12 變異數與標準差的推估

Part One: 單一母體

12-1. 樣本變異數的抽樣分配

假設自母體隨機且獨立的抽出大小為n的一組隨機樣本$X_1, ..., X_n$，則其樣本變異數為$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$，其中樣本平均數是$\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$。

由於樣本變異數S^2的抽樣分配無法像前兩節一樣，直接推導其特性，必須先轉換統計量變成卡方分配，才能推得樣本變異數S^2是母體變異數σ^2的不偏估計量，即$E(S^2) = \sigma^2$，所以我們可以用統計量S^2來推估σ^2。

因此，我們先瞭解卡方分配的特性。

1. 卡方分配

假設母體為常態分配$N(\mu, \sigma^2)$。從此常態母體中，隨機且獨立的抽出大小為n的一組隨機樣本 $X_1, ..., X_n$，則其樣本變異數為$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$。我們用公式計算統計量$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，則這個統計量可得自由度為$n - 1$的卡方分配，即$\chi^2(n-1) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$。卡方分配是一個右偏的機率分配，期望值為其自由度，且變異數為其自由度的2倍。

- 若X與Y分別是自由度為df_1與df_2的卡方分配，且互為獨立，則$X + Y$為自由度$(df_1 + df_2)$的卡方分配。
- 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，標準化後$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$，則$Z^2 = (\frac{X-\mu}{\sigma})^2$為自由度$df = 1$的卡方分配，亦即$Z^2 = \chi^2(1)$。
  - 1個標準常態分配隨機變數的平方，其機率分配為自由度1的卡方分配。
  - n個標準常態分配隨機變數的平方和，其機率分配為自由度n的卡方分配。

- 統計量$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$可以拆成「n個標準常態隨機變數的平方和」減「1個標準常態的平方」，所以卡方分配的自由度為$n - 1$。

2. 樣本變異數的抽樣分配

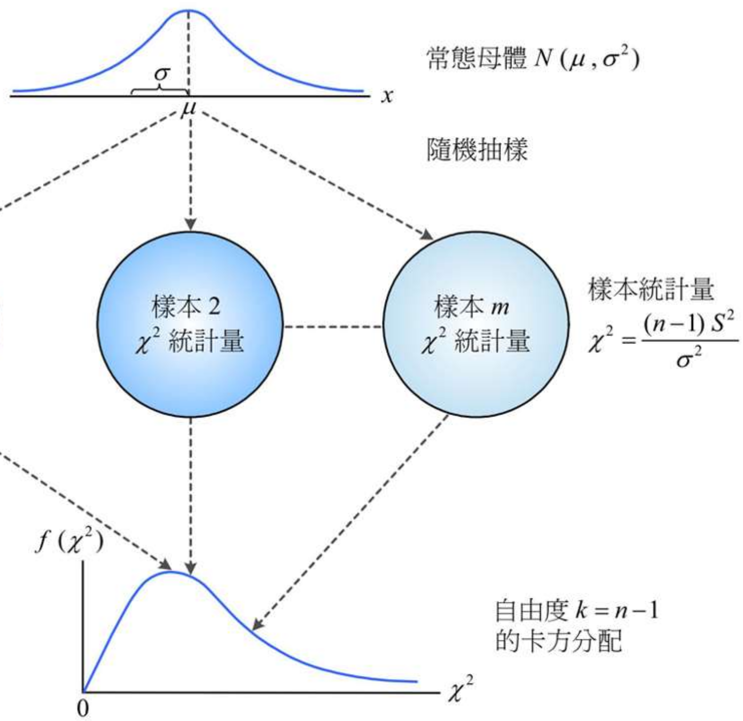


圖 7.2 與樣本變異數有關之抽樣分配

例題 7.13

設由常態分配 $N(4,16)$ 抽出 $n=51$ 的隨機樣本，試求：

(1) 樣本變異數 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 會超過 21.6 之機率。

(2) S^2 小於 9.5072 之機率。

(3) S^2 介於 8.9568 與 25.4368 之間之機率。

解：本題可利用 χ^2 分配 $\chi^2_{(n-1)}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 求解。

(1) $P(S^2>21.6)=P\left[\chi^2>\frac{(51-1)21.6}{16}\right]=P(\chi^2>67.5)$

$=1-P(\chi^2<67.5)=1-0.95=0.05$

(2) $P(S^2<9.5072)=P\left[\chi^2<\frac{(51-1)9.5072}{16}\right]=P(\chi^2<29.71)=0.010$

(3) $P(8.9568<S^2<25.4368)=P\left[\frac{(51-1)8.9568}{16}<\chi^2<\frac{(51-1)25.4368}{16}\right]$

$=P(27.99<\chi^2<79.49)=0.995-0.005$

$=0.990$

END

- **卡方分配的期望值為其自由度，卡方分配的變異數為其2倍自由度。**
- **樣本變異數之抽樣分配的期望值等於母體變異數，即是不偏估計$E(S^2)=\sigma^2$。**

(下面的例題為證明推導，可以省略)

例題 7.14

設 $X_1, \ldots, X_n$ 獨立且相同分配，來自常態母體 $N(\mu, \sigma^2)$，樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，試求：

(1) $E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$ 與 $V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$

(2) $E(S^2)$ 與 $V(S^2)$

解：(1) 其母體為常態母體，由 χ^2 統計量可知

$$\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$\therefore\ E[\chi^2_{(n-1)}] = E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = n-1 \quad (\because \chi^2 \text{ 分配的期望值等於其自由度})$$

$$V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = V[\chi^2_{(n-1)}] = 2(n-1) \quad (\because \chi^2 \text{ 分配的變異數等於其 2 倍自由度})$$

(2) $E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$

$$V(S^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}[2(n-1)] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

END

=> 假設$x_1, \ldots, x_n$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu, \sigma^2$的一組樣本，則$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ 其中S^2為樣本變異數。

例題 7.6

一家大型量販店依據過往研究調查顯示，每小時來店人數為常態分配 $N(55,10^2)$。今派人員蒐集某一週早上 10:00 到晚上 10:00 間每小時的來店人數，得 84 筆資料。試求樣本變異數 S^2 大於 12^2 的機率。

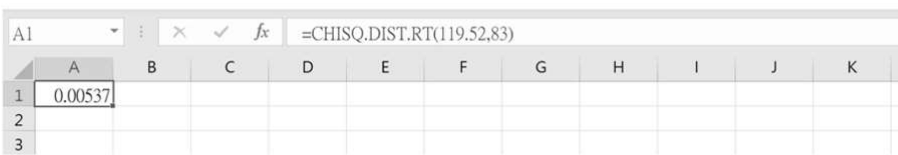
解 母體為大型量販店每小時來店人數，服從常態分配 $N(55,10^2)$。

派人員蒐集某一週早上 10:00 到晚上 10:00 間每小時的來店人數，得樣本資料 84 筆，每小時的來店人數 $X_1,\cdots,X_{84}$ 為獨立且有相同的機率分配 $N(55,10^2)$。

$n-1=84-1=83$。

$$Y=\frac{83S^2}{10^2}\sim\chi^2_{83}$$

$$P(S^2>12^2)=P\left(\frac{83S^2}{10^2}>\frac{83\times12^2}{10^2}\right)=P(Y>119.52)=0.00537$$



Excel 2016 函式：=CHISQ.DIST.RT(119.52,83)

此量販店每小時的來店人數的樣本變異數大於 12^2 的機率大約為 0.005，顯示每小時的來店人數的樣本變異數有非常高的可能性是不大於 12^2。

=>查表有時會查不到，故多用電腦計算。

12-2. 母體變異數的估計

估計母體標準差的方法與變異數相同，僅在公式上取平方根。

12-2-1 單一母體變異數的區間估計

步驟1：選擇點估計量

（確認目標的母體參數，要用什麼樣本統計量進行推論。）

假設母體為常態分配，若自常態母體$N(\mu,\sigma^2)$抽取一組隨機樣本 $X_1,X_2,...,X_n$ ，則可用樣本變異數 $S^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}$推估母體變異數$\sigma^2$，其開根號為樣本標準差$S$。

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

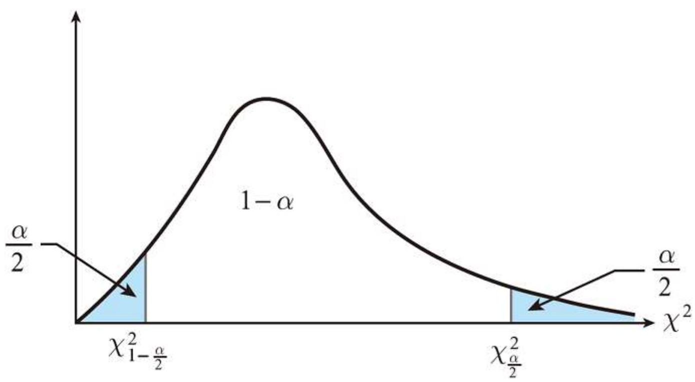
樣本變異數的抽樣分配為卡方分配。

單一母體變異數與標準差的估計和卡方分配(chi-square distribution) 有關。

若一組隨機樣本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 取自常態母體 $N(\mu, \sigma^2)$，則卡方統計量此隨機變數服從自由度為$n-1$的卡方分配，即$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$。

- 平均數: $E(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = (n-1)E(\frac{S^2}{\sigma^2}) = n-1$
- 變異數: $Var(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\frac{2\sigma^4}{n-1} = 2(n-1)$
- 當χ^2_α表示卡方分配，查表時卡方值滿足$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(v))=\alpha$。

步驟3：導出母體參數的信賴區間



$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$為一自由度$v$是$n-1$的卡方分配，利用$\chi^2_{n-1}$分配，可以求得$1-\alpha$機率的信賴區間。

$$1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2}(v) < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(v)) \Rightarrow 1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2}(v) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(v)) \Rightarrow 1-\alpha = P(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(v)}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\alpha/2}(v)}{(n-1)S^2})$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(v)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(v)})$$

步驟4：計算母體參數的信賴區間值並做統計推論

(1)母體變異數σ^2之100(1-α)%信賴區間為$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$，亦即$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}})$。

(2)母體標準差σ之$100(1-\alpha)$ 信賴區間為$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$，亦即$(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}})$
。

上面公式中的$\chi_{\alpha/2}$與$\chi_{1-\alpha/2}$自由度為 $v = n-1$，左右尾面積分別為$\alpha/2$的卡方值。

12-2-2 熟能生巧(一)

假設$X_1, ..., X_n$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu, \sigma^2)$的一組樣本，則$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，其中$S^2$為樣本變異數。

- **母體為常態分配，則單一母體變異數σ^2的$1-\alpha$信賴區間為$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}})$。**

例題 8.6

一家大型量販店的店長想了解每小時來店人數的變異數，依據過往研究調查顯示，每小時來店人數為平均數 55 人的常態分配。今派人員蒐集某兩天早上 10:00 到晚上 10:00 間每小時的來店人數，得 24 筆資料的樣本標準差為 3。由此組樣本資料，試求每小時來店人數的**變異數 σ^2 的 95% 信賴區間**。

解 母體為大型量販店每小時來店人數，服從常態分配 $N(55,\sigma^2)$。

派人員蒐集某兩天早上 10:00 到晚上 10:00 間每小時的來店人數，得樣本資料 24 筆的樣本標準差為 3，即 $n=24$，$s=3$。

$$1-\alpha=95\% \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \Rightarrow \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{24-1,0.025}=\chi^2_{23,0.025}=38.08$$

$$1-\frac{\alpha}{2}=0.975 \Rightarrow \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{24-1,0.975}=\chi^2_{23,0.975}=11.69$$

由此組樣本資料，得每小時來店人數的變異數 σ^2 的 95% 信賴區間：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right)=\left(\frac{(24-1)3^2}{\chi^2_{23,0.025}},\frac{(24-1)3^2}{\chi^2_{23,0.975}}\right)$$
$$=\left(\frac{(24-1)3^2}{38.08},\frac{(24-1)3^2}{11.69}\right)=(5.4359,17.7074)$$

在 95% 的信賴水準下，此組樣本資料所產生之樣本信賴區間 (5.4359，17.7074) 會包含此大型量販店每小時來店人數的變異數。

12-3. 單一母體變異數的檢定

12-3-1 檢定的步驟

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

雙尾檢定：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

左尾檢定：$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

右尾檢定：$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$

步驟2：確定抽樣分配並畫圖。

抽樣分配為卡方分配

自常態母體隨機抽取大小為 n 的樣本，則：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

亦即 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 為自由度 $df=n-1$ 的卡方分配 (χ^2)。

母體分配	檢定統計量	抽樣分配
常態	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}
未知	無	無

步驟3：標出決策法則。

(1)方法一：臨界值法（拒絕域）

	臨界值	拒絕域
(1) 雙尾檢定 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	右端臨界值 $c_1=\frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (9-14) 左端臨界值 $c_2=\frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (9-15)	$S^2\geq c_1$ 或 $S^2\leq c_2$
(2) 左尾檢定 $H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$c=\frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ (9-16)	$S^2\leq c$
(3) 右尾檢定 $H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$	$c=\frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{\alpha}(n-1)$ (9-17)	$S^2\geq c$

(2)方法二：檢定統計量（卡方）

	檢定統計量	決策法則
(1) 雙尾檢定 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (9-18)	若 $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。
(2) 左尾檢定 $H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	若 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。
(3) 右尾檢定 $H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	若 $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。

(3)方法三：信賴區間法

信　賴　區　間

(1)雙尾檢定 $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) \tag{9-19}$$

(2)左尾檢定 $$\left(-\infty, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) \tag{9-20}$$

(3)右尾檢定 $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \infty\right) \tag{9-21}$$

(4)方法四：P值

(1)雙尾檢定：	右端：$\frac{1}{2}P$ 值 $= P(S^2 \geq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \geq \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$，若 $S_0^2 > \sigma_0^2$ 左端：$\frac{1}{2}P$ 值 $= P(S^2 \leq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$，若 $S_0^2 < \sigma_0^2$	(9-22)
(2)左尾檢定：	P 值 $= P(S^2 \leq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$	(9-23)
(3)右尾檢定：	P 值 $= P(S^2 \geq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \geq \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$	(9-24)

步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例題 9.9

甲班國文成績呈常態分配，陳老師宣稱甲班國文成績變異數為 25 分，今隨機抽取甲班學生 20 名，計算其平均數 72 分，標準差 4 分，設顯著水準為 0.02 的情況下，檢定陳老師宣稱是否屬實？

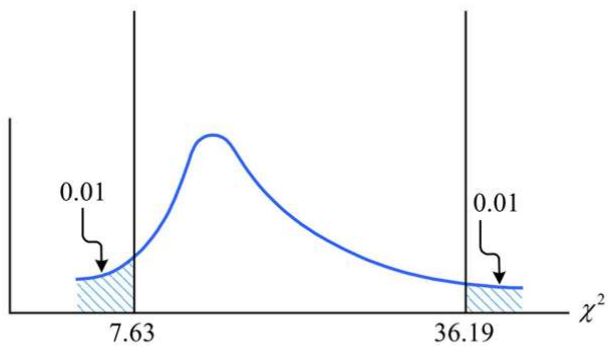
解：(1) 假設：$H_0:\sigma^2=25$ vs. $H_2:\sigma^2\neq 25$（雙尾檢定）

(2) 顯著水準：$\alpha=0.02$

(3) 檢定統計量：計算樣本變異數 $s^2=4^2=16$

$$\chi_0^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(20-1)16}{25}=12.16$$

(4) 拒絕域：$\chi_0^2<\chi^2_{19,0.99}=7.63$ 或 $\chi_0^2>\chi^2_{19,0.01}=36.19$



(5) 判斷：$\chi_0^2=12.16<36.19$，沒有在拒絕域中，不拒絕 H_0，即陳老師宣稱可能是對的。

END

例題 9.10

A 牌原子筆長度規格 $\mu = 10$ 公分，母體變異數 $\sigma^2 = 0.03$。今抽取 $n = 10$ 支進行品質檢驗，其長度分別為

9.8, 10.2, 10.3, 10.4, 9.9, 10.0, 10.2, 10.4, 10.5, 9.9

假設長度為常態分配，試以顯著水準為 0.01 情況下，檢驗 A 牌原子筆長度之變異數是否符合規格？

解：(1) 假設：$H_0: \sigma^2 = 0.03$ vs. $H_1: \sigma^2 \neq 0.03$（雙尾檢定）

(2) 顯著水準：$\alpha = 0.01$

(3) 檢定統計量：計算 $n = 10$，$\bar{x} = \dfrac{101.6}{10} = 10.16$

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 10.16)^2 = 0.06$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.06}{0.03} = 18$$

(4) 拒絕域：$\chi_0^2 < \chi_{9,\,0.995}^2 = 1.73$ 或 $\chi_0^2 > \chi_{9,\,0.005}^2 = 23.59$

(5) 判斷：$\because$ $\chi_0^2 = 18 < 23.59$，沒有在拒絕域，不拒絕 H_0，即 A 牌原子筆長度之變異數符合規格。

END

12-3-2 熟能生巧

=> 手算推薦檢定統計量法

假設檢定	$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ （右尾檢定）	$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ （左尾檢定）	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ （雙尾檢定）
檢定統計量	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
拒絕域	$\{\chi^2 > \chi_{n-1,\,\alpha}^2\}$	$\{\chi^2 < \chi_{n-1,\,1-\alpha}^2\}$	$\{\chi^2 > \chi_{n-1,\,\alpha/2}^2$ 或 $\chi^2 < \chi_{n-1,\,1-\alpha/2}^2\}$

例題 9.6 **(續例題 8.6)**

一家大型量販店的店長想了解每小時來店人數的變異數，依據過往研究調查顯示，每小時來店人數為平均數 55 人的常態分配。今派人員蒐集某兩天早上 10:00 到晚上 10:00 間每小時的來店人數，得 24 筆資料的樣本標準差為 3。由此組樣本資料，試檢定每小時來店人數的變異數 σ^2 是否大於 25？(設顯著水準為 0.05)

解 母體為 $N(55, \sigma^2)$，$n = 24$，$s = 3$。

(1) 假設檢定：

$$H_0: \sigma^2 \le 25$$
$$H_1: \sigma^2 > 25$$

(2) 顯著水準：$\alpha = 0.05$

(3) 檢定統計量：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(24-1)S^2}{25}$$

(4) 拒絕域：

$$\{\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}\} = \{\chi^2 > 35.17\} \quad (\because\ \alpha = 0.05 \Rightarrow \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{23,0.05} = 35.17)$$

(5) 計算檢定統計量的值：

$$\chi^2 \text{ 值} = \frac{(24-1)s^2}{25} = \frac{(24-1)3^2}{25} = 8.28$$

χ^2 值 $= 8.28 < 35.17 \Rightarrow$ 不拒絕 H_0

(6) 結論：在顯著水準為 0.05 之下，此組樣本資料沒有充分的證據說明每小時來店人數的變異數 σ^2 大於 25，即每小時來店人數的變異數 σ^2 沒有顯著大於 25。

Part Two: 兩母體比較

12-4. 樣本變異數比的抽樣分配

1. 在探討兩母體變異數是否相等的問題上，我們必須換個角度思考，不用差而用比。
   - 如果兩個變異數沒有差異，則表示兩個變異數的比值等於1。
   - 如果兩個變異數有差異，則表示兩個變異數的比值不等於1。
2. 假設兩個獨立母體均為常態分配，$N(\mu_1, \sigma_1^2)$與$N(\mu_2, \sigma_2^2)$。若自兩常態母體中，分別隨機且獨立的抽出大小為n_1和n_2 的兩組隨機樣本，即隨機變數為$X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n}$ 為獨立且有相同機率分配 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$， 和$X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n}$ 為獨立且有相同機率分配$N(\mu_2, \sigma_2^2)$。

我們可以得到

$$Y_1 = \frac{(n2-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n1-1}$$

$$Y_2 = \frac{(n2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n2-1}$$

由於『若兩個隨機變數X與Y為獨立的卡方分配，自由度分別為k_1與k_2， 則$\frac{X/k1}{Y/k2}$的機率分配為$F_{k1,k2}$』，可知

$$\frac{Y1/(n1-1)}{Y2/(n2-1)} = \frac{\frac{(n1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n1-1)}{\frac{(n2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n1-1,n2-1}$$

例題 7.20

設 S_1^2, S_2^2 分別由常態母體 $N(5,15), N(8,25)$ 隨機抽出之兩組獨立樣本之樣本變異數，其樣本次數分別為 $n_1=16, n_2=11$，試求：

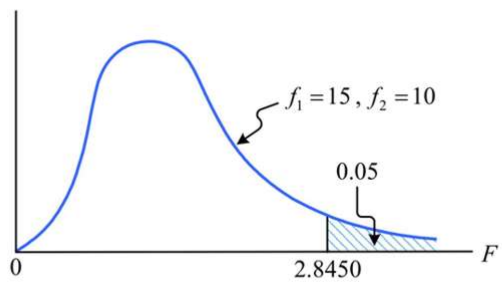
(1) S_1^2/S_2^2 會超過 1.7070 之機率。

(2) S_1^2/S_2^2 介於 1.7070 與 2.1130 之間之機率。

(3) $S_1^2/S_2^2 \ge 0$ 之機率。

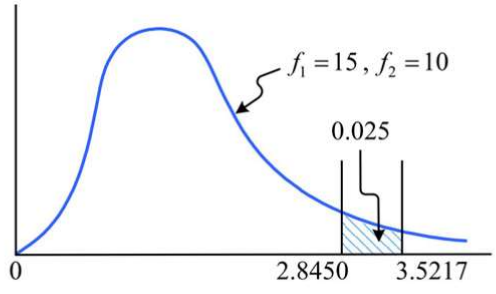
解：(1) $P\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}>1.7070\right)=P\left[\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}>\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1.7070)\right]=P\left[F>\dfrac{25}{15}(1.7070)\right]$

$$=P(F>2.8450) \qquad (f_1=n_1-1=15, f_2=n_2-1=10)$$
$$=0.05$$

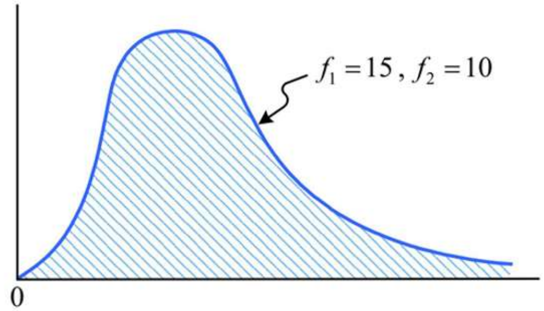


(2) $P\left(1.7070<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}<2.1130\right)$

$$=P\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1.7070)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(2.1130)\right)$$
$$=P\left[\frac{25}{15}(1.7070)<F<\frac{25}{15}(2.1130)\right]$$
$$=P(2.8450<F<3.5217)$$
$$=P(F>2.8450)-P(F>3.5217) \qquad (f_1=15, f_2=10)$$
$$=0.05-0.025$$
$$=0.025$$



(3) $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 0\right)=P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\geq 0\right)=P(F\geq 0)=1$



END

=> 假設$X_{11},...,X_{1n}$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的一組樣本；$X_{21},...,X_{2n}$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的一組樣本，則在兩獨立的常態母體變異數已知時， 與兩獨立的樣本變異數比值有關的抽樣分配為F分配， $F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F_{n1-1,n2-1}$。

例題 7.13

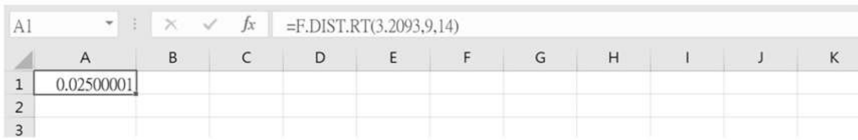
設兩獨立的常態母體分別為 $N(10,2^2)$ 和 $N(15,4^2)$，今從此兩母體分別隨機抽出兩獨立樣本，樣本數分別為 10、15。樣本數 $n_1=10$，得隨機變數 $X_{11},\cdots,X_{1\,10}$ 為獨立且有相同的機率分配 $N(10,2^2)$，樣本平均數 $\bar{X}_1=\frac{X_{11}+\cdots+X_{1\,10}}{10}$，樣本變異數 $S_1^2=\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$；樣本數 $n_2=15$，隨機變數 $X_{21},\cdots,X_{2\,15}$ 為獨立且有相同的機率分配 $N(15,4^2)$，樣本平均數 $\bar{X}_2=\frac{X_{21}+\cdots+X_{2\,15}}{15}$，樣本變異數 $S_2^2=\frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$。試求 S_1^2/S_2^2 大於 0.802325 的機率。

解 $n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ ， $n_2 - 1 = 15 - 1 = 14$

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{2^2 / 4^2} \sim F_{9,14}$$

S_1^2 / S_2^2 大於 0.802325 的機率為

$$P(S_1^2 / S_2^2 > 0.802325) = P\left(\frac{S_1^2 / S_2^2}{2^2 / 4^2} > \frac{0.802325}{2^2 / 4^2}\right) = P(F > 3.2093) = 0.025$$



Excel 2016 函式：=F.DIST.RT(3.2093,9,14)

S_1^2 / S_2^2 大於 0.802325 的機率為 0.025，顯示 S_1^2 / S_2^2 有很高的可能性是不大於 0.802325。

12-5 兩母體體變異數比的區間估計

12-5-1 區間估計四步驟

步驟1：選擇點估計量

同上，但是變異數的比。

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$係自由度為$n-1$的卡方分配，亦即$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$
- F分配是由兩個卡方分配之比所構成的，因此我們可做下面的推導：

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{df_1}}{\frac{\chi_2^2}{df_2}} = \frac{\frac{[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}]}{n_1-1}}{\frac{[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}]}{n_1-1}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

自由度為$n_1 - 1$與$n_2 - 1$的F方分配

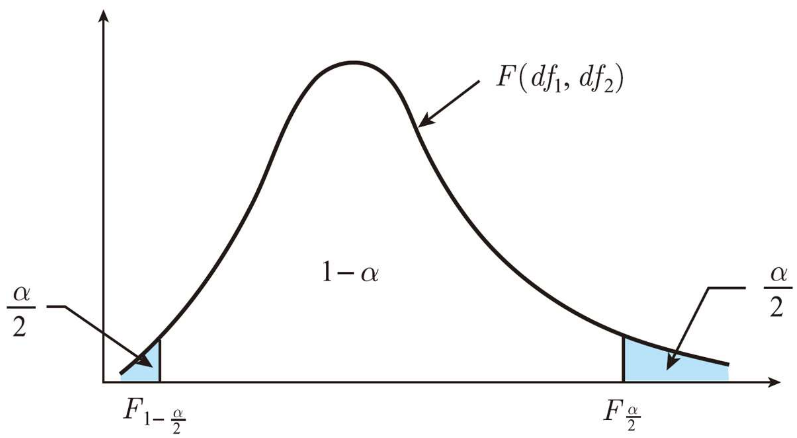
- 查表時請注意，左尾和右尾機率間的關係：

$$F_{1-\alpha}(df_1, df_2) = \frac{1}{F_\alpha(df_2, df_1)}$$

步驟3：導出母體參數的信賴區間

兩母體變異數比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$之100(1-α)%的信賴區間

-



$$P[F_{1-\alpha/2}(df_1, df_2) < F < F_{\alpha/2}(df_1, df_2)] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P[F_{1-\alpha/2}(df_1, df_2) < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2}(df_1, df_2)] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df1,df2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(df1,df2)}] = 1-\alpha$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

信賴區間為$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df1,df2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(df1,df2)})$，或者是$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df1,df2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(df_2, df_1))$

12-5-2 熟能生巧(二)

假設$X_{11}, ..., X_{1n}$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一組樣本，$X_1, ..., X_n$為獨立且來自相同的常態母體$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一組樣本，則兩母體樣本變異數比的抽樣分配是F分配，$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{n1-1,n2-1}$。

- 兩獨立母體為常態分配，則兩母體變異數比σ_1^2/σ_2^2的$1-\alpha$信賴區間為 $\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n1-1,n2-1,\alpha/2}}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n1-1,n2-1,1-\alpha/2}}$

例題 8.13

設兩獨立的常態母體分別為 $N(10, \sigma_1^2)$ 和 $N(15, \sigma_2^2)$，今從此兩母體分別隨機抽出兩獨立樣本，第一個母體抽出樣本數 $n_1 = 10$，得樣本標準差 $s_1 = 2$；第二個母體抽出樣本數 $n_2 = 16$，得樣本標準差 $s_2 = 4$。由此組樣本資料，試求**兩母體的變異數比值 σ_1^2/σ_2^2 的 90% 信賴區間**。

解 第一個母體抽出樣本數 $n_1 = 10$，得樣本標準差 $s_1 = 2$；
第二個母體抽出樣本數 $n_2 = 16$，得樣本標準差 $s_2 = 4$。

$$1-\alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$$F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}} = F_{10-1,\, 16-1,\, 0.05} = F_{9,\, 15,\, 0.05} = 2.5876$$

$$F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}} = F_{10-1,\, 16-1,\, 1-0.05} = F_{9,\, 15,\, 0.95} = \frac{1}{F_{15,\, 9,\, 0.05}} = \frac{1}{3.0061} = 0.3327$$

由此組樣本資料，得兩母體的變異數比值 σ_1^2/σ_2^2 的 90% 信賴區間為

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, \frac{\alpha}{2}}}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = \left(\frac{2^2/4^2}{2.5876}, \frac{2^2/4^2}{0.3327}\right) = (0.0966, 0.7514)$$

在 90% 的信賴水準下，此組樣本資料所產生之樣本信賴區間 (0.0966，0.7514) 會包含兩母體的變異數比值。

12-6. 兩母體變異數比的檢定

12-6-1 檢定的步驟

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

(1) 雙尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 　 $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) 左尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$

$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 　 $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

(3) 右尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 　 $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

通常在進行兩組獨立樣本母體平均數比較之前，會先執行一個「檢查兩個母體之母體變異數是否相同」的檢定。

定

步驟2：確定抽樣分配並畫圖。

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

當虛無假設為對時，則兩個母體的變異數為相等，而我們可以使用統計量F來做檢定

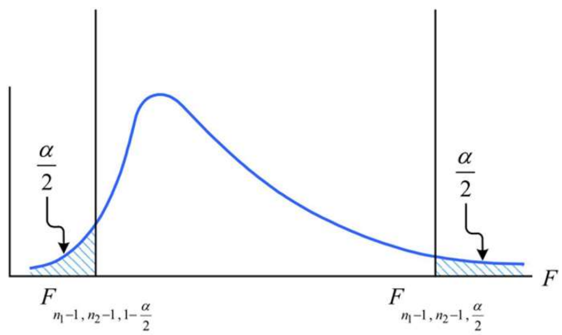
步驟3：標出決策法則。

F 檢定決策法則

(1) 雙尾檢定：若 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1, df_2)$ 或 $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0，反之則接受 H_0。

(2) 左尾檢定：若 $F \leq F_{1-\alpha}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0；反之則接受 H_0。

(3) 右尾檢定：若 $F \geq F_{\alpha}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0；反之則接受 H_0。



統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例題 10.7

自兩獨立常態母體中抽取兩組隨機樣本，其資料如下：

$$第 1 組：n_1 = 9, \bar{x}_1 = 64, s_1^2 = 36$$
$$第 2 組：n_2 = 13, \bar{x}_2 = 59, s_2^2 = 25$$

在顯著水準 $\alpha = 0.02$ ，試求：

(1) 檢定 σ_1^2 與 σ_2^2 是否可能相等？

(2) $\mu_1 - \mu_2$ 之信賴區間，是否能宣稱 μ_1 與 μ_2 可能相等？

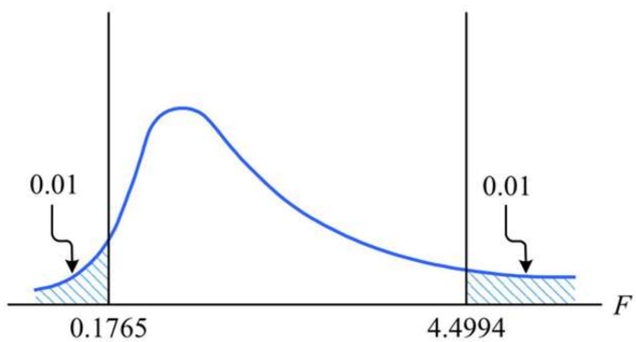
(3) 檢定 μ_1 與 μ_2 是否有顯著差異？

解：(1) (a) 假設：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs. $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$（ 雙尾檢定 ）

(b) 顯著水準：$\alpha = 0.02$

(c) 計算：$F_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{36}{25} = 1.44$

(d) 拒絕域：$F < F_{8,12,0.99} = \dfrac{1}{F_{12,8,0.01}} = \dfrac{1}{5.6668} = 0.1765$ 或 $F > F_{8,12,0.01} = 4.4994$



(e) 判斷：$F_0 = 1.44 < 4.4994$ ，不在拒絕域，差異不顯著，不拒絕 H_0 ，
即暫時沒有證據可以說明 σ_1^2 與 σ_2^2 不相同。

(2) 由 (1) 小題的檢定結果，我們可以假設 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，因此可以使用常態母體下、兩獨立樣本之母體平均數差之信賴區間的方法。其信賴區間為

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\,,\bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\right)$$

首先計算混合樣本變異數

$$s_p^2=\frac{(9-1)36+(13-1)25}{9+13-2}=29.4$$

將混合樣本標準差，及兩組樣本平均數、樣本數、顯著水準代入信賴區間之表示式，可得

$$\left(64-59-t_{9+13-2,\frac{0.02}{2}}\sqrt{\frac{29.4}{9}+\frac{29.4}{13}}\,,64-59+t_{9+13-2,\frac{0.02}{2}}\sqrt{\frac{29.4}{9}+\frac{29.4}{13}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \left(64-59-t_{20,0.01}\sqrt{\frac{29.4}{9}+\frac{29.4}{13}}\,,64-59+t_{20,0.01}\sqrt{\frac{29.4}{9}+\frac{29.4}{13}}\right)$$

$$\Rightarrow\ (5-2.528\times2.351\,,5+2.528\times2.351)\Rightarrow(-0.943\,,10.943)$$

因為 $\mu_1-\mu_2$ 之區間包括 0，所以 μ_1 與 μ_2 可能相等。

(3) (a) 假設：$H_0:\mu_1=\mu_2$ vs. $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

(b) 顯著水準：$\alpha=0.02$

(c) 計算：$t_0=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{64-59}{(5.422)\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{13}}}=2.127$

(d) 拒絕域：$t_0<-t_{20,0.01}=-2.528$ 或 $t_0>t_{20,0.01}=2.528$

(e) 判斷：$t_0=2.127<2.528$，不在拒絕域，差異不顯著，不拒絕 H_0，即 μ_1 與 μ_2 並無顯著的不同。 END

例題 10.8

設 A、B 品牌尼古丁含量為獨立常態分配，今各抽取 $n=5$ 支香煙檢驗其尼古丁含量如下表所示，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 之下，試求：

(1) A、B 品牌尼古丁含量之分配變異數是否一致？

(2) A、B 品牌尼古丁含量之分配的平均成份是否相等？

A 品牌	3.9	3.0	3.7	4.5	4.1
B 品牌	4.2	3.9	3.6	4.4	4.5

解：設 A、B 品牌尼古丁含量為獨立常態分配

(1) (a) 假設：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs. $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

(b) 顯著水準：$\alpha=0.05$

(c) 計算：

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}=\frac{19.2}{5}=3.84$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{2i}=\frac{20.6}{5}=4.12$$

$$s_1^2=\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_{1i}-3.84)^2=0.308$$

$$s_2^2=\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_{2i}-4.12)^2=0.137$$

$$F_0=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0.308}{0.137}=2.248$$

(d) 拒絕域：$F_0<F_{4,4,0.975}=\dfrac{1}{F_{4,4,0.025}}=\dfrac{1}{9.6045}=0.104$ 或 $F_0>F_{4,4,0.025}=$ 9.6045

(e) 判斷：$F_0=2.248<9.6045$，不在拒絕域，不拒絕 H_0，即 A、B 品牌尼克丁含量之分配的變異數可能相等。

(2) 由 (1) 之檢定可假設 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，獨立常態分配，可用 t 檢定進行母體平均數的比較。

(a) 假設：$H_0:\mu_1=\mu_2$ vs. $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

(b) 顯著水準：$\alpha=0.05$

(c) 計算：

$$\begin{aligned} s_p &= \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \\ &= \sqrt{\frac{(5-1)0.308+(5-1)0.137}{5+5-2}} \\ &= \sqrt{0.2225} \\ &= 0.472 \end{aligned}$$

$$t_0=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{3.84-4.12}{(0.472)\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}}=-0.939$$

(d) 拒絕域：$t_0<-t_{8,\,0.025}=-2.306$ 或 $t_0>t_{8,\,0.025}=2.306$

(e) 判斷：$t_0=-0.939>-2.306$，不在拒絕域，不拒絕 H_0，即平均成份可能相同。

END

12-6-2 熟能生巧

=> 手算推薦檢定統計量法

假設檢定	$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$ （右尾檢定）	$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$ （左尾檢定）	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ （雙尾檢定）
檢定統計量	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$		
拒絕域	$\{F>F_{n_1-1,\,n_2-1,\,\alpha}\}$	$\{F<F_{n_1-1,\,n_2-1,\,1-\alpha}\}$	$\{F>F_{n_1-1,\,n_2-1,\,\frac{\alpha}{2}}$ 或 $F<F_{n_1-1,\,n_2-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}\}$

例題 9.16 （續例題 8.13）

設兩獨立的常態母體分別為 $N(10, \sigma_1^2)$ 和 $N(15, \sigma_2^2)$，今從此兩母體分別隨機抽出兩獨立樣本，第一個母體抽出樣本數 $n_1 = 10$，得樣本標準差 $s_1 = 2$；第二個母體抽出樣本數 $n_2 = 16$，得樣本標準差 $s_2 = 4$。由此組樣本資料，試**檢定兩母體的變異數是否有差異**？(設顯著水準為 0.10)

解 $n_1 = 10$，$s_1 = 2$；$n_2 = 16$，$s_2 = 4$。

(1) 假設檢定：

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(2) 顯著水準：$\alpha = 0.10$

(3) 檢定統計量：

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

(4) 拒絕域：

$$\{F > F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } F < F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{F > 2.5876 \text{ 或 } F < 0.3327\}$$

$$\because \ \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}} = F_{10-1, 16-1, 0.05} = F_{9, 15, 0.05} = 2.5876$$

$$F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = F_{10-1, 16-1, 1-0.05} = F_{9, 15, 0.95} = \frac{1}{F_{15, 9, 0.05}} = \frac{1}{3.0061} = 0.3327$$

(5) 計算檢定統計量的值：

$$F \text{ 值} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2^2}{4^2} = 0.25$$

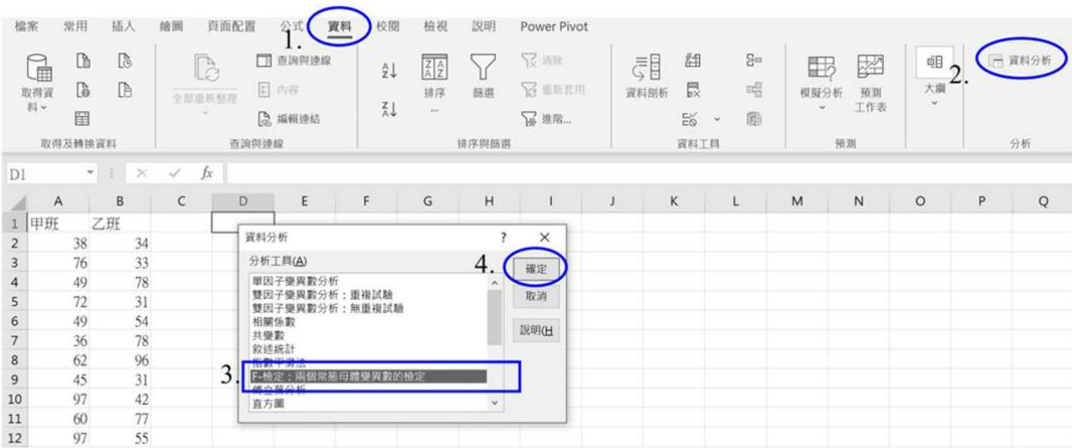
F 值 $= 0.25 < 0.3327 \Rightarrow$ 拒絕 H_0

(6) 結論：在顯著水準為 0.10 之下，此組樣本資料有充分的證據說明兩母體的變異數有差異，即兩母體的變異數有顯著差異。

例題 9.17

設甲、乙兩班各 50 名學生的統計學期中考成績為“統計學成績 2.xls”資料檔所示。利用 Excel 2016 操作，檢定此兩班學生統計學期中考成績的變異數是否有顯著差異？(設顯著水準為 0.10)

解 假設檢定：$H_0:\sigma_{甲}^2=\sigma_{乙}^2$ vs. $H_1:\sigma_{甲}^2\neq\sigma_{乙}^2$



Summary: 抽樣分配應用於估計母體參數

A. 標準常態分配可估計母體參數 - 平均數、比例

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計單一母體比例p
3. 估計兩母體平均數差$\mu_1-\mu_2$
4. 估計兩母體比例差p_1-p_2

B. t分配可估計母體參數 - 平均數

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計兩母體平均數差$\mu_1-\mu_2$

C. 卡方分配可估計母體參數 - 變異數

1. 估計單一母體變異數σ^2或標準差σ。

D. F分配可估計母體參數 - 變異數比

1. 估計兩母體變異數比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$或標準差比$\frac{\sigma 1}{\sigma 2}$。