

Phần I

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Phương pháp giải phương trình vô tỉ

1.1 Phương trình vô tỉ giải được bằng phương pháp tương đương.

1.1.1 Phương pháp giải

Chuyển về đối dấu để hai vế không âm, sau đó bình phương hai vế (ta được phương trình tương đương) để khử căn thức, đưa về phương trình đại số, trong đó:

- Phương trình có dạng $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- Ta có thể bình phương mà không cần quan tâm tới điều kiện hai vế phải tương đương (ta được phương trình hệ quả) để khử căn thức, tuy nhiên sau khi giải ra nghiệm ta phải thử lại nghiệm.

1.1.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} = x-3$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x-3 = x^2-6x+9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-8x+12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x=6 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=6. \end{aligned}$$

Kết luận: vậy phương trình có một nghiệm là $x=6$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x - \sqrt{2x-5} = 4$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương với : $x - 4 = \sqrt{2x - 5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ (x - 4)^2 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 8x + 16 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Kết luận: Phương trình có một nghiệm là $x = 7$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt{-x^2 + 4x} + 2 = 2x$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương với : $\sqrt{-x^2 + 4x} = 2x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ -x^2 + 4x = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -x^2 + 4x = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết luận: Phương trình có một nghiệm : $x = 2$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sqrt{x+4} \geq 0 \\ \sqrt{1-x} \geq 0 \\ \sqrt{x+4} \geq \sqrt{1-x} \\ \sqrt{1-2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &= \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x} \\ \Leftrightarrow x+4 &= 1-2x+1-x+2\sqrt{(1-2x)(1-x)} \\ \Leftrightarrow 2x+1 &= \sqrt{1-3x+2x^2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-3x+2x^2 = (2x+1)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = 0$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ \sqrt{3x+4} \geq \sqrt{2x+1} \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x+4 \geq 2x+1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\sqrt{3x+4} = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 3x+4 + 2\sqrt{(x+3)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta được nghiệm phương trình là $x = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\sqrt{3x+8} - \sqrt{3x+5} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{5x-7}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x+8 \geq 0 \\ 3x+5 \geq 0 \\ 3x+8 \geq 3x+5 \\ 5x-4 \geq 0 \\ 5x-7 \geq 0 \\ 5x-4 \geq 5x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{8}{3} \\ x \geq -\frac{5}{3} \\ x \geq \frac{4}{5} \\ x \geq \frac{7}{5} \\ x \geq \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$$\sqrt{3x+8} + \sqrt{5x-7} = \sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+8)(5x-7)} = \sqrt{(5x-4)(3x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 + 19x - 56 = 15x^2 + 13x - 20$$

$$\Leftrightarrow 6x = 36$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

So sánh điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = 6$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương $1 - x^2 = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ (1-x^2)^2 = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 - 2x^2 + 1 = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 - 2x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x(x^3 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết luận vậy phương trình có ba nghiệm là: $x = 0, x = -1, x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+3} \\
&\Leftrightarrow 5x+3 - 2\sqrt{(3x+1)(2x+2)} = 5x+3 - 4\sqrt{x(x+3)} \\
&\Leftrightarrow 6x^2 + 8x + 2 = 4x^2 + 12x \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Thử lại thấy nghiệm $x = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1$.

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\frac{x^2}{3x-2} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

Giải:

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2} \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x-2 + \sqrt{3x-2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 2 + \sqrt{3x-2} = 0 \quad (1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow 2-x = \sqrt{3x-2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $2\left(\sqrt{2(2+x)} + 2\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{9x^2+16}$

Giải:

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Với điều kiện trên phương trình tương đương :

$$8(2+x) + 16\sqrt{2(4-x^2)} + 16(2-x) = 9x^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 8x - 32 = 16\sqrt{2(4-x^2)} // \Leftrightarrow (9x^2 + 8x - 32)^2 = 512(4-x^2)$$

$$\Leftrightarrow 81x^4 + 144x^2 - 512x - 1024 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 32)(9x^2 + 16x + 32) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{32}}{3}$$

Thử lại ta được nghiệm của phương trình : $x = \frac{\sqrt{32}}{3}$

Ví dụ 11. Giải phương trình: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -1$

Với điều kiện trên phương trình tương đương :

$$2\sqrt{(1+\sqrt{x+1})^2} - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\sqrt{x+1}) - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 3$.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 2$

Đặt $t = \sqrt{x-2}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x-2 \Leftrightarrow x = t^2 + 2$

Khi đó phương trình tương đương:

$$\sqrt{t^2+1+2t} - \sqrt{t^2+1-2t} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^2} - \sqrt{(t-1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow t+1 - |t-1| = 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} t+1-(t-1)=1 & (t \geq 1) \\ t+1-(1-t)=1 & (t < 1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t+1-t+1=1 & (t \geq 1) \\ t+1-1+t=1 & (t < 1) \end{cases} \quad (\text{vn}) \\
&\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 13. Giải phương trình: $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x^2}{2(1+\sqrt{1+x})^2}$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -1$

Vì $x = 0$ không là nghiệm phương trình nên phương trình tương đương :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} - 2 &= \frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{2x^2} \\
\Leftrightarrow x-4 &= 1-2\sqrt{1+x}+1+x \\
\Leftrightarrow \sqrt{1+x} &= 3 \\
\Leftrightarrow 1+x &= 9 \\
\Leftrightarrow x &= 8
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của phương trình: $x = 8$.

Ví dụ 14. Giải phương trình: $3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0$

Với điều kiện trên phương trình tương đương :

$$\begin{aligned}
3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} &= 2(x-3) \\
\Leftrightarrow 9(x-2) - (x+6) &= 2(x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) \\
\Leftrightarrow 8(x-3) &= 2(x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) \\
\Leftrightarrow (x-3)(4 - (3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})) &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} - 4=0 \end{cases} & \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4$

$$\Leftrightarrow 9(x-2) + x+6 + 6\sqrt{(x-2)(x+6)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 10x-12+6\sqrt{x^2+4x-12} = 16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4x-12} = 14-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ 9(x^2+4x-12) = (14-5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ 16x^2 - 176x + 304 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x^2 - 11x + 19 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = 3; x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 15. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt[3]{2x-3})^3 \\ \Leftrightarrow & x-1 + x-2 + 3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x-3 \\ \Rightarrow & \sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình là: $x = 1; x = 2; x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x}$

Giải:

$$\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x} \quad (1) \quad \text{Điều kiện: } x \neq 0$$

Để x là nghiệm của phương trình thì $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x^2+4}{x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2} = x \quad (2) \end{aligned}$$

Kết hợp giữa (1) và (2) ta được phương trình: $2\sqrt{x^2+x+2} = \frac{4}{x}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{do } x^3 + 2x^2 + 4x + 4 > 0 \quad \forall x > 0)$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1$.

1.1.3 Bài tập

Bài tập 1. Giải phương trình: $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$

Bài tập 2. Giải phương trình: $x + \sqrt{x^2 + x + 2} = 3$

Bài tập 3. Giải phương trình: $\sqrt{7 - x^2 + x\sqrt{x + 5}} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

Bài tập 4. Giải phương trình: $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 7} = 1$

Bài tập 5. Giải phương trình: $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$

Bài tập 6. Giải phương trình: $\sqrt{x(x - 1)} + \sqrt{x(x + 2)} = 2x$

Bài tập 7. Giải phương trình: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = \sqrt{2x + 2} + 2\sqrt{x}$

Bài tập 8. Giải phương trình: $\sqrt{4x + 5} + \sqrt{3x + 1} = \sqrt{2x + 7} + \sqrt{x + 3}$

Bài tập 9. Giải phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

Bài tập 10. Giải phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \frac{x + 3}{2}$

Bài tập 11. Giải phương trình: $4(x + 1)^2 = (2x + 10)(1 - \sqrt{3 + 2x})^2$

Bài tập 12. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{2} - x\sqrt{1 - x^2}} = 1 - 2x^2$

Bài tập 13. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x^3 - 1} + \sqrt[3]{1 - x^3} = x$

Bài tập 14. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1} = x\sqrt[3]{2}$

Bài tập 15. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 3} = \sqrt[3]{x + 2}$

Bài tập 16. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x - 1} = x\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2x + 1}$

Bài tập 17. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{5x}$

Bài tập 18. Giải phương trình: $\sqrt[3]{15x - 1} = 4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{13x + 1}$

Bài tập 19. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt[3]{3x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$

Lời giải bài tập

1 Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ (-x^2 + 4x - 3) = (2x - 5)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ -x^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2 - 24x + 28 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{14}{5} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow x = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{14}{5}$.

2 Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt{x^2 + x + 2} = 3 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = (3 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 + x + 2 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1$.

3 Phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} 3 - 2x - x^2 \geq 0 \\ 7 - x^2 + x\sqrt{x+5} = 3 - 2x - x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x\sqrt{x+5} = -4 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+5} = \frac{-4-2x}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{-4-2x}{x} \geq 0 \\ x^2(x+5) = (-4-2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq x < 0 \\ x^3 + 5x^2 = 16 + 16x + 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 4 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -1$.

$$4 \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với: $\sqrt{3x-2} = 1 + \sqrt{x+7}$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = x + 8 + 2\sqrt{x+7}$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{x+7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 10x + 25 = x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 11x + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \begin{cases} x = 9 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 9$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

5 Điều kiện: $x \geq 0$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương: $\sqrt{x+8} = \sqrt{x} + \sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow x + 8 = 2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 5 - x = 2\sqrt{x^2 + 3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 25 - 10x + x^2 = 4x^2 + 12x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 3x^2 + 22x - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{25}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{25}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$6 \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee 1 \leq x \\ x \leq -2 \vee 0 \leq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Ta có $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \geq 1$ thì phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x}\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} = x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x - 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{9}{8} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Kết luận: Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = 0; x = \frac{9}{8}$.

$$7 \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \\ 2x + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x} = \sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1} \\
&\Leftrightarrow 5x + 3 - 4\sqrt{x^2 + 3x} = 5x + 3 - 2\sqrt{(2x+2)(3x+1)} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{6x^2 + 8x + 2} \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 12x = 6x^2 + 8x + 2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$8 \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq -\frac{7}{2} \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+7} - \sqrt{3x+1} \\
&\Leftrightarrow 5x + 8 - 2\sqrt{(4x+5)(x+3)} = 5x + 8 - 2\sqrt{(2x+7)(3x+1)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 17x + 15} = \sqrt{6x^2 + 23x + 7} \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 17x + 15 = 6x^2 + 23x + 7 \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$9 \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x + 2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1}, t \geq 0 \Leftrightarrow x = t^2 + 1$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$:\text{w} \sqrt{t+1+2t} - \sqrt{t+1-2t} = 2$$

$$\Leftrightarrow t+1 - |t-1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1-t+1=2 \\ t+1-t-1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 & \forall t \in \mathbb{R} \\ 0=2 & (VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

So điều kiện ta được $\forall x \geq 2$ là nghiệm của phương trình.

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19