Nhóm 05:

Họ tên các thành viên trong nhóm

1. Lê Thị Thu An, MSV: 18001975, K63TN Toán học

2. Thiều Đình Minh Hùng, MSV: 21000006, K66 TN Toán học

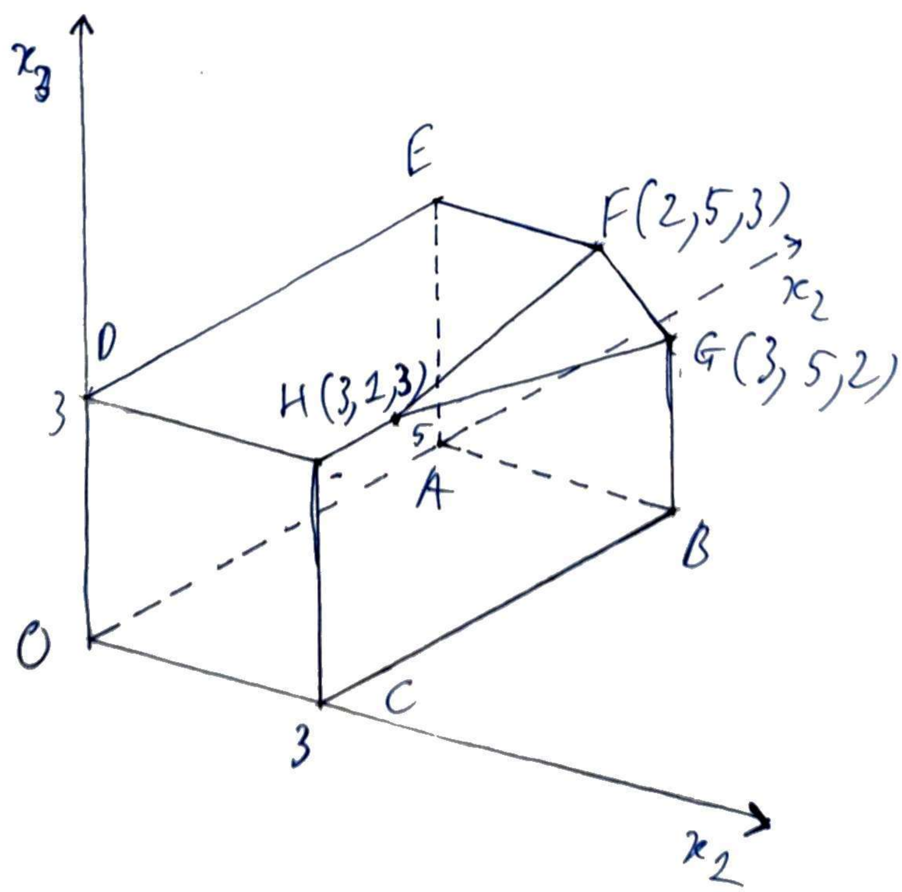
**** * * ***

Bài tập 1.

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Để ý rằng bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho có dạng chính tắc với $b \geq 0$, $A \geq 0$. Do đó bài toán có nghiệm tối ưu.

*) Hình đa diện thể hiện miền chấp nhận được của bài toán trên.



*) Sử dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán.

Bổ sung thêm biến bù ta có ~~bài toán~~ ~~sẽ~~ thể viết lại ~~để~~ bài toán dưới dạng:

$$
\begin{array}{lllllll}
\max z & & & & & & \\
\text{s.t} & x_1 & & & +x_4 & & = 3 \\
& & x_2 & & & +x_5 & = 5 \\
& & & x_3 & & +x_6 & = 3 \\
& 4x_1 + x_2 + 4x_3 & & & & +x_7 & = 25 \\
& -z + 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & & & & = 0
\end{array}
$$

Bảng đơn hình:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
\hline
-1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ta có ~~1 cơ~~ một bộ biến cơ sở là (x_4, x_5, x_6, x_7), bộ này cho ta 1 nghiệm chấp nhận được:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 3, 5, 3, 25)$$

tương ứng với đỉnh $O_{(0,0,0)}$ trên đa diện, giá trị của hàm mục tiêu là $z=0$.

- Chọn cột x_2 làm cột xoay, hàng thứ 2 làm hàng xoay (do ta có tỉ lệ $\frac{25}{1} > \frac{5}{1}$) ~~ta có~~ và thực hiện phép xoay đẩy x_5 ra khỏi cơ sở và đưa x_2 vào ~~cơ~~ cơ sở ta có bảng:

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 20 \\
\hline
-1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -15
\end{array}\right)
$$

Bộ biến cơ sở (x_4, x_2, x_6, x_7) cho ta nghiệm chấp nhận được: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 5, 0, 3, 0, 3, 20)$ tương ứng với đỉnh $A(0,5,0)$ trên đa diện, giá trị của hàm mục tiêu là $z = 15$.

- Chọn cột x_1 làm cột xoay và hàng thứ 1 làm hàng xoay (do ta có tỉ lệ $\frac{20}{4} > \frac{3}{1}$) và thực hiện phép xoay đẩy x_4 khỏi cơ sở và đưa x_1 vào cơ sở ta có bảng:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -1 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 0 & -21
\end{array}
$$

Bộ biến cơ sở (x_1, x_2, x_6, x_7) cho ta nghiệm chấp nhận được: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (3, 5, 0, 0, 0, 3, 8)$ tương ứng với đỉnh $B(3,5,0)$ trên đa diện, giá trị hàm mục tiêu là $z = 21$.

- Chọn cột x_3 làm cột xoay và hàng thứ 4 làm hàng xoay (do ta có tỉ lệ $\frac{8}{4} < \frac{3}{1}$) và thực hiện phép xoay đẩy x_7 ra khỏi cơ sở và đưa x_3 vào cơ sở rồi dùng hệ số a_{43} về bằng 1 ta có bảng sau:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -25
\end{array}
$$

Nghiệm chấp nhận được ứng với cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_6) là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (3, 5, 2, 0, 0, 1, 0),$$

~~Vì tất cả các hệ~~

ứng với đỉnh G trên đa diện. Vì tất cả các ~~giá~~ hệ số ở hàng ~~thứ~~ 7 bảng trên đều không dương, nên đây chính là nghiệm tối ưu cần tìm, với giá trị tối ưu là $z=25$.

Bài tập 3. (Bài tập mô hình hóa - mở đầu)
Xét một bài toán nổi tiếng:

Bài toán. Đặt nhiều quân hậu trên bàn cờ vua tiêu chuẩn 8×8 nhất có thể sao cho không có hai quân hậu nào tấn công nhau.

Lời giải. Bàn cờ vua tiêu chuẩn có 8 hàng và 8 cột. Ta định nghĩa một đường chéo là một tập hợp gồm ít nhất hai tọa độ, các tọa độ cùng nằm trên một đường thẳng tọa với trục ngang (cũng như trục dọc) một góc 45 độ. Có tất cả 26 đường chéo trên bàn cờ vua. Một quân hậu có thể tấn công một quân khác trên một ô cùng hàng ngang, cột dọc, hoặc đường chéo nếu những ô ở giữa là trống.
Ta sẽ xây dựng một mô hình tối ưu tuyến tính nguyên giải quyết bài toán trên.
Đầu tiên, cần tìm cách biểu diễn vị trí đặt những quân hậu. Với mỗi tọa độ (i, j) trên bàn cờ, ta định nghĩa một biến $x_{i,j}$ nhận giá trị lần lượt là 1 hoặc 0 ứng với trường hợp tọa độ đó có quân hậu hoặc không có quân hậu.

(a) Dựa theo mô tả trên, có tất cả bao nhiêu biến có dạng này? Dựa theo giá trị có thể nhận được, những biến này có tên gọi là gì?

- Có tất cả 64 biến ở dạng này. Những biến này có tên gọi là biến nhị phân.

(b) Nêu biểu thức thể hiện số quân hậu trên bàn cờ. Nêu hàm mục tiêu (tuyến tính) của bài toán.

- Số quân hậu trên bàn cờ là tổng của tất cả các biến $x_{i,j}$

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} x_{i,j}$$

Hàm mục tiêu của bài toán là tối đa hóa số quân hậu trên bàn cờ.

$$\max_{x_{i,j}} \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} x_{i,j}$$

Tiếp theo ta quan tâm tới điều kiện quan trọng nhất của bài toán - không có hai quân hậu nào tấn công nhau. Bằng suy luận toán học, ta có thể chứng minh rằng điều này tương đương với điều kiện

Điều kiện. (ĐK*) Mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo của bàn cờ chỉ có tối đa một quân hậu.

(c) Chứng minh sự tương đương trên.

- (Chiều đảo) Ta dễ thấy (ĐK*) suy ra không có quân hậu nào tấn công nhau.

(Chiều ngược) Giả sử có 1 hàng hoặc 1 cột hoặc 1 đường chéo có ≥ 2 quân hậu. Ta có thể chọn 2 quân hậu liên tiếp trên đường này tấn công nhau. Do đó (ĐK*) không đúng.

(d) Liệt kê tất cả điều kiện (tuyến tính) thể hiện (ĐK*).

- Tổng ở mỗi hàng <=1

$$\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \leq 1, \forall i \in \{1, \ldots, 8\}$$

Tổng ở mỗi cột <=1

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i,j} \leq 1, \forall j \in \{1, \ldots, 8\}$$

Tổng ở mỗi đường chéo <=1:

+ Ta sẽ loại bỏ đường chéo mà chỉ có 1 phần tử, là đường chéo có Tổng i+j = 1+1 = 2 hoặc 8+8 = 16, và đường chéo có hiệu i-j = 1-8 = -7, i-j = 8-1 = 7. + Với mỗi đường chéo có hiệu j-i=h (h từ -6 đến 6), ta có:

$$\sum_{1 \leq i \leq 8,\quad 1 \leq i+h \leq 8} x_{i,i+h} \leq 1,$$

+ Với mỗi đường chéo có tổng i+j = s (s từ (1+2=3) đến (8+7=15)), ta có:

$$\sum_{1\leq i\leq 8,\quad 1\leq s-i\leq 8} x_{i,s-i} \leq 1,$$

Đường chéo mà chỉ có 1 quân thì ta sẽ loại bỏ.

(e) Dựa trên các ý trên, trình bày một mô hình tối ưu tuyến tính/tối ưu nguyên giải quyết bài toán đặt ra ở đầu bài.

- Tạo mô hình như sau:

+ Model: 64 biến nhị phân

+ Ràng buộc: các ràng buộc hàng, cột, chéo đã được liệt kê ở trên.

+ Hàm mục tiêu: $\max_{x_{i,j}} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{i,j}$

■

■

Bài tập 4. ()
Xây dựng một đoạn mã giả trong đó sử dụng mô hình tối ưu tuyến tính/tối ưu nguyên, để liệt kê tất cả các cách đặt 8 quân hậu trên bàn cờ vua tiêu chuẩn 8×8 sao cho không có hai quân hậu nào tấn công nhau.

Lời giải. - Xây dựng mô hình như bài 3.
- Mỗi khi tìm được 1 nghiệm $x_{i,j}$, để loại bỏ nghiệm này, ta cho thêm 1 ràng buộc:
- lấy tất cả các bộ index (i, j) sao cho $x_{i,j} = 1$,
- thêm ràng buộc tổng $x_{i,j} < 8$ với (i,j) thuộc tập index trên.
- Lặp lại cho đến khi không còn nghiệm nào. ■

■

Bài tập 5:

(a) Nghiệm cơ sở ứng với cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_4) chính là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_5 = x_6 = x_7 = 0 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_3 - x_4 - x_5 + x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \\ x_2 = x_3 = x_4 = 1 \\ \cancel{x_3 = x_4 = 1} \\ \cancel{x_4} \end{cases}.$$

Vậy: Nghiệm cơ sở ứng với cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_4) là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

(b) Từ câu (a), ta có thể chọn ngay ~~x~~ cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_4).

(c) Xét cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_7). Nghiệm cơ sở ứng với cơ sở này là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = x_6 = 0 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_3 - x_4 - x_5 + x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ x_4 = x_5 = x_6 = 0 \\ x_7 = -1 \end{cases}.$$

Như vậy nghiệm cơ sở x tương ứng với cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_7) vi phạm điều kiện $x \geq 0$. Câu trả lời là khẳng định.

(d) Xét hệ cơ sở (x_2, x_3, x_4, x_5). Nghiệm cơ sở ứng với cơ sở này là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = x_6 = x_7 = 0 \\ x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6 = 1 \\ x_3 - x_4 - x_5 + x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ 1 - 1 - x_5 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \\ x_2 = x_3 = x_4 = 1. \end{cases}$$

Như vậy, hai cơ sở (x_1, x_2, x_3, x_4) và (x_2, x_3, x_4, x_5) có cùng nghiệm cơ sở là $x = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.