

Thông tin các thành viên trong nhóm 5:

1. Lê Thị Thu An, 18001975, K63 TN Toán học.
2. Thiều Đình Minh Hùng, 21000006, K66 TN Toán học.

Bài tập 1. Xét hàm số Rosenbrock:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

1. Hàm f có phải là một hàm lồi hay không? Tại sao?
2. Hãy tìm tất cả các điểm cực tiểu địa phương của f . Hàm f có điểm cực tiểu toàn cục không? Nếu có hãy chỉ ra đó là điểm nào?

Lời giải.

1. Để ý rằng $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ và:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -400x_1x_2 + 400x_1^3 + 2x_1 - 2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 200(x_2 - x_1^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -400x_2 + 1200x_1^2 + 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 200 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -400x_1 \end{cases}$$

Ma trận Hessian của f tại (x_1, x_2) là:

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -400x_2 + 1200x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng $\det(H_f(x_1, x_2)) = 200(1200x_1^2 - 400x_2 + 1) - (-400x_1)^2 = 200(4000x_1^2 - 400x_2 + 1)$. Như vậy $\det(H_f(0, 1)) = -79800 < 0$ và do đó $H_f(0, 1)$ không xác định dấu. Suy ra f không là một hàm lồi.

2. Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -400x_1x_2 + 400x_1^3 + 2x_1 - 2 = 0 \\ 200(x_2 - x_1^2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ 2x_1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1 \end{aligned}$$

Hơn nữa ma trận Hessian của f tại $(1, 1)$ là:

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix},$$

đồng thời dễ thấy ma trận này xác định dương do $\det(H_f(1, 1)) = 400 > 0$ và $802 > 0$. Vì vậy, $(1, 1)$ là một điểm cực tiểu địa phương của f .

Để ý rằng $f(1, 1) = 0$, đồng thời dễ thấy $f(x_1, x_2) \geq 0$ với mọi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Vậy f có điểm cực tiểu toàn cục là $(1, 1)$. ■