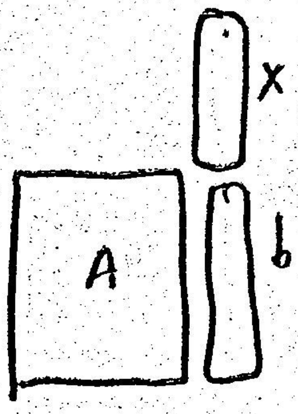
Bài 3.

Có:



. $f(x) = \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T(Ax - b)$

$= x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb$

. Tính đạo hàm của f theo x

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b)$$

. Hàm này là hàm lồi vì $\nabla^2 f(x) = 2A^TA$ xđdg do rank $A = n$.

nên hàm f đạt ctiểu min tại x_0 sc

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

tức là $A^T(Ax - b) = 0$

$\Leftrightarrow$ $A^TAx = A^Tb$

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Bài 4.

1. Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. CM. ~~tập~~ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} =: S$ lồi.

CM: $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$.

$\Rightarrow$ Với $\lambda \in [0, 1]$ thì

$$A(\underbrace{\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}}_{y}) = \lambda(Ax^{(1)}) + (1-\lambda)(Ax^{(2)}) \le \lambda b + (1-\lambda) b = b.$$

$\Rightarrow y \in S \rightarrow Đ$

2. CM tương tự (1).

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

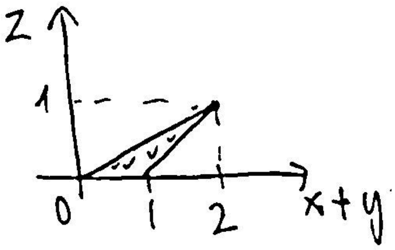
CM: $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ thì $\forall \lambda \in [0, 1]$ thì ~~Đặt~~ $y = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$

$$A(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) = \lambda A x^{(1)} + (1-\lambda) A x^{(2)} = \lambda b + (1-\lambda) b = b$$

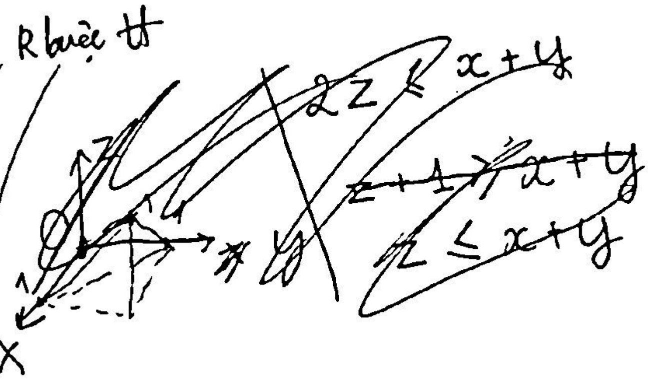
$\Rightarrow y \in S \rightarrow Đ$

3)

x	y	z = x.y
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1.



4. Ràng buộc



$$\boxed{\begin{aligned} z &\ge x + y - 1 \\ z &\le \frac{x+y}{2} \end{aligned}}$$

Bài 4.5.

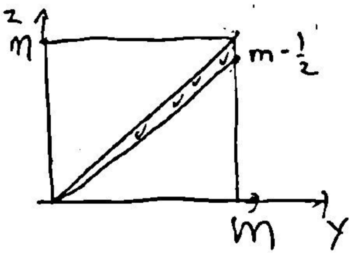
$\overset{x}{\{0,1\}} \quad \overset{y}{\{0,1,..m\}} \quad \overset{z}{\{0,1,..,m\}}$

Mô tả $xy = z$ bởi r buộc tính.

(*) $x=0$ thì $z=0 \longrightarrow mx \geq z$ (1)

(*) $y=0$ thì $z=0 \longrightarrow y \geq z$ (2).

(*) $x=1$ thì $z=y \longrightarrow yz \geq \frac{m-\frac{1}{2}}{m} y - m(1-x)$ (3)



. Nếu $x = 0$ thì (1),(2)(3) v đủ và cho ra $z = 0$ duy nhất tm.

. Nếu ~~x≠0~~ $x=1$ thì (1),(2), (3) cho ra n. $z = y$ duy nhất.

Bài 4. ~~6~~.7. $\overset{x}{\{0,1,2\}} \quad \overset{y}{\{0,1,2\}} \quad \overset{z}{\{0,1,2,3,4\}}$

. Tạo biến trung gian xbi, ybi, zbi (bi là binary) sc

$$xbi[j] = \begin{cases} 1 & x = j \\ 0 & x \neq j. \end{cases}$$

. Với mỗi cặp $i \cdot j = k$ thì
ta tạo các bộ ràng buộc như ở bài 4.4 sc
$xbi[i] \cdot ybi[j] = zbi[k]$.