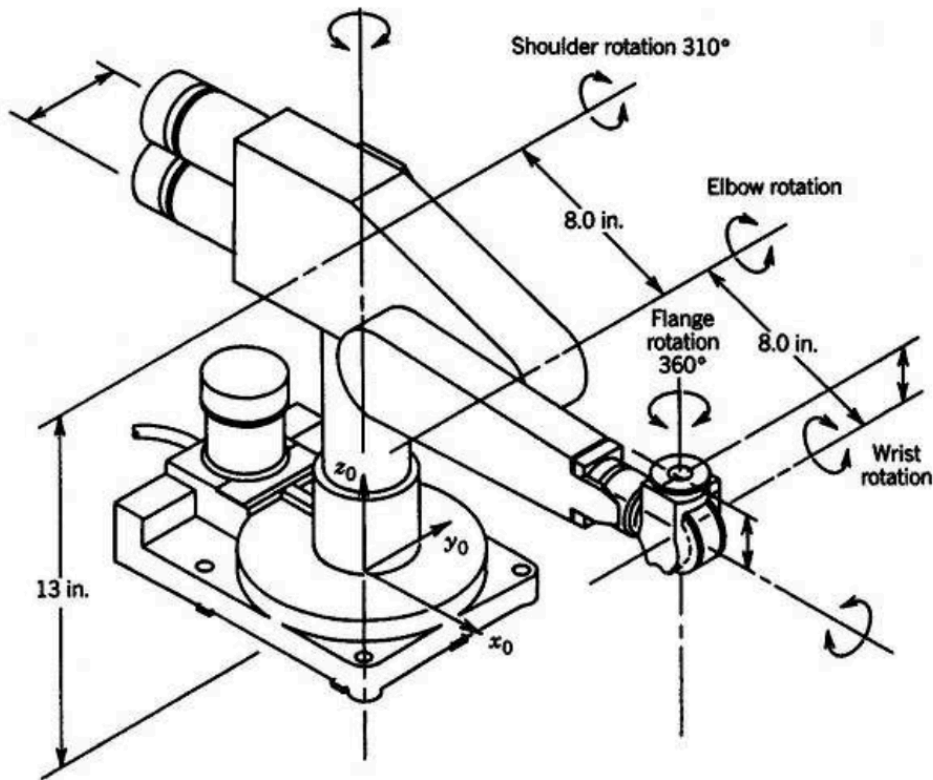
### Robot Puma



h)

Para comenzar con el proyecto final es necesario retomar algunos conceptos, con los cuáles se nos facilitará la comprensión del proyecto que a continuación se presenta.

## Cinemática Directa



h)

El problema de **la cinemática directa** es donde "dadas las variables de las juntas de un robot, determinamos la posición y orientación de nuestro efector final.

En el análisis cinemático, el robot es pensado como un conjunto de cuerpos rígidos conectados entre sí por varias juntas o uniones. El objetivo es determinar el efecto acumulativo del conjunto de variables de las juntas, para esto se presentan de manera sistemática ciertas convenciones, el objetivo de las convenciones es simplificar el análisis, dando lugar a un lenguaje común en el cual los ingenieros pueden comunicarse.

A cada eslabón se le adhiere un marco coordenado, siendo un marco inercial  $s$  la base el cual es el marco  $O$ , después se escogen los marcos del  $1$  al  $n$  en dónde cada marco coordenado esta rígidamente adherido al marco al eslabón  $i$ . Esto significa que sin importar el movimiento del robot las coordenadas de cada punto en el eslabón  $i$  son constantes cuando son expresadas en términos del marco  $i$ .

Suponiendo que  $A_i$  es una transformación homogénea de coordenadas

en un punto del marco  $i$  el marco  $i-1$ , la matriz  $A$  no es constante, varía conforme la configuración del robot cambia. La suposición de que todas las juntas pueden ser una combinación entre juntas prismática o de revoluta donde  $A_i$  es función de sólo una variable de junta ( $q_i$ ):

- $A_i = A(q_i)$

Para denotar la posición del efector final con respecto al marco inercial (Base) se usa un vector  $d_0^n$  de  $3 \times 1$  y una matriz de rotación de  $3 \times 3 R_0^n$ .

- $$H = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde  $H = T_n^0 = A_1(q_1) * * * A(q_n)$  cada transformación homogénea  $A_i$ .

- $$A_i = \begin{bmatrix} R_i^i - 1 & d_i^i - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^j & d_i^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## La representación de Denavit - Hartenberg

Abreviada como la convención **D-H**. Cada transformación homogénea  $A_i$  es representada como un producto de cuatro transformaciones básicas.

$$A_i = Rot_{z,\theta} Trasl_{z,d} Trasl_{x,\alpha} Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde las cuatro cantidades  $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$  son parámetros del eslabón  $i$  y de la junta  $i$ .

- $a_i$ : Longitud (*length*): Distancia entre los ejes  $z_0$  y  $z_1$  y es medida a lo largo del eje  $x_1$ .
- $\alpha_i$ : Giro (*Twist*): Ángulo entre los ejes  $z_0$  y  $z_1$  medido en el plano normal de  $x_1$ , el sentido positivo de  $\alpha$  es determinado de  $z_0$  y  $z_1$  por la regla de la mano derecha.
- $d_i$ : Desplazamiento de Compensación (*Offset*): Distancia entre el origen  $O_0$  y la intersección de los ejes  $x_1$  con  $z_0$  medida a lo largo de  $z_0$ .
- $\theta_i$ : Ángulo (*Angle*): Ángulo entre  $x_0$  y  $x_1$  medido en el plano normal al eje  $z_0$ .

Un movimiento rígido es caracterizado por 6 cantidades (3 de posición y 3 de orientación), estas cantidades pueden ser sintetizadas para describir el movimiento rígido mediante una transformación homogénea. Gracias a la convención de Denavit-Hartenberg se puede obtener una transformación homogénea con sólo tres parámetros.

Dado un sistema  $O_i$  y un sistema  $O_0$  donde  $O_i$  se obtuvo mediante una transformación homogénea arbitraria y sean  $a, \alpha, d$  y  $\theta$  los parámetros; de la convención Denavit-Hartenberg es:

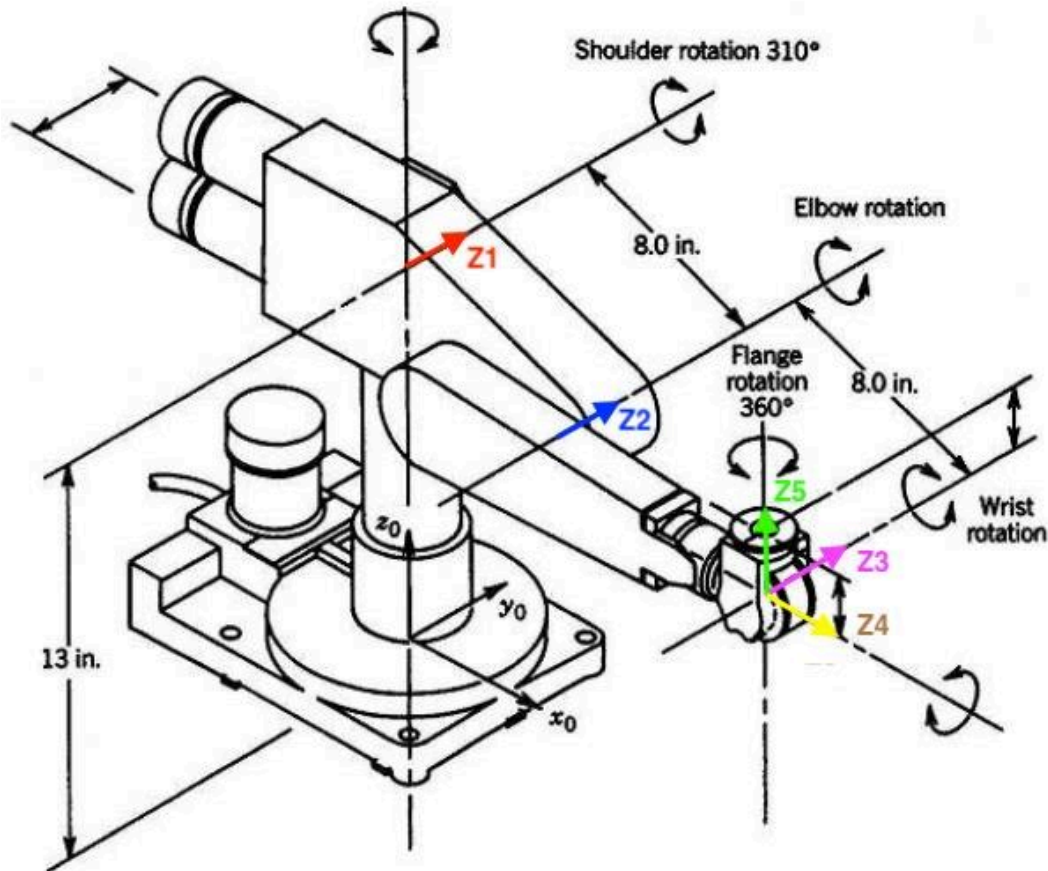
- (DH1) el eje  $x_1$  es perpendicular al eje  $z_0$ .
- (DH2) el eje  $x_1$  intersecta al eje  $z_0$ .

Cuando existen estas condiciones, decimos que existen unos únicos números  $\theta, d, a$  y  $\alpha$  tal que **A** se cumple, pudiendo quedar una matriz **A** como:

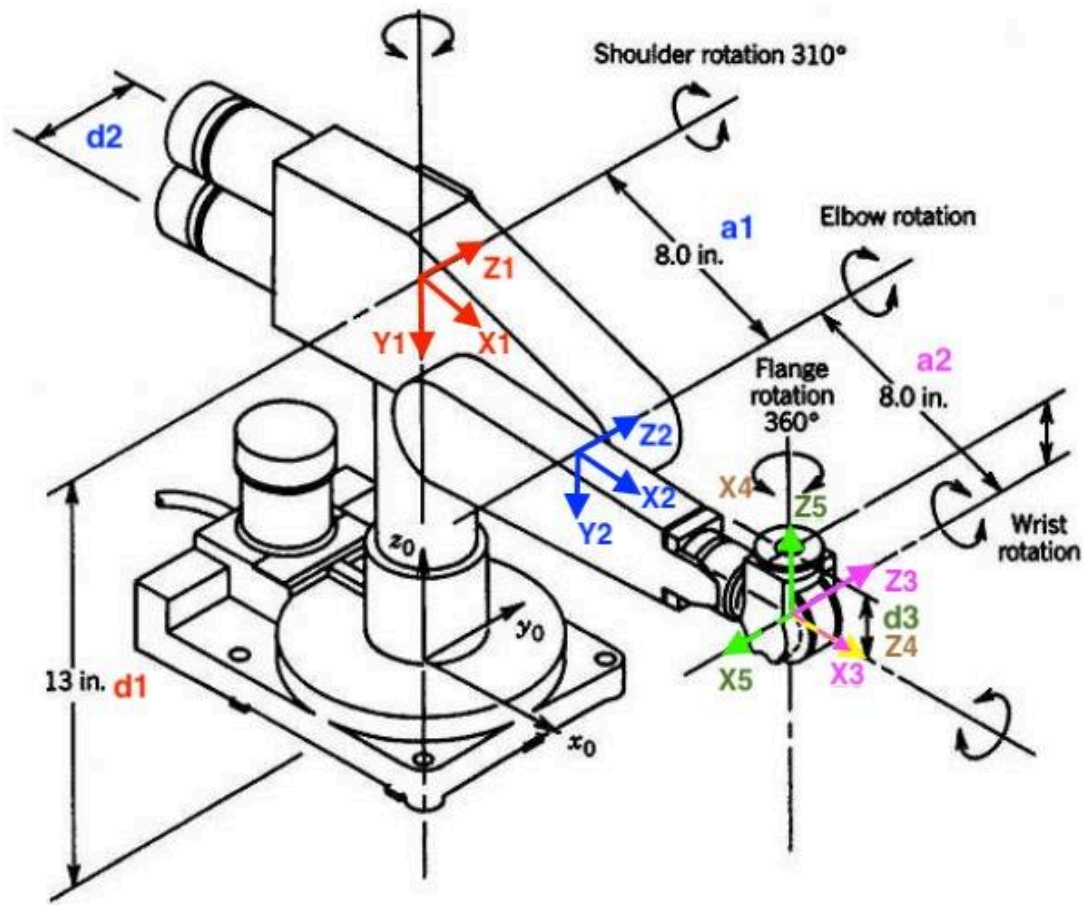
- $$A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Cinemática Inversa

- **Paso 1:** Se asignan los ejes  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  como los ejes de rotación de  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ .



- **Paso 2:** Para el origen  $O_0$ , se usa la referencia brindada por el diagrama.
- **Pasos 3-5:** Dado que  $z_1$  es perpendicular a  $z_0$ , el marco  $O_1$  se coloca en el punto de intersección entre ambos ejes. Para  $O_2$  se usa como referencia la distancia física entre los ejes de giro  $z_1$  y  $z_2$ , además de considerar que, dada la anchura de los eslabones, existe una distancia  $d_1$  que separa a ambos marcos en dirección de sus ejes  $z$ .
- **Paso 6:** Finalmente, dado que los ejes  $z_3, z_4, z_5$ , son perpendiculares entre sí y se intersectan en el mismo punto se decide colocar un mismo origen  $O$  para las tres juntas (sin olvidar las distancias que existen entre las juntas en el diagrama).



De esta forma, la tabla de parámetros de Denavit - Hartenberg queda de la siguiente forma:

Eslabón	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	d1	q1
2	a1	0	d2	q2
3	a2	0	0	q3
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$q4 - \frac{\pi}{2}$
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$q5 + \frac{\pi}{2}$
6	0	0	d3	q6

```
clc; clear; close all;
syms a1 a2 d1 d2 d3 d4 a alpha d theta q1 q2 q3 q4 q5 q6
```

```
A(a, alpha, d, theta) = [cos(theta) -sin(theta)*cos(alpha) sin(theta)*sin(alpha) a*cos(theta);
sin(theta) cos(theta)*cos(alpha) -cos(theta)*sin(alpha) a*sin(theta);
0 sin(alpha) cos(alpha) d;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(a, \alpha, d, \theta) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\cos(\alpha) \sin(\theta) & \sin(\alpha) \sin(\theta) & a \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\alpha) \cos(\theta) & -\sin(\alpha) \cos(\theta) & a \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que las matrices de transformación quedan así:

$$A1 = A(\theta, -\pi/2, d1, q1)$$

$$A1 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 = A(a1, \theta, d2, q2)$$

$$A2 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & a_1 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & a_1 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A3 = A(a2, \theta, \theta, q3)$$

$$A3 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & a_2 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & a_2 \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A4 = A(\theta, -\pi/2, \theta, q4-\pi/2)$$

$$A4 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A5 = A(\theta, \pi/2, \theta, q5+\pi/2)$$

$$A5 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(q_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(q_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(q_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\cos\left(q_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A6 = A(\theta, \theta, d3, q6)$$

$$A6 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando estas matrices obtenemos la matriz de transformación del robot completo  $T_6^0$ .

$$\begin{aligned} T06 &= A1*A2*A3*simplify(A4)*simplify(A5)*A6; \\ R06 &= simplify(T06(1:3,1:3),10) \end{aligned}$$

$$R06 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_6) \sigma_2 + \sigma_1 \cos(q_1) \sin(q_6) & \sigma_1 \cos(q_1) \cos(q_6) - \sin(q_6) \sigma_2 & \sin(q_1) \sin(q_5) + \sigma_4 \cos(q_1) \cos(q_5) \\ \sigma_1 \sin(q_1) \sin(q_6) - \cos(q_6) \sigma_3 & \sin(q_6) \sigma_3 + \sigma_1 \cos(q_6) \sin(q_1) & \sigma_4 \cos(q_5) \sin(q_1) - \cos(q_1) \sin(q_5) \\ -\sigma_4 \sin(q_6) - \sigma_1 \cos(q_6) \sin(q_5) & \sigma_1 \sin(q_5) \sin(q_6) - \sigma_4 \cos(q_6) & \sigma_1 \cos(q_5) \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \cos(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$\sigma_2 = \cos(q_5) \sin(q_1) - \sigma_4 \cos(q_1) \sin(q_5)$$

$$\sigma_3 = \cos(q_1) \cos(q_5) + \sigma_4 \sin(q_1) \sin(q_5)$$

$$\sigma_4 = \sin(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$D06 = simplify(T06(1:3,4),10)$$

$$D06 =$$

$$\begin{pmatrix} d_3 (\sin(q_1) \sin(q_5) + \sigma_1 \cos(q_1) \cos(q_5)) - d_2 \sin(q_1) + a_1 \cos(q_1) \cos(q_2) + a_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - \\ d_2 \cos(q_1) + a_1 \cos(q_2) \sin(q_1) - d_3 \cos(q_1) \sin(q_5) + a_2 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \\ d_1 - a_2 \sin(q_2 + q_3) - a_1 \sin(q_2) + d_3 \cos(q_2 + q_3 + q_4) \cos(q_5) \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sin(q_2 + q_3 + q_4)$$



## 7. Robot PUMA 260 con Muñeca Esférica

### a) Coordenadas Deseadas del Centro de la Muñeca

Dado que los orígenes  $o_{x_4y_4z_4}$  y  $o_{x_5y_5z_5}$  coinciden con  $o_c$ , entonces se tiene que:

$$O = O_c + d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$

Donde  $d_6$  es la distancia entre la herramienta ( $o_6$ ) y  $o_c$  medida sobre  $z_5$

### b) Posición Inversa

Tomando las primeras 3 transformaciones del problema 1h:

```
clc; clear; close all;
syms theta_1 theta_2 theta_3 a_1 d_1 a_2 d_2
A = @(a, d, al, th) trotx(th)*transl([0, 0, d])*transl([a, 0, 0])*trotx(al);
A03 = simplify(A(0, d_1, pi/2, theta_1)*A(a_1, d_2, 0, theta_2)*A(a_2, 0, 0, theta_3))
```

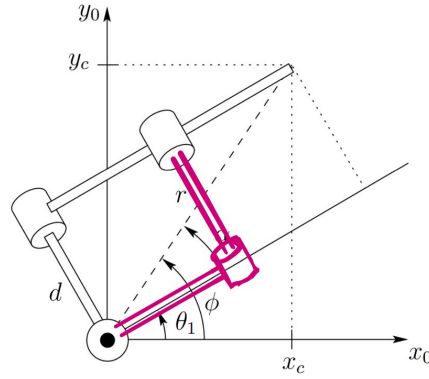
A03 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & d_2 \sin(\theta_1) + a_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + a_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & a_1 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) - d_2 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & d_1 + a_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_1 \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pueden obtener la cinemática inversa resolviendo para  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, resulta muy complicado resolver este sistema de ecuaciones, por lo que un enfoque geométrico es más práctico.



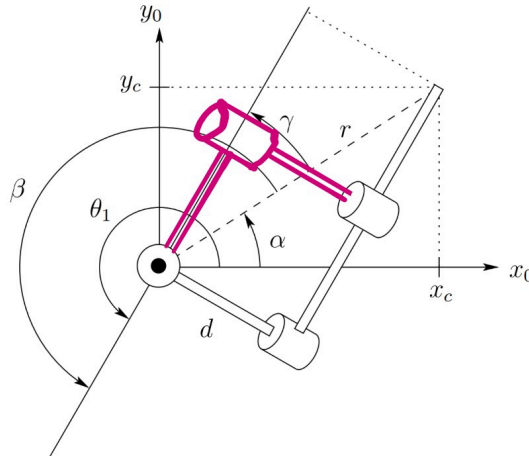
En realidad, el robot PUMA que se incluye en este ejercicio tiene dos codos. Sin embargo, como se ve geoméricamente, los resultados son los mismos, podría considerarse que el codo está entre la segunda y la tercera junta o que se encuentran ambos codos y sólo importaría conocer la longitud total que suman ambos codos.

Cuando se proyecta sobre el plano  $x_0 - y_0$  se obtiene lo siguiente:

$$\theta_1 = \phi - \alpha = \text{atan2}(x_c, y_c) - \text{atan2}(\sqrt{r^2 - d_2^2}, d_2) = \text{atan2}(x_c, y_c) - \text{atan2}(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2}, d_2)$$

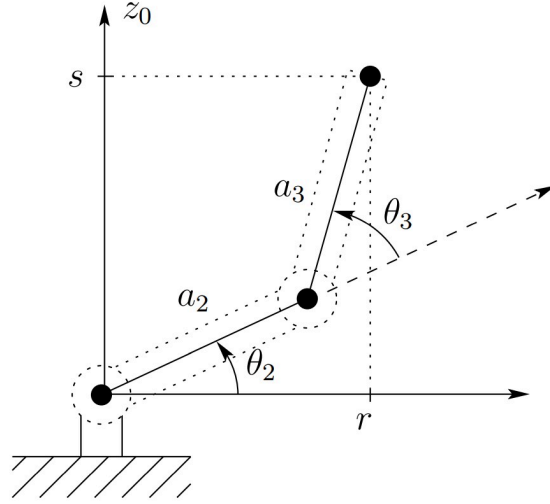
Con  $x_c = o_x - d_6 r_{13}$ ,  $y_c = o_y - d_6 r_{23}$  y  $d_2$  es la longitud que suman ambos codos.

No obstante, la siguiente también es una solución:



$$\theta_1 = \beta + \alpha = \pi + \gamma + \alpha = \pi + \text{atan2}(x_c, y_c) + \text{atan2}(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2}, d_2) = \text{atan2}(x_c, y_c) + \text{atan2}(-\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2}, -d_2)$$

Proyectando sobre el plano formado por las juntas 2 y 3



Usando la ley de cosenos:

$$a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos(\pi - \theta_3) = s^2 + r^2$$

$$a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3\cos(\theta_3) = (z_c - d_1)^2 + x_c^2 + y_c^2 - d_2^2$$

Entonces

$$c_3 = \cos(\theta_3) = \frac{(z_c - d_1)^2 + x_c^2 + y_c^2 - d_2^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

Por lo tanto,

$$\theta_3 = \text{atan2}(c_3, \pm \sqrt{1 - c_3^2})$$

Con  $z_c = o_z - d_6r_{33}$  y  $d_1$  la distancia entre la junta 1 y el suelo medido sobre  $z_0$ .

Por último,

$$\theta_2 = \text{atan2}(r, s) - \text{atan2}(a_2 + a_3\cos(\theta_3), a_3\sin(\theta_3)) = \text{atan2}(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2}, z_c - d_1) - \text{atan2}(a_2 + a_3\cos(\theta_3), a_3\sin(\theta_3))$$

En total se tienen dos pares de soluciones de  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , y 2 soluciones independientes de  $\theta_1$ . Entonces, el problema de cinemática inversa de la posición de  $o_c$  del manipulador PUMA tiene 4 soluciones diferentes.

### c) Orientación Inversa

Para resolver el problema de cinemática inversa de orientación partimos de que conocemos la orientación  $R$  de la muñeca esférica y que ya se han determinado 3 de las 6 variables que tiene un manipulador PUMA con muñeca esférica. Entonces:

$$R = R_3^0 R_6^3$$

Donde  $R_3^0$  se determina evaluando  $A_1A_2A_3$  con  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

$$R03=A03(1:3, 1:3)$$

$$R03 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_6^3 = (R_3^0)^T R =$$

```
syms r11 r12 r13 r21 r22 r23 r31 r32 r33
R36= simplify(R03.'*[r11, r12, r13; r21, r22, r23; r31, r32, r33])
```

$$R36 =$$

$$\begin{pmatrix} r_{31} \sin(\theta_2 + \theta_3) + r_{11} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) + r_{21} \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & r_{32} \sin(\theta_2 + \theta_3) + r_{12} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) + r_{22} \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & r_{33} \sin(\theta_2 + \theta_3) + r_{13} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) + r_{23} \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) \\ r_{31} \cos(\theta_2 + \theta_3) - r_{11} \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) - r_{21} \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & r_{32} \cos(\theta_2 + \theta_3) - r_{12} \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) - r_{22} \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & r_{33} \cos(\theta_2 + \theta_3) - r_{13} \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) - r_{23} \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) \\ r_{11} \sin(\theta_1) - r_{21} \cos(\theta_1) & r_{12} \sin(\theta_1) - r_{22} \cos(\theta_1) & r_{13} \sin(\theta_1) - r_{23} \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

Y la matriz de ángulos de euler está dada:

```
syms theta_4 theta_5 theta_6
H = trotz(theta_4)*troty(theta_5)*trotz(theta_6);
Eu = H(1:3, 1:3)
```

$$Eu =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) \sin(\theta_4) - \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) & \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) \\ \cos(\theta_4) \sin(\theta_6) + \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) \cos(\theta_6) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_4) \sin(\theta_6) & \sin(\theta_4) \sin(\theta_5) \\ -\cos(\theta_6) \sin(\theta_5) & \sin(\theta_5) \sin(\theta_6) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix}$$

Ambas matrices representan la misma rotación, entonces es posible determinar los ángulos  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  para los siguientes casos:

1. Si  $(R_6^3)_{13}$  y  $(R_6^3)_{23}$  son distintos de cero, entonces  $\sin(\theta_5) \neq 0$  y los ángulos pueden determinarse de la siguiente forma:

$$c_5 = \cos(\theta_5) = r_{13} \sin(\theta_1) - r_{23} \cos(\theta_1)$$

Por lo tanto:

$$\theta_5 = \text{atan2}(c_5, \pm \sqrt{1 - c_5^2}) = \text{atan2}(r_{13} \sin(\theta_1) - r_{23} \cos(\theta_1), \pm \sqrt{1 - (r_{13} \sin(\theta_1) - r_{23} \cos(\theta_1))^2})$$

a). Si se toma la solución donde  $\pm$  es  $+$ , se tiene que  $\sin(\theta_5) > 0$  y:

$$\theta_4 = \text{atan2}(\cos(\theta_4) \sin(\theta_5), \sin(\theta_4) \sin(\theta_5)) = \text{atan2}(r_{33} s_{23} + r_{13} c_{23} c_1 + r_{23} c_{23} s_1, r_{33} c_{23} - r_{13} s_{23} c_1 - r_{23} s_{23} s_1)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(\cos(\theta_6) \sin(\theta_5), \sin(\theta_6) \sin(\theta_5)) = \text{atan2}(r_{21} c_1 - r_{11} s_1, r_{12} s_1 - r_{22} c_1)$$

b). Si se toma la solución donde  $\pm$  es  $-$ , se tiene que  $\sin(\theta_5) < 0$ . Por lo tanto:

$$\theta_4 = \text{atan2}(-\cos(\theta_4)\sin(\theta_5), -\sin(\theta_4)\sin(\theta_5)) = \text{atan2}(-r_{33}s_{23} - r_{13}c_{23}c_1 - r_{23}c_{23}s_1, -r_{33}c_{23} + r_{13}s_{23}c_1 + r_{23}s_{23}s_1)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-\cos(\theta_6)\sin(\theta_5), -\sin(\theta_6)\sin(\theta_5)) = \text{atan2}(r_{11}s_1 - r_{21}c_1, r_{22}c_1 - r_{12}s_1)$$

2. Si  $(R_6^3)_{13}$  y  $(R_6^3)_{23}$  son iguales a cero, entonces  $\sin(\theta_5) = 0$ . Como  $R_6^3$  es ortogonal, entonces  $\cos(\theta_5) = \pm 1$ . En este caso no se pueden obtener soluciones para los 3 ángulos. Se parte de que se tienen dos soluciones para  $\theta_5$ :

- Si  $(R_6^3)_{33} = r_{13}\sin(\theta_1) - r_{23}\cos(\theta_1) = 1$ , entonces  $\theta_5 = 0$

En este caso  $(R_6^3)_{11} = \cos(\theta_4 + \theta_6)$  y  $(R_6^3)_{21} = \sin(\theta_4 + \theta_6)$ , por lo tanto:

$$\theta_4 + \theta_6 = \text{atan2}\left((R_6^3)_{11}, (R_6^3)_{21}\right) = \text{atan2}(r_{31}s_{23} + r_{11}c_{23}c_1 + r_{21}c_{23}s_1, r_{31}c_{23} - r_{11}s_{23}c_1 - r_{21}s_{23}s_1)$$

- Si  $(R_6^3)_{33} = r_{13}\sin(\theta_1) - r_{23}\cos(\theta_1) = -1$ , entonces  $\theta_5 = \pi$

Para este caso,  $(R_6^3)_{11} = -\cos(\theta_4 - \theta_6)$  y  $(R_6^3)_{21} = \sin(\theta_4 - \theta_6)$ . Por lo tanto:

$$\theta_4 - \theta_6 = \text{atan2}\left(-(R_6^3)_{11}, (R_6^3)_{21}\right) = \text{atan2}(-r_{31}s_{23} - r_{11}c_{23}c_1 - r_{21}c_{23}s_1, r_{31}c_{23} - r_{11}s_{23}c_1 - r_{21}s_{23}s_1)$$

## Concluyendo

Existen 4 soluciones distintas de la terna  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Conociendo la posición de la herramienta y su orientación, y por la forma del robot, se sabe que estas 4 soluciones son independientes de  $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$  la cual tiene dos soluciones diferentes mientras no haya una singularidad ( $\sin(\theta_5) = 0$ ). Entonces, cuando no hay singularidades, existen 8 soluciones diferentes. Por otro lado, cuando hay una singularidad, la cantidad de soluciones para  $\theta_4$  y  $\theta_6$  es infinita. En este caso se recomienda tomar un valor arbitrario de  $\theta_4$  y después calcular  $\theta_6$ .

# Planeación de trayectorias

M. en C. Armando Fabián Lugo Peñaloza  
alugop@ipn.mx

M. en C. Renato Osvaldo Salmerón García  
renato.salmeron@itesm.mx

Dr. Rafael Martínez Martínez  
ramartinezr@itesm.mx

## Generación de de trayectorias

### Trayectoria: (trajectory)

Una trayectoria entre  $q_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $q_f \in \mathbb{R}^n$  es una función  $q : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$q_0 = q(t_0), \quad q_f = q(t_f) \quad (1)$$

#### Observaciones:

- $t_f - t_0$  representa el tiempo en que tarda en ejecutarse la trayectoria

### Recorrido: (path)

Un recorrido entre  $q_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $q_f \in \mathbb{R}^n$  es una función  $\tau : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$q_0 = \tau(0), \quad q_f = \tau(1) \quad (2)$$

#### Observaciones:

- Un recorrido es una caso particular de una trayectoria en donde la duración es de una unidad de tiempo.
- Típicamente no se da el recorrido  $\tau$ , solo se da una secuencia de puntos a lo largo de la trayectoria, i. e.,  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_f$  (**puntos guía**)
- "Peor aún" no se dan puntos guía en términos de valores de  $q$ . Se da una secuencia en términos de la posición del efector final. Es aquí donde la **Cinemática Inversa** convierte estos puntos en la secuencia de valores de  $q$
- Para especificar las trayectorias en términos del efector final en aplicaciones utilizan un modo **teach and playback**. Así evitan el delicado calculo de la cinemática inversa.

Se analizará el caso de planear una trayectoria entre dos puntos con funciones polinomiales restringidas a  $n$  condiciones. Podemos extender este método a  $n$  puntos.

# Trayectoria entre dos puntos

Supongamos que tenemos las siguientes restricciones de posición, velocidad y aceleración de la trayectoria

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0, & q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(t_0) &= v_0, & \dot{q}(t_f) &= v_f \\ \ddot{q}(t_0) &= \alpha_0, & \ddot{q}(t_f) &= v_f \end{aligned} \quad (3)$$

**Interpolación con un polinomio de grado 3.** Se quiere encontrar los coeficientes de un polinomio para  $t \in [t_0, t_f]$  posible).

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$Ma = b$$

donde

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ q_f \\ v_f \end{bmatrix}$$

**Interpolación con un polinomio de grado 5.** Se quiere encontrar los coeficientes de un polinomio para  $t \in [t_0, t_f]$ , de tal manera que se puedan cumplir las restricciones mencionadas (si es posible).

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$Ma = b$$

donde

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \\ q_f \\ v_f \\ \alpha_f \end{bmatrix}$$

La solución de este problema será entonces

$$a = M^{-1}b$$

Segmentos lineales combinados con segmentos parabólicos.

$$t \in [0, t_f]$$

$$q(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 & 0 \leq t \leq t_b \\ b_0 + b_1 t & t_b < t \leq t_f - t_b \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 & t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases}$$

con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0, & q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(0) &= 0, & \dot{q}(t_f) &= 0 \\ q(t_f/2) &= \frac{q_0 + q_f}{2} \\ \dot{q}(t) &= V & t_b < t \leq t_f - t_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_f - q_0}{t_f} &< V \leq \frac{2(q_f - q_0)}{t_f} \\ t_b &= \frac{q_0 - q_f + V t_f}{t_f} \end{aligned}$$

La solución de este problema será entonces

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{V}{2t_b} t^2 & 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{q_f + q_0 - V t_f}{2} + V t & t_b < t \leq t_f - t_b \\ q_f - \frac{V t_f^2}{2t_b} + \frac{V t_f}{t_b} t - \frac{V}{2t_b} t^2 & t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases}$$



# Control cinemático

## Planeación de trayectoria

de

Se considera una configuración específica, tanto inicial como final del robot. El problema es encontrar un camino libre de colisiones para que el robot pase del punto inicial al punto final especificados.

### Características

- Es un problema computacional complejo
- El problema crece exponencialmente dependiendo del número de grados de libertad
- Se presenta el problema como un algoritmo de búsqueda.
- Los algoritmos presentados son aplicables a varias configuraciones prácticas, pero no en general. La ventaja principal es que son *fáciles* de implementar.

Sea  $q \in \mathbb{R}^n$  una configuración del robot, así podemos definir a  $\mathcal{Q}$  como el espacio de todas las posibles configuraciones.

Denotemos a  $\mathcal{A}(q)$  como el espacio que ocupa el robot en el espacio de trabajo. Con lo anterior la notación  $\mathcal{A}(q)$  representa el espacio de trabajo ocupado por el robot en la configuración  $q$ .

Denotemos como  $\mathcal{O}$  a un obstáculo presente en el espacio de trabajo y con  $\mathcal{O}$  al conjunto de todos los obstáculos en el espacio de trabajo.

Una colisión es cuando el robot entra en contacto con un obstáculo. Se puede definir al conjunto de colisiones como:

$$\mathcal{QO} = \{q \in \mathcal{Q} \mid \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$$

Entonces lo que se requiere es que el robot adopte configuraciones en  $\mathcal{Q}_L = \mathcal{Q} - \mathcal{QO}$

## Planeación de Recorrido

de

Dados  $q_0, q_f \in \mathcal{Q}_L$  encontrar una función continua

$$\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{Q}_L$$

tal que  $\tau(0) = q_0$  y  $\tau(1) = q_f$

### Ideas

- Encontrar puntos en  $\mathcal{Q}_L$  que vayan de  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_f$  (la parte especializada)
  - Campos potenciales artificiales: Se concibe a las uniones de los robots como partículas, que son atraídas a la configuración  $q_f$  y repelidas por los obstáculos  $\mathcal{O}_i$ .
  - Mapas con métodos probabilísticos (PRM): Seleccionamos puntos que no pertenezcan al conjunto de obstáculos, se conectan con el punto más cercano mediante segmentos de línea recta de tal forma que no pasasen por obstáculos, trazamos caminos de principio a fin. De todos los caminos elegimos uno con algún criterio.
- Encontrar una interpolación entre los puntos para generar movimientos continuos (la parte matemáticamente *sencilla*)