Thông tin các thành viên trong nhóm 5:

1) Lê Thị Thu An, 18001975, K63 TN Toán học.
2) Thiều Đình Minh Hùng, 21000006, K66 TN Toán học.

* * * * * * * * *

Bài tập 1: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

với:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad , A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Lời giải.
Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Nhân hai vế điều kiện thứ 3 với (-1), ta có thể viết lại bài toán như sau:

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6 \\ & 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 13 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Bài toán bổ trợ $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} \max & 6x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & & & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & y_1 & & & = & 6 \\ & 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & & + & y_2 & & = & 13 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + y_3 & = & 7 \\ & & & & & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Bảng đơn hình (có hàm mục tiêu của cả bài toán gốc và bài toán bổ trợ):

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS
y_1	1	-2	3	0	1	0	0	6
y_2	3	-1	4	1	0	1	0	13
y_3	2	1	1	1	0	0	1	7
z	1	-1	0	-3	0	0	0	0
w	6	-2	8	2	0	0	0	0

Ta thực hiện các phép xoay để tìm cơ sở chấp nhận được cho bài toán ban đầu bằng cách giải bài toán bổ trợ:

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS	Ratio
y_1	1	-2	3	0	1	0	0	6	6
y_2	3	-1	4	1	0	1	0	13	13/3
y_3	2	1	1	1	0	0	1	7	7/2
z	1	-1	0	-3	0	0	0	0	
w	6	-2	8	2	0	0	0	0	

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS
y_1	0	-5/2	5/2	-1/2	1	0	-1/2	5/2
y_2	0	-5/2	5/2	-1/2	0	1	-3/2	5/2
x_1	2	1	1	1	0	0	1	7
z	0	-3/2	-1/2	-7/2	0	0	-1/2	-7/2
w	0	-5	5	-1	0	0	-3	-21

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS	Ratio
y_1	0	-5/2	5/2	-1/2	1	0	-1/2	5/2	1
y_2	0	-5/2	5/2	-1/2	0	1	-3/2	5/2	1
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	1/2	7/2	7
z	0	-3/2	-1/2	-7/2	0	0	-1/2	-7/2	
w	0	-5	5	-1	0	0	-3	-21	

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS
x_3	0	-5/2	5/2	-1/2	1	0	-1/2	5/2
y_2	0	0	0	0	-1	1	-1	0
x_1	1	1	0	3/5	-1/5	0	3/5	3
z	0	-2	0	-18/5	1/5	0	-3/5	-3
w	0	0	0	0	-2	0	-2	-26

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	RHS
x_3	0	-1	1	-1/5	2/5	0	-1/5	1
y_2	0	0	0	0	-1	1	-1	0
x_1	1	1	0	3/5	-1/5	0	3/5	3
z	0	-2	0	-18/5	1/5	0	-3/5	-3
w	0	0	0	0	-2	0	-2	-26

Nghiệm tối ưu của bài toán bổ trợ có $y = 0$ nên bài toán ban đầu có nghiệm CNĐ, với cơ sở thu được từ bảng đơn hình trên bị suy biến và chứa biến y_2.
Vì dòng ứng với biến y_2 có các hệ số ứng với các biến x_1, x_2, x_3, x_4 bằng 0, nên ta có thể bỏ dòng này đi và ta có cơ sở CNĐ cho bài toán ban đầu là $\{x_3, x_1\}$.

Bảng đơn hình của bài toán ban đầu với cơ sở CNĐ tương ứng ở trên là:

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	0	-1	1	-1/5	1
x_1	1	1	0	3/5	3
z	0	-2	0	-18/5	-3

Như vậy $\{x_3, x_1\}$ chính là cơ sở CNĐ tối ưu cho bài toán ban đầu, và ta có nghiệm tối ưu:

$$x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

với giá trị tối ưu là 3. ∎

Bài tập 2. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\min & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 3 \\
& 4x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & \geq & 3 \\
& 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\
& & & & & & & x_1 & \leq & 0 \\
& & & & & & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Lời giải. Bài toán đối ngẫu là:

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & & \\
\text{s.t.} & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & \geq & 2 \\
& 2y_1 & - & 2y_2 & - & 2y_3 & \leq & -4 \\
& -2y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & \leq & 4 \\
& 2y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & = & 0 \\
& y_1 & \leq & 0 & & & & \\
& y_2, y_3 & \geq & 0 & & & &
\end{array}$$

∎

Bài tập 3.

Lời giải.
Xét dạng chuẩn tắc của ($\mathcal{P}$):

$$\begin{array}{lrl}
\max & c^T x & \\
\text{s.t.} & Ax \leq & b \\
& -Ax \leq & -b\text{'} \\
& x \geq & 0
\end{array} \qquad (\mathcal{P}')$$

Bài toán đối ngẫu của ($\mathcal{P}'$) là:

$$\begin{array}{lrl}
\min & b^T s - b^T u & \\
\text{s.t.} & A^T s - A^T u \geq & c^T \\
& s \geq & 0\text{'} \\
& u \geq & 0
\end{array} \qquad (\mathcal{D}')$$

Đặt $y = s - u$, ta có bài toán tương đương với $(\mathcal{D}')$ là:

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c^T \end{array}$$

$\blacksquare$

Bài tập 4. Sử dụng định lý về độ lệch bù, kiểm tra xem $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ có phải là nghiệm tối ưu của LP sau không:

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\ & 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Lời giải.

Ký hiệu bài toán đã cho là $(\mathcal{P})$. Trước hết, ta dễ thấy $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ là nghiệm CNĐ của $(\mathcal{P})$.
Giả sử x là nghiệm tối ưu của $(\mathcal{P})$.
Xét bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ của $(\mathcal{P})$:

$$\begin{array}{lccccccccc} \min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 7y_3 & + & 2y_4 & & \\ \text{s.t.} & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & \geq & 4 \\ & y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & & & \geq & 2 \\ & y_1 & & & + & 3y_3 & + & y_4 & \geq & 2 \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & \geq & 4 \\ & & & & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Giả sử $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$ là nghiệm tối ưu tương ứng của $(\mathcal{D})$.
Thay giá trị của x vào các điều kiện của $(\mathcal{P})$ ta có:

$$\begin{array}{cccccccccl} 2(0) & + & 1(1) & + & 1(1) & + & 1(1) & = & 3 & : y_1 \\ 1(0) & + & 1(1) & + & 0(1) & + & 2(1) & = & 3 & : y_2 \\ 1(0) & + & 2(1) & + & 3(1) & + & 1(1) & < & 7 & : y_3 \\ 2(0) & + & 0(1) & + & 1(1) & + & 1(1) & = & 2 & : y_4 \end{array}$$

Mặt khác, để ý rằng: $x_1 = 0$ và $x_i > 0, \forall i = \overline{2,4}$.
Do đó, theo định lý về độ lệch bù, đối với nghiệm y tương ứng của bài toán đối ngẫu tương ứng $\mathcal{D}$ ta có: $y_3 = 0$, đồng thời các điều kiện 2, 3, 4 của $(\mathcal{D})$ phải xảy ra dấu bằng.
Như vậy, nghiệm $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$ của $(\mathcal{D})$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H2 - H1, H3 - H1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H3 + H2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H4 \leftrightarrow H3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H4/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Ta cần kiểm tra xem $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ có là nghiệm CNĐ của $(\mathcal{D})$ hay không. Thật vậy, dễ thấy rằng $y \geq 0$, đồng thời từ cách xây dựng ta thấy nghiệm này thỏa mãn các điều kiện 2, 3, 4 của $(\mathcal{D})$.
Ta thay giá trị của y vào điều kiện 1 của $(\mathcal{D})$:

$$2(1) \quad + \quad 1(1) \quad + \quad 1(0) \quad + \quad 2(1) \quad > \quad 4$$

Như vậy, y là nghiệm CNĐ của $(\mathcal{D})$, và do đó theo định lý về độ lệch bù, giả sử của ta đúng, hay $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ là nghiệm tối ưu của $(\mathcal{P})$.
Câu trả lời là khẳng định. ∎

Bài tập 5. Giải LP sau dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 1 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & \text{-3} \\
 & & & x_1, & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Lời giải.
Đổi điều kiện min thành max, ta viết lại bài toán như sau:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & \text{-3} \\
 & & & x_1, & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Bổ sung thêm biến bù ta thu được bảng đơn hình sau:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
1	1	-1	1	0	0	2
-1	1	-2	0	1	0	1
-2	-1	-1	0	0	1	-3
-3	-1	-4	0	0	0	0

Để ý rằng nghiệm cơ sở của bài toán ứng với cơ sở y_1, y_2, y_3 là $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0, 2, 1, -3)$, đây là nghiệm cơ sở không CNĐ vì $y_3 < 0$.

Thực hiện phép xoay cho bảng đơn hình đối ngẫu trên ta có:

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
y_1	1	1	-1	1	0	0	2
y_2	-1	1	-2	0	1	0	1
y_3	-2	-1	-1	0	0	1	-3
	-3	-1	-4	0	0	0	0
Ratio	3/2	1	4				

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
y_1	-1	0	-2	1	0	1	-1
y_2	-3	0	-3	0	1	1	-2
x_2	-2	-1	-1	0	0	1	-3
	-1	0	-3	0	0	-1	0

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
y_1	-1	0	-2	1	0	1	-1
y_2	-3	0	-3	0	1	1	-2
x_2	2	1	1	0	0	-1	3
	-1	0	-3	0	0	-1	3
Ratio	1		3/2				

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
x_1	-1	0	-2	1	0	1	-1
y_2	0	0	3	-3	1	-2	1
x_2	0	1	-3	2	0	1	3
	0	0	-1	-1	0	-2	4

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	RHS
x_1	1	0	2	-1	0	-1	1
y_2	0	0	3	-3	1	-2	1
x_2	0	1	-3	2	0	1	3
	0	0	-1	-1	0	-2	4

Như vậy, nghiệm tối ưu của bài toán là $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ và giá trị tối ưu của bài toán gốc là 4. ∎