Planeación de trayectorias

M. en C. Armando Fabián Lugo Peñaloza M. en C. Renato Osvaldo Salmerón García Dr. Rafael Martínez Martínez
alugop@ipn.mx renato.salmeron@itesm.mx ramartinezr@itesm.mx

Generación de de trayectorias

Trayectoria: (trajectory)

Una trayectoria entre $q_0 \in \mathbb{R}^n$ y $q_f \in \mathbb{R}^n$ es una función $q : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$q_0 = q(t_0), \quad q_f = q(t_f) \tag{1}$$

Observaciones:

- $t_f - t_0$ representa el tiempo en que tarda en ejecutarse la trayectoria

Recorrido: (path)

Un recorrido entre $q_0 \in \mathbb{R}^n$ y $q_f \in \mathbb{R}^n$ es una función $\tau : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$q_0 = \tau(0), \quad q_f = \tau(1) \tag{2}$$

Observaciones:

- Un recorrido es una caso particular de una trayectoria en donde la duración es de una unidad de tiempo.
- Típicamente no se da el recorrido τ, solo se da una secuencia de puntos a lo lardo de la trayectoria, i. e., $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_f$ (**puntos guía**)
- "Peor aún" no se dan puntos guía en términos de valores de q. Se da una secuencia en términos de la posición del efector final. Es aquí donde la **Cinemática Inversa** convierte estos puntos en la secuencia de valores de q
- Para especificar las trayectorias en términos del efector final en aplicaciones utilizan un modo **teach and playback**. Así evitan el delicado calculo de la cinemática inversa.

Se analizará el caso de planear una trayectoria entre dos puntos con funciones polinomiales restringidas a n condiciones. Podemos extender este método a n puntos.

Trayectoria entre dos puntos

Supongamos que tenemos las siguientes restricciones de posición, velocidad y aceleración de la trayectoria

$$\begin{array}{ll} q(t_0) = q_0, & q(t_f) = q_f \\ \dot{q}(t_0) = v_0, & \dot{q}(t_f) = v_f \\ \ddot{q}(t_0) = \alpha_0, & \ddot{q}(t_f) = v_f \end{array} \tag{3}$$

Interpolación con un polinomio de grado 3. Se quiere encontrar los coeficientes de un polinomio para $t \in [t_0, t_f]$, de tal manera que se puedan cumplir las restricciones mencionadas (si es posible).

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$Ma = b$$

donde

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_O^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_O^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ q_f \\ v_f \end{bmatrix}$$

La solución de este problema será entonces

$$a = M^{-1} b$$

Interpolación con un polinomio de grado 5. Se quiere encontrar los coeficientes de un polinomio para $t \in [t_0, t_f]$, de tal manera que se puedan cumplir las restricciones mencionadas (si es posible).

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$Ma = b$$

donde

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_O^3 & t_O^4 & t_O^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_O^2 & 4t_O^3 & 5t_O^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_O & 12t_O^2 & 20t_O^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \\ q_f \\ v_f \\ \alpha_f \end{bmatrix}$$

La solución de este problema será entonces

$$a = M^{-1} b$$

Segmentos lineales combinados con segmentos parabólicos.
Se quiere encontrar los coeficientes del siguiente polinomio en $t \in [0, t_f]$

$$q(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 & 0 \le t \le t_b \\ b_0 + b_1 t & t_b < t \le t_f - t_b \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 & t_f - t_b < t \le t_f \end{cases}$$

con las siguientes condiciones

$$\begin{array}{ll} q(0) = q_0, & q(t_f) = q_f \\ \dot{q}(0) = 0, & \dot{q}(t_f) = 0 \\ q(t_f/2) = \dfrac{q_0 + q_f}{2} & \\ \dot{q}(t) = V \quad\quad t_b < t \le t_f - t_b & \end{array} \tag{4}$$

Para que se puedan cumplir estos requerimientos es necesario que

$$\frac{q_f - q_0}{t_f} < V \le \frac{2(q_f - q_0)}{t_f}$$

$$t_b = \frac{q_0 - q_f + V t_f}{t_f}$$

La solución de este problema será entonces

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \dfrac{V}{2t_b} t^2 & 0 \le t \le t_b \\ \dfrac{q_f + q_0 - V t_f}{2} + V t & t_b < t \le t_f - t_b \\ q_f - \dfrac{V t_f^2}{2t_b} + \dfrac{V t_f}{t_b} t - \dfrac{V}{2t_b} t^2 & t_f - t_b < t \le t_f \end{cases}$$

Control cinematico

Planeación de trayectoria

Se considera una configuración especifica, tanto inicial como final del robot. El problema es encontrar un camino libre de colisiones para que el robot pase del punto inicial al punto final especificados.

Características

- Es un problema computacional complejo
- El problema crece exponencialmente dependiendo del numero de grados de libertad
- Se presenta el problema como un algoritmo de búsqueda.
- Los algoritmos presentados son aplicables a varias configuraciones prácticas, pero no en general. La ventaja principal es que son *fáciles* de implementar.

Sea $q \in \mathbb{R}^n$ una configuración del robot, así podemos definir a $\mathcal{Q}$ como el espacio de todas las posibles configuraciones.

Denotemos a $\mathcal{A}$ como el espacio que ocupa el robot en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$. Con lo anterior la notación $\mathcal{A}(q)$ representa el espacio de trabajo ocupado por el robot en la configuración q.

Denotemos como o a un obstáculo presente en el espacio de trabajo y con $\mathcal{O}$ al conjunto de todos los obstáculos en el espació de trabajo.

Una colisión es cuando el robot entra en contacto con un obstáculo. Se puede definir al conjunto de colisiones como:

$$\mathcal{QO} = \{q \in \mathcal{Q} | \, \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{O} \neq \varnothing\}$$

Entonces lo que se requiere es que el robot adopte configuraciones en $\mathcal{Q}_L = \mathcal{Q} - \mathcal{QO}$

Planeación de Recorrido

Dados q_0, $q_f \in \mathcal{Q}_L$ encontrar una función continua

$$\tau : [0, 1] \to \mathcal{Q}_L$$

tal que $\tau(0) = q_0$ y $\tau(1) = q_f$

Ideas

- Encontrar puntos en $\mathcal{Q}_L$ que vayan de q_0, q_1, $q_2, \ldots, q_f$ (la parte especializada)
  - → Campos potenciales artificiales: Se concibe a las uniones de los robots como partículas, que son atraídas a la configuración q_f y repelidas por los obstáculos o_i.
  - → Mapas con métodos probabilísticos (PRM): Seleccionamos puntos que no pertenezcan al conjunto de obstáculos, se conectan con el punto más cercano mediante segmentos de linea recta de tal forma que no pasasen por obstáculos, trazamos caminos de principio a fin. De todos los caminos elegimos uno con algún criterio.
- Encontrar una interpolación entre los puntos para generar movimientos continuos (la parte matemáticamente *sencilla*)