4 機率論

4-1. 什麼是機率

在日常生活之中，我們時常會面對許多不確定的問題。 例如：明天會不會下雨，股票會不會漲等等？ 在不確定性的情況下，我們想進一步的知道明天下雨的可能性有多大？股市上漲的可能性有多大？

=> 機率 是用來衡量某一「不確定」現象，發生「可能性」的大小。

- 以0到1之間的實數表示不確定現象發生的可能性。
  - 當發生的可能性很小時，其機率值接近0；
  - 當發生的可能性很大時，其機率值接近1。

=> 丟骰子會出現那個點具有不確定性，也就是骰子的點數是隨機出現的。機率的目的是量化這種不確定性。先將隨機過程中各種出現的結果用數字表現，即丟骰子會有1,2,3,4,5,6六種可能結果，每次丟骰子就是這六個點數之一；若骰子是公平的，則可再計算出擲出任一點數的機率是1/6。

4-2. 隨機實驗、樣本空間與事件

4-2-1. 隨機實驗

1. 實驗(experiment)是用來瞭解某現象發生過程與結果的觀察，可以區分為

- 確定性實驗。
  - 例如在一大氣壓力 (760毫米汞柱) 下，將水溫加熱至攝氏100度，則產生沸騰。

- 不確定性實驗。
  - 例如投擲一個銅板，我們事先可預知，不是出現正面就是出現反面，恰有這兩種可能情形，但卻不能確定是出現正面還是反面。

2. 隨機實驗(random experiment)

- 隨機實驗屬於不確定性實驗。例如：
  - 投擲一骰子，觀察其出現之點數。
  - 某公司檢驗一批產品，看是否有瑕疵。
  - 討論明天的股市行情，看是否上漲。

- 一般而言，隨機實驗滿足下列三種特性：
  - 每次試行 (trial) 可能出現的結果是已知的。
  - 每次試行只會出現其中一種結果，但在實驗之前，無法確知是哪一個。
  - 可在相同的情況下，重複進行實驗。

例題 4.1

試說明擲一個公正骰子的實驗是一個隨機實驗。

解 (1) 擲一公正骰子出現的可能結果有 {1 點, 2 點, 3 點, 4 點, 5 點, 6 點} 六種情況，這六種情況在未試行前是已知。

(2) 擲一公正骰子只會出現其中的一種情況，當然在未試行之前，無法知道哪一點會出現。

(3) 此實驗可在相同的情況下不斷的進行。

滿足隨機實驗的三個條件，故擲一公正骰子的實驗是一個隨機實驗。

4-2-2. 樣本空間

(1) 出象(outcome): 是指試行所有可能出現的結果。

(2) 樣本點(sample point)：一隨機實驗中每一個可能出現的結果。

- 樣本點是將出象對應到座標圖中。
- 如擲兩個銅板，以1代表正面，0代表反面，則擲兩個銅板的樣本點，可以下圖的四個樣本點表示。

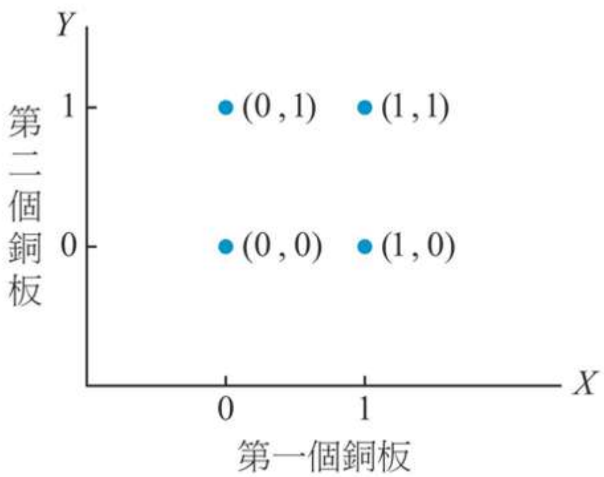


圖 4.1 擲兩銅板的樣本點

(3) 樣本空間(sample space): 所有可能出象 (或樣本點) 所成的集合，通常以大寫字母S表之。

- 如擲兩個銅板的樣本空間為{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)}。

(4) 事件(event) 是樣本空間的一個子集合(部分集合) 。

- 如擲兩銅板出現「一個正面」的事件A是{(1, 0), (0, 1)}，如下圖所示

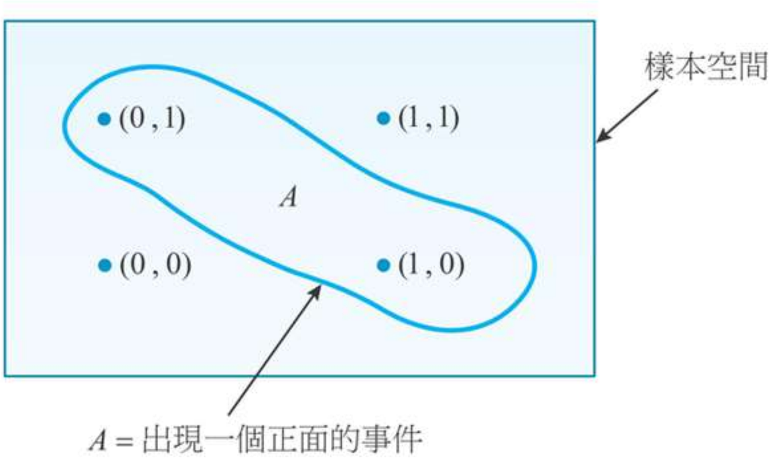


圖 4.2 擲兩銅板出現一個正面的事件 A 範圍

- 出現「至少一個正面」的事件B是{(1, 0), (0, 1), (1, 1)}。

4-3. 機率測度

4-3-1. 機率的衡量

1. 事件機率是指某事件發生的可能性大小。

假設事件A發生的機率為P(A)，則P(A)必須滿足$0 \leq P(A) \leq 1$的條件。

- 若$P(A) = 0$，代表事件A必定不會發生。
- 若$P(A) = 1$，代表事件A必定會發生。

2. 三種機率的定義方法：

- 古典機率定義法 (classical probability)
- 相對次數機率定義法 (relative frequency probability)
- 主觀機率定義法 (subjective probability)

(1)古典機率 = 理論機率 = 事前機率

- 假設一個隨機實驗之樣本空間中，每個樣本點出現的機會都相同。
- 假設 S 為一個樣本空間，包含樣本點個數為$n(S)$ ；而事件A包含出象（樣本點）個數為$n(A)$，則事件A發生的機率，以 $P(A)$ 表示。
  - 定義：$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$。

古典方法的機率測度

在一有限的樣本空間 S 中，某一事件 E 的機率 $P(E)$ 定義為：

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \tag{4-1}$$

式中 $n(S)$ 與 $n(E)$ 分別代表樣本空間與事件所包含的樣本點個數。

例題 4.3

從一副 52 張的撲克牌隨機抽取一張，試求以下各種情況的機率：

(1) 得到紅色國王 K。

(2) 得到黑桃。

(3) 得到皇后 Q。

(4) 得到梅花 A。

解 樣本空間為一副撲克牌 52 張各種不同花色與字樣的集合。

(1) A_1：得到紅色國王 K，即 2 張撲克牌構成的集合。

$$P(A_1)=\frac{2}{52}=0.0385$$

(2) A_2：得到黑桃，即 13 張撲克牌構成的集合。

$$P(A_2)=\frac{13}{52}=0.25$$

(3) A_3：得到皇后 Q，即 4 張撲克牌構成的集合。

$$P(A_3)=\frac{4}{52}=0.0769$$

(4) A_4：得到梅花 A，即 1 張撲克牌構成的集合。

$$P(A_4)=\frac{1}{52}=0.0192$$

(2)相對次數機率 = 經驗機率= 事後機率 = 觀察機率 <=頻率統計學派

- 有些情況下，每個樣本點出現的機不一定相同。
  - 例如某台機器出現良品的機率。

- 在長期重複的隨機實驗後，事件發生機率為該事件發生之次數與隨機實驗的總次數之比。
- 即一隨機實驗重複進行 n 次，若事件 A 發生 n (A) ，則事件 A 發生的機率為 P(A)。
  - 定義： $P(A)=limit_{n->\infty}\frac{n(A)}{n}$ 。
  - 事件發生次數與同樣條件下重複試驗次數之比。
    - 如何解讀生男生女？（相同條件、無限次）
    - 如何解讀歐巴馬贏得美國總統大選的機率？

相對次數方法之機率測度

一隨機試驗重複進行 N 次，若事件 E 出現 n 次，則其機率 $P(E)$ 約為：

$$P(E) \approx \frac{n}{N} \tag{4-2}$$

例題 4.4

銷售成衣的店員將最近 30 天的每日銷售情況整理成下表所示：

賣出件數	天數
0	8
1	12
2	5
3	3
4	2
總和	30

試求以下各種情況的機率：

(1) 今天都沒有賣出。

(2) 今天至多賣出一件。

(3) 今天至少賣出兩件。

(4) 今天賣出超過三件。

解 (1) A_1：今天都沒有賣出。在蒐集的 30 天中，有 8 天發生此情況，故

$$P(A_1) = \frac{8}{30} = 0.267$$

(2) A_2：今天至多賣出一件。在蒐集的 30 天中，有 $(8+12)$ 天發生此情況，故

$$P(A_2) = \frac{8+12}{30} = \frac{20}{30} = 0.667$$

(3) A_3：今天至少賣出兩件。在蒐集的 30 天中，有 $(5+3+2)$ 天發生此情況，故

$$P(A_3) = \frac{5+3+2}{30} = \frac{10}{30} = 0.333$$

(4) A_4：今天賣出超過三件。在蒐集的 30 天中，有 2 天發生此情況，故

$$P(A_4) = \frac{2}{30} = 0.067$$

(3)主觀機率 <= 貝氏機率

- 對某些事件，既無法依古典方式求得事前機率，也不能重複實驗求出相對次數，此時只好憑個人的經驗或直覺，以主觀的認知來判斷事件發生的機率。
- 定義 ：$P (A) $ = 研究者主觀的信念決定機率的大小
    - 例如： 明天會下雨的機率是多少？股票漲跌的評估。判斷新產品上市成功的機率。
    - 如果科學家有完全一樣的幾組經驗證據，也就是同一事件的機率應該不會不同？

4-3-2 機率三公理

機率公理是在機率領域中的基本假設，可以看成是機率計算時不可以違反的規矩。

1. 數學定義

Def: 在一隨機實驗中，設S表示樣本空間，A為任一事件。若P為一實數值的函數，使得$P(A) $為一實數值，且滿足下列三個條件：

- $0 \leq P(A) \leq 1$。
- $P(S) = 1$。
- $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$。

則稱P為機率函數，$P (A) $為事件A發生的機率值。

2. 文字說明

- **事件機率非負**（任何事件A發生的機率值必然大於或等於0）

- **樣本空間的機率為1**（所有可能事件發生的機率為1）

- **互斥事件機率可相加**（互斥事件 $A_1, A_2, ..., A_n$的機率值可以相加）

範例：投擲一公正銅板，其樣本空間 S ={H, T}，H 表正面，T表反面， 則其滿足機率三公理的條件：

- 樣本空間S的任一事件發生的機率：$P(\phi) = 0, P(H) = 1/2$，$P(T) = 1/2$
- 樣本空間由互斥事件所構成，所以機率值可以相加：$P(S) = P(H, T) = P(H) + P(T)$
- 樣本空間的機率為1: $1/2 + 1/2 = 1$

4-4. 機率法則

4-4-1 事件的集合運算

集合運算三種類：餘集、聯集、交集。

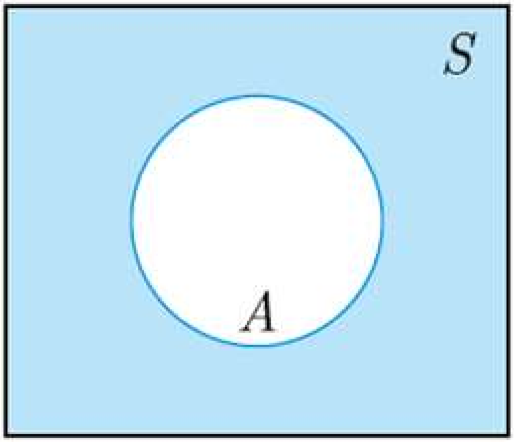
(1)餘集：事件A的餘集(complement)，記為 A^c。

- 樣本空間去除事件A的出象 (或樣本點) 的集合。

- 表示所有不屬於事件A的元素所組成的集合；亦即代表事件A不發生。

- 例如：

- 擲兩銅板出現「一個正面」的事件A是{(1, 0), (0, 1)}
- 則其餘事件A^c為{(0, 0), (1, 1) }。



(2)聯集：A , B 兩事件的聯集(union)，記為 $A \cup B$。

- 是指包含此兩事件的所有出象 (或樣本點) 的集合。
- 表示所有屬於 A 與 B 之元素組成的集合；亦即代表事件 A 與 B 至少有一個發生的事件。
- 例如：
  - 擲兩銅板出現「一個正面」的事件A是{(1, 0), (0, 1)}
  - 擲兩銅板出現「至少一個正面」的事件B是{(1, 0), (0, 1), (1, 1)}
  - 則這兩事件的聯集 $A \cup B$ = {(1, 0), (0, 1), (1, 1)}

推廣：n 個事件的聯集

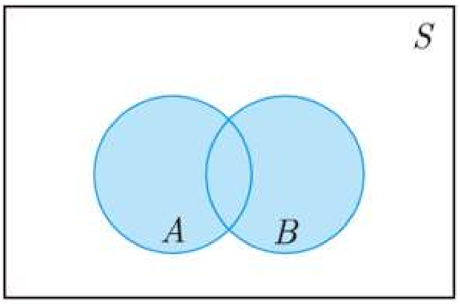
- $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

(3)交集：A, B兩事件的交集(intersection)，記為 A ∩ B。

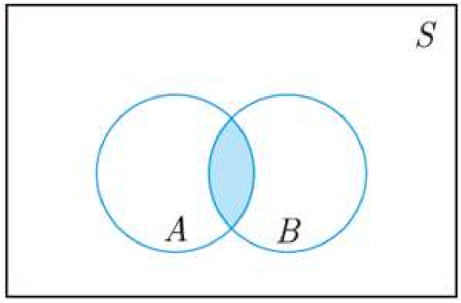
- 是指包含兩事件相同出象 (或樣本點) 的集合。
- 表示 A 與 B 共同的元素所組成的集合；亦即事件 A 與 B 同時發生的事件。
- 例如：
  - 擲兩銅板出現「一個正面」的事件A是{(1, 0), (0, 1)}
  - 擲兩銅板出現「至少一個正面」的事件B是{(1, 0), (0, 1), (1, 1)}
  - 則這兩個事件的交集 A ∩ B = {(1, 0), (0, 1) }

推廣：n 個事件的交集

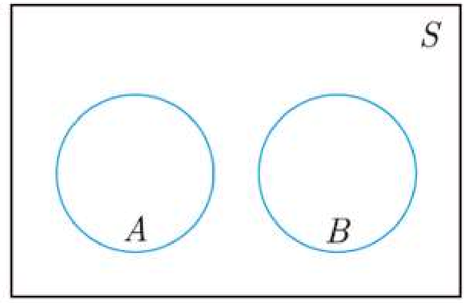
- $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \cap B = \phi$

4-4-2 基本法則

1. 事件為空集合的機率：$P(\phi) = 0$，即不可能事件發生的機率等於 0。

2. 樣本空間的機率: $P(S) = 1$，所有可能事件發生的機率為1。

3. 事件機率0 ≤ P (A) ≤ 1

求任一事件A的機率之前，必須先確立其樣本空間S，然後再求事件機率P(A)的值。

4. 餘事件的機率：假設 A 為任一事件，則其餘事件A^c 發生的機率為$P(A^c) = 1 - P(A)$。

- 又名餘集合法則 (Complement Rule)。

4-4-3 加法法則與互斥事件(聯集)

(1)加法法則

兩事件聯集的機率

- 設 A、B 為任意兩事件，則P (A ∪ B) = P (A) + P (B) - P (A ∩ B)

(2)互斥事件(exclusive events)

假設A與B為互斥事件，則

- A、B兩事件之交集為空集合，即$A \cap B = \phi$。
- 代表 A 與B兩事件沒有共同的元素。
- 兩事件不會同時發生。

(3)加法法則與互斥事件

兩互斥事件聯集的機率

- 若 A、B 兩事件互斥，則 P (A ∪ B) = P (A) + P (B)

加法規則 1 & 2 的凡氏圖

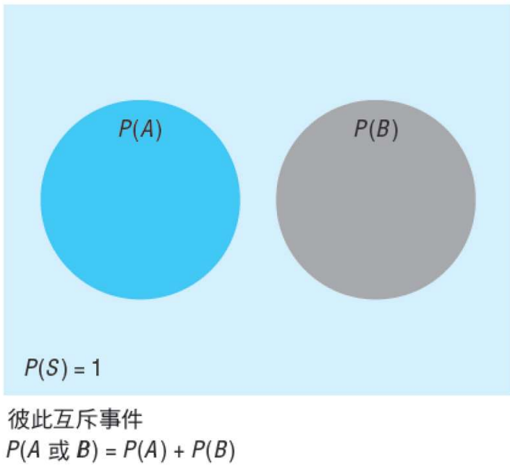


圖 4-6　加法規則 1 的凡氏圖：當事件彼此互斥

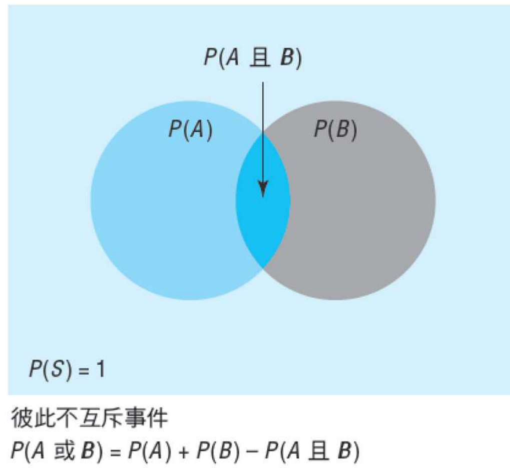


圖 4-7　加法規則 2 的凡氏圖：當事件不彼此互斥

= > 多個互斥事件聯集的機率

- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 為互斥事件，則 $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

例題 5.3

擲一個公正的骰子，試求下列事件發生的機率：

(1) A_1：出現點數 7。

(2) A_2：出現奇數點。

(3) A_3：出現偶數點。

(4) A_4：非出現奇數點。

(5) A_5：表示任一事件。

(6) A_6：奇數點與偶數點同時出現，即 $P(A_2 \cap A_3)$。

(7) A_7：奇數點或偶數點出現，即 $P(A_2 \cup A_3)$。

解：(1) A_1 是空集合，因此 $P(A_1)=0$，因為點數 7 不可能出現。

(2) $P(A_2)=3/6=1/2$

(3) $P(A_3)=3/6=1/2$

(4) $P(A_4)=1-P(A_2)=1-1/2=1/2$，因為非奇數點，即偶數點，$A_2$ 與 A_4 兩者互為補集合。

(5) $P(A_5)$ 的機率為 $0 \le P(A_5) \le 1$

(6) $P(A_2 \cap A_3)=0$，因為 A_2 與 A_3 為互斥事件，不可能同時發生。

(7) $P(A_2 \cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2 \cap B_3)=1/2+1/2-0=1$

因為樣本空間出現的點數不是奇數就是偶數，所以機率為 1。 END

4-4-3 乘法法則與獨立事件（交集）

1. 條件機率 (conditional probability)

1. 假設A、B為兩事件，在已知事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的機率為條件機率，以 $P(A|B)$表示。

- 定義為$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$。

2. 同理，在已知事件 A 發生的情況下，事件 B 發生的條件機率，以 $P(B|A)$表示。

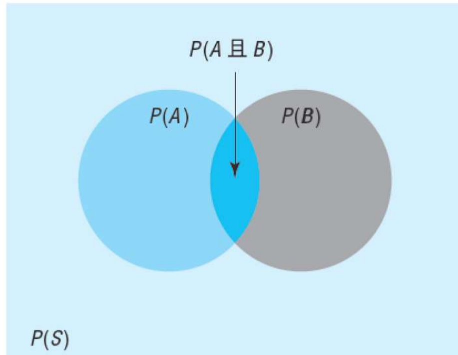
- 定義為$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

條件機率的凡氏圖

條件機率的凡氏圖顯示在圖4-9。

這時候

$$P(B|A) = \frac{P(A\ 且\ B)}{P(A)}$$



$$P(B|A) = \frac{P(A\,且\,B)}{P(A)}$$

圖 4-9 條件機率的凡氏圖

例題 4.6

一家餐廳，有 90% 的客人會點義大利麵，有 60% 的客人會同時點義大利麵和沙拉。試求一位客人已經點了義大利麵，也會點沙拉的機率是多少？

解 A_1：客人點義大利麵

A_2：客人點沙拉

依題意得知 $P(A_1) = 0.9$, $P(A_1 \cap A_2) = 0.6$ 。

一位客人已經點了義大利麵，也會點沙拉的機率，此為條件機率：

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.6}{0.9} = 0.667$$

2. 乘法法則

假設 A、B 為任意兩事件，則

- A與B之交集，表示兩事件同時發生，我們以$A \cap B$表示。
- A與B兩事件同時發生的機率，稱為聯合機率(joint probability)，以P(A ∩ B)表示。
- 4.0.0.0.1 $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$。

=> 條件機率$P(A|B)$與$P(B|A)$不一定相等，但『B且A』和『A且B』的聯合機率一定會相同，即$P(A \cap B) = P(B \cap A)$

例題 5.5

陳先生收看電視節目「天天愉快」的機率為 0.6，陳太太收看「天天愉快」的機率為 0.4，若已知陳太太看「天天愉快」，陳先生會收看「天天愉快」的機率為 0.8，試求夫婦兩人中至少有一人看該節目的機率有多少？

解：$P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(A\mid B)=0.8$

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A\mid B)=0.4\cdot 0.8=0.32$$
$$\begin{aligned} P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &=0.6+0.4-0.32\\ &=0.68 \end{aligned}$$

END

3. 獨立事件(independent events)

若一個事件的發生不受另一事件發生的影響，則稱此兩事件獨立。

- 事件A與事件B為獨立事件
  - 事件A發生的機率不受事件B發生機率的影響: $P(A)=P(A|B)$，若$P(B)>0$。
  - 事件B發生的機率不受事件A發生的影響: $P(B)=P(B|A)$，若$(A)>0$。
- 若兩事件非獨立事件，則稱兩事件為相依事件(dependent event)。

4. 乘法法則與獨立事件

兩獨立事件交集的機率

- 假設 A、B 為兩獨立事件，則事件A與B同時發生的機率，等於個別發生機率的乘積。
- 獨立事件時，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

例題 4.5

設 A、B 為兩任意事件。若 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.5$，$P(A\cap B)=0.1$。試求下列各小題的機率：

(1) $P(A^C)$

(2) $P(A\cup B)$

(3) $P(B\mid A)$

(4) 事件 A、B 是否獨立？

解 (1) $P(A^C)=1-P(A)=1-0.2=0.8$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.2+0.5-0.1=0.6$

(3) $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.2}=0.5=P(B)$

(4) 因為 $P(A\cap B)=0.1$ 且 $P(A)\times P(B)=0.2\times 0.5=0.1$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$，故 A、B 為獨立事件。

亦可直接由 (3) 得到 A、B 為獨立事件。

(5)互斥事件與獨立事件之關係

定理：若A、B 兩事件發生的機率均不等於 0，即P(A)≠ 0, P(B)≠ 0，則

- 若A、B兩事件互斥，則A、B兩事件不獨立。
- 若A、B兩事件獨立，則A、B兩事件不互斥。
- A、B 兩事件不能同時擁有此兩種性質。

=>補充說明： **聯合機率表**

	A	A^c	**邊際機率**
B	$P(A\cap B)$	$P(A^c\cap B)$	$P(B)$
B^c	$P(A\cap B^c)$	$P(A^c\cap B^c)$	$P(B^c)$
邊際機率	$P(A)$	$P(A^c)$	總和機率=1

例題 5.21

A 公司員工 100 名，按其教育程度與性別分類如下：

性別＼教育程度	大專（C）	非大專（N）
男性（M）	32	20
女性（F）	25	23

試求下列事件的機率：

(1) 大專男性的機率。

(2) 非大專女性的機率。

(3) 大專程度的機率。

(4) 男性的機率。

(5) 張先生是大專畢業的機率。

(6) 性別與教育程度是否獨立。

解： (1) $P(C \cap M) = \dfrac{32}{100} = 0.32$

(2) $P(N \cap F) = \dfrac{23}{100} = 0.23$

(3) $P(C) = \dfrac{32+25}{100} = \dfrac{57}{100} = 0.57$

(4) $P(M) = \dfrac{32+20}{100} = \dfrac{52}{100} = 0.52$

(5) $P(\text{大專} \mid \text{男性}) = P(C \mid M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{32}{100}}{\frac{52}{100}} = 0.615$

(6) $P(M) \times P(C) = \dfrac{52}{100} \cdot \dfrac{57}{100} = 0.2964 \neq P(M \cap C) = 0.32$

所以性別與教育程度不獨立。

END

例題 5.6

五名役男在新兵訓練中心訓練結業，要抽籤分發部隊，已知 5 支籤中有 2 支外島籤，試問

(1) 第一位抽出外島籤的機率是多少？

(2) 若已知第一位抽中外島籤，第二位抽中外島籤的機率是多少？

(3) 若已知第一位未抽中外島籤，第二位抽中外島籤的機率是多少？

(4) 若未提供第一位是否抽中外島籤的資訊，第二位抽中外島籤的機率是多少？

解：(1) 第一位抽中外島籤的機率是 2/5。

隨堂練習：

(2) 已知第一位抽中外島籤，所以只剩 1 支外島籤、3 支非外島籤，因此第二位抽中外島籤的機率是 1/4；

也可以用條件機率的方式來計算，假設事件 B 是第一位抽中外島籤的事件，事件 A 是第二位抽中外島籤的事件，則 $A \cap B$ 就是「第一位抽中外島籤，且第二位抽中外島籤」的事件。

$$P(B)=\frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$$

$$\text{所以 } P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{2/20}{2/5}=\frac{1}{4}$$

(3) 已知第一位未抽中外島籤，所以只剩 2 支外島籤、2 支非外島籤，因此第二位抽中外島籤的機率是 2/4；

用條件機率的方式計算，假設事件 B 是第一位未抽中外島籤的事件，事件 A 是第二位抽中外島籤的事件，則 $A \cap B$ 就是「第一位未抽中外島籤，且第二位抽中外島籤」的事件。

$$P(B)=\frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$$

$$\text{所以 } P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{6/20}{3/5}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(4) 第二位抽中外島籤，可以區分為兩種情況，一種是第一位抽中外島籤，且第二位抽中外島籤；另一種是第一位未抽中外島籤，且第二位抽中外島籤。假設事件 A 代表第一種狀況，事件 B 代表第二種狀況，A 與 B 任何一種情況只要發生，第二位就是抽中外島籤，所以要計算的是 A 或 B 會發生的機率，也就是 $P(A \cup B)$，又因為 A 與 B 互斥，因此

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

END

4-5：貝氏公式

我們常問到「今天會下雨嗎？要帶雨傘出門嗎？」，於是我們會開始「依照自已的想法覺得這地區或季節不常下雨，而推測應該不會下雨」，即評斷下雨的機率很小 (事前機率)；但「看看窗外有烏雲」、「查查氣象預報說降雨機率是40%」，這些資訊給予我們修正、調整 (產生額外的條件機率)；有了這些資訊後，評斷下雨的機率增加 (事後機率)，在一陣掙扎後，最後「決定帶雨傘出門」。這一連串的過程就是貝氏定理的應用。

(1) 透過事前機率，與新訊息條件機率，可修正事前機率成為獲得新訊息後的事後機率。

- 某事件的機率稱為 **事前機率(prior probability)** $P(A)$。
- 若能夠得到新的訊息B，求出相關的條件機率$P(B|A)$，則結合條件機率與事前機率$P(A)$，可以修正原來的事前機率，成為獲得新訊息後的**事後機率(posterior probability)**$P(A|B)$。

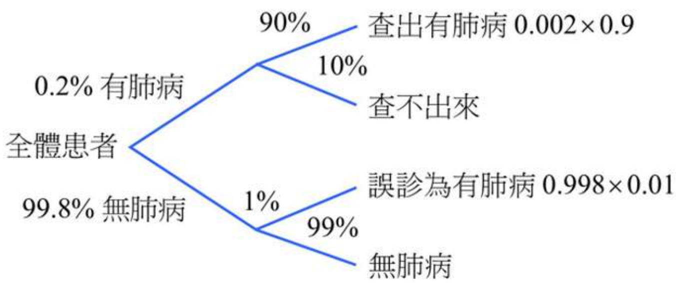
2. 假設A、B兩事件發生的機率P(A)與P(B)均大於0，即P(A)>0，P(B)>0。

- 事前機率：事件 A 發生的機率P(A)為已知
- 新訊息的條件機率：事件 A 發生與否時， B 事件發生機率的新訊息為 $P(B|A)$ 及 $P(B|A^c)$
- 總(全）機率定理： B 事件發生的機率$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)=P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)$。
- 貝氏定理：結合事前機率、條件機率與總機率，求得事後機率 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B\cap A)+P(B\cap A^c)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$
  - 此定理描述了$P(A|B)$和$P(B|A)$兩個反向條件機率之間的關係。
  - 此定理說明了主觀的信念如何隨著新證據而改變變成了。
  - 此定理把$P(A)$、$P(B)$ 、$P(A|B)$ 與$P(B|A)$ 四個機率之間的固定關係表示出來。

例題 5.9

A 醫院以 X 光檢查肺病之資料如下，設全體患者中有 0.2% 有肺病，而有肺病者 90% 可查出，無肺病者 1% 會誤診為有肺病，試求自全體患者中任取一名，以 X 光檢查，結果有肺病，而此人確實有肺病的機率為何？

解：(1) 先繪製樹枝圖，以了解題目。



(2) 設 A 為此人自有肺病患者選出之事件，B 為此人自 X 光中呈現肺病之事件。

$$
\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A^C)P(B \mid A^C)} \\
&= \frac{0.002 \times 0.9}{0.002 \times 0.9 + 0.998 \times 0.01} \\
&= \frac{0.0018}{0.01178} \\
&= 0.1528
\end{aligned}
$$

END

將樣本空間完全切割成 k 個互斥的事件，$A_1, A_2, \cdots, A_k$，有一事件 B，則

$$P(A_m \mid B) = \frac{P(A_m \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

例題 5.8

小明可選擇搭乘 A_1, A_2, A_3, A_4 四路車到學校上學，搭車的比例分別為 40%、30%、20%、10%，而遲到的機率依次為 1.0%、2.0%、1.6%、1.4%，假設今天早上遲到了，則小明搭上 A_3 車上學的機率為何？

解：(1) 若本題無額外的遲到資訊，我們很自然地會利用事前機率求解，即 $P(A_3) = 20\% = 0.2$。

(2) 若我們利用「遲到的資訊」，假設遲到的事件為 B，則

$$\begin{aligned}
P(A_3 \mid B) &= \frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i)} \\
&= \frac{0.2 \times 0.016}{0.4 \times 0.01 + 0.3 \times 0.02 + 0.2 \times 0.016 + 0.1 \times 0.014} \\
&= \frac{0.0032}{0.0146} \\
&= 0.2192
\end{aligned}$$

原先之事前機率為 0.2，經遲到資訊的加入，機率修正為 0.2192 (事後機率)。 END

隨堂練習：

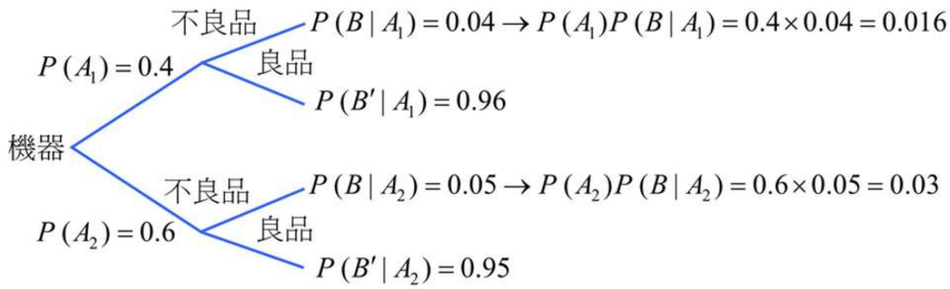
例題 5.7

A 公司用 A_1 及 A_2 兩部機器來製造產品，已知 A_1 機器生產全部產品的 40%，A_2 生產占全部產品的 60%，若能獲得額外的資訊，知道 A_1 和 A_2 兩部機器所生產的產品不良率為 4% 及 5%，試求：

(1) 由全部產品中任意抽出一件，其為不良品的機率。

(2) 已知其為不良品，計算此產品來自 A_1 機器的機率。

解：(1) 設 B 為不良品的事件，依題意，先繪出樹枝圖。



$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\cdot P(B \mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B \mid A_2) \\ &= 0.016+0.03 \\ &= 0.046 \end{aligned}$$

(2) $$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.016}{0.046}=0.3478$$

END

加分題：有三個門讓你選, 三個門中只有一個門後有大獎, 其他兩個門後沒有獎。 你選定後, 主持人打開其中一個你沒選中也沒有獎的門。 現在再讓你作一次選擇, 你 可以選擇換門或不換門。如果你選擇換門,那得獎的機率是多少?

[Monty Hall Problem]