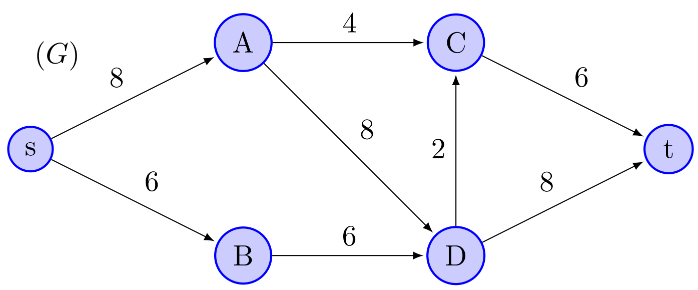
Bài tập chương 5
Dòng chảy

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với thuật giải Ford-Fulkerson và các ứng dụng thực tiễn của nó. Trước khi làm bài tập bên dưới, sinh viên cần ôn lại lý thuyết về đồ thị dòng chảy, và các thuật giải liên quan được trình bày trong chương 5.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.
Hãy tìm dòng chảy tối đa từ s đến t của đồ thị G sau.



Lời giải.

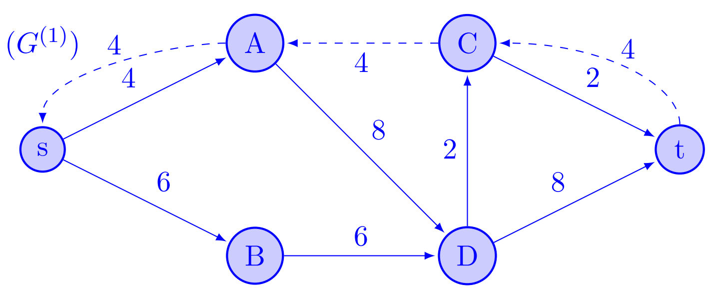
- *Đặt $G^{(0)} = G$. Sau đó, ta xây dựng bảng như sau:*

k	$\pi^{(k)}$	(s,A)	(s,B)	(A,C)	(A,D)	(B,D)	(C,t)	(D,C)	(D,t)	$f(k)$
0										

Theo thuật giải Ford-Fulkerson, ta chọn một đường đi bất kỳ từ s đến t. Tại đây, ta chọn $\pi^{(k)} = (s - A - C - t)$. Dòng chảy trong $G^{(0)}$ lúc này là $f(k) = min(c(s,A), c(A,C), c(C,t)) = \min(8,4,6){=}4$.
Lúc này, chúng ta điền vào trong bảng:

k	$\pi^{(k)}$	(s,A)	(s,B)	(A,C)	(A,D)	(B,D)	(C,t)	(D,C)	(D,t)	$f(k)$
0	(s-A-C-t)	4	-	4	-	-	4	-	-	4

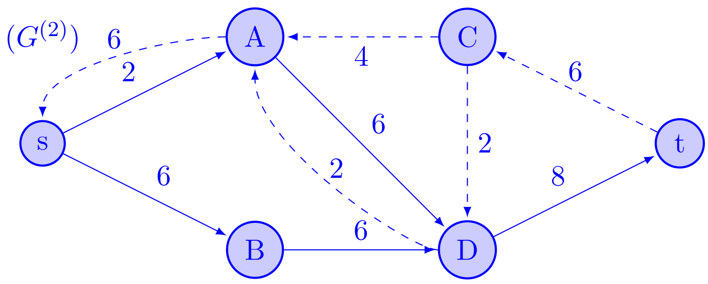
Do đó, ta cần xây dựng đồ thị $G^{(1)}$ như sau (cần lưu ý những cạnh có trọng số bằng 0 thì không cần vẽ):



- *Dựa vào đồ thị* $G^{(1)}$*, tồn tại đường đi từ* s *đến* t*, chẳng hạn như* (s, A, D, C, t)*. Dòng chảy trong* $G^{(1)}$ *sẽ là* $f(k) = min(c(s,A), c(A,D), c(D,C), c(C,t)) = \min(4, 8, 2, 2)$*=2. Lúc này, chúng ta cập nhật vào trong bảng:*

k	$\pi^{(k)}$	(s,A)	(s,B)	(A,C)	(A,D)	(B,D)	(C,t)	(D,C)	(D,t)	$f(k)$
0	*(s-A-C-t)*	*4*	-	*4*	-	-	*4*	-	-	*4*
1	*(s-A-D-C-t)*	*2*	-	-	*2*	-	*2*	*2*	-	*2*

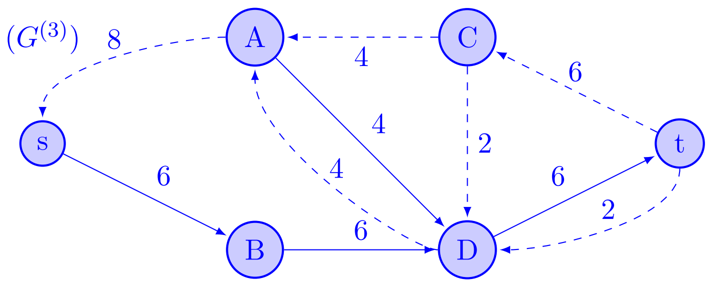
Do đó, ta được đồ thị $G^{(2)}$ *như sau:*



- *Dựa vào đồ thị* $G^{(2)}$*, tồn tại đường đi từ* s *đến* t*, chẳng hạn như* (s, A, D, t)*. Dòng chảy trong* $G^{(2)}$ *sẽ là* $f(k) = min(c(s,A), c(A,D), c(D,t)) = \min(2, 6, 8)$*=2. Lúc này, chúng ta điền vào trong bảng:*

k	$\pi^{(k)}$	(s,A)	(s,B)	(A,C)	(A,D)	(B,D)	(C,t)	(D,C)	(D,t)	$f(k)$
0	*(s-A-C-t)*	*4*	-	*4*	-	-	*4*	-	-	*4*
1	*(s-A-D-C-t)*	*2*	-	-	*2*	-	*2*	*2*	-	*2*
2	*(s-A-D-t)*	*2*	-	-	*2*	-	-	-	*2*	*2*

Tiếp theo, ta cần xây dựng $G^{(3)}$ *như sau:*

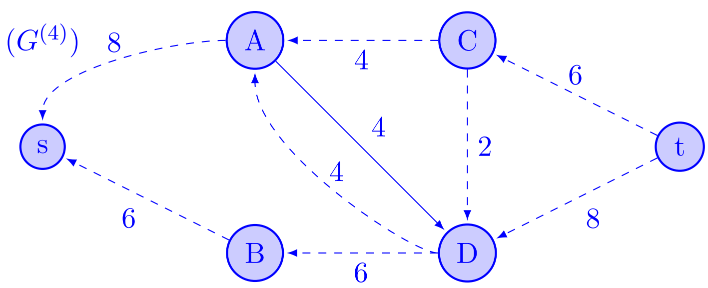


- *Dựa vào đồ thị* $G^{(3)}$*, tồn tại đường đi từ* s *đến* t*, chẳng hạn như* (s, B, D, t)*. Dòng chảy trong* $G^{(3)}$ *sẽ là* $f(k) = min(c(s,B), c(B,D), c(D,t)) = \min(6, 6, 6)$*=6. Lúc này, chúng ta điền vào trong bảng:*

k	$\pi^{(k)}$	(s,A)	(s,B)	(A,C)	(A,D)	(B,D)	(C,t)	(D,C)	(D,t)	$f(k)$
0	*(s-A-C-t)*	*4*	-	*4*	-	-	*4*	-	-	*4*
1	*(s-A-D-C-t)*	*2*	-	-	*2*	-	*2*	*2*	-	*2*
2	*(s-A-D-t)*	*2*	-	-	*2*	-	-	-	*2*	*2*
3	*(s-B-D-t)*	-	*6*	-	-	*6*	-	-	*6*	*6*

Tiếp theo, ta cần xây dựng đồ thị $G^{(4)}$ *như sau:*

- *Tại* $G^{(4)}$*, không tồn tại đường đi từ* s *đến* t*, nên chúng ta dừng giải thuật ở đây.*
Kết quả dòng chảy tối đa và dòng chảy qua từng cung được thể hiện trong bảng dưới đây.



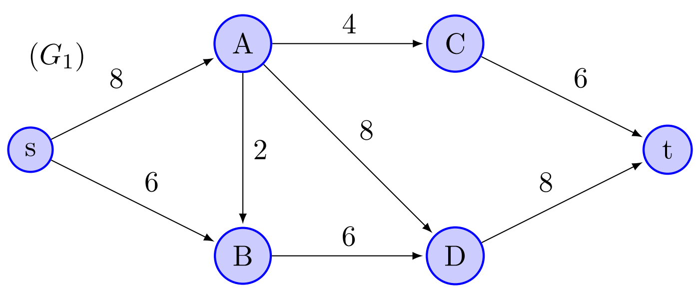
k	$\pi^{(k)}$	(s, A)	(s, B)	(A, C)	(A, D)	(B, D)	(C, t)	(D, C)	(D, t)	$f(k)$
0	*(s-A-C-t)*	*4*	-	*4*	-	-	*4*	-	-	*4*
1	*(s-A-D-C-t)*	*2*	-	-	*2*	-	*2*	*2*	-	*2*
2	*(s-A-D-t)*	*2*	-	-	*2*	-	-	-	*2*	*2*
3	*(s-B-D-t)*	-	*6*	-	-	*6*	-	-	*6*	*6*
	Stop	*8*	*6*	*4*	*4*	*6*	*6*	*2*	*8*	*14*

□

3 Bài tập tự giải

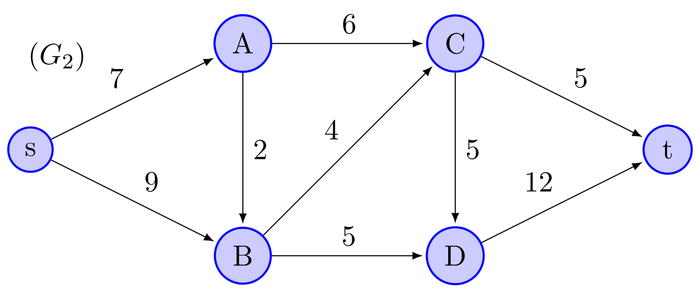
Câu 2.

Hãy tìm dòng chảy tối đa từ s đến t của các đồ thị G_1.



Câu 3.

Hãy tìm dòng chảy tối đa từ s đến t của các đồ thị G_2.

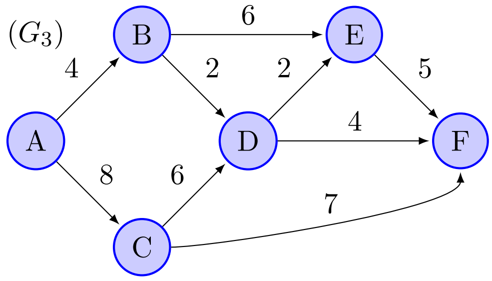


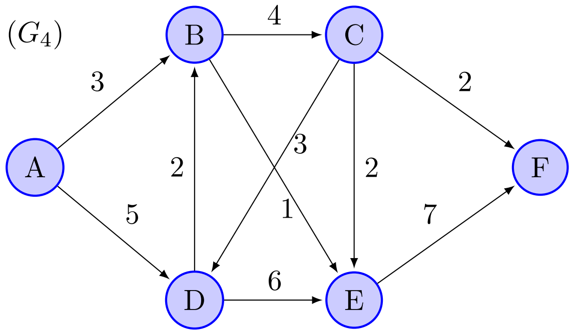
Câu 4.

Hãy vẽ mặt cắt tối thiểu và xác định dòng chảy tối đa từ A đến F của các đồ thị G_3.

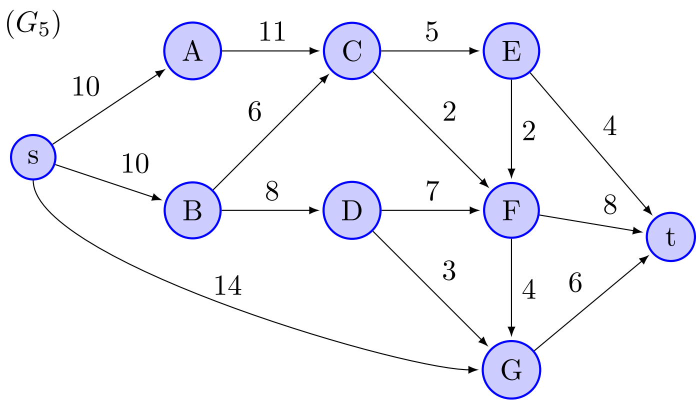
Câu 5.

Hãy vẽ mặt cắt tối thiểu và xác định dòng chảy tối đa từ s đến t của các đồ thị G_4.





Câu 6.
Hãy tìm dòng chảy tối đa từ s đến t của các đồ thị có hướng G_5 sau.



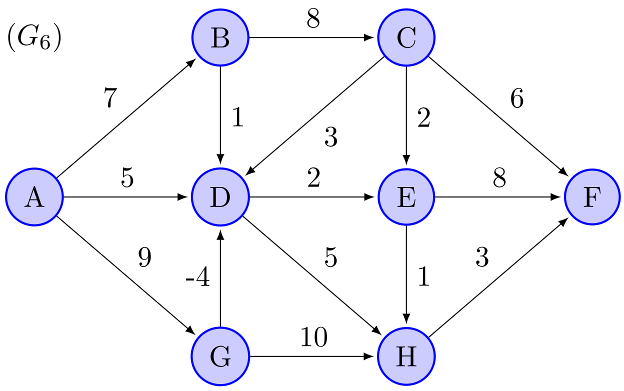
Câu 7.
Hãy mặt cắt tối thiểu và tìm dòng chảy tối đa từ đỉnh A đến đỉnh F của các đồ thị có hướng G_6 sau.

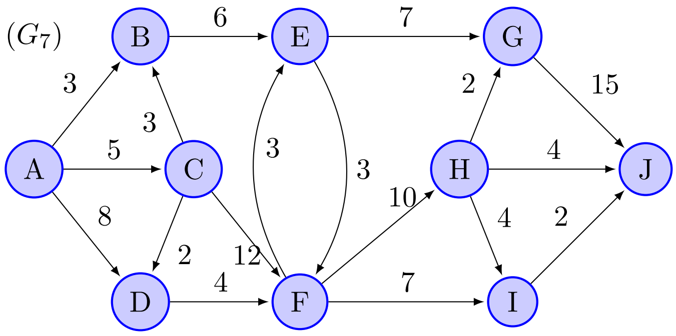
Câu 8.
Hãy mặt cắt tối thiểu và tìm dòng chảy tối đa từ đỉnh A đến đỉnh J của các đồ thị có hướng G_7 sau.

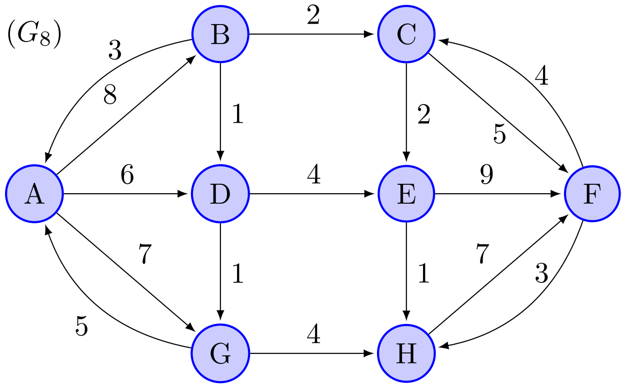
Câu 9.
Hãy mặt cắt tối thiểu và tìm dòng chảy tối đa từ đỉnh A đến đỉnh F của các đồ thị có hướng G_8 sau.

4 Bài tập nâng cao

Câu 10.
Mặt cắt để tính tiết diện dòng chảy một từ đỉnh s đến đỉnh t trong một đồ thị $G = (V, E)$ là mặt cắt phân chia tập các đỉnh V thành hai tập con riêng biệt sao cho hai đỉnh s và t thuộc về hai tập con


(G_6)
A
B
C
D
E
F
G
H
7
8
1
3
2
6
5
2
8
9
-4
5
1
3
10


(G_7)
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
3
6
7
3
5
8
2
12
4
3
3
10
7
2
15
4
4
2


(G_8)
A
B
C
D
E
F
G
H
3
8
2
1
2
4
5
6
4
9
7
1
5
1
7
3
4

khác nhau.
Vậy số mặt cắt có thể có trong một đồ thị có n đỉnh và m cạnh là bao nhiêu?

Câu 11.

Trong ngày lễ hiến máu tình nguyện, có 170 sinh viên Đai Học Bách Khoa đã đăng ký hiến máu tại trung tâm hiến máu. Kết quả kiểm nghiệm và nhu cầu thực tế được mô tả trong bảng sau.

Loại máu	A	B	O	AB
Khả năng đáp ứng	46	34	45	45
Nhu cầu	39	38	42	50

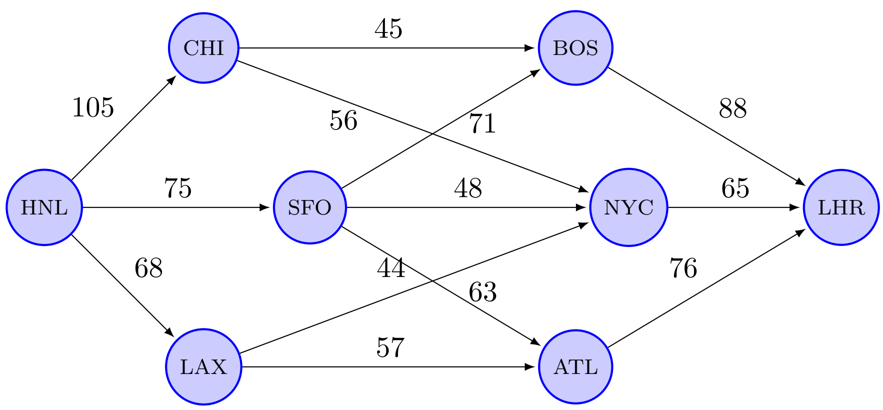
Biết rằng:

- bệnh nhân có máu loại A chỉ được nhận máu các loại A hoặc O;
- bệnh nhân có máu loại B chỉ được nhận máu các loại B hoặc O;
- bệnh nhân có máu loại O chỉ được nhận máu loại O;
- bệnh nhân có máu loại AB có thể nhận bất kỳ loại máu nào.

Hãy giúp trung tâm quản lý máu xác định giải pháp tốt nhất để có thể phục vu cho nhiều bệnh nhân nhất.

Câu 12.

Món dứa tươi đặc biệt được phục vụ ở một nhà hàng ở London:
Để đảm bảo độ tươi, các dứa được mua ở Hawaii và vận chuyển bằng máy bay từ Honolulu đến Heathrow ở London. Sơ đồ mạng sau đây là các tuyến đường khác nhau mà các dứa có thể vận chuyển.



1. Nếu trọng số trong sơ đồ mạng trên diễn đạt khả năng vận chuyển số lượng dứa trong ngày trên từng chuyến đi, vậy nhà hàng phục vụ được tối đa là bao nhiêu mỗi ngày?
2. Nếu trọng số trong sơ đồ mạng trên diễn đạt chi phí/thùng dứa, và mỗi chuyến đi trong ngày tối đa chỉ vận chuyển được 15 thùng dứa. Liệu nhà hàng này có thể đáp ứng được 2000 khách hàng trong một ngày không? Biết rằng với mỗi thùng dứa, nhà hàng có thể phục vụ thức ăn cho 12 khách hàng.

Ghi chú: các mã thông tin trên sơ đồ tương ứng với các mã sân bay của các thành phố tương ứng được trình bày bên dưới:

Mã	Tên thành phố
HNL	Honolulu
CHI	Chicago
BOS	Boston
SFO	Sans Francissco
NYC	New York
LAX	Los Angeles
ATL	Atlanta
LHR	LondonHeathrow

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với việc áp dụng giải thuật Ford-Fulkerson để giải các bài toán dòng chảy. Và các bài tập này cũng đã giúp chúng ta phần nào hiểu thêm về ứng dụng thực tiễn của lý thuyết đồ thị (tham khảo chi tiết trong slide chương 5).