Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

В. В. Головизин

Основы аналитической геометрии и линейной алгебры
Часть I

Учебное пособие

Ижевск
2014

УДК 514.2
ББК 22.151
Г 60

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: к.п.н. **Т.М. Банникова**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Головизин В.В.
Г60 Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Ч.1: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. – 321 с.

ISBN

Первая часть пособия содержит основной теоретический материал по курсу "Аналитическая геометрия": векторная алгебра, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка. Несколько дополнительных глав посвящено некоторым понятиям современной алгебры и комплексным числам.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс аналитической геометрии и линейной алгебры на инженерно-физических факультетах университетов. Оно может быть полезно студентам, изучающим данную дисциплину в рамках дистанционного обучения.

УДК 514.2
ББК 22.151

Содержание

Дополнительные главы

Предисловие

Пособие является частью учебно-методического комплекса, разработанного автором, дополняющей ранее изданные «Практические занятия по курсу «Алгебра и геометрия» и «Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».

Пособие предназначено для студентов первого курса, обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата: «Информационные системы и технологии», «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», «Прикладная информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Пособие может быть полезно студентам очной и заочной форм обучения других направлений подготовки, изучающим такие разделы высшей математики, как «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра», преподавателям, ведущим практические занятия по данным курсам, студентам соответствующих направлений при подготовке к государственным экзаменам.

Одной из целей образования, на наш взгляд, является получение студентами навыков работы с учебной и научной литературой. Особенно в наше быстро меняющееся время, когда невозможно прожить только с багажом знаний, полученных в вузе. Современный выпускник средней школы таковых навыков практически не имеет, и наша задача помочь ему получить эти навыки. Данное пособие, кроме обычной утилитарной задачи передачи знаний, преследует и эту цель.

Внедрение данного пособия в учебный процесс будет способствовать формированию профессиональных компетенций обучающихся в проектной, аналитической, научно-исследовательской деятельности в соответствии с требованиями ФГОС ВО.

Теперь о структуре самого пособия. Весь материал разбит на главы, которые, в свою очередь, разбиты на параграфы. В конце почти каждого параграфа приведены упражнения, как правило, теоретического характера. К каждой главе подобраны дополнительные упражнения, имеющие своей целью закрепить теоретический материал и выработать некоторые вычислительные навыки по соответствующей теме. Кроме основных глав в пособии имеются дополнительные главы, расположенные в конце обеих частей пособия.

В заключение заметим, что знак ▲ обозначает завершение или отсутствие доказательства.

Часть I. Аналитическая геометрия

Глава 1. Линейные операции с векторами
§1. Функция расстояния

Обозначим через S множество, элементы которого будем называть точками, а само множество S – пространством точек. Полагаем, что прямые и плоскости являются подмножествами пространства S, и поэтому также состоят из точек. В геометрии эти понятия вместе с их свойствами вводятся с помощью аксиом, выполнение которых предполагается. Мы можем с помощью рисунков строить модели этих понятий, чтобы получить о них геометрическое представление. Мы также будем полагать, что длина любого отрезка прямой выражается неотрицательным действительным числом.

Расстояние между двумя точками A и B мы будем обозначать r(A,B), а чаще просто AB, как это принято в элементарной геометрии.

Свойства функции расстояния

1) Свойство неотрицательности:

$$\forall x, y \in S, \quad r(x,y) \geq 0 \quad \textit{и} \quad r(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y .$$

2) Свойство симметричности:

$$\forall x, y \in S, \quad r(x,y) = r(y,x) .$$

3) Неравенство треугольника:

$$\forall x, y, z \in S, \quad r(x,z) \leq r(x,y) + r(y,z) ,$$

причем равенство выполняется лишь в случае, когда точка y лежит на отрезке прямой, соединяющим точки x и z. Смотрите рисунок 1.

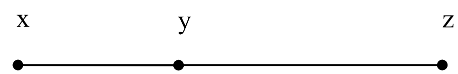


Рис. 1

Упражнения

1. В плоскости прямоугольного треугольника ABC найдите точку равноудаленную от его вершин.
2. Найдите максимально возможное значение параметра α в равенстве
$$r(A,C) = \alpha\left(r(A,B) + r(B,C)\right) .$$
3. Постройте треугольник ABC, для которого верно равенство:
$$r(A,C) = 0{,}5\left(r(A,B) + r(B,C)\right) .$$

§2. Определение вектора, как направленного отрезка

Определение. Вектором, как направленным отрезком, называется упорядоченная пара точек (A, B) и обозначается $\overline{AB}$. Точка A называется началом вектора $\overline{AB}$, точка B называется его концом.

Вектор $\overline{AB}$ изображается отрезком прямой, проходящей через точки A и B, и стрелкой в точке B:

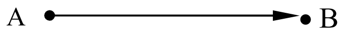


Рис. 2

Определение. Модулем вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, то есть, расстояние между точками A и B, и обозначается

$$|\overline{AB}| \doteq r(A,B) \doteq AB .$$

Проведем прямую L через начало A и конец B вектора $\overline{AB}$. Тогда все точки отрезка AB будут являться точками прямой L. Мы будем говорить, что вектор $\overline{AB}$ лежит на прямой L.

Определение. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Обозначение: $\overline{AB} \| \overline{CD}$ – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарные.

Упражнение

4. Докажите, что отношение коллинеарности, определенное на множестве всех векторов, является отношением эквивалентности (смотрите главу 18).

§3. Порядок следования точек на прямой

На любой прямой можно естественным образом установить (причем только двумя способами) строгий линейный порядок следования ее точек, смотрите ниже рисунки 3 и 4. В обоих случаях точка A предшествует точке B, соответственно точка B следует за точкой A. Геометрически порядок следования точек на прямой L изображается с помощью стрелки.

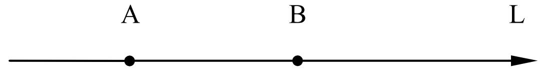


Рис. 3

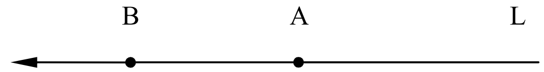


Рис. 4

Определение. Если на прямой выбран один (из двух возможных) порядок следования точек, то говорят, что на прямой выбрано положительное направление.

Определение. Прямая, на которой выбрано положительное направление называется осью.

Определение. Вектор называется коллинеарным прямой (оси), если он лежит на ней или на параллельной прямой (оси).

Обозначение: $\overline{AB} \| L$ – вектор $\overline{AB}$ коллинеарный оси (прямой) L.

Упражнение

5. Сколько возможно случаев расположения трех различных точек A, B и C на прямой? Выпишите все эти случаи.

§4. Ориентация вектора на оси

Пусть L произвольная ось и вектор $\overline{AB}$, лежит на оси L. Может быть два случая, смотрите ниже рисунки 5 и 6.

В одном случае (рисунок 5), начало вектора – точка A предшествует концу вектора, точке B, а во втором случае (рисунок 6) наоборот, начало вектора следует за его концом.

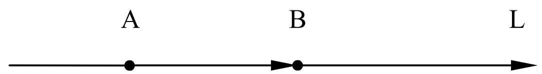


Рис. 5

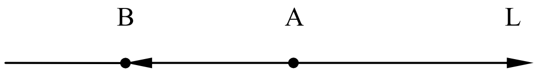


Рис. 6

Определение. Вектор, лежащий на оси, называется сонаправленным с осью, если его начало предшествует его концу (конец вектора следует за его началом). В противном случае говорят, что вектор и ось имеют противоположные направления.

Обозначение: $\overline{AB} \uparrow\uparrow L$ – вектор $\overline{AB}$ сонаправленный с осью L, $\overline{AB} \uparrow\downarrow L$ – вектор $\overline{AB}$ и ось L имеют противоположные направления.

Определение. Вектор $\overline{AB}$, лежащий на оси L, называется правоориентированным, если $\overline{AB} \uparrow\uparrow L$, и называется левоориентированным в противном случае, то есть, если $\overline{AB} \uparrow\downarrow L$.

На рисунке 5 вектор $\overline{AB}$ правоориентированный на оси L, а на следующем рисунке – левоориентированный.

Определение. Два вектора, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если, при любом выборе положительного направления на этой прямой, оба вектора будут иметь одинаковую ориентацию, и называются противоположно направленными в противном случае.

Обозначение:
$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ сонаправленные,
$\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют противоположные направления (противоположно направленные).

Пусть теперь два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на параллельных прямых. Тогда обе прямые лежат в одной плоскости. Через начала векторов проведем секущую AC. При этом возможны два случая.

Секущая AC, проведенная через начала обоих векторов, делит плоскость, в которой лежат обе параллельные прямые a и b, на две полуплоскости. В первом случае (рисунок 7) концы векторов лежат в одной полуплоскости, а во втором случае (рисунок 8) – в разных полуплоскостях.

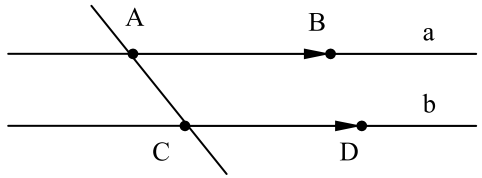


Рис. 7

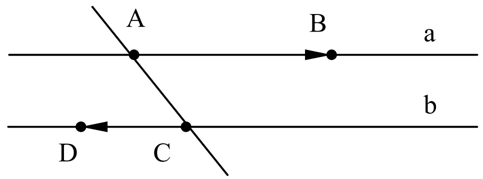


Рис. 8

Определение. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными, если их концы лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проведенной через их начала. В противном случае говорят, что векторы имеют противоположные направления (противоположно направленные).

Определение. Пусть a и b две параллельные оси. На каждой оси возьмем по одному правоориентированному вектору. Если эти векторы сонаправленные, то данные оси называются сонаправленными. В противном случае говорят, что оси имеют противоположные направления.

Обозначения сонаправленных и противоположно направленных векторов здесь такое же, как и в случае, когда оба вектора лежат на одной прямой.

Обозначения для сонаправленных и противоположно направленных осей такие же, как и для векторов.

Упражнения

6. Докажите, что отношение сонаправленности, определенное на множестве коллинеарных друг другу векторов, является отношением эквивалентности. Сколько элементов имеет соответствующее фактор-множество?
7. На множестве всех коллинеарных друг другу векторов определено бинарное

отношение "быть противоположно направленными". Какими свойствами обладает это бинарное отношение? (Смотрите главу 18.)

8. Попытайтесь придумать определение сонаправленности для коллинерных векторов независимо от того, лежат они на одной или параллельных прямых.

§5. Равенство векторов

Определение. Два вектора называются равными, если они сонаправленные и имеют равные модули:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \overset{df}{\Leftrightarrow} (\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD})\ \&\ (|\overline{AB}| = |\overline{CD}|)\,.$$

Равные векторы можно обозначать одной буквой с чертой:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{a}\,.$$

В этом случае говорят, что вектор $\overline{a}$ отложен от точки A и от точки C. Таким образом, любой вектор можно отложить от любой точки.

Понятие равенства векторов расширяет само понятие вектора. Если первоначально под вектором мы понимали упорядоченную пару точек пространства S (направленный отрезок), то теперь под вектором мы будем понимать множество **всех** направленных отрезков, сонаправленных друг с другом и имеющих одинаковую длину. Если один и тот же вектор отложить от двух различных точек, например, $\overline{a} = \overline{AB} = \overline{CD}$, то направленный отрезок $\overline{AB}$ можно совместить с направленным отрезком $\overline{CD}$ с помощью параллельного переноса. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются представителями одного и того же вектора $\overline{a}$.

На множестве всех направленных отрезков отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности. (Смотрите главу 18.) Класс эквивалентности в этом случае представляет собой множество направленных отрезков, имеющих одинаковый модуль и сонаправленных друг другу. Эти классы мы будем обозначать строчными буквами латинского алфавита с чертой: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$, и тоже называть их векторами. В физике такие векторы называются свободными векторами, в отличие от направленных отрезков $\overline{AB}, \overline{MN}, \ldots$, которые называются связанными векторами.

Обозначим через V_S множество всех векторов как направленных отрезков в пространстве точек S, а через V – множество всех свободных векторов. Тогда множество V есть, по определению, фактор-множество множества V_S относительно отношения равенства направленных отрезков:

$$V \doteq (V_S / =)\,,$$

то есть, свободные векторы представляют собой ни что иное, как классы эквивалентности, каждый из которых является множеством равных друг другу направленных отрезков.

В математике довольно часто применяется приём отождествления различных математических объектов. В данном случае, отождествляют класс эквивалентности с каким-нибудь его представителем. Обычно, в качестве представителя класса эквивалентности выбирается его элемент, обладающий каким-нибудь дополнительным свойством. В качестве представителя свободного вектора $\overline{a}$ берется направленный отрезок $\overline{MN}$, с началом в какой-нибудь, нужной для данной задачи, точке M. В этом случае мы говорим, что мы откладываем вектор $\overline{a}$ от точки M и пишем $\overline{a} = \overline{MN}$, отождествляя свободный вектор $\overline{a}$ с его представителем $\overline{MN}$.

Упражнения

9. Докажите, что отношение равенства, определенное на множестве всех векторов как направленных отрезков, является отношением эквивалентности.
10. В каждом классе сонаправленных векторов существует в точности по одному вектору отложенному от фиксированной точки O и длиной 1. Опишите геометрическое место точек концов всех таких векторов.

§6. Сложение векторов

Сначала определим сложение векторов, как направленных отрезков (смотрите рисунок 9).

Определение. Суммой двух векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом второго вектора, отложенного от конца первого.

Теперь определим сложение на множестве свободных векторов V. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V$ – два произвольных вектора. Отложим вектор $\overline{a}$, от какой-нибудь точки A и обозначим его конец буквой B, так что $\overline{AB} = \overline{a}$. Вектор $\overline{b}$ отложим от точки B (от конца первого вектора) и обозначим его конец буквой C, так что $\overline{b} = \overline{BC}$. Тогда вектор $\overline{AC}$ по определению называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{a} + \overline{b}$.

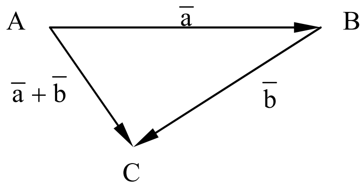


Рис. 9

Как следует из определения, сложение векторов производится с помощью их представителей. Так направленный отрезок $\overline{AB}$ есть представитель вектора $\overline{a}$, направленный отрезок $\overline{BC}$ есть представитель вектора $\overline{b}$, а направленный отрезок $\overline{AC}$ есть представитель вектора $\overline{a} + \overline{b}$. Мы должны быть уверены в том, что сумма векторов определяется однозначно и не зависит от выбора представителей слагаемых. То есть, если мы отложим вектор $\overline{a}$ от другой точки (возьмем другой представитель этого вектора), то и вектор $\overline{b}$ будет представлен другим вектором. Например, $\overline{a} = \overline{A'B'}$, $\overline{b} = \overline{B'C'}$, тогда, по определению,

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}.$$

Мы должны доказать, что $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, то есть оба эти вектора являются представителями одного и того же вектора, который мы и называем суммой данных векторов. Такая проверка называется в математике проверкой корректности определения алгебраической операции, в данном случае, сложения векторов. Попытайтесь провести эту проверку самостоятельно.

Рассмотренное выше правило сложения векторов называется правилом треугольника. Существует еще одно правило сложения векторов, которое называется правилом параллелограмма и дает точно такой же результат. Правило параллелограмма применимо только для сложения неколлинеарных векторов. Смотрите рисунок 10.

Оба вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отложим от одной точки A и обозначим через B конец вектора $\overline{a}$, через D – конец вектора $\overline{b}$. Достраиваем до параллело-

грамма. Через точку D проводим прямую параллельную AB, через точку B – прямую параллельную AD, точку пересечения построенных прямых обозначим буквой C. Тогда ABCD – параллелограмм. Вектор $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$. Это равенство следует из равенства векторов $\overline{b} = \overline{AD} = \overline{BC}$ и правила треугольника сложения векторов.

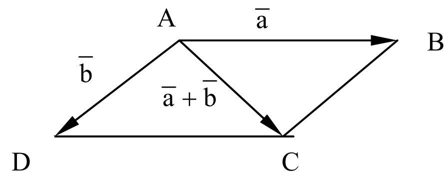


Рис. 10

Заметим, что проверять корректность правила параллелограмма нет нужды, так как оно следует из правила треугольника.

Определение. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором, и обозначается $\overline{0}$.

Очевидно, что модуль нулевого вектора равен нулю: $|\overline{0}| = 0$. Более того, нулевой вектор является нулевым элементом относительно сложения векторов (смотрите главу 18). Этот факт сразу же следует из правила треугольника сложения векторов.

Полагаем также, по определению, что нулевой вектор коллинеарный любому вектору и, более того, сонаправленный с любым вектором.

Определение. Вектор $\overline{b}$ называется противоположным вектору $\overline{a}$, если $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ и $|\overline{b}| = |\overline{a}|$, и обозначается $\overline{b} \doteq -\overline{a}$.

Теорема (О противоположном векторе)

Для любых точек A *и* B, *и для любого вектора* $\overline{a}$ *верны равенства:*

1) $\overline{BA} = -\overline{AB}$;

2) $\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$.

Доказательство. 1) Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$, очевидно, имеют противоположные направления и равные модули, то из определения противоположного вектора сразу же следует, что $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

2) Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$. Тогда $\overline{BA} = -\overline{a}$. Из правила сложения векторов (правило треугольника) сразу же следует, что сумма противоположных векторов равна нулевому вектору:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \overline{0} \quad \text{и} \quad \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BB} = \overline{0},$$

то есть, $\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$. ▲

Теорема (Свойства сложения векторов)

1) Сложение векторов подчиняется закону ассоциативности:

$$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V : (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

2) Существует нулевой элемент относительно сложения векторов, то есть нулевой вектор $\overline{0} \in V$*:*

$$\forall \overline{a} \in V : \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}.$$

3) Для любого вектора $\overline{a} \in V$ *существует противоположный ему вектор* $-\overline{a} \in V$*, такой, что*

$$\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}.$$

4) Сложение векторов подчиняется закону коммутативности, то есть $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V$ *верно равенство:*

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

Доказательство. 1) Смотрите рисунок 11. Воспользуемся правилом треугольника сложения векторов. Пусть $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$. Тогда

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Отложим вектор $\overline{c}$ от точки C и обозначим его конец буквой D, так что $\overline{c} = \overline{CD}$. Тогда по правилу треугольника

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

С другой стороны, отложим вектор $\overline{b} + \overline{c} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$. Тогда

$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD},$$

что и требовалось доказать.

Второе и третье свойства уже доказаны. Последнее свойство сразу же следует из правила параллелограмма сложения векторов. ▲

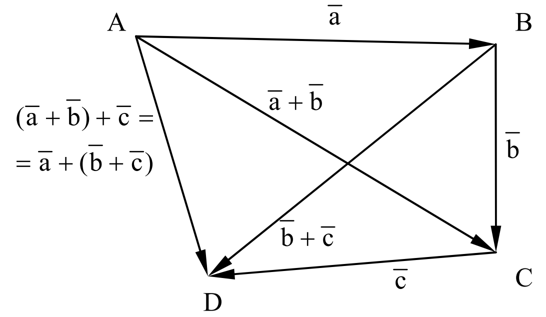


Рис. 11

Упражнение

11. Докажите корректность определения сложения векторов.

§7. Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число α называется вектор $\overline{b} \doteq \alpha \cdot \overline{a}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $|\overline{b}| = |\alpha \cdot \overline{a}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$; 2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha \geq 0$ и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$.

Теорема (Свойства умножения вектора на число)

1) Ассоциативность умножения вектора на число:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a} \in V:\ \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a}) = (\alpha\beta) \cdot \overline{a}.$$

2) Дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a} \in V:\ (\alpha + \beta) \cdot \overline{a} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{a}.$$

3) Дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения векторов:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a}, \overline{b} \in V:\ \alpha \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \alpha \cdot \overline{a} + \alpha \cdot \overline{b}.$$

4) $\forall \overline{a} \in V:\ 1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Доказательство. Четвертое свойство вытекает из определения умножения вектора на число.

Докажем первое свойство. Умножение вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на число α можно интерпретировать как гомотетию h_α какой-нибудь плоскости P, в которой лежит данный вектор, с центром гомотетии в начале вектора и коэффициентом α. Такая гомотетия плоскости P оставляет точку A на месте, $h_\alpha(A) = A$, а конец вектора – точку B переводит (отображает) в точку C: $h_\alpha(B) = C$, причем $|AC| = |\alpha| \cdot |AB|$ и точка C лежит на луче AB, если $\alpha > 0$ и на противоположном луче, если $\alpha < 0$.

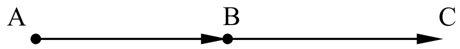


Рис. 12

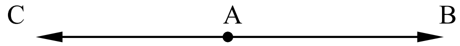


Рис. 13

Теперь свойство 1 следует из того что композиция гомотетий (то есть последовательное их выполнение) есть гомотетия, причем $h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta}$ и для любой точки M плоскости P верно равенство:

$$(h_\alpha \circ h_\beta)(M) = h_\alpha(h_\beta(M)) = h_{\alpha\beta}(M).$$

Пусть (смотрите рисунок 14)

$$\overline{a} = \overline{AB},\ \beta \cdot \overline{a} = \beta \cdot \overline{AB} = \overline{AC},\ \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a}) = \alpha \cdot \overline{AC} = \overline{AD}.$$

Тогда

$$h_\beta(B) = C,\ h_\alpha(C) = D \text{ и } h_{\alpha\beta}(B) = h_\alpha(h_\beta(B)) = h_\alpha(C) = D,$$

то есть $(\alpha\beta) \cdot \overline{a} = \overline{AD}$.

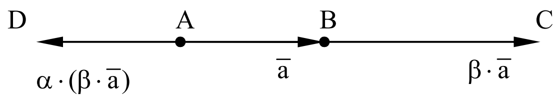


Рис. 14

Таким образом, $\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a}) = \overline{AD}$ и $(\alpha\beta) \cdot \overline{a} = \overline{AD}$, следовательно,

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a}) = (\alpha\beta) \cdot \overline{a}.$$

Первое свойство доказано.

Доказательство второго свойства оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. Заметим, что если оба числа α и β имеют одинаковый знак, то свойство очевидно. Осталось рассмотреть случай разных знаков чисел α и β.

Третье свойство очевидно из рисунка 15, где $\alpha > 0$.

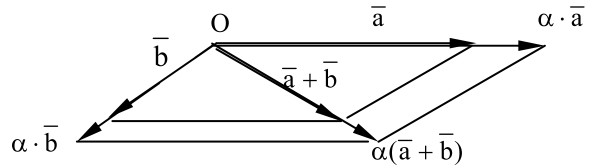


Рис. 15

Заметим, что такая картинка возникает, когда мы применяем к плоскости, в которой лежат оба вектора, отложенные от одной точки O, преобразование гомотетии с центром гомотетии в точке O и коэффициентом α. ▲

Теорема (О векторном пространстве)

Множество всех векторов является векторным (линейным) пространством над полем действительных чисел.

Доказательство. Теорема непосредственно следует из определения линейного пространства (смотрите главу 18) и из свойств сложения векторов и умножения на действительные числа. ▲

В дальнейшем линейное пространство векторов как направленных отрезков мы будем называть просто векторным пространством или пространством векторов.

Пусть L произвольная прямая в пространстве S. Множество всех векторов коллинеарных прямой L будем обозначать V_L. Ясно, что $V_L \subset V$. Далее, сумма любых двух векторов коллинеарных прямой L также является вектором коллинеарным прямой L:

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in V_L \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} \in V_L.$$

В этом случае говорят, что множество векторов V_L замкнуто относительно сложения векторов.

Аналогично,

$$\forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\overline{a} \in V_L \Rightarrow \alpha\cdot\overline{a} \in V_L,$$

то есть множество V_L замкнуто относительно операции умножения вектора на действительное число. Отсюда сразу же следует, что для векторов из множества V_L справедливы все свойства сложения и умножения на действительные числа, то есть, справедливы все аксиомы вещественного линейного пространства. Таким образом, множество V_L также является векторным пространством.

Говорят, что векторное пространство V_L является векторным подпространством векторного пространства V.

Определение. Вектор называется компланарным плоскости, если он лежит на этой плоскости или на плоскости ей параллельной.

Пусть P – произвольная плоскость. Множество всех векторов компланарных плоскости P будем обозначать V_P. Как и в предыдущем случае, множество V_P замкнуто относительно сложения векторов и умножения на действительное число, и является векторным пространством, а также подпространством векторного пространства V.

Если прямая L лежит в плоскости P или параллельна ей, то

$$V_L \subset V_P \subset V$$

и V_L – подпространство векторного пространства V_P и одновременно векторного пространства V.

Векторное пространство V_L мы будем называть пространством векторов коллинеарных прямой L, а V_P – пространством векторов компланарных плоскости P.

Упражнение

12. Докажите теорему о свойствах умножения вектора на число без использования понятия гомотетии. (Указание: используйте определения равенства векторов и умножения вектора на число. В первом и во втором свойствах рассмотрите случаи чисел имеющих одинаковые и разные знаки, а в третьем свойстве рассмотрите случаи коллинеарных и неколлинеарных векторов.)

§8. Простейшие свойства векторного пространства

Теорема (Простейшие свойства векторного пространства)

1) В векторном пространстве имеется единственный нулевой вектор.

2) В векторном пространстве любой вектор имеет единственный противоположный ему вектор.

3) Произведение скаляра на вектор равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда либо скаляр нулевой, либо вектор нулевой:

$$\lambda\cdot\overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow (\lambda = 0)\vee(\overline{x} = \overline{0}).$$

4) Произведение вектора на минус единицу равно противоположному вектору:

$$\forall\overline{x} \in V:\ (-1)\cdot\overline{x} = -\overline{x}.$$

Доказательство. Эта теорема является частным случаем соответствующей более общей теоремы (смотрите главу 18) и потому она в доказательстве не нуждается. Однако, этот частный случай можно доказать по другому.

1) Существование нулевого вектора следует из определения вектора как направленного отрезка. Единственность нулевого вектора следует из определения равенства векторов. Любые два нулевых вектора равны, так как они имеют равные модули (равные нулю) и сонаправленные, ибо нулевой вектор сонаправленный любому другому по определению.

2) Существование противоположного вектора как направленного отрезка очевидно. Для любого вектора $\overline{AB}$, вектор $\overline{BA}$ является противоположным ему. Единственность противоположного вектора следует из правила сложения векторов. Пусть $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – два вектора противоположные вектору $\overline{a} = \overline{AB}$. Тогда по свойству противоположных векторов $\overline{AB} + \overline{b} = \overline{0}$, откуда по правилу сложения векторов следует, что вектор $\overline{b} = \overline{BA}$ и аналогично $\overline{c} = \overline{BA}$, откуда $\overline{b} = \overline{c}$, что и требовалось доказать.

3) Пусть $\lambda\cdot\overline{x} = \overline{0}$ и $\lambda \neq 0$. Тогда из определения равных векторов и по определению умножения вектора на число $|\lambda\cdot\overline{x}| = |\overline{0}| = 0$, то есть $|\lambda|\cdot|\overline{x}| = 0$, где $|\lambda| \neq 0$, откуда $|\overline{x}| = 0$ и, следовательно, $\overline{x} = \overline{0}$.

Обратно, если $\lambda = 0$ или $\overline{x} = \overline{0}$, то $|\lambda\cdot\overline{x}| = |\lambda|\cdot|\overline{x}| = 0$, и $\lambda\cdot\overline{x} = \overline{0}$.

4) По определению умножения вектора на число вектор $(-1)\cdot\overline{x}$ имеет модуль равный модулю вектора $\overline{x}$ и противоположное ему направ-

ление: $|(-1)\cdot\overline{x}|=|\overline{x}|$ и $(-1)\cdot\overline{x}\uparrow\downarrow\overline{x}$, следовательно, по правилу сложения векторов

$$(-1)\cdot\overline{x}+\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow(-1)\cdot\overline{x}=-\overline{x}\ .\ \blacktriangle$$

Определение. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор

$$\overline{a}-\overline{b}\doteq\overline{a}+(-\overline{b})\ .$$

Другими словами, разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}\doteq\overline{a}-\overline{b}$, для которого верно равенство $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$. Смотрите следующий рисунок.

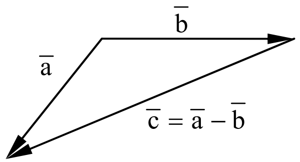


Рис. 16

Заметим, что если на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить параллелограмм, как на рисунке 10, то их сумма $\overline{a}+\overline{b}$ и разность $\overline{a}-\overline{b}$ будут лежать на диагоналях параллелограмма, причем начало вектора $\overline{a}-\overline{b}$ будет совпадать с концом вектора $\overline{b}$, а конец – с концом вектора $\overline{a}$.

Упражнения

13. Докажите, что разность векторов не подчиняется законам коммутативности и ассоциативности.
14. Докажите, что умножение вектора на скаляр подчиняется законам дистрибутивности относительно разности векторов и разности скаляров.

§9. Условие коллинеарности двух векторов

Определение. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ два произвольных вектора. Если верно равенство $\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}$, где $\alpha\in\mathbb{R}$, то говорят, что вектор $\overline{b}$ линейно выражается через вектор $\overline{a}$.

Теорема (Условие коллинеарности двух ненулевых векторов)

Для того, чтобы два ненулевых вектора были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы один из них линейно выражался через другой:

$$\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}:\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}\ .$$

Доказательство. Пусть $\exists\alpha\in\mathbb{R}:\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}$. Тогда из определения умножения вектора на число следует, что либо $\overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, либо $\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{a}$, в зависимости от знака числа α, то есть, $\overline{a}\parallel\overline{b}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\overline{a}\parallel\overline{b}$ и $\overline{a}\neq\overline{0}\neq\overline{b}$. Возможны два случая.

а) Пусть $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$. Так как $\overline{a}\neq\overline{0}$, то $|\overline{a}|\neq 0$. Обозначим буквой α отношение длин этих векторов:

$$\alpha\doteq\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}>0\ .$$

Отсюда следует равенство $|\overline{b}|=\alpha|\overline{a}|=|\alpha|\cdot|\overline{a}|$ и, применяя определение умножения вектора на число, получаем, что

$$\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}\ .$$

б) Пусть $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$. Положим по определению

$$\alpha\doteq-\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}<0\ .$$

Отсюда следует равенство

$$|\overline{b}|=-\alpha|\overline{a}|=|\alpha|\cdot|\overline{a}|$$

и, применяя определение умножения вектора на число, получаем, что

$$\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}\ .\ \blacktriangle$$

Упражнение

15. Докажите, что теорема §9 остается верной и в том случае, когда один из векторов или оба равны нулевому вектору.

Дополнительные упражнения к главе 1

16. Докажите, что треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда один из его углов равен 60° и противолежащая этому углу сторона равна среднему арифметическому других его сторон.
17. Докажите, что существуют неравносторонние треугольники ABC, для которых верно равенство: $r(A,C)=\frac{1}{2}\big(r(A,B)+r(B,C)\big)$.

Глава 2. Декартовая система координат на прямой
§1. Проекция вектора на ось

Определение. Углом между двумя векторами называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Определение. Углом между вектором и осью называется угол между данным вектором и любым правоориентированным вектором этой оси.

Обозначение: $(\overline{a} \wedge \overline{b}) = \alpha$, $(\overline{a} \wedge L) = (\overline{a} \wedge \overline{e}) = \alpha$.

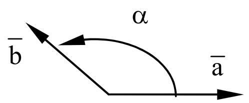


Рис. 17

Рис. 18

Из определения следует, что $(\overline{a} \wedge \overline{b}) = (\overline{b} \wedge \overline{a}) \in [0; \pi]$.

Пусть дан вектор $\overline{AB}$ и ось L. Через точки A и B проведем плоскости α и β перпендикулярные оси L. Смотрите рисунок 3. Точки пересечения оси L с этими плоскостями обозначим соответственно через A' и B'. Тогда по определению, точка A' является проекцией точки A на ось L, а точка B' – проекцией точки B на ось L.

Определение. Пусть A' и B' – проекции точек A и B на ось L. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось L называется длина отрезка $A'B'$, если вектор $\overline{A'B'}$ правоориентированный на оси L и противоположное ему число в противном случае:

$$\text{пр}_L \overline{AB} = \begin{cases} A'B', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow L \\ -A'B', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow L \end{cases}.$$

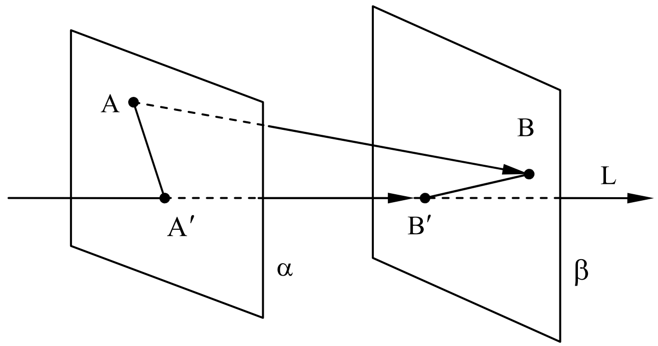


Рис. 19

Следствие 1. $\text{пр}_L \overline{AB} = \text{пр}_L \overline{A'B'}$.

Доказательство. Так как точка $A' \in L$, то она совпадает со своей проекцией на ось L. То же верно и для точки B' (смотрите рисунок 19). Теперь, по определению проекции вектора на ось, имеем:

$$\text{пр}_L \overline{A'B'} = \left\{ \begin{matrix} A'B', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow L \\ -A'B', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow L \end{matrix} \right\} = \text{пр}_L \overline{AB}. \ \blacktriangle$$

Следствие 2. *Пусть* L *– произвольная ось и вектор* $\overline{AB}$ *лежит на оси* L. *Тогда*

$$\text{пр}_L \overline{AB} = \begin{cases} AB & \text{если } \overline{AB} \uparrow\uparrow L \\ -AB, & \text{если } \overline{AB} \uparrow\downarrow L \end{cases}.$$

Доказательство. Очевидно из определения. ▲

Теорема (О вычислении проекции вектора на ось)
Проекция вектора на ось не зависит от выбора точки его начала и равна произведению его модуля на косинус угла между ним и осью:

$$\text{пр}_L \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a} \wedge L).$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала ситуацию, когда вектор $\bar{a}$ отложен от точки A оси L. Здесь возможны два случая, в зависимости от того, является угол φ между данным вектором и данной осью острым или тупым. Смотрите рисунки 20 и 21.

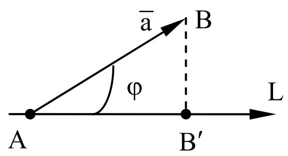


Рис. 20

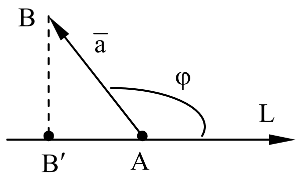


Рис. 21

В первом случае, смотрите рисунок 20, $\overline{AB'}\uparrow\uparrow L$ и по определению проекции вектора на ось

$$\text{пр}_L\overline{AB}=|\overline{AB'}|=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi,$$

где последнее равенство следует из прямоугольного треугольника ABB'.

Во втором случае, смотрите рисунок 21, $\overline{AB'}\uparrow\downarrow L$ и тогда

$$\text{пр}_L\overline{AB}=-|\overline{AB'}|=-|\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\varphi)=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi.$$

2) Пусть теперь вектор $\bar{a}=\overline{AB}$ отложен от произвольной точки A. Найдем проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L. Смотрите рисунки 19 и 22.

Через точку A' проведем прямую параллельную прямой AB и обозначим через C точку её пересечения с плоскостью β. Рассмотрим четырехугольник $AA'CB$. Сторона $AB\parallel A'C$ по построению, стороны $AA'\parallel BC$, как линии пересечения параллельных плоскостей α и β плоскостью четырехугольника $AA'CB$. Таким образом, четырехугольник $AA'CB$ – параллелограмм и $\overline{AB}=\overline{A'C}$. А так как точка C лежит на плоскости $\beta\perp L$, то точка B' – проекция точки C на ось L и, следовательно, $\text{пр}_L\overline{A'C}=\text{пр}_L\overline{AB}$. Из равенства векторов $\overline{AB}=\overline{A'C}$ следует равенство их модулей и равенство углов между этими векторами и осью L, откуда, по уже доказанной в первой части этого доказательства формуле, получаем:

$$\text{пр}_L\bar{a}=\text{пр}_L\overline{AB}=\text{пр}_L\overline{A'C}=$$

$$=|\overline{A'C}|\cos(\overline{A'C}\wedge L)=|\overline{AB}|\cos(\overline{AB}\wedge L)=|\bar{a}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge L).\ \blacktriangle$$

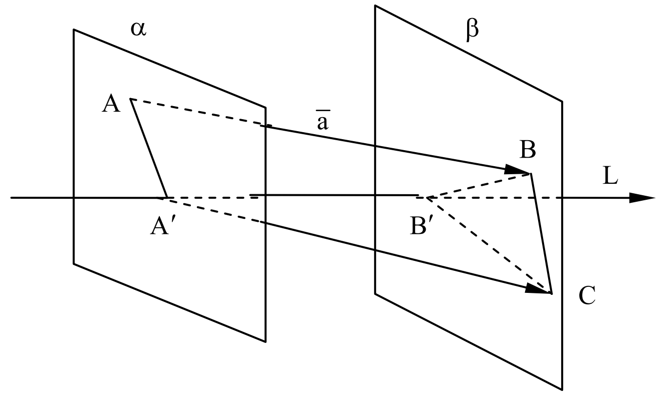


Рис. 22

Следствие (О проекциях равных и противоположных векторов)

1) Равные векторы имеют равные проекции на любую ось:

$$\bar{a}=\bar{b}\quad\Rightarrow\quad\text{пр}_L\bar{a}=\text{пр}_L\bar{b}.$$

2) Проекции противоположных векторов на любую ось являются противоположными числами:

$$\text{пр}_L\bar{a}=-\text{пр}_L(-\bar{a}).$$

Доказательство. 1) Из определений равных векторов и угла между вектором и осью следует, что, если $\bar{a}=\bar{b}$, то

$$(\bar{a}\wedge L)=(\bar{b}\wedge L)\ \text{и}\ |\bar{a}|=|\bar{b}|.$$

Применяя теорему о вычислении проекции вектора на ось, получаем:

$$\text{пр}_L\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge L)=|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{b}\wedge L)=\text{пр}_L\bar{b}.$$

2) Из определения угла между вектором и осью следует, что, если $(\bar{a}\wedge L)=\varphi$, то $(-\bar{a}\wedge L)=\pi-\varphi$. Отсюда, учитывая, что противоположные векторы имеют равные модули, получаем:

$$\text{пр}_L(-\bar{a})=|-\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\varphi)=-|\bar{a}|\cdot\cos\varphi=-\text{пр}_L\bar{a}.\ \blacktriangle$$

Определение. Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется проекция вектора $\bar{a}$ на любую ось L сонаправленную с вектором $\bar{b}$:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}\doteq\text{пр}_L\bar{a}.$$

Легко доказать, что все результаты этого и последующих параграфов верны и для проекции вектора на вектор.

Упражнения

18. Опишите условия, при которых проекция вектора на ось равна нулю (или принимает отрицательные значения).
19. Найдите проекцию вектора на ось Ox, если известно, что он лежит на этой оси и имеет левую (или правую) ориентацию.

§2. Свойства проекции вектора на ось

Рассмотрим сначала один частный случай, который носит название теоремы Шаля.

Теорема (М. Шаль, 1830г)

Для любых трех точек A, B, C *произвольной оси* L *верно равенство:*

$$\text{пр}_L \overline{AB} = \text{пр}_L \overline{AC} + \text{пр}_L \overline{CB}.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда точка C находится на отрезке AB:

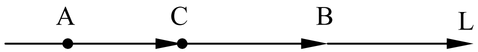


Рис. 23

В этом случае векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ правоориентированные и их проекции на ось L равны их модулям (смотрите §1, следствие 2):

$$\text{пр}_L \overline{AB} = |\overline{AB}|, \quad \text{пр}_L \overline{AC} = |\overline{AC}|, \quad \text{пр}_L \overline{CB} = |\overline{CB}|.$$

Так как модуль вектора равен расстоянию между его началом и концом

$$|\overline{AB}| = r(A,B), \quad |\overline{AC}| = r(A,C), \quad |\overline{CB}| = r(C,B),$$

то по свойству функции расстояния

$$r(A,B) = r(A,C) + r(C,B),$$

откуда следует доказываемое равенство:

$$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}| \Rightarrow \text{пр}_L \overline{AB} = \text{пр}_L \overline{AC} + \text{пр}_L \overline{CB}.$$

2) Теперь рассмотрим какой-нибудь другой случай расположения точек A, B, C на оси L, например такой, как на рисунке 24. Так как точка

A находится на отрезке BC, то используя только что доказанный случай, имеем равенство:

$$\text{пр}_L \overline{BC} = \text{пр}_L \overline{BA} + \text{пр}_L \overline{AC}.$$

Так как $\text{пр}_L \overline{BC} = -\text{пр}_L \overline{CB}$ и $\text{пр}_L \overline{BA} = -\text{пр}_L \overline{AB}$, то

$$-\text{пр}_L \overline{CB} = -\text{пр}_L \overline{AB} + \text{пр}_L \overline{AC}.$$

Откуда получаем

$$\text{пр}_L \overline{AB} = \text{пр}_L \overline{AC} + \text{пр}_L \overline{CB}.$$

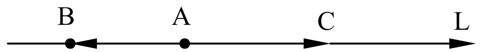


Рис. 24

Аналогично доказываются все оставшиеся случаи расположения точек A, B, C на оси L. ▲

Теорема (Свойства проекции вектора на ось)

Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}$*, действительного числа* k *и произвольной оси* L *верны равенства:*

$$\text{пр}_L (\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_L \overline{a} + \text{пр}_L \overline{b} \quad \text{и} \quad \text{пр}_L (k \cdot \overline{a}) = k \cdot \text{пр}_L \overline{a}.$$

Другими словами:

проекция суммы равна сумме проекций, а скалярный множитель можно выносить за знак проекции.

Доказательство. 1) Отложим вектор $\overline{a}$ от произвольной точки A и сложим с вектором $\overline{b}$ по правилу треугольника. Смотрите рисунок 25.

Пусть A', B', C' – проекции точек A, B и C на ось L. Тогда, в силу следствия 1 §1,

$$\text{пр}_L \overline{AC} = \text{пр}_L \overline{A'C'}, \quad \text{пр}_L \overline{AB} = \text{пр}_L \overline{A'B'}, \quad \text{пр}_L \overline{BC} = \text{пр}_L \overline{B'C'}.$$

Далее, по теореме Шаля,

$$\text{пр}_L \overline{A'C'} = \text{пр}_L \overline{A'B'} + \text{пр}_L \overline{B'C'},$$

откуда следует равенство

$$\text{пр}_L \overline{AC} = \text{пр}_L \overline{AB} + \text{пр}_L \overline{BC}.$$

А так как $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, то $\text{пр}_L (\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_L \overline{a} + \text{пр}_L \overline{b}$.

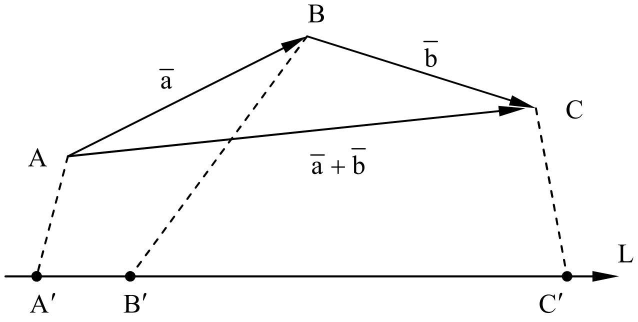
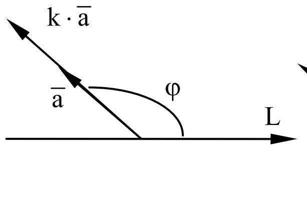


Рис. 25

2) Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим два случая: а) $k > 0$ (смотрите рисунок 26); б) $k < 0$ (рисунок 27).



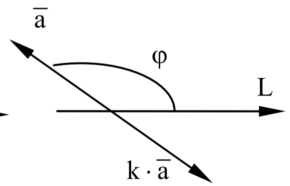


Рис. 26 Рис. 27

а) Пусть $k > 0$. По определению умножения вектора на число

$$k \cdot \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}.$$

Отсюда следует что

$$(\overline{a} \wedge L) = (k \cdot \overline{a} \wedge L) = \varphi,$$

и по теореме о вычислении проекции вектора на ось

$$\text{пр}_L(k \cdot \overline{a}) = |k \cdot \overline{a}| \cdot \cos\varphi = |k| \cdot |\overline{a}| \cos\varphi = k \cdot \text{пр}_L \overline{a}.$$

б) Пусть $k < 0$. Тогда

$$k \cdot \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a} \quad \text{и} \quad (k \cdot \overline{a} \wedge L) = \pi - (\overline{a} \wedge L) = \pi - \varphi.$$

Применяя теорему о вычислении проекции вектора на ось, получаем:

$$\text{пр}_L(k \cdot \overline{a}) = |k \cdot \overline{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |k| \cdot |\overline{a}| \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= (-k)|\overline{a}|(-\cos\varphi) = k|\overline{a}|\cos\varphi = k \cdot \text{пр}_L \overline{a}. \ \blacktriangle$$

Упражнения

20. Выпишите все возможные случаи расположения трех точек на оси (учтите, что точки могут совпадать).
21. Докажите теорему Шаля ещё для пары случаев не рассмотренных при её доказательстве. Рассмотрите один из случаев совпадения двух точек.
22. Докажите, что теорема о свойствах проекции вектора на ось остается справедливой и для случая проекции вектора на вектор.

§3. Координатная ось

В геометрии часто обозначают одинаково и сам отрезок и его длину. Если имеется отрезок прямой, ограниченный точками A и B, то этот отрезок, как геометрический объект, обозначается AB. Смотрите рисунок 28.

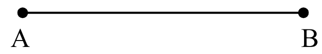


Рис. 28

С другой стороны, длина этого отрезка, то есть расстояние между точками A и B обозначается точно также: AB.

Мы, в нашем курсе, уже встречались с различными обозначениями длины отрезка:

$$AB = r(A, B) = |\overline{AB}|.$$

В дальнейшем мы будем стараться придерживаться традиционного обозначения и обозначать длину отрезка AB также, как и сам отрезок: AB. Обычно, из контекста бывает ясно о чем идет речь, об отрезке или его длине.

Пусть дана произвольная ось. Выберем и зафиксируем на этой оси произвольную точку O, которую будем называть началом координат (точкой отсчета), а саму ось будем обозначать Ox. Пусть A произвольная (текущая) точка оси Ox.

Определение. Вектор $\overline{OA}$, где O – начало координат, называется радиус-вектором точки A и обозначается $\overline{r}_A \doteq \overline{OA}$.

Определение. Координатой точки A, лежащей на оси Ox, называется проекция на эту ось её радиус-вектора $\overline{OA}$: $x_A \doteq \text{пр}_x \overline{OA}$.

Отложим на оси Ox точку E с координатой $x_E = 1$. Единичный отрезок OE называется масштабом на данной оси Ox.

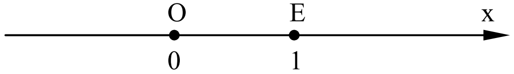


Рис. 29

Определение. Прямая, на которой выбрано положительное направление, начало координат, масштаб, и для каждой точки которой определено понятие её координаты, называется координатной прямой (осью). Говорят также, что на прямой определена декартовая система координат.

Определение. Та часть координатной оси, все точки которой следуют за началом координат, называется положительной полуосью, и обозначается Ox^+. Отрицательной полуосью Ox^- называется та часть координатной оси, все точки которой предшествуют началу координат.

Теорема (О координате точки числовой оси)
Для координаты точки A *числовой оси* Ox *верно равенство:*

$$x_A = \begin{cases} OA, & \text{если } A \in Ox^+ \\ -OA, & \text{если } A \in Ox^- \end{cases}.$$

Доказательство. Из определений координаты точки оси и проекции вектора на ось следуют равенства:

$$x_A \doteq \text{пр}_x \overline{OA} = \begin{cases} OA, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\uparrow Ox \\ -OA, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\downarrow Ox \end{cases}.$$

Легко видеть, смотрите рисунок 30, что

$$\overline{OA} \uparrow\uparrow Ox \Leftrightarrow A \in Ox^+,$$

$$\overline{OA} \uparrow\downarrow Ox \Leftrightarrow A \in Ox^-,$$

откуда и следует утверждение теоремы. ▲

Рис. 30

Теорема (Условие совпадения точек координатной оси)
Две точки координатной оси совпадают тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\forall A, B \in Ox : A = B \Leftrightarrow x_A = x_B.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in Ox$ – две произвольные точки оси Ox и $A = B$. Тогда их радиус-векторы равны, а равные векторы имеют равные проекции на любую ось. Отсюда следует:

$$x_A \doteq \text{пр}_x \overline{OA} = \text{пр}_x \overline{OB} \doteq x_B.$$

Обратно, пусть $A \neq B$ – две произвольные различные точки оси Ox. Из предыдущей теоремы следует, что если точки A и B лежат на разных полуосях координатной оси Ox, то их координаты имеют разные знаки и поэтому не равны между собой: $x_A \neq x_B$. А если они лежат на одной полуоси, то они лежат на разных расстояниях от начала координат: $OA \neq OB$, откуда следует, что $x_A \neq x_B$. Отсюда, $x_A = x_B \Rightarrow A = B$. ▲

Теорема (Об отождествлении точки с действительным числом)
Любую точку координатной оси можно отождествить с действительным числом (её координатой), и обратно, любое действительное число можно отождествить с некоторой точкой координатной оси.

Доказательство. Достаточно доказать, что между множеством точек координатной оси и множеством действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие (биекция). С этой целью устроим отображение из множества точек координатной оси Ox в множество действительных чисел:

$$f : Ox \to \mathbb{R}$$

по правилу: каждой точке $A \in Ox$ поставим в соответствие её координату $f(A) \doteq x_A \in \mathbb{R}$.

1) Из предыдущей теоремы следует, что каждая точка координатной оси Ox имеет единственную координату. Это означает, что правило f действительно является отображением множества Ox в множество $\mathbb{R}$.

2) Из предыдущей теоремы следует, что если точки A и B оси Ox различные, то их образы (их координаты) тоже различные:

$$A \neq B \Rightarrow f(A) \doteq x_A \neq x_B \doteq f(B).$$

Это означает, что отображение f является инъекцией.

3) И, наконец, пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное действительное число. Отложим на оси Ox точку A на расстоянии $OA = |\alpha|$, причем, если

$\alpha > 0$, то точку A откладываем на положительной полуоси. Если же $\alpha < 0$, то точку A откладываем на отрицательной полуоси. Тогда по построению

$$f(A) \doteq x_A = \alpha .$$

Следовательно, любое действительное число является образом некоторой точки, то есть отображение f является сюръекцией.

Отображение, которое является одновременно инъекцией и сюръекцией является биекцией. ▲

В силу последней теоремы, координатную ось часто называют числовой осью и, при необходимости, после буквы, обозначающей точку оси, в круглых скобках пишут её координату, например: $A(x_A), B(x_B)$, …

Упражнение

23. Модуль любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ определяется формулой:

$$|x| \doteq \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

Докажите, что модуль действительного числа равен расстоянию от начала координат числовой оси до точки отождествлённой с этим числом.

§4. Координата вектора числовой оси

Определение. Пусть вектор $\overline{a}$ коллинеарный числовой оси Ox. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось Ox называется его координатой, а запись

$$\overline{a} = (x), \text{ где } x = \text{пр}_x \overline{a}$$

называется координатной формой записи вектора $\overline{a}$.

Теорема (Условие равенства векторов коллинеарных числовой оси)

Два вектора коллинеарные числовой оси равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \parallel Ox: \quad \overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \text{пр}_x \overline{a} = \text{пр}_x \overline{b} .$$

Доказательство. 1) Необходимость условия очевидна в силу того, что равные векторы имеют равные проекции на любую ось.

2) Докажем достаточность. Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные числовой оси Ox и их координаты равны, то есть

$$\text{пр}_x \overline{a} = \text{пр}_x \overline{b} .$$

Отложим оба вектора от начала координат числовой оси Ox. Пусть

$\overline{a} = \overline{OA}$ и $\overline{b} = \overline{OB}$. Тогда по определению координаты точки числовой оси имеем: $\text{пр}_x \overline{a} = \text{пр}_x \overline{OA} = x_A$ и $\text{пр}_x \overline{b} = \text{пр}_x \overline{OB} = x_B$, откуда следует, что $x_A = x_B$ и $A = B$, то есть, $\overline{a} = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{b}$. ▲

Теорема (Об отождествлении вектора с действительным числом)

Любой вектор коллинеарный координатной оси можно отождествить с действительным числом (его координатой), и обратно, любое действительное число можно отождествить с некоторым вектором коллинеарным координатной оси.

Доказательство. Обозначим через V_x множество всех векторов коллинерных оси Ox. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что между множеством V_x и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ существует взаимно однозначное соответствие (биекция). С этой целью устроим отображение из множества V_x в множество $\mathbb{R}$:

$$f : V_x \to \mathbb{R}$$

по правилу: каждому вектору $\overline{a} \in V_x$ поставим в соответствие его координату $f(\overline{a}) \doteq \text{пр}_x \overline{a} \in \mathbb{R}$.

1) Из предыдущей теоремы следует, что каждый вектор коллинеарный координатной оси Ox имеет единственную координату. Это означает, что правило f действительно является отображением множества V_x в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

2) Из предыдущей теоремы следует, что если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинерные оси Ox различные, то их образы (их координаты) тоже различные:

$$\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow f(\overline{a}) \doteq \text{пр}_x \overline{a} \neq \text{пр}_x \overline{b} \doteq f(\overline{b}) .$$

Это означает, что отображение f является инъекцией.

3) И, наконец, пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное действительное число. По теореме об отождествлении точек числовой оси с действительными числами, этому числу α соответствует на числовой оси Ox некоторая точка A с координатой $x_A = \alpha$. Тогда

$$\alpha = x_A \doteq \text{пр}_x \overline{OA} \doteq f(\overline{OA}) .$$

Следовательно, любое действительное число является образом некоторого вектора коллинеарного оси Ox. Это означает, что отображение f является сюръекцией. Отображение, которое является одновременно инъекцией и сюръекцией является биекцией. ▲

Заметим, что именно последняя теорема позволяет нам пользоваться координатной формой записи вектора коллинеарного числовой оси.

Заметим также, что обе теоремы об отождествлении позволили нам, говоря современным языком, провести "оцифровку" некоторых геометрических объектов, благодаря чему, как мы скоро увидим, мы сможем заменить действия с этими геометрическими объектами (точками, векторами) на действия с соответствующими действительными числами. Смотрите следующие теоремы.

Теорема (Формулы координаты вектора, его модуля и расстояния между двумя точками числовой оси)

Пусть A *и* B *– произвольные точки координатной оси* Ox. *Тогда координату вектора* $\overline{AB}$, *его модуль и расстояние между данными точками можно найти по формулам:*

1) $\overline{AB} = (x_B - x_A)$ *;*

2) $AB = |\overline{AB}| = |x_B - x_A|$.

Доказательство. 1) По определению координата вектора $\overline{AB}$ есть его проекция на ось Ox. По теореме Шаля

$$\text{пр}_x\overline{AB} = \text{пр}_x\overline{AO} + \text{пр}_x\overline{OB}.$$

Учитывая, что $\text{пр}_x\overline{AO} = -\text{пр}_x\overline{OA}$ и по определению координаты точки оси $\text{пр}_x\overline{OA} = x_A$, $\text{пр}_x\overline{OB} = x_B$, получаем:

$$\text{пр}_x\overline{AB} = \text{пр}_x\overline{OB} - \text{пр}_x\overline{OA} = x_B - x_A.$$

2) Так как вектор $\overline{AB}$ лежит на оси Ox, то его проекция на эту ось либо совпадает с его модулем, либо противоположна ему:

$$\text{пр}_x\overline{AB} = \pm|\overline{AB}| \Rightarrow AB = |\overline{AB}| = |\text{пр}_x\overline{AB}| = |x_B - x_A|. \ \blacktriangle$$

На основании доказанного можно сформулировать два полезных с практической точки зрения правила.

1) Для вычисления координаты вектора, лежащего на числовой оси, нужно из координаты его конца вычесть координату его начала.

2) Расстояние между двумя точками числовой оси равно модулю разности их координат.

Теорема (О действиях с векторами в координатной форме)

Пусть $k \in \mathbb{R}$ *– произвольное действительное число,* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *– произвольные векторы коллинеарные числовой оси* Ox. *Тогда:*

1) $\overline{a} + \overline{b} = (\text{пр}_x\overline{a} + \text{пр}_x\overline{b})$ *;*

2) $k \cdot \overline{a} = (k \cdot \text{пр}_x\overline{a})$.

Доказательство. По условию векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные оси Ox, тогда их сумма $\overline{a} + \overline{b}$ есть вектор также коллинеарный оси Ox, и по определению координаты вектора коллинеарного оси Ox имеем

$$\overline{a} + \overline{b} = (\text{пр}_x(\overline{a} + \overline{b})) = (\text{пр}_x\overline{a} + \text{пр}_x\overline{b}).$$

Последнее равенство верно в силу теоремы о свойствах проекций вектора на ось. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ▲

Эту теорему можно сформулировать в виде правила.

При сложении векторов коллинеарных числовой оси их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координата умножается на это число.

Упражнения

24. Найдите координату вектора $\overline{a} \parallel Ox$ и запишите его в координатной форме, если он имеет на этой оси левую (правую) ориентацию и известен его модуль. (Указание: можно воспользоваться теоремой о вычислении проекции вектора на ось.)
25. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдите геометрическое место точек на числовой оси, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$|x - x_0| \le 1 \text{ и } |x - x_0| > 1,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольное фиксированное действительное число. (Указание: отметьте на числовой оси Ox точки с координатами $x_0 - 1, x_0, x_0 + 1$ и отметьте те точки числовой оси, расстояние от которых до точки x_0 удовлетворяет заданным с помощью неравенств условиям.)

§5. Деление отрезка в данном отношении

Определение. Пусть $A \neq B$ – две произвольные различные точки. Говорят, что точка C делит отрезок AB, считая от точки A, в отношении λ, если выполняется равенство:

$$\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}.$$

Замечания

1) Из определения следует, что точка C лежит на прямой, проходящей через точки A и B.

2) Из определения следует, что точки C и B не могут совпадать, ибо в противном случае вектор $\overline{CB} = \overline{0}$ и $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB} = \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$, откуда следует, что $A = C = B$, что противоречит предположению $A \neq B$.

3) Отношение $\lambda \neq -1$. Действительно, если $\lambda = -1$, то

$$\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB} = -\overline{CB} = \overline{BC},$$

откуда следует, что $A = B$, и опять приходим к противоречию.

Возможны два принципиально различных случая расположения точки C на прямой относительно отрезка AB. Смотрите рисунки 31 и 32.

1) Точка C находится на отрезке AB.

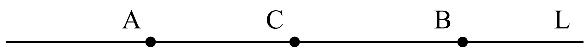


Рис. 31

2) Точка C лежит вне отрезка AB, неважно, справа или слева от него.

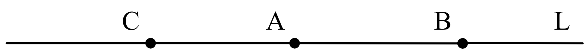


Рис. 32

Определение. Если точка C является точкой отрезка AB, то говорят, что точка C делит отрезок внутренним образом, в противном случае говорят, что точка C делит отрезок внешним образом.

Обозначение: λ_{AB}^{C} – отношение, в котором точка C делит отрезок AB, считая от точки A.

Теорема (О делении отрезка внутренним или внешним образом)

Для отношения, в котором точка C *делит отрезок* AB*, считая от точки* A*, справедлива формула:*

$$\lambda_{AB}^{C} = \pm\frac{AC}{CB},$$

где знак плюс берется в случае, когда точка C *делит отрезок* AB *внутренним образом и знак минус в противном случае.*

Доказательство. Из определения следует, что

$$\overline{AC} = \lambda_{AB}^{C} \cdot \overline{CB}.$$

Тогда, по определению умножения вектора на число:

$$|\overline{AC}| = |\lambda_{AB}^{C}| \cdot |\overline{CB}| \quad \Rightarrow \quad |\lambda_{AB}^{C}| = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{AC}{CB}.$$

Далее, если точка C делит отрезок AB внутренним образом, то она лежит на отрезке AB и $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{CB}$, то есть число $\lambda_{AB}^{C} \geq 0$. В противном случае $\overline{AC} \uparrow\downarrow \overline{CB}$ и $\lambda_{AB}^{C} < 0$. Раскрывая в последнем равенстве модуль $|\lambda_{AB}^{C}|$ с соответствующим знаком, получаем доказываемую формулу. ▲

Теорема (О координате точки, делящей отрезок числовой оси)

Пусть A, B *и* C *– три произвольные точки лежащие на оси* Ox *и точка* C *делит отрезок* AB *в отношении* λ_{AB}^{C}*, считая от точки* A*. Тогда:*

$$1)\ x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}; \quad 2)\ \lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}.$$

Доказательство. По определению $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$. Найдем координаты векторов, стоящих в обеих частях этого векторного равенства:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A), \quad \overline{CB} = (x_B - x_C), \quad \lambda \cdot \overline{CB} = (\lambda(x_B - x_C)).$$

Так как равные векторы имеют равные координаты, то

$$x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C).$$

Осталось выразить отсюда отношение λ или x_C. ▲

Следствие (О координате середины отрезка числовой оси)

Для координаты середины C *отрезка* AB, *лежащего на числовой оси* Ox, *справедлива формула:*

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Доказательство. Середина C отрезка AB делит отрезок внутренним образом и $AC = CB$, откуда следует, что $\lambda = 1$. Подставляя в формулу предыдущей теоремы $\lambda = 1$, получаем формулу координаты середины отрезка. ▲

Упражнения

26. Докажите, что из равенства $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, следует, что точки A, B и C лежат на одной прямой.
27. Завершите доказательство последней теоремы §5.
28. Докажите, что $\lambda_{AB}^{C} \cdot \lambda_{BA}^{C} = 1$.
29. Пусть $\lambda_{AB}^{C} < 0$. Докажите, что $|\lambda_{AB}^{C}| < 1 \Leftrightarrow \lambda_{CB}^{A} > 0$ и $|\lambda_{AB}^{C}| > 1 \Leftrightarrow \lambda_{AC}^{B} > 0$.

Дополнительные упражнения к главе 2

30. Сформулируйте определение проекции вектора на вектор по аналогии с определением проекции вектора на ось.
31. Постройте на координатной оси Ox точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: a) $|x| = 3$; b) $|2 - x| = 9$; c) $|x + 7| = 2$.
32. Найдите геометрическое место точек на оси Ox, координаты которых удовлетворяют неравенствам: a) $|x - 2| \le 12$; b) $|x + 5| > 10$.

Глава 3. Прямоугольная декартовая система координат
§1. Общая декартовая система координат на плоскости

Пусть Ox и Oy – две неколлинеарные координатные оси, точка O пересечения которых является их общим началом координат. В зависимости от выбора направлений на координатных осях возможны 4 случая.

Рассмотрим кратчайший поворот оси Ox к оси Oy вокруг точки O до положения сонаправленности осей: $Ox \uparrow\uparrow Oy$. На рисунках 33 и 36 такой поворот осуществляется против часовой стрелки, а на рисунках 34 и 35 – по часовой стрелке. С этой точки зрения существует две принципиально различные возможности ориентации координатных осей на плоскости.

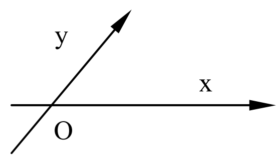


Рис. 33

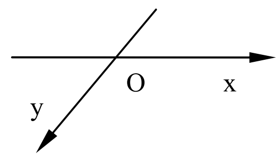


Рис. 34

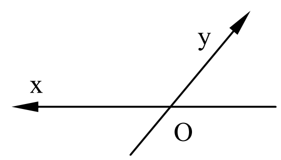


Рис. 35

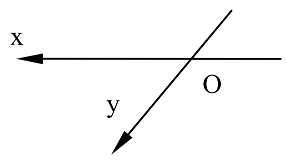


Рис. 36

Определение. Говорят, что упорядоченная пара двух неколлинеарных координатных осей имеет правую ориентацию, если кратчайший поворот первой оси вокруг их точки пересечения до положения сонаправленности со второй осью осуществляется против часовой стрелки. В противном случае говорят, что эта пара осей имеет левую ориентацию.

Определение. Угол между положительными направлениями координатных осей называется координатным углом.

Выберем упорядоченную пару неколлинеарных координатных осей на плоскости с общим началом координат, с правой ориентацией, с произвольным координатным углом и с одинаковым масштабом. Первую ось обозначим Ox и назовем её осью абсцисс, вторую – Oy и назовем её осью ординат. Пусть M – произвольная точка плоскости. Проведем через точку M прямые параллельные координатным осям. Точку пересечения построенной прямой с осью Ox обозначаем M', с осью Oy – M''. Смотрите ниже рисунок 37.

Определение. Абсциссой точки M называется координата точки M' на оси абсцисс Ox и обозначается x_M. Ординатой точки M называется координата точки M'' на оси ординат Oy и обозначается y_M.

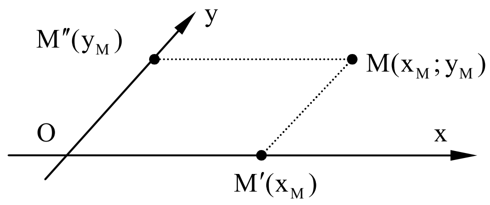


Рис. 37

Определение. Координатами точки M на плоскости называется упорядоченная пара действительных чисел (x_M, y_M), где x_M – абсцисса точки M, а y_M – ордината точки M. Соответственно, ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy – осью ординат.

Определение. Плоскость, на которой выбраны две неколлинеарные координатные оси с правой ориентацией, с общим началом координат, общим масштабом, и для каждой точки которой определено понятие её координат, называется координатной плоскостью. Говорят также, что на плоскости введена косоугольная или общая декартовая система координат.

Определение. Декартовая система координат на плоскости с прямым координатным углом называется прямоугольной.

Упражнения

33. В косоугольной системе координат на плоскости с координатным углом α найдите расстояние от произвольной точки M(x,y) до координатных осей.
34. В косоугольной системе координат на плоскости с координатным углом α выведите формулу расстояния между любыми двумя точками плоскости.
35. В косоугольной системе координат на плоскости с координатным углом α выведите формулу координат середины отрезка по координатам его концов.

§2. Прямоугольная декартовая система координат в пространстве

Пусть Ox, Oy и Oz – три взаимно перпендикулярные координатные оси в пространстве с общим началом координат в точке их пересечения O. Назовем ось Ox осью абсцисс, ось Oy – осью ординат, ось Oz – осью аппликат.

В зависимости от выбора направлений на координатных осях возможны 8 случаев. Однако существует только два принципиально различных случая, которые мы и будем рассматривать.

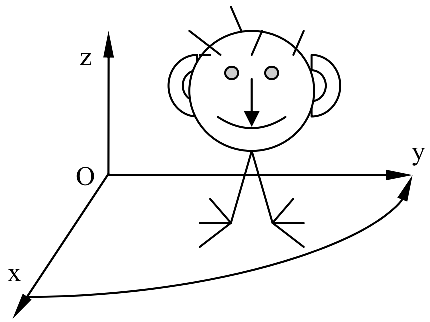


Рис. 38

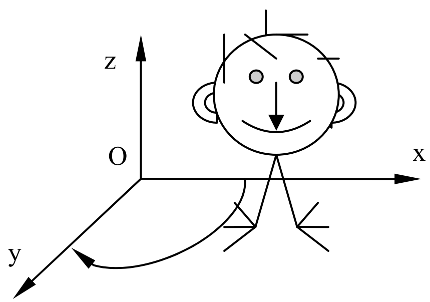


Рис. 39

Рассмотрим кратчайший поворот оси Ox вокруг точки O в плоскости Oxy к оси Oy. Причем мы будем наблюдать за этим поворотом "сверху", то есть наблюдатель находится в той части полупространства относительно плоскости Oxy, в которой находится положительная полуось аппликат.

Если наблюдаемый поворот осуществляется против часовой стрелки (смотрите рисунок 38), то говорят, что оси координат имеют правую ориентацию, в противном случае (смотрите рисунок 39) говорят, что оси координат имеют левую ориентацию.

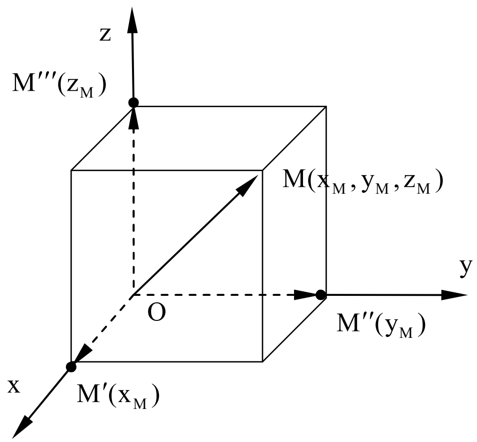


Рис. 40

Пусть Ox, Oy, Oz – три взаимно перпендикулярные оси с правой ориентацией, с общим началом координат в точке O и выбранным масштабом. Пусть M – произвольная точка и M', M'' и M''' – проекции точки M на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Определение. Абсциссой точки M называется координата точки M' на оси абсцисс Ox и обозначается x_M. Ординатой точки M называется координата точки M'' на оси ординат Oy и обозначается y_M. Аппликатой точки M называется координата точки M''' на оси аппликат Oz и обозначается z_M.

Определение. Координатами точки M в пространстве называется упорядоченная тройка действительных чисел (x_M, y_M, z_M), где x_M – абсцисса точки M, y_M – ордината точки M, z_M – аппликата точки M.

Определение. Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве (сокращенно ПДСК) называется три правоориентированные

взаимно перпендикулярные оси, с общим началом координат, общим масштабом, и понятием координат любой точки пространства.

Теорема (Условие совпадения точек координатного пространства)
Две точки координатного пространства совпадают тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad x_A = x_B,\; y_A = y_B,\; z_A = z_B .$$

Доказательство. Необходимость. Пусть точки A и B совпадают. Тогда совпадают их проекции на координатные оси, откуда и следует равенство их соответствующих координат.

Обратно, пусть точки A и B имеют равные координаты. Из равенства их первых координат $x_A = x_B$ следует, что проекции точек A и B на ось Ox совпадают: $A' = B'$, то есть точки A и B находятся в плоскости перпендикулярной оси Ox. Аналогично, из равенства их вторых координат $y_A = y_B$ следует, что точки A и B находятся в плоскости перпендикулярной оси Oy, а из равенства $z_A = z_B$ следует, что точки A и B находятся в плоскости перпендикулярной оси Oz. Отсюда следует, что точки A и B совпадают, так как они лежат на пересечении трех взаимно перпендикулярных плоскостей, которые пересекаются в единственной точке. ▲

Теорема (Об отождествлении точки с её координатами)
Любую точку координатного пространства можно отождествить с упорядоченной тройкой её координат, и обратно, любую упорядоченную тройку действительных чисел можно отождествить с некоторой точкой координатного пространства.

Доказательство. Достаточно доказать, что между множеством точек координатного пространства и декартовым кубом множества действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Обозначим множество точек координатного пространства Oxyz через S. По определению, декартов куб $\mathbb{R}^3$ множества действительных чисел является множеством упорядоченных троек действительных чисел. Устроим отображение

$$f : S \to \mathbb{R}^3$$

по правилу: каждой точке M координатного пространства S поставим в соответствие упорядоченный набор её координат

$$f(M) \doteq (x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^3 .$$

1) Из предыдущей теоремы следует, что любая точка пространства

имеет единственный набор её координат и соответствие f действительно является отображением, то есть каждому элементу (точке) множества S ставится в соответствие единственный элемент (упорядоченная тройка) множества $\mathbb{R}^3$.

2) Из предыдущей теоремы следует, что отображение f является инъекцией, то есть координаты различных точек не могут быть равными.

$$A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B).$$

3) Пусть $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ – произвольная упорядоченная тройка действительных чисел. Действительному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ на оси Ox соответствует единственная точка A с координатой $x_A = \alpha$. Аналогично, на оси Oy имеется единственная точка B с координатой $y_B = \beta$, а на оси Oz имеется единственная точка C с координатой $z_C = \gamma$. Через точки A, B и C проведем плоскости перпендикулярные тем осям, на которых они лежат. Эти плоскости взаимно перпендикулярные и пересекаются в единственной точке M, проекции которой на координатные оси совпадают с точками A, B и C. Тогда по определению координат точки M:

$$x_M = x_A = \alpha,\ y_M = y_B = \beta,\ z_M = z_C = \gamma,$$

то есть,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = f(M),$$

где $M \in S$. Таким образом, любая упорядоченная тройка действительных чисел является координатами некоторой точки координатного пространства S, что и доказывает сюръективность отображения f. ▲

Упражнения

36. Докажите, что две точки координатной плоскости совпадают тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.
37. Докажите, что любую точку координатной плоскости можно отождествить с упорядоченной парой её координат, и обратно, любую упорядоченную пару действительных чисел можно отождествить с некоторой точкой координатной плоскости.

§3. Координаты вектора

Мы рассмотрим сразу случай координатного пространства. Координатная плоскость будет являться частным случаем.

Определение. Вектор $\overline{OM}$, где O – начало координат, M – произвольная точка координатного пространства Oxyz, называется радиус-вектором точки M.

Определение. Проекции вектора на координатные оси, называются его координатами, а запись вектора в виде

$$\overline{a} = (x, y, z),\ \text{где}\ x = \text{пр}_x\overline{a},\quad y = \text{пр}_y\overline{a},\quad z = \text{пр}_z\overline{a}$$

называется его координатной формой.

К концу этого параграфа мы обоснуем справедливость координатной формы записи для любых векторов.

Теорема (О координатах точки и её радиус-вектора)

Координаты точки совпадают с соответствующими координатами её радиус-вектора.

Доказательство. Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Пусть M', M'', M''' – проекции точки M на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно. Смотрите рисунок 40.

По определению, координаты x_M, y_M, z_M точки M являются координатами точек M', M'', M''' на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно:

$$x_M \doteq x_{M'} \doteq \text{пр}_x\overline{OM'},\ \ y_M \doteq y_{M''} \doteq \text{пр}_y\overline{OM''},\ \ z_M \doteq z_{M'''} \doteq \text{пр}_z\overline{OM'''}.$$

Так как точки M и M' лежат в плоскости перпендикулярной оси Ox, то

$$\text{пр}_x\overline{OM} = \text{пр}_x\overline{OM'}.$$

По аналогичной причине

$$\text{пр}_y\overline{OM} = \text{пр}_y\overline{OM''}\quad \text{и}\quad \text{пр}_z\overline{OM} = \text{пр}_z\overline{OM'''}.$$

Отсюда и следуют доказываемые равенства:

$$x_M = \text{пр}_x\overline{OM},\ \ y_M = \text{пр}_y\overline{OM},\ \ z_M = \text{пр}_z\overline{OM}.\ ▲$$

Теорема (Условие равенства двух векторов)

Два вектора равны, если и только если равны их координаты:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow (\text{пр}_x\overline{a}, \text{пр}_y\overline{a}, \text{пр}_z\overline{a}) = (\text{пр}_x\overline{b}, \text{пр}_y\overline{b}, \text{пр}_z\overline{b}).$$

Доказательство. Необходимость условия следует из того, что равные векторы имеют равные проекции на любую ось. Докажем достаточность. Пусть координаты двух векторов равны:

$$\text{пр}_x\overline{a} = \text{пр}_x\overline{b},\ \text{пр}_y\overline{a} = \text{пр}_y\overline{b},\ \text{пр}_z\overline{a} = \text{пр}_z\overline{b}.$$

Отложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от начала координат: $\overline{a} = \overline{OM_1}$, $\overline{b} = \overline{OM_2}$. Введем обозначения для координат точек M_1 и M_2:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \text{ и } M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Учитывая, что проекция вектора на любую ось не зависит от выбора его начала, из предыдущей теоремы получаем:

$$x_1 = \text{пр}_x \overline{OM_1} = \text{пр}_x \overline{a} = \text{пр}_x \overline{b} = \text{пр}_x \overline{OM_2} = x_2,$$

$$y_1 = \text{пр}_y \overline{OM_1} = \text{пр}_y \overline{a} = \text{пр}_y \overline{b} = \text{пр}_y \overline{OM_2} = y_2,$$

$$z_1 = \text{пр}_z \overline{OM_1} = \text{пр}_z \overline{a} = \text{пр}_z \overline{b} = \text{пр}_z \overline{OM_2} = z_2,$$

откуда следует, что точки M_1 и M_2 совпадают, как точки с равными координатами. Следовательно, их радиусы-векторы равны: $\overline{OM_1} = \overline{OM_2}$, откуда следует равенство $\overline{a} = \overline{b}$. ▲

Теорема (Об отождествлении вектора с его координатами)

Любой вектор можно отождествить с упорядоченной тройкой его координат, и обратно, любую упорядоченную тройку действительных чисел можно отождествить с некоторым вектором.

Доказательство. Для доказательства достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех (свободных) векторов V и декартовым кубом $\mathbb{R}^3$. С этой целью устроим отображение

$$f : V \to \mathbb{R}^3$$

по правилу: каждому вектору $\overline{a} \in V$ поставим в соответствие упорядоченный набор его координат, то есть его проекции на координатные оси:

$$f(\overline{a}) \doteq (\text{пр}_x \overline{a}, \text{пр}_y \overline{a}, \text{пр}_z \overline{a}).$$

1) Из определения проекции вектора на ось следует, что любой вектор имеет единственный набор его координат. Это означает, что каждому вектору ставится в соответствие единственный упорядоченный набор из трех действительных чисел, и соответствие f действительно является отображением.

2) Из предыдущей теоремы следует, что неравные векторы не могут иметь одинаковые координаты:

$$\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow f(\overline{a}) \neq f(\overline{b}),$$

то есть отображение f является инъекцией.

3) Пусть $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ – произвольная упорядоченная тройка действительных чисел. Отсюда, по теореме об отождествлении из предыдущего параграфа следует, что в координатном пространстве существует точка

с такими координатами: $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Обозначим: $\overline{a} = \overline{OM}$. Тогда, по теореме о координатах точки и её радиус-вектора, имеем:

$$\alpha = \text{пр}_x \overline{OM} = \text{пр}_x \overline{a}, \quad \beta = \text{пр}_y \overline{OM} = \text{пр}_y \overline{a}, \quad \gamma = \text{пр}_z \overline{OM} = \text{пр}_z \overline{a}.$$

Последнее означает, что $(\alpha, \beta, \gamma) = (\text{пр}_x \overline{a}, \text{пр}_y \overline{a}, \text{пр}_z \overline{a}) = f(\overline{a})$, где $\overline{a} \in V$. Отсюда следует, что отображение f является сюръекцией. ▲

В силу последней теоремы получает свое законное обоснование координатная форма записи вектора:

$$\overline{a} = (x, y, z),$$

где $x \doteq \text{пр}_x \overline{a}$, $y \doteq \text{пр}_y \overline{a}$, $z \doteq \text{пр}_z \overline{a}$.

Упражнение

38. Перенесите результаты этого параграфа на случай координатной плоскости.

§4. Действия с векторами в координатной форме

Теорема (О действиях с векторами в координатной форме)

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число. Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $k \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1) $\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$*; 2)* $k \cdot \overline{a} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1)$.

Доказательство. Следует из свойств проекции вектора на ось:

$$\overline{a} + \overline{b} = (\text{пр}_x(\overline{a} + \overline{b}), \text{пр}_y(\overline{a} + \overline{b}), \text{пр}_z(\overline{a} + \overline{b})) =$$

$$(\text{пр}_x \overline{a} + \text{пр}_x \overline{b}, \text{пр}_y \overline{a} + \text{пр}_y \overline{b}, \text{пр}_z \overline{a} + \text{пр}_z \overline{b}) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$k \cdot \overline{a} = (\text{пр}_x(k \cdot \overline{a}), \text{пр}_y(k \cdot \overline{a}), \text{пр}_z(k \cdot \overline{a})) =$$

$$= (k \cdot \text{пр}_x \overline{a}, k \cdot \text{пр}_y \overline{a}, k \cdot \text{пр}_z \overline{a}) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1). \ ▲$$

Теорема (Условие коллинеарности векторов)

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$. *Тогда*

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Другими словами, два ненулевых вектора коллинеарные тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Доказательство. Воспользуемся необходимым и достаточным признаком коллинеарности двух ненулевых векторов:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overline{b} = \alpha \cdot \overline{a} .$$

Так как по условию $\overline{b} \neq \overline{0}$, то скаляр $\alpha \neq 0$. По предыдущей теореме,

$$\alpha \cdot \overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) .$$

Применяя теорему о координатах равных векторов, получаем:

$$\overline{b} = \alpha \cdot \overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \alpha \cdot x_1, \ \ y_2 = \alpha \cdot y_1, \ \ z_2 = \alpha \cdot z_1 ,$$

откуда и следует доказываемое утверждение. ▲

Заметим, что если одна или две координаты одного ненулевого вектора теоремы равны нулю, то соответствующие координаты другого вектора тоже равны нулю, поэтому в равенстве пропорциональности координат появление нуля в знаменателе не означает деления на нуль.

Теорема (О вычислении координат вектора)
Для того, чтобы вычислить координаты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты его начала:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A) .$$

Доказательство. Пусть точка О – начало координат. Тогда (смотрите рисунок 41)

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} .$$

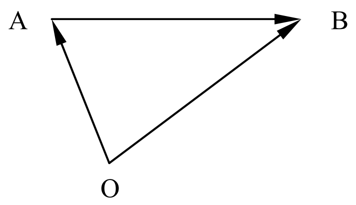


Рис. 41

Векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ являются радиус-векторами точек A и B, соответственно, и их координаты совпадают с координатами этих точек:

$$\overline{OA} = (x_A ; y_A ; z_A) , \quad \overline{OB} = (x_B ; y_B ; z_B) .$$

Применяем теорему о действиях с векторами в координатной форме:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A) . \ ▲$$

Упражнения

39. Докажите, что два вектора являются противоположными тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты являются противоположными числами.
40. Докажите, что два вектора сонаправленные (противоположно направленные) тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональные, а коэффициент пропорциональности является положительным (отрицательным) числом.
41. Докажите, что теорема об условии коллинеарности двух векторов останется справедливой, если допустить, что один из векторов или даже оба вектора могут быть равными нулевому вектору.
42. Докажите, что любой свободный вектор можно отождествить с точкой координатного пространства, что дает нам возможность называть векторное пространство V точечно-векторным пространством.
43. Докажите, что результаты этого параграфа остаются справедливыми и для случая координатной плоскости.

§5. Модуль вектора и расстояние между двумя точками

Теорема (О модуле вектора)
Пусть $\overline{a} = (x, y, z)$, *где* $x = \text{пр}_x \overline{a}$, $y = \text{пр}_y \overline{a}$, $z = \text{пр}_z \overline{a}$. *Тогда*

$$|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

то есть, модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Доказательство. Отложим вектор $\overline{a}$ от начала координат, так что

$$\overline{a} = \overline{OM} .$$

Тогда координаты вектора $\overline{a}$ совпадают с координатами радиус-вектора $\overline{OM} = (x_M, y_M, z_M)$:

$$x = x_M , \ \ y = y_M , \ \ z = z_M .$$

Отрезок OM (смотрите рисунок 40) является диагональю прямоугольного параллелепипеда и его длина находится с помощью теоремы Пифагора:

$$OM^2 = (OM')^2 + (OM'')^2 + (OM''')^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Так как $OM = |\,\overline{OM}\,| = |\,\overline{a}\,|$, то $|\,\overline{a}\,| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ▲

Следствие (Расстояние между двумя точками)

Пусть A *и* B *– произвольные точки координатного пространства* Oxyz. *Тогда*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

Доказательство. Расстояние между двумя точками A и B равно модулю вектора $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, поэтому доказываемая формула сразу же следует из формулы модуля вектора:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .\ \blacktriangle$$

Заметим, что из только что доказанной формулы сразу следуют формулы расстояния между двумя точками координатной плоскости Oxy и координатной прямой Ox.

Если A и B – произвольные точки координатной плоскости Oxy, то

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Если A и B – произвольные точки координатной оси Ox, то

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|\ .$$

Упражнения

44. Напишите в координатной форме вектор компланарный координатной плоскости Oxy, и формулу для его модуля.
45. Напишите формулы расстояния между двумя точками координатной плоскости Oxz, и координатной оси Oz.

§6. Деление отрезка в данном отношении

Теорема (О координатах точки, делящей отрезок)

Пусть A, B *и* C *– произвольные точки координатного пространства* Oxyz*, лежащие на одной прямой и точка* C *делит отрезок* AB *в отношении* $\lambda = \lambda_{AB}^{C}$*, считая от точки* A*. Тогда:*

1) $x_C = \dfrac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda},\ y_C = \dfrac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda},\ z_C = \dfrac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}$;

2) $\lambda = \lambda_{AB}^{C} = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_C}$.

Доказательство. По определению $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Найдем координаты векторов в обеих частях этого векторного равенства:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A),$$

$$\lambda\overline{CB} = \lambda(x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C) = (\lambda(x_B - x_C), \lambda(y_B - y_C), \lambda(z_B - z_C))\ .$$

Вспоминая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем:

$$x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C),\ \ y_C - y_A = \lambda(y_B - y_C),\ \ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_C)\ .$$

Выражая из этих равенств отношение λ, получаем второе утверждение теоремы. Если же мы выразим из этих равенств координаты точки C, то получим первое утверждение теоремы. ▲

Следствие (О координатах середины отрезка)

Координаты середины отрезка равны средним арифметическим соответствующих координат концов отрезка. Если C *– середина отрезка* AB*, то*

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ \ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ \ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Доказательство. Середина C отрезка AB делит отрезок внутренним образом и $AC = CB$, откуда следует, что $\lambda = 1$. Подставляя в формулы предыдущей теоремы $\lambda = 1$, получаем формулы координат середины отрезка. ▲

Заметим, что формулы последней теоремы и её следствия имеют силу и для случая координатной плоскости, и для случая координатной оси.

Упражнение

46. Доведите до конца доказательство теоремы этого параграфа

§7. Направляющие углы и орт вектора

Введем обозначения для углов между вектором и координатными осями (смотрите рисунок 42):

$$(\overline{a} \wedge Ox) = \alpha,\quad (\overline{a} \wedge Oy) = \beta,\quad (\overline{a} \wedge Oz) = \gamma\ .$$

Определение. Углы между вектором и координатными осями называются направляющими углами вектора, а косинусы направляющих углов называются направляющими косинусами вектора.

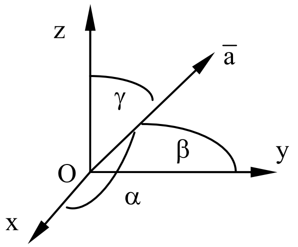


Рис. 42

Теорема (О направляющих косинусах вектора)
Пусть вектор задан своими координатами: $\overline{a} = (x, y, z)$. *Тогда*

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Доказательство. Применим теорему о вычислении проекции вектора на ось:

$$x \doteq пр_x \overline{a} = |\overline{a}| \cos\alpha,\quad y \doteq пр_y \overline{a} = |\overline{a}| \cos\beta,\quad z \doteq пр_z \overline{a} = |\overline{a}| \cos\gamma.$$

Осталось выразить из этих равенств направляющие косинусы и применить теорему о модуле вектора. ▲

Следствие (О направляющих косинусах)
Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \ ▲$$

Определение. Ортом вектора называется вектор единичной длины и сонаправленный с ним, и обозначается $\overline{a}^o$.

Теорема (О координатах орта вектора)
Координаты орта вектора совпадают с его направляющими косинусами:

$$\overline{a}^o \doteq \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \ ▲$$

Упражнения
47. Проведите доказательство следствия о направляющих косинусах.
48. Докажите последнюю теорему этого параграфа.

Дополнительные упражнения к главе 2 и главе 3

49. Пусть $(-1;1) \subset \mathbb{R}$ – промежуток координатной оси Ox. Для любой точки $x \in (-1;1)$ обозначим через λ_x отношение, в котором точка x делит отрезок $[-1;1]$, считая от левого конца отрезка, то есть от точки с координатой (-1). Определим на интервале $(-1;1)$ операцию сложения $\oplus$ по следующему правилу: любой упорядоченной паре (x, y) точек интервала $(-1;1)$ поставим в соответствие точку $z \doteq x \oplus y$, которая лежит на оси Ox и делит отрезок $[-1;1]$ в отношении $\lambda_z \doteq \lambda_x \cdot \lambda_y$. Для операции $\oplus$ докажите, что:
а) она определена на интервале $(-1;1)$, то есть, что сумма $z = x \oplus y \in (-1;1)$.
б) операция $\oplus$ является ассоциативной и коммутативной.
в) существует нейтральный элемент, и найдите его.
г) любая точка интервала имеет противоположную ей.
50. Пусть $[0;1) \subset \mathbb{R}$ – промежуток координатной оси Ox. Для любой точки промежутка $x \in [0;1)$ обозначим через λ_x отношение, в котором точка x делит отрезок $[0;1]$, считая от нуля. Определим на промежутке $[0;1)$ операцию сложения $\oplus$ по следующему правилу: любой упорядоченной паре (x, y) точек промежутка $[0;1)$ поставим в соответствие точку $z \doteq x \oplus y$, которая лежит на оси Ox и делит отрезок $[0;1]$ в отношении $\lambda_z \doteq \lambda_x + \lambda_y$. Изучите введенную здесь операцию сложения по примеру предыдущего упражнения.
51. На множестве точек произвольной плоскости P определим алгебраическую операцию. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$ – произвольное фиксированное число. Для любых двух точек A и B плоскости P положим по определению: $A \oplus B \doteq C$, где C – точка, которая делит отрезок AB в отношении λ, считая от точки A, то есть, C – точка, для которой верно равенство: $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$. Докажите, что данное правило действительно определяет на множестве P алгебраическую операцию и исследуйте её, то есть проверьте выполнение или невыполнение законов ассоциативности, коммутативности и законов сокращения, существование или отсутствие нейтральных и симметричных элементов, в том числе и односторонних (смотрите главу 18).

Глава 4. Геометрический центр тяжести
§1. Геометрический центр тяжести двух материальных точек

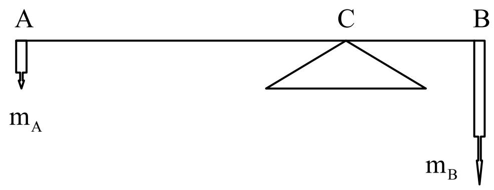


Рис. 43

Рассмотрим модель рычажных весов, находящихся в равновесии, смотрите рисунок 43, где AB – отрезок, заменяющий в нашей модели однородный стержень, массу которого мы полагаем пренебрежимо малой по сравнению с массой грузов m_A и m_B, закрепленных на его концах. C – точка опоры всей системы. Из механики нам известно, что такая система находится в равновесии, если выполняется равенство

$$m_A \cdot AC = m_B \cdot BC,$$

где AC и BC – длины соответствующих отрезков. Это равенство следует из равенства двух крутящих моментов, создаваемых силами тяжести данных грузов относительно точки опоры.

Определение. Упорядоченная пара (A, m_A), где A – точка, m_A – положительное действительное число, называется материальной точкой, число m_A при этом называется массой этой точки.

Определение. Геометрическим центром тяжести (в дальнейшем просто ГЦТ) системы из двух материальных точек (A, m_A) и (B, m_B) называется материальная точка (C, m_C) с массой $m_C \doteq m_A + m_B$, и которая делит отрезок AB, считая от точки A, в отношении $\lambda_{AB}^{C} = \dfrac{m_B}{m_A}$.

Обозначение ГЦТ системы из двух материальных точек A и B:

$$\Gamma(A, B).$$

Заметим, что каждую точку координатного пространства легко превратить в материальную точку. Для этого достаточно к каждой точке при-

писать её массу, то есть некоторое положительное число. Так как каждую точку координатного пространства можно отождествить с её координатами, то материальную точку можно отождествить с упорядоченным набором из четырех действительных чисел, в котором первые три числа являются её координатами, а четвертое число должно быть положительным:

$$(A, m_A) = A(x, y, z, m),$$

где x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата, $m > 0$ – масса точки A.

Теорема (О координатах ГЦТ системы двух материальных точек)
Координаты ГЦТ системы двух материальных точек A *и* B *можно найти по формулам:*

$$x = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B}, \quad y = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B}{m_A + m_B}, \quad z = \frac{z_A \cdot m_A + z_B \cdot m_B}{m_A + m_B}.$$

Доказательство. Обозначим ГЦТ системы двух материальных точек A и B через C. Подставляя в формулы координат точки C отношение $\lambda = \lambda_{AB}^{C} = \dfrac{m_B}{m_A}$, получаем:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{x_A + \dfrac{m_B}{m_A} x_B}{1 + \dfrac{m_B}{m_A}} = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B}.$$

Аналогично получаются оставшиеся координаты точки C. ▲

Следствие (О координатах двух материальных точек и их ГЦТ)
Пусть A, B *и* C *– материальные точки. Если* $C = \Gamma(A, B)$, *то верны следующие равенства:*

$$x_C m_C = x_A m_A + x_B m_B, \quad y_C m_C = y_A m_A + y_B m_B, \quad z_C m_C = z_A m_A + z_B m_B.$$

Доказательство сразу же следует из теоремы, если вспомнить, что по определению ГЦТ, $m_C \doteq m_A + m_B$. ▲

Упражнения

52. Докажите, что $\Gamma(A; B) = \Gamma(B; A)$.
53. Найдите ГЦТ однородного стержня, если известны координаты его концов.
54. Найдите координаты и массу материальной точки A, если известны координаты и массы материальной точки B и их ГЦТ.

§2. Геометрический центр тяжести трёх материальных точек

Определение. Геометрическим центром тяжести системы из трех материальных точек A, B, C называется геометрический центр тяжести системы из двух материальных точек: Г(A, B) и C, и обозначается

$$\Gamma(A,B,C) \doteq \Gamma(\Gamma(A,B),C).$$

Теорема (О координатах ГЦТ системы трёх материальных точек)

Координаты ГЦТ системы трёх материальных точек A, B *и* C *можно найти по формулам:*

$$x = \frac{x_A m_A + x_B m_B + x_C m_C}{m_A + m_B + m_C},\quad y = \frac{y_A m_A + y_B m_B + y_C m_C}{m_A + m_B + m_C},$$

$$z = \frac{z_A m_A + z_B m_B + z_C m_C}{m_A + m_B + m_C}.$$

Доказательство. Пусть A, B и C – система из трех материальных точек. Тогда по определению

$$\Gamma(A,B,C) \doteq \Gamma(\Gamma(A,B);C).$$

Обозначим,

$$D \doteq \Gamma(A,B),\ F \doteq \Gamma(D,C) \doteq \Gamma(A,B,C).$$

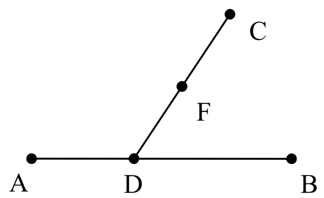


Рис. 44

Координаты точки D находим по формулам ГЦТ системы из двух материальных точек:

$$x_D = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B},\quad y_D = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B}{m_A + m_B},\quad z_D = \frac{z_A \cdot m_A + z_B \cdot m_B}{m_A + m_B}.$$

Осталось найти ГЦТ системы из двух материальных точек: C и D с массами m_C и $m_D \doteq m_A + m_B$:

$$x_F = \frac{x_D \cdot m_D + x_C \cdot m_C}{m_D + m_C} = \frac{\dfrac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B} \cdot (m_A + m_B) + x_C \cdot m_C}{(m_A + m_B) + m_C} =$$

$$= \frac{x_A m_A + x_B m_B + x_C m_C}{m_A + m_B + m_C}.$$

Аналогично доказываются оставшиеся две формулы. ▲

Следствие (О координатах трёх материальных точек и их ГЦТ)

Пусть A, B, C *и* D *– материальные точки. Если* $D = \Gamma(A,B,C)$*, то верны следующие равенства:*

$$x_D m_D = x_A m_A + x_B m_B + x_C m_C,\quad y_D m_D = y_A m_A + y_B m_B + y_C m_C$$

$$z_D m_D = z_A m_A + z_B m_B + z_C m_C.\ ▲$$

Упражнения

55. Докажите следствие теоремы §2.
56. Докажите, что $\Gamma(\Gamma(A,B);C) = \Gamma(A;\Gamma(B,C))$.
57. Докажите, что ГЦТ системы двух материальных точек определяет на множестве материальных точек координатного пространства внутреннюю бинарную алгебраическую операцию, подчиняющуюся законам ассоциативности и коммутативности (смотрите главу 18).

§3. Геометрический центр тяжести треугольника

Пусть ABC треугольник, который мы будем рассматривать как треугольную пластинку, выполненную из однородного материала, толщиной которой мы пренебрегаем. Известно, что центром тяжести такой пластинки является точка пересечения медиан. Это позволяет нам дать следующее определение.

Определение. Геометрическим центром тяжести треугольника называется точка пересечения его медиан.

Теорема (О ГЦТ треугольника)

ГЦТ из трех материальных точек с равными массами совпадает с ГЦТ треугольника с вершинами в данных точках.

Доказательство. Рассмотрим теперь систему из трех материальных точек A, B и C с равными массами:

$$m_A = m_B = m_C = m.$$

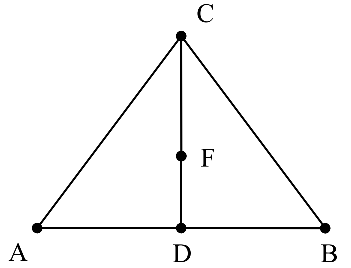


Рис. 45

Из определения ГЦТ системы трёх материальных точек следует, что

$$F \doteq \Gamma(A, B, C) \doteq \Gamma(\Gamma(A, B); C) = \Gamma(D, C),$$

где обозначено $D \doteq \Gamma(A, B)$. Так как

$$\lambda_{AB}^{D} = \frac{AD}{DB} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{m}{m} = 1,$$

то $AD = DB$ и D – середина AB, $m_D = m_A + m_B = 2m$. Тогда,

$$\lambda_{DC}^{F} = \frac{DF}{FC} = \frac{m_C}{m_D} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $DF : FC = 1 : 2$, то есть F является точкой пересечения медиан. Смотрите рисунок 45. ▲

Следствие (О вычислении координат ГЦТ треугольника)

Координаты ГЦТ треугольника ABC *являются средними арифметическими соответствующих координат его вершин:*

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, достаточно найти ГЦТ системы из трех материальных точек с равными массами:

$$x = \frac{mx_A + mx_B + mx_C}{3m} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Оставшиеся две формулы получаются аналогично. ▲

Упражнение

58. Найдите координаты вершины A треугольника ABC, если известны координаты вершин B и C, и координаты точки пересечения его медиан.

§4. ГЦТ произвольной системы материальных точек

Определение. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – произвольная $(n \geq 3)$ система материальных точек. Тогда их ГЦТ называется ГЦТ системы из двух материальных точек, $\Gamma(A_1, A_2, ..., A_{n-1})$ и A_n:

$$\Gamma(A_1, A_2, ..., A_n) \doteq \Gamma(\Gamma(A_1, A_2, ..., A_{n-1}); A_n).$$

Теорема (О ГЦТ системы из n материальных точек)

Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1, m_1), ..., A_n(x_n, y_n, z_n, m_n)$ *– система из n* $(n \geq 2)$ *материальных точек. Тогда координаты их ГЦТ можно найти по формулам:*

$$x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + ... + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}, \quad y = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + ... + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

$$z = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + ... + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Доказательство предлагается провести читателю с помощью метода математической индукции. ▲

Следствие (О координатах системы материальных точек и их ГЦТ)

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ *– произвольная* $(n \geq 2)$ *система материальных точек с массами* $m_1, m_2, ..., m_n$ *соответственно. Тогда, если* $F = \Gamma(A_1, A_2, ..., A_n)$*, то верны следующие равенства:*

$$x_F m_F = x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n, \quad y_F m_F = y_1 m_1 + y_2 m_2 + ... + y_n m_n$$

$$z_F m_F = z_1 m_1 + z_2 m_2 + ... + z_n m_n. \ ▲$$

Упражнение

59. Докажите теорему §4 и её следствие.

§5. Геометрический центр тяжести произвольного многоугольника

Любой выпуклый n-угольник $A_1 A_2 ... A_n$ можно разбить на $(n-2)$ треугольника $A_1 A_2 A_3, A_1 A_3 A_4, ..., A_1 A_{n-1} A_n$, сумма площадей которых равна площади данного n-угольника. Любое такое разбиение многоугольника на треугольники называется его триангуляцией. Заменим каждый треугольник его ГЦТ с массой численно равной его площади. Тогда ГЦТ получившейся системы из $(n-2)$ материальных точек назовем ГЦТ данного выпуклого n-угольника.

Приведенное определение можно распространить на произвольные n-угольники, не обязательно выпуклые. В любом случае возникает вопрос о корректности определения ГЦТ многоугольника, то есть, зависит или не зависит ГЦТ многоугольника от способов его триангуляции? Используя инструменты математического анализа нетрудно доказать, что ГЦТ любого многоугольника не зависит от способов его триангуляции, и тем самым, наше определение ГЦТ многоугольника является корректным.

Более того, мы можем вычислять ГЦТ любого многоугольника разбивая его произвольным образом на другие многоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного многоугольника. Далее, заменяем каждый многоугольник разбиения на его ГЦТ с массой равной его площади. Получаем в итоге некоторое конечное количество материальных точек, ГЦТ которых и дает искомый ГЦТ исходного многоугольника.

Упражнения

60. Докажите, что если n-угольник имеет ось симметрии, то его ГЦТ находится на его оси симметрии.
61. Докажите, что если n-угольник имеет две оси симметрии, то его ГЦТ находится в точке их пересечения.
62. Докажите, что ГЦТ параллелограмма находится в точке пересечения его диагоналей.
63. Докажите, что ГЦТ любого правильного n-угольника находится в центре описанной вокруг него окружности.
64. Однородная пластинка, имеющая форму правильного шестиугольника со стороной 1, разрезана пополам, причем линия разреза проходит через противоположные вершины шестиугольника. Найдите ГЦТ получившейся трапеции. Систему координат введите как вам удобнее.
65. Докажите, что ГЦТ выпуклого 4-угольника не зависит от способа его разбиения на два треугольника.

§6. Центр вписанной в треугольник окружности

Теорема (О координатах точки пересечения биссектрис)

Пусть ABC *произвольный треугольник,* a,b,c *– длины сторон, лежащие против вершин* A,B *и* C *соответственно, M – точка пересечения его биссектрис. Тогда:*

$$x_M = \frac{a\cdot x_A + b\cdot x_B + c\cdot x_C}{a+b+c},\quad y_M = \frac{a\cdot y_A + b\cdot y_B + c\cdot y_C}{a+b+c},$$

$$z_M = \frac{a\cdot z_A + b\cdot z_B + c\cdot z_C}{a+b+c}.$$

Доказательство. Смотрите рисунок 46. Пусть BN – биссектриса и M – точка пересечения биссектрис. Тогда по основному свойству биссектрисы треугольника

$$\lambda_{AC}^{N} = \frac{AN}{NC} = \frac{c}{a}.$$

Далее, по свойству пропорций имеем:

$$\frac{AN+NC}{NC} = \frac{c+a}{a},$$

откуда, учитывая, что $AN + NC = b$, получаем

$$\frac{b}{NC} = \frac{c+a}{a} \quad \text{и} \quad NC = \frac{ab}{a+c}.$$

Так как CM биссектриса треугольника BNC, то

$$\lambda_{NB}^{M} = \frac{NM}{MB} = \frac{NC}{BC} = \frac{b}{a+c}.$$

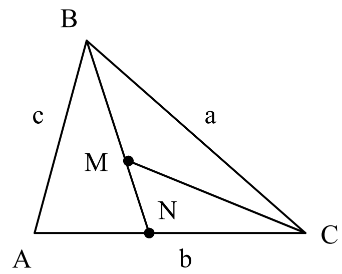


Рис. 46

Докажем, что точка M является ГЦТ системы из трех материальных точек A, B и C с массами a, b и c соответственно. Действительно,

$$\frac{c}{a} = \frac{m_C}{m_A} = \lambda_{AC}^{N},$$

откуда следует, по определению, что точка N есть ГЦТ точек A и C.
Положим

$$m_N = m_A + m_C = a + c.$$

Тогда

$$\lambda_{NB}^{M} = \frac{b}{a+c} = \frac{m_B}{m_N},$$

и получаем, опять же по определению, что точка M есть ГЦТ материальных точек N и B, то есть точка M является, по определению, ГЦТ системы трех материальных точек A, B и C. Теперь, доказываемая формула следует из теоремы §2. ▲

Упражнения

66. Исследовать возможность обобщения теоремы этого параграфа на произвольную треугольную пирамиду.
67. Исследовать возможность обобщения теоремы этого параграфа на произвольный выпуклый четырехугольник (возможно с ограничением: вокруг данного четырехугольника можно описать окружность).

Дополнительные упражнения к главе 4

68. Каждой точке координатного пространства припишем положительное число, которое будем называть её массой. Множество точек координатного пространства, каждая из которых имеет массу, будем называть пространством материальных точек и обозначать буквой $\mathfrak{M}$. Тогда каждую точку пространства $\mathfrak{M}$ можно отождествить с упорядоченным набором из четырех действительных чисел: (x, y, z, m), где (x, y, z) есть координаты данной точки, а $m > 0$ – её масса. Началу координат припишем массу равную нулю.
    Определим на множестве $\mathfrak{M}$ две внутренние бинарные алгебраические операции с помощью следующих правил. Для любых материальных точек $A, B \in \mathfrak{M}$ положим по определению:
    $$A \otimes B \doteq \Gamma(A, B) \text{ и } A \oplus B \doteq C(x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B, m_A + m_B).$$
    а) Докажите, что обе операции коммутативные и ассоциативные.
    б) Докажите, что обе операции обладают нейтральным элементом.
    в) Проверьте дистрибутивность каждой операции относительно другой.
69. Дан выпуклый n-угольник, выполненный в виде однородной пластины, толщиной которой можно пренебречь, и помещенный в прямоугольную декартову систему координат на плоскости. Координаты его вершин считаются известными. Требуется так распределить массу n-угольника по всем его n вершинам, чтобы ГЦТ n-угольника совпал с ГЦТ полученной системы из n материальных точек. (Автор задачи – Родионов В.И.)

Глава 5. Полярная система координат
§1. Полярная система координат на плоскости

Возьмем на данной плоскости произвольную точку O и назовем её полюсом. Проведем на данной плоскости из точки O направленный луч, который назовем полярным лучом. Пусть M – произвольная точка данной плоскости. Смотрите рисунок 47.

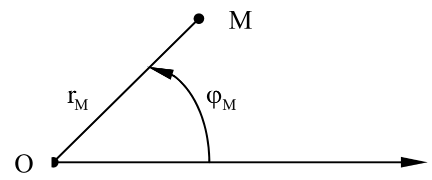


Рис. 47

Определение. Отрезок прямой, соединяющий точку M с полюсом называется полярным радиусом точки M. Длина этого отрезка, то есть расстояние от точки до полюса также называется полярным радиусом точки M, и обозначается $r_M \doteq OM$.

Определение. Угол поворота полярного луча вокруг полюса против часовой стрелки до совпадения с полярным радиусом точки M называется полярным углом точки M, и обозначается φ_M.

Определение. Упорядоченная пара действительных чисел (r_M, φ_M), где r_M – полярный радиус точки M, φ_M – полярный угол точки M, называется полярными координатами точки M.

Определение. Полярной системой координат на плоскости называется полюс и полярный луч вместе с понятием полярных координат любой точки плоскости.

Полярные координаты однозначно определяют положение любой точки на плоскости, за единственным исключением – самого полюса. Чтобы восстановить однозначность для любой точки плоскости, положим по определению полярные координаты полюса равными нулю: O(0; 0).

Полярный угол рассматривают в пределах одного оборота и, как в тригонометрии, поворот против часовой стрелки считают положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. Чаще всего полагают, что полярный угол $\varphi_M \in (-\pi, \pi]$.

Упражнения

70. Выведите формулу расстояния между двумя точками плоскости, если известны их полярные координаты.
71. Выведите в полярной системе координат формулу площади произвольного треугольника, если известны полярные координаты его вершин.

§2. Связь прямоугольной и полярной систем координат

Определение. Говорят, что ПДСК на плоскости стандартным образом совмещена с полярной системой координат этой же плоскости, если полюс полярной системы координат совпадает с началом координат ПДСК, а полярный луч совпадает с положительной полуосью оси абсцисс.

Положим для простоты обозначений: $x = x_M$, $y = y_M$, $r = r_M$, $\varphi = \varphi_M$.

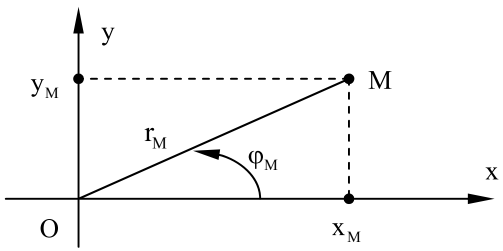


Рис. 48

Тогда в этих обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема (Связь ПДСК с полярной системой координат)

Пусть ПДСК на плоскости Oxy *стандартным образом совмещена с полярной системой координат на этой же плоскости. Тогда декартовые координаты* (x, y) *любой точки плоскости связаны с её полярными координатами* (r, φ) *следующими соотношениями:*

$$x = r\cdot\cos\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi.$$

Доказательство. 1-й способ. Пусть точка M лежит в первой четверти. Тогда доказываемые равенства следуют из прямоугольного треугольника, смотрите рисунок 48.

Случаи других расположений точки M оставляются читателю в качестве упражнения. Не забудьте, кроме всего прочего, рассмотреть 4 случая расположения точки M на положительных и отрицательных координатных полуосях и в начале координат.

2-й способ (авторский). Опишем окружность единичного радиуса с центром в точке O. Смотрите рисунок 49.

Пусть N – точка пересечения единичной окружности с полярным лучом OM (или с его продолжением, если $r < 1$). Тогда $N(\cos\varphi, \sin\varphi)$ – декартовые координаты точки N. Если $M = N$, то $r = 1$ и формулы очевидны. Пусть $M \ne N$. Рассмотрим отношение, в котором точка O делит отрезок MN:

$$\lambda = \lambda_{MN}^{O} = -\frac{OM}{ON} = -r.$$

Воспользуемся формулами вычисления координат точки деления отрезка:

$$x_O = \frac{x_M + \lambda x_N}{1+\lambda} = \frac{x - r\cos\varphi}{1-r},\quad y_O = \frac{y_M + \lambda y_N}{1+\lambda} = \frac{y - r\sin\varphi}{1-r}.$$

Но $x_O = y_O = 0$ и $r \ne 1$, отсюда следует, что

$$x - r\cos\varphi = 0 \text{ и } y - r\sin\varphi = 0. \blacktriangle$$

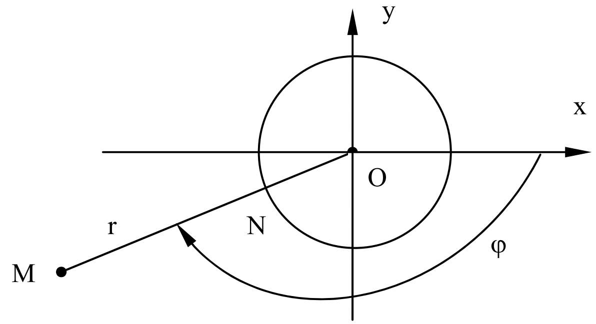


Рис. 49

Легко выразить полярные координаты через декартовые. Действительно, возведя равенства, связывающие полярные и декартовые координаты в квадрат, и складывая, получаем: $x^2 + y^2 = r^2$, откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

откуда можно найти полярный угол φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ если } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ или}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Четверть координатной плоскости, в которой лежит полярный угол φ можно определить зная знаки декартовых координат x и y.

Упражнения

72. Проведите полное доказательство теоремы параграфа первым способом.
73. Найдите полярные координаты точек, лежащих на положительных и отрицательных полуосях ПДСК совмещенной с полярной системой координат.
74. Выразите полярный угол точки через арксинус и через арккосинус для всех случаев расположения точки на координатной плоскости.

§3. Полярный угол вектора

Определение. Полярным углом вектора на координатной плоскости называется угол поворота против часовой стрелки оси абсцисс вокруг любой ее точки до положения сонаправленности с данным вектором.

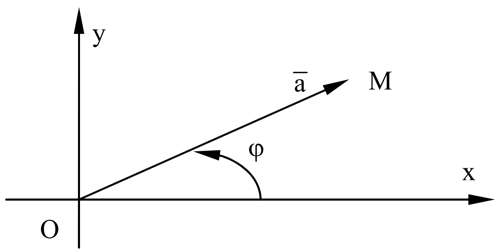


Рис. 50

Из определения следует, что полярный угол $\varphi \in [0; 2\pi)$. В этом со-

стоит его отличие от просто угла между вектором и осью, который изменяется на промежутке от нуля до π.

Если отложить вектор от начала координат и ввести полярную систему координат, стандартным образом совмещенную с прямоугольной, то полярный угол вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ будет совпадать с полярным углом точки M в полярной системе координат, отчего и происходит название полярного угла вектора. Смотрите рисунок 50.

Теорема (Об углах вектора)

Пусть α *и* β *направляющие углы вектора* $\bar{a}$, φ *– его полярный угол. Тогда* $\cos\alpha = \cos\varphi,\ \cos\beta = \sin\varphi$.

Доказательство. Пусть вектор $\bar{a}$ задан в координатной форме:

$$\bar{a} = (x, y)\ .$$

Отложив его от начала координат, получаем радиус-вектор $\bar{a} = \overline{OM}$, и точка M имеет координаты, совпадающие с координатами её радиус-вектора: $M(x; y)$. Используем связь декартовых координат точки плоскости с полярными. В наших обозначениях:

$$x = |\,\bar{a}\,|\cos\varphi, \quad y = |\,\bar{a}\,|\sin\varphi\ .$$

С другой стороны, известно, что

$$x = |\,\bar{a}\,|\cos\alpha, \quad y = |\,\bar{a}\,|\cos\beta\,,$$

откуда и следуют доказываемые равенства. ▲

Заметим, что можно, как в тригонометрии, считать угол поворота по часовой стрелке отрицательным, и полагать, что полярный угол вектора $\varphi \in [\pi; -\pi)$.

Следствие (О координатах орта вектора)

Орт вектора можно записать в виде

$$\bar{a}^{o} = (\cos\alpha; \cos\beta) = (\cos\varphi; \sin\varphi)\ .\ ▲$$

Упражнение

75. Докажите теорему этого параграфа без использования теоремы предыдущего параграфа. Тогда теорему §2 можно доказать используя координатную форму записи радиус-вектора точки M(x,y):

$$\overline{OM} = (x, y) = (|\,\overline{OM}\,|\cos\alpha; |\,\overline{OM}\,|\cos\beta) = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)\ .$$

Тем самым мы будем иметь 3-й способ доказательства теоремы §2.

Глава 6. Базис пространства векторов
§1. Понятие базиса векторного пространства

Пусть L – произвольная прямая. Обозначим через V_L множество всех векторов коллинеарных прямой L. Мы полагаем, что читателю известно, что это множество образует вещественное векторное пространство, то есть, на этом множестве определены операции сложения векторов и умножение вектора на скаляр, которые подчиняются определенным законам (аксиомам векторного пространства).

Аналогично, для любой плоскости P множество V_P всех векторов компланарных плоскости P также образует векторное пространство, как и множество всех свободных векторов.

Таким образом, по крайней мере в этой главе, под словами "векторное пространство" и его обозначением V, нужно понимать либо множество всех векторов коллинеарных некоторой прямой, либо множество всех векторов компланарных некоторой плоскости P, либо множество всех векторов, как направленных отрезков.

Определение. Любое конечное множество векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ называется системой векторов.

Определение. Выражение $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n$, называется линейной комбинацией системы векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$, а действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются её коэффициентами.

Определение. Пусть $\overline{a}$ – произвольный вектор, $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ – произвольная система векторов. Если выполняется равенство

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n,$$

то говорят, что система векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ представляет вектор $\overline{a}$. Также говорят, что вектор $\overline{a}$ представляется в виде линейной комбинации данной системы векторов или вектор $\overline{a}$ линейно выражается через векторы системы $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$.

Определение. Базисом произвольного векторного пространства V называется любая упорядоченная система его ненулевых векторов, которая представляет любой вектор этого пространства и причем единственным способом.

Другими словами, базисом векторного пространства V называется упорядоченная система ненулевых векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$, если для любого вектора $\overline{a} \in V$ существует единственный набор скаляров $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, для которого выполняется равенство

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n.$$

Определение. Пусть система векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ является базисом некоторого векторного пространства V. Тогда для любого вектора $\overline{a} \in V$ равенство

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n$$

называется разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$, а набор коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ называется координатами вектора $\overline{a}$ относительно базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$.

Для понимания последующего введем несколько определений.

Определение. Вектор называется компланарным плоскости, если он лежит на данной или на параллельной ей плоскости.

Определение. Тройка векторов называется компланарной, если все они компланарны одной плоскости. В противном случае, тройка векторов называется некомпланарной.

На рисунке 51 изображена тройка некомпланарных векторов, отложенных от одной точки.

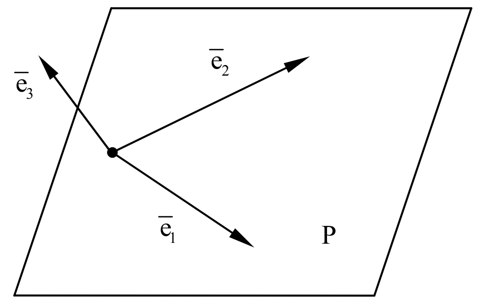


Рис. 51

Лемма (О представлениях нулевого вектора)

1) Пусть $\overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$ *– произвольная пара неколлинеарных векторов. Тогда равенство*

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *возможно тогда и только тогда, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2) Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ *– произвольная некомпланарная тройка векторов. Тогда равенство*

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *возможно тогда и только тогда, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Доказательство. 1) Заметим, что из неколлинеарности двух векторов $\overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$ сразу же следует, что оба вектора ненулевые: $\overline{e}_1 \neq \overline{0} \neq \overline{e}_2$.

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то равенство $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0}$ очевидно. Обратно, пусть верно равенство $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0}$.

Допустим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из равенства $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0}$ следует, что вектор $\overline{e}_1$ линейно выражается через вектор $\overline{e}_2$:

$$\overline{e}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\overline{e}_2,$$

откуда следует, что $\overline{e}_1 \parallel \overline{e}_2$, и мы приходим к противоречию с условием леммы.

Пусть теперь $\alpha_1 = 0$. Тогда из равенства $0 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0}$ следует равенство $\alpha_2\overline{e}_2 = \overline{0}$, откуда, учитывая, что $\overline{e}_2 \neq \overline{0}$, следует, что $\alpha_2 = 0$, и первое утверждение леммы доказано.

2) Заметим, что в силу некомпланарности векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ все они ненулевые, и среди них нет коллинеарных.

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то равенство

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$$

очевидно. Обратно, пусть верно равенство $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$.

Допустим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из равенства $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$ следует, что вектор $\overline{e}_1$ линейно выражается через векторы $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$:

$$\overline{e}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\overline{e}_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\overline{e}_3,$$

откуда следует, что вектор $\overline{e}_1$ лежит в плоскости векторов $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$, то есть, тройка векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ является компланарной, что противоречит условию леммы.

Пусть $\alpha_1 = 0$. Тогда из равенства $0 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$ следует равенство $\alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$. Так как $\overline{e}_2 \nparallel \overline{e}_3$, то в силу доказанной первой части леммы последнее равенство возможно лишь при $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. ▲

Теорема (О базисе пространства векторов)

1) Базисом пространства векторов коллинеарных прямой служит любой ненулевой вектор коллинеарный этой прямой.

2) Базисом пространства векторов компланарных плоскости служит любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов компланарных данной плоскости.

3) Базисом пространства всех векторов служит любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Доказательство. 1) Пусть L произвольная прямая (или ось) и $\overline{e}_1 \parallel L$ – произвольный ненулевой вектор коллинеарный прямой L. Нам нужно доказать, что любой вектор коллинеарный прямой L линейно выражается через вектор $\overline{e}_1$ и притом единственным способом. Пусть $\overline{a} \parallel L$ – произвольный вектор.

Если $\overline{a} = \overline{0}$, то верно равенство

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{e}_1,$$

то есть, нулевой вектор линейно выражается через вектор $\overline{e}_1$.

Пусть $\overline{a} \neq \overline{0}$. Так как оба вектора $\overline{e}_1$ и $\overline{a}$ ненулевые и коллинеарные одной и той же прямой L, то $\overline{e}_1 \parallel \overline{a}$. По теореме об условии коллинеарности двух ненулевых векторов найдется (существует) такое число $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, что

$$\overline{a} = \alpha\overline{e}_1.$$

Таким образом, любой вектор коллинеарный прямой L линейно выражается через вектор $\overline{e}_1$.

Теперь докажем единственность такого представления. Допустим противное, пусть имеется два равенства:

$$\bar{a} = \alpha \bar{e}_1 \quad и \quad \bar{a} = \beta \bar{e}_1,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha \bar{e}_1 - \beta \bar{e}_1 = \bar{0}$ и, используя закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров, получаем:

$$\bar{0} = \alpha \bar{e}_1 - \beta \bar{e}_1 = (\alpha - \beta) \bar{e}_1.$$

Так как $\bar{e}_1 \neq \bar{0}$, то из последнего равенства следует, что $\alpha - \beta = 0$, и $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь P произвольная плоскость и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – упорядоченная пара неколлинеарных векторов компланарных плоскости P. Заметим, что ни один из этих векторов не является нулевым, так как нулевой вектор коллинеарный любому вектору. Пусть $\bar{a}$ произвольный вектор компланарный плоскости P. Если $\bar{a} = \bar{0}$, то верно равенство

$$\bar{0} = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2,$$

то есть, нулевой вектор линейно выражается через векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$. Отложим векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, и вектор $\bar{a}$ от какой-нибудь одной точки плоскости P. Смотрите рисунок 52.

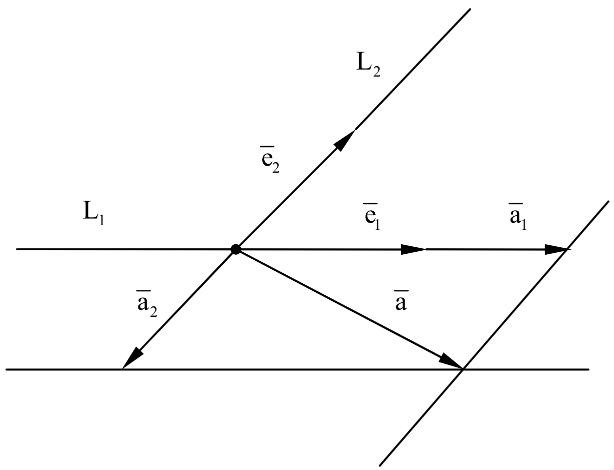


Рис. 52

Построим 4 прямые. Проведем прямую L_1, на которой лежит вектор

$\bar{e}_1$, прямую L_2, на которой лежит вектор $\bar{e}_2$. Через конец вектора $\bar{a}$ проведем прямые параллельные прямым L_1 и L_2. Эти 4 прямые высекают параллелограмм. По правилу параллелограмма $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, где $\bar{a}_1 \parallel L_1$, $\bar{a}_2 \parallel L_2$. Так как векторы системы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ являются ненулевыми векторами, то по доказанному в первой части этой теоремы, система из одного ненулевого вектора $\{\bar{e}_1\}$ является базисом пространства векторов коллинеарных прямой L_1, а система $\{\bar{e}_2\}$ – базисом пространства векторов коллинеарных прямой L_2. Из определения базиса следует, что существуют единственные разложения векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ по базисам соответственно $\{\bar{e}_1\}$ и $\{\bar{e}_2\}$: $\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1$, $\bar{a}_2 = \alpha_2 \bar{e}_2$. Отсюда,

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2.$$

Таким образом, любой вектор компланарный плоскости P линейно выражается через векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Теперь докажем единственность такого представления. Собственно говоря, единственность уже следует из единственности построения параллелограмма и единственности разложения векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Однако, в учебных целях приведем и чисто алгебраическое доказательство.

Допустим противное. Пусть имеется два равенства:

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 \quad и \quad \bar{a} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2.$$

Отсюда следует

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) \bar{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Так как $\bar{e}_1 \nparallel \bar{e}_2$, то в силу леммы $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = 0$, откуда следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, что и требовалось доказать.

3) Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов и $\bar{a}$ – произвольный вектор.

Заметим, что если какие-нибудь два вектора из этой тройки коллинеарные, то тройка векторов будем компланарной. Поэтому среди векторов этой троки нет коллинеарных и нулевых векторов.

Если $\bar{a} = \bar{0}$, то имеем следующее равенство:

$$\bar{0} = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3,$$

то есть нулевой вектор линейно выражается через векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$.

Пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$. Проведем следующие построения. Отложим все три вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и вектор $\bar{a}$ от одной точки и построим 6 плоскостей:

плоскость, в которой лежат векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, плоскость векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_3$ и плоскость векторов $\overline{e}_2, \overline{e}_3$. Далее, через конец вектора $\overline{a}$ проведем три плоскости параллельные только что построенным трем плоскостям. Эти 6 плоскостей высекают параллелепипед. Смотрите рисунок 53.

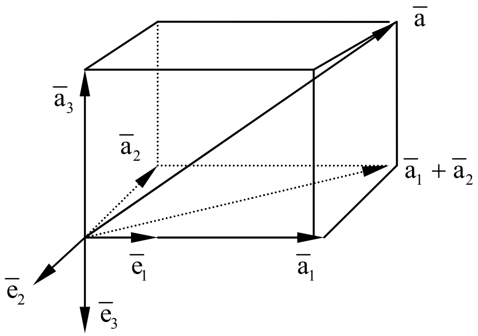


Рис. 53

По правилу сложения векторов получаем равенство:

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 .$$

По построению

$$\overline{a}_1 \parallel \overline{e}_1, \quad \overline{a}_2 \parallel \overline{e}_2, \quad \overline{a}_3 \parallel \overline{e}_3 .$$

Отсюда, по уже доказанному, существуют единственные разложения векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ соответственно по базисам $\{\overline{e}_1\}, \{\overline{e}_2\}$ и $\{\overline{e}_3\}$:

$$\overline{a}_1 = \alpha_1 \overline{e}_1, \quad \overline{a}_2 = \alpha_2 \overline{e}_2, \quad \overline{a}_3 = \alpha_3 \overline{e}_3 .$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем:

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \alpha_3 \overline{e}_3 .$$

Таким образом, любой вектор линейно выражается через векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$.

Теперь докажем единственность такого представления. Как и в предыдущем случае, единственность уже следует из единственности построения параллелепипеда и единственности разложения векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ по соответствующим базисам. Тем не менее, приведем и алгебраическое доказательство.

Допустим противное. Пусть имеется два представления вектора $\overline{a}$ системой векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \alpha_3 \overline{e}_3 \quad \text{и} \quad \overline{a} = \beta_1 \overline{e}_1 + \beta_2 \overline{e}_2 + \beta_3 \overline{e}_3 .$$

Тогда

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overline{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\overline{e}_3 = \overline{0} .$$

По условию, векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ некомпланарные. Тогда, в силу леммы, последнее равенство возможно лишь при нулевых коэффициентах:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = 0 ,$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$. ▲

Определение. Число векторов в базисе векторного пространства называется его размерностью, и обозначается $\dim V$.

Из этого определения и теоремы о базисе следует, что пространство векторов коллинеарных прямой является одномерным, пространство векторов компланарных плоскости является двумерным, а пространство всех векторов является трехмерным:

$$\dim V_L = 1, \ \dim V_P = 2, \ \dim V = 3 ,$$

где V_L, V_P и V –пространства векторов, соответственно, коллинеарных прямой, компланарных плоскости и всех векторов.

Определение. Подмножество H векторного пространства V называется его подпространством, если оно замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр, то есть, если выполняются следующие два условия:

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in H : \overline{a} + \overline{b} \in H \quad \text{и} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overline{a} \in H : \lambda \overline{a} \in H .$$

Упражнения

76. Докажите, пространство векторов V_P компланарных некоторой плоскости P является векторным подпространством пространства всех векторов V.
77. Докажите, пространство векторов V_L коллинеарных некоторой прямой L является векторным подпространством пространства всех векторов V.
78. Докажите, что любое векторное подпространство векторного пространства само является векторным пространством, то есть в векторном подпространстве выполняются все аксиомы векторного пространства.

§2. Ортонормированный базис

Определение. Два вектора называются ортогональными, если угол между ними равен прямому углу, то есть, 90°.

Обозначение: $\overline{a} \perp \overline{b}$ – векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональные.

Определение. Тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ называется ортогональной, если эти векторы попарно ортогональны друг другу, то есть,

$$\overline{a} \perp \overline{b} \perp \overline{c} \perp \overline{a}.$$

Определение. Тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ называется ортонормированной, если она ортогональная и их модули равны единице:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \perp \overline{c} \perp \overline{a} \quad \text{и} \quad |\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1.$$

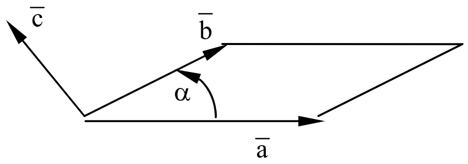


Рис. 54

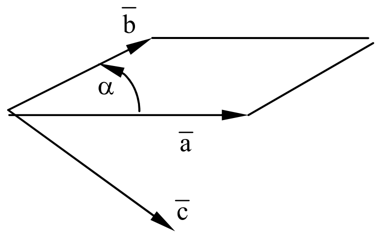


Рис. 55

Определение. Упорядоченная некомпланарная тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$, отложенных от одной точки, называется правой (правоориентированной), если при наблюдении с конца третьего вектора $\overline{c}$ на плоскость, в которой лежат первые два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, кратчайший поворот первого вектора $\overline{a}$ ко второму $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой (левоориентированной).

Здесь, на рисунке 54 изображена правая тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$, на рисунке 55 – левая.

Из определения следует, что ортогональные и ортонормированные тройки векторов являются некомпланарными.

Определение. Базис $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ векторного пространства V называется ортонормированным, если $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ ортонормированная тройка векторов.

Обозначение. В дальнейшем мы будем пользоваться правым ортонормированным базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, смотрите следующие рисунки:

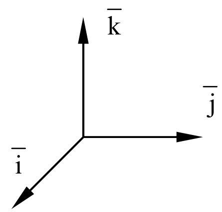


Рис. 56

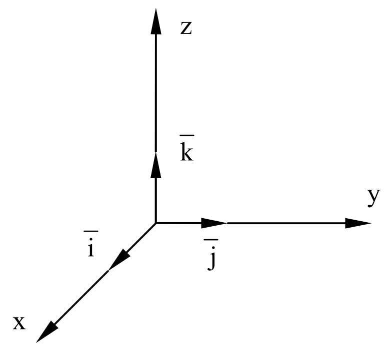


Рис. 57

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что векторы ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ являются ортами соответственно оси абсцисс, оси ординат и оси аппликат прямоугольной декартовой системы координат. Смотрите рисунок 57.

Из результатов первого параграфа следует, что любой вектор $\overline{a}$ единственным образом можно представить в виде (разложить по базису):

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{i} + \alpha_2 \overline{j} + \alpha_3 \overline{k},$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – координаты вектора $\overline{a}$ относительно ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Упражнения

79. Докажите, что тройка векторов $\{\overline{i}+\overline{j}, \overline{j}-\overline{i}, \overline{k}\}$ является ортогональным базисом пространства векторов.
80. Пусть $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$. Разложите вектор $\overline{x}$ по базису $\{\overline{i}+\overline{j}, \overline{j}-\overline{i}, \overline{k}\}$.

§3. Основная теорема векторной алгебры

Теорема (Основная теорема векторной алгебры)

Координаты вектора относительно ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ *совпадают с его проекциями на соответствующие координатные оси, то есть, если*

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{i} + \alpha_2 \overline{j} + \alpha_3 \overline{k} \quad \text{и} \quad \overline{a} = (x, y, z),$$

где $x = \text{пр}_x \overline{a},\ y = \text{пр}_y \overline{a},\ z = \text{пр}_z \overline{a}$ *, то*

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = y,\ \alpha_3 = z.$$

Доказательство. Пусть $\overline{a} = \alpha_1 \overline{i} + \alpha_2 \overline{j} + \alpha_3 \overline{k}$ – разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Поскольку проекция вектора на ось (вектор) не зависит от выбора точки его начала, то отложим вектор $\overline{a}$ и все базисные векторы от одной точки, и разложим вектор $\overline{a}$ по данному базису как в доказательстве теоремы §1. Смотрите рисунок 58.

По правилу сложения векторов получаем разложение вектора $\overline{a} = \overline{OM}$ по базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$:

$$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \alpha_1 \overline{i} + \alpha_2 \overline{j} + \alpha_3 \overline{k},$$

где $\overline{OA} = \alpha_1 \overline{i},\quad \overline{OB} = \alpha_2 \overline{j},\quad \overline{OC} = \alpha_3 \overline{k}$.

По определению умножения вектора на скаляр имеем:

$$OA = |\overline{OA}| = |\alpha_1| \cdot |\overline{i}| = |\alpha_1|,$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} OA \ge 0, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{i} \\ -OA < 0, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\downarrow \overline{i} \end{cases}.$$

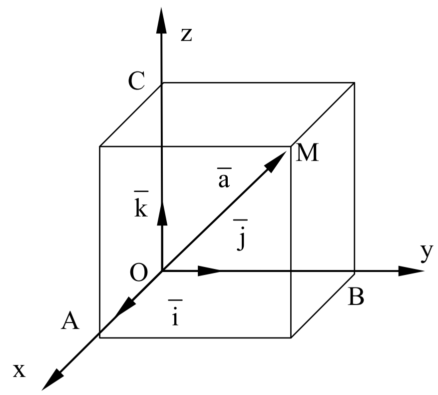


Рис. 58

С другой стороны, по построению, точки A, B и C являются проекциями точки M на координатные оси, и по определению проекции вектора на ось имеем:

$$x = \text{пр}_x \overline{a} = \text{пр}_x \overline{OM} = \begin{cases} OA, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\uparrow Ox \\ -OA, & \text{если } \overline{OA} \uparrow\downarrow Ox \end{cases}.$$

Так как $\overline{i} \uparrow\uparrow Ox$, то отсюда сразу же следует, что

$$x = \alpha_1.$$

Аналогично доказываются оставшиеся равенства:

$$y = \alpha_2 \text{ и } z = \alpha_3. \ \blacktriangle$$

Замечание

В силу основной теоремы векторной алгебры, мы можем не различать координаты вектора как проекции этого вектора на координатные оси и координаты этого же вектора относительно ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Поэтому мы будем говорить просто о координатах вектора и помнить, что координатная форма записи вектора равносильна записи этого же вектора в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\overline{a} = (x, y, z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Глава 7. Произведения векторов
§1. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \doteq |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a}\wedge\overline{b}).$$

Определение. Скалярным квадратом вектора называется скалярное произведение этого вектора на самого себя:

$$\overline{a}^2 \doteq \overline{a}\cdot\overline{a}.$$

Теорема (Простейшие свойства скалярного произведения)

1) Скалярное произведение подчиняется закону коммутативности:

$$\forall\overline{a},\overline{b}\in V:\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}.$$

2) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они ортогональные:

$$\forall\overline{a}\neq\overline{0}\neq\overline{b}:\quad \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}.$$

3) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2.$$

4) Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора на проекцию на него другого вектора:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{b}|\cdot\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}.\ \blacktriangle$$

Все свойства очевидны из определения и их доказательства предоставляются читателям.

Теорема (Свойство линейности скалярного произведения)

1) Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов:

$$\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V:\quad (\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c},\quad \overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

2) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$\forall\overline{a},\overline{b}\in V,\forall\alpha\in\mathbb{R}:\quad (\alpha\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\alpha\overline{b})=\alpha(\overline{a}\cdot\overline{b}).$$

Доказательство. 1) По свойству 4 предыдущей теоремы и по свойству проекции вектора на вектор (на ось) имеем:

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=|\overline{c}|\,\text{пр}_{\overline{c}}(\overline{a}+\overline{b})=|\overline{c}|\,(\text{пр}_{\overline{c}}\overline{a}+\text{пр}_{\overline{c}}\overline{b})=$$

$$=|\overline{c}|\,\text{пр}_{\overline{c}}\overline{a}+|\overline{c}|\,\text{пр}_{\overline{c}}\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

Остальные свойства доказывается аналогично. ▲

Скалярное произведение можно рассматривать как числовую функцию от двух переменных, определенную на декартовом квадрате V^2 множества векторов V:

$$f:V^2\to\mathbb{R},$$

то есть

$$\forall\overline{a},\overline{b}\in V,\quad (\overline{a},\overline{b})\in V^2\mapsto f(\overline{a},\overline{b})\doteq\overline{a}\cdot\overline{b}\in\mathbb{R}.$$

Тогда, свойства теоремы могут быть записаны так:

1) $\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$:

$$f(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=f(\overline{a},\overline{c})+f(\overline{b},\overline{c}),\quad f(\overline{a},\overline{b}+\overline{c})=f(\overline{a},\overline{b})+f(\overline{a},\overline{c})$$

2) $\forall\overline{a},\overline{b}\in V,\forall\alpha\in\mathbb{R}$:

$$f(\alpha\overline{a},\overline{b})=f(\overline{a},\alpha\overline{b})=\alpha f(\overline{a},\overline{b}).$$

Первое из этих свойств называется свойством аддитивности функции f по первому и второму аргументу соответственно, а второе – свойством однородности. Если выполняются оба свойства, то говорят, что функция f линейная по первому и второму аргументу. Отсюда происходит и название этих свойств скалярного произведения.

Определение. Функция двух аргументов (переменных) называется билинейной, если она обладает свойством линейности по каждому аргументу.

В этих терминах предыдущая теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема (Свойство линейности скалярного произведения)

Скалярное произведение есть билинейная функция.

Далее, нашей задачей является научиться находить скалярное произведение векторов, каждый из которых задан в координатной форме.

Теорема (Скалярное произведение векторов в координатной форме)

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат, то есть, если

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)\,,\ \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)\,,$$

тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,.$$

Доказательство. Учитывая, что скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, а скалярный квадрат единичного вектора равен 1 , получаем:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k})(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}) =$$
$$= (x_1x_2)(\overline{i}\cdot\overline{i}) + (x_1y_2)(\overline{i}\cdot\overline{j}) + (x_1z_2)(\overline{i}\cdot\overline{k}) +$$
$$+(y_1x_2)(\overline{j}\cdot\overline{i}) + (y_1y_2)(\overline{j}\cdot\overline{j}) + (y_1z_2)(\overline{j}\cdot\overline{k}) +$$
$$+(z_1x_2)(\overline{k}\cdot\overline{i}) + (z_1y_2)(\overline{k}\cdot\overline{j}) + (z_1z_2)(\overline{k}\cdot\overline{k}) =$$
$$= (x_1x_2)\,|\,\overline{i}\,|^2 + (y_1y_2)\,|\,\overline{j}\,|^2 + (z_1z_2)\,|\,\overline{k}\,|^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,. \ \blacktriangle$$

Следствие 1 (О модуле вектора)

Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Иначе, если $\overline{a} = (x, y, z)$, то $|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Доказательство. Эта формула нам уже известна. Её можно получить с помощью скалярного произведения:

$$|\,\overline{a}\,|^2 = \overline{a}^2 = \overline{a}\cdot\overline{a} = x\cdot x + y\cdot y + z\cdot z = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Доказываемая формула следует из последнего равенства. ▲

Следствие 2 (Об угле между векторами)

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$. *Тогда*

$$(\overline{a}\wedge\overline{b}) = \arccos\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|} = \arccos\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\,.$$

Доказательство. Очевидно. ▲

Физический смысл скалярного произведения

Пусть материальная точка перемещается под действием постоянной силы $\overline{F}$ вдоль вектора перемещения $\overline{s}$. На рисунке 59 сила

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

разложена на две ортогональные составляющие $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причем, из физики нам известно, что работа при перемещении материальной точки вдоль вектора $\overline{s}$ создается составляющей $\overline{F}_1$ и равна $A = |\,\overline{F}_1\,|\cdot|\,\overline{s}\,|$.

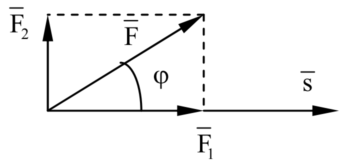


Рис. 59

С другой стороны,

$$|\,\overline{F}_1\,| = |\,\overline{F}\,|\cos\varphi\,,$$

откуда получаем:

$$A = |\,\overline{F}\,|\cdot|\,\overline{s}\,|\cos\varphi = \overline{F}\cdot\overline{s}\,.$$

Таким образом, физический смысл скалярного произведения заключается в полученной формуле:

работа силы вдоль вектора перемещения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Следующая лемма и её следствие нам понадобятся для доказательства свойства линейности векторного произведения векторов.

Лемма (О вычислении координат вектора)

Пусть $\overline{a} = (x, y, z)$. *Тогда*

$$x = \overline{a}\cdot\overline{i},\quad y = \overline{a}\cdot\overline{j},\quad z = \overline{a}\cdot\overline{k}\,.$$

Доказательство. Так как

$$\overline{i} = 1\cdot\overline{i} + 0\cdot\overline{j} + 0\cdot\overline{k} = (1;0;0)\,,$$

то по теореме о скалярном произведении векторов в координатной форме, получаем:

$$\overline{a}\cdot\overline{i} = x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0 = x\,.$$

Аналогично доказываются оставшиеся два равенства. ▲

Следствие (Критерий равенства векторов)

$$\overline{a}=\overline{b} \Leftrightarrow \forall \overline{c}: \ \overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\,.$$

Доказательство. Если $\overline{a}=\overline{b}$, то равенство $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}$ очевидно для любого вектора $\overline{c}$. Обратно, пусть для любого вектора $\overline{c}$ верно равенство $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}$. Подставим последовательно в это равенство вместо вектора $\overline{c}$ векторы ортонормированного базиса $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{i}=\overline{b}\cdot\overline{i},\quad \overline{a}\cdot\overline{j}=\overline{b}\cdot\overline{j},\quad \overline{a}\cdot\overline{k}=\overline{b}\cdot\overline{k}\,.$$

В силу леммы эти равенства означают равенства соответствующих координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Пусть

$$\overline{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \ \overline{b}=(x_2,y_2,z_2)\,,$$

тогда

$$x_1=\overline{a}\cdot\overline{i}=\overline{b}\cdot\overline{i}=x_2,\quad y_1=\overline{a}\cdot\overline{j}=\overline{b}\cdot\overline{j}=y_2,\quad z_1=\overline{a}\cdot\overline{k}=\overline{b}\cdot\overline{k}=z_2\,.$$

Из равенства соответствующих координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ следует их равенство. ▲

Упражнения

81. Докажите простейшие свойства скалярного произведения.
82. Завершите доказательство свойства линейности скалярного произведения. Свойство линейности скалярного произведения по второму аргументу докажите используя свойство линейности скалярного произведения по первому аргументу и свойство коммутативности.
83. Выясните, какая из следующих функций двух переменных является линейной хотя бы по одному аргументу, какая из них является билинейной:
    а) $f(x,y)=x+y$; б) $g(x,y)=xy$; в) $h(x,y)=x\sqrt{y}$?
84. Закончите доказательство свойств линейности скалярного произведения.

§2. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, который обозначается $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$;
2) тройка векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ является правой;
3) $|\overline{c}|=|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a}\wedge\overline{b})$.

Из определения следует, что, если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ отложить от одной точки, то (смотрите рисунок 60):

1) вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
2) кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки, если смотреть "сверху", то есть со стороны вектора $\overline{c}$;
3) длина вектора $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на его сторонах.

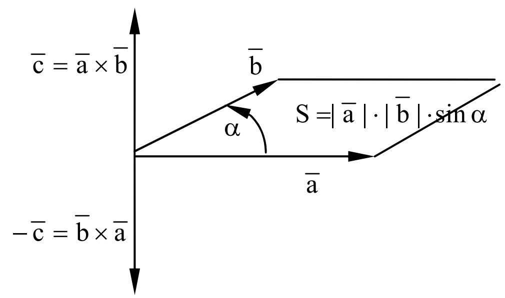


Рис. 60

Теорема (Простейшие свойства векторного произведения)

1) Антикоммутативность: $\forall\overline{a},\overline{b}\in V:\ \ \overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.

2) Условие коллинеарности векторов: $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$.

3) Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *как на его сторонах.*

Доказательство. 1) Пусть $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$. Рассмотрим противоположный ему вектор: $-\overline{c}$. Этот вектор удовлетворяет всем трем условиям определения векторного произведения вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$. Действительно, так как $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$, то и $-\overline{c}\perp\overline{a}$ и $-\overline{c}\perp\overline{b}$. Далее, тройка векторов $\{\overline{b},\overline{a},-\overline{c}\}$ является правой, то есть кратчайший поворот от вектора $\overline{b}$ к вектору $\overline{a}$ происходит против часовой стрелки, если смотреть на плоскость, в которой лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ "снизу", то есть со стороны вектора $-\overline{c}$. И, наконец, $|-\overline{c}|=|\overline{c}|=|\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cdot\sin\alpha$, что и требовалось доказать.

2) Если один из векторов или оба равны нулю, то они коллинеарные и модуль их векторного произведения равен нулю. Следовательно, и само векторное произведение равно нулевому вектору.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые. Тогда

$$\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}\Leftrightarrow|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|=0\Leftrightarrow\sin\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0 \text{ или } \alpha=\pi,$$

а это, в свою очередь, равносильно коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3) Следует из формулы площади параллелограмма. ▲

Упражнения

85. Постройте двойные векторные произведения:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}\,,\ (\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{a}\,,\ (\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{b}\,.$$

86. Проверьте, подчиняется ли векторное произведение закону ассоциативности:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})\,.$$

§3. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ называется скалярное произведение первого вектора на векторное произведение второго вектора на третий и обозначается:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\doteq\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})\,.$$

Теорема (Геометрический смысл смешанного произведения)

1) Модуль смешанного произведения трех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах как на его ребрах:

$$|\,\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\,|=V(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\,.$$

2) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}>0$*, если тройка* $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ *– правая и* $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}<0$ *в противном случае.*

3) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0$*, если тройка векторов* $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ *– компланарная.*

Доказательство. 1) Обозначим здесь через $V=V(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ объем параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на его ребрах. Объем параллелепипеда V равен произведению площади основания S на высоту H: $V=SH$. Площадь основания S численно равна модулю векторного произведения, а высота H равна модулю проекции вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}$ (смотрите рисунок 61):

$$S=|\,\overline{b}\times\overline{c}\,|,\ H=|\,\text{пр}_{\overline{d}}\overline{a}\,|.$$

Отсюда получаем:

$$V=SH=|\,\overline{b}\times\overline{c}\,|\cdot|\,\text{пр}_{\overline{d}}\overline{a}\,|=||\,\overline{b}\times\overline{c}\,|\,(\text{пр}_{\overline{b}\times\overline{c}}\overline{a})\,|=|\,\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})\,|=|\,\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\,|\,.$$

2) Так как

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=|\,\overline{b}\times\overline{c}\,|\cdot|\,\overline{a}\,|\cdot\cos\varphi\,,$$

где $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{b}\times\overline{c})$, то знак смешанного произведения зависит от угла φ. Если он острый (как на рисунке 61), то смешанное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}>0$, если же угол φ тупой, то $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}<0$. Это, в свою очередь, зависит от ориентации тройки векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$. На рисунке 61 изображена правая тройка векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$. Нетрудно заметить, что тройка $\{\overline{b},\overline{c},\overline{a}\}$ тоже правая, и кратчайший поворот вектора $\overline{b}$ к вектору $\overline{c}$ происходит против часовой стрелки, если наблюдать его с конца вектора $\overline{a}$. То же самое мы наблюдаем с конца вектора $\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}$. Это означает, что концы векторов $\overline{d}$ и $\overline{a}$ находятся в одном полупространстве относительно плоскости векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$, и так как вектор $\overline{d}$ ортогонален этой плоскости, то угол $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{b}\times\overline{c})$ не может быть больше 90°.

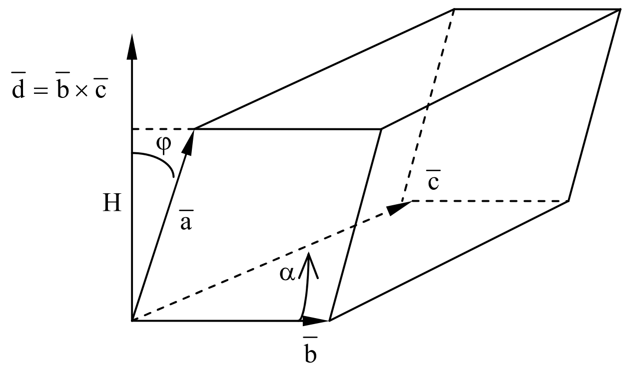


Рис. 61

Итак, если тройка $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ – правая, то угол φ – острый и

$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} > 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что если тройка $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ – левая, то угол φ будет тупым и $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} < 0$.

3) Пусть тройка $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ – компланарная. Если хотя бы один из векторов нулевой, или среди них есть коллинеарные, то утверждение очевидно. Пусть ни один из векторов сомножителей не равен нулю и среди них нет коллинеарных. В этом случае угол φ прямой, и $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = 0$. ▲

Определение. Любое изменение порядка следования векторов в упорядоченной тройке векторов называется её перестановкой.

Определение. Транспозицией в тройке векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ называется такая её перестановка, при которой только один из векторов остается на своём месте, а два других вектора меняются местами.

Определение. Круговой перестановкой тройки векторов $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ называется такая её перестановка, при которой ни один из векторов не остается на своём месте.

Лемма (О перестановках векторов)
Круговая перестановка в тройке векторов не изменяет ее ориентации, а транспозиция векторов изменяет ориентацию тройки на противоположную.

Доказательство проведите самостоятельно с использованием соответствующих картинок. Так, тройки векторов $\{\overline{c},\overline{a},\overline{b}\}$ и $\{\overline{b},\overline{c},\overline{a}\}$ получаются из тройки $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ с помощью круговой перестановки векторов, а тройки $\{\overline{b},\overline{a},\overline{c}\}$, $\{\overline{c},\overline{b},\overline{a}\}$ и $\{\overline{a},\overline{c},\overline{b}\}$ – с помощью транспозиции. ▲

Следствие (О перестановках в смешанном произведении)
1) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}$;
2) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = -\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c} = -\overline{c}\cdot\overline{b}\cdot\overline{a} = -\overline{a}\cdot\overline{c}\cdot\overline{b}$;
3) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$.

Доказательство. 1), 2) По модулю все эти смешанные произведения равны друг другу, так как параллелепипед, построенный на данных трех

векторах, как его ребрах, не зависит от того, в каком порядке мы записываем его ребра и, соответственно, не изменяется его объем. Знак смешанного произведения упорядоченной тройки векторов зависит от ее ориентации, которая не меняется при круговой перестановке и меняется при транспозиции, откуда и следуют доказываемые равенства.

3) Воспользуемся уже доказанным равенством, определением смешанного произведения и свойством коммутативности скалярного произведения:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b} \doteq \overline{c}\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}. \ ▲$$

Теорема (Свойство линейности смешанного произведения)
Для любых векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ *и для любого действительного числа* α *справедливы следующие равенства:*
1) $(\overline{a}_1+\overline{a}_2)\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{a}_1\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{a}_2\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$;
2) $(\alpha\overline{a})\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \alpha(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$;
3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}_1+\overline{b}_2)\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{b}_1\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot\overline{b}_2\cdot\overline{c}$;
4) $\overline{a}\cdot(\alpha\overline{b})\cdot\overline{c} = \alpha(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$;
5) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot(\overline{c}_1+\overline{c}_2) = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}_1 + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}_2$;
6) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot(\alpha\overline{c}) = \alpha(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$.

Доказательство. Достаточно доказать первое равенство, все остальные доказываются аналогично. Воспользуемся определением смешанного произведения и свойством линейности скалярного произведения:

$$(\overline{a}_1+\overline{a}_2)\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = (\overline{a}_1+\overline{a}_2)\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{a}_1\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) + \overline{a}_2\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) =$$
$$= \overline{a}_1\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{a}_2\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}. \ ▲$$

Иначе можно сказать, что смешанное произведение линейно по каждому своему аргументу, если рассматривать смешанное произведение как числовую функцию трех аргументов.

Теорема (Свойство линейности векторного произведения)
Для любых векторов $\overline{a},\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{b},\overline{b}_1,\overline{b}_2$ *и действительного числа* α *справедливы следующие равенства:*
1) $(\overline{a}_1+\overline{a}_2)\times\overline{b} = \overline{a}_1\times\overline{b} + \overline{a}_2\times\overline{b}$;
2) $(\alpha\overline{a})\times\overline{b} = \alpha(\overline{a}\times\overline{b})$;

3) $\bar{a}\times(\bar{b}_1+\bar{b}_2)=\bar{a}\times\bar{b}_1+\bar{a}\times\bar{b}_2$;

4) $\bar{a}\times(\alpha\bar{b})=\alpha(\bar{a}\times\bar{b})$.

Доказательство. 1) В силу следствия §1 достаточно доказать, что для любого вектора $\bar{c}$ верно равенство

$$((\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{a}_1\times\bar{b}+\bar{a}_2\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Действительно, используя уже доказанные свойства линейности смешанного и скалярного произведений, получаем:

$$((\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}_1\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}_2\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=$$
$$=(\bar{a}_1\times\bar{b})\cdot\bar{c}+(\bar{a}_2\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{a}_1\times\bar{b}+\bar{a}_2\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Аналогично доказываются остальные равенства теоремы. ▲

Упражнения

87. Докажите лемму о перестановках векторов.
88. Проведите полное доказательство теоремы о свойствах линейности смешанного произведения.
89. Докажите свойство линейности векторного произведения по второму аргументу, используя свойство антикоммутативности векторного произведения и доказанное свойство линейности по первому аргументу.

§4. Смешанное и векторное произведения в координатной форме

Теорема (Формулы произведения векторов в координатной форме)
Пусть $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$. *Тогда:*

1) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}$;

2) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

Доказательство. 1) Используем свойство линейности векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})\times(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=$$
$$=(x_1x_2)(\bar{i}\times\bar{i})+(x_1y_2)(\bar{i}\times\bar{j})+(x_1z_2)(\bar{i}\times\bar{k})+$$
$$+(y_1x_2)(\bar{j}\times\bar{i})+(y_1y_2)(\bar{j}\times\bar{j})+(y_1z_2)(\bar{j}\times\bar{k})+$$

$$+(z_1x_2)(\bar{k}\times\bar{i})+(z_1y_2)(\bar{k}\times\bar{j})+(z_1z_2)(\bar{k}\times\bar{k}).$$

Далее заметим, что векторные произведения коллинеарных векторов равны нулевому вектору:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}.$$

Рассмотрим другие векторные произведения базисных векторов:

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\quad \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k},\quad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\quad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i},\quad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j},\quad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}.$$

Эти равенства легко устанавливаются с помощью рисунка 56. Отсюда,

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1y_2)\bar{k}-(x_1z_2)\bar{j}-(y_1x_2)\bar{k}+(y_1z_2)\bar{i}+(z_1x_2)\bar{j}-(z_1y_2)\bar{i}=$$
$$=(y_1z_2-z_1y_2)\bar{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\bar{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\bar{k}=$$
$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}.$$

2) Воспользуемся только что доказанной формулой:

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\cdot\bar{k}.$$

Теперь, по теореме о скалярном произведении векторов в координатной форме, получаем:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=$$
$$=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.\ ▲$$

Векторное произведение часто записывают в форме определителя третьего порядка:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Разумеется это не определитель, а лишь форма записи векторного произведения. Она компактна и удобна для запоминания.

Следствие (О перестановках строк и столбцов определителя)
Определитель не изменяется при круговой перестановке строк определителя. При транспозиции двух строк определитель меняет знак.

Доказательство. С одной стороны,

$$\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\bar c\cdot\bar a\cdot\bar b=\begin{vmatrix}x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Но, $\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c=\bar c\cdot\bar a\cdot\bar b$, откуда и следует утверждение. Далее, так как $\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c=-\bar b\cdot\bar a\cdot\bar c$, то

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.\ \blacktriangle$$

Упражнение

90. Найдите ориентацию тройки векторов $\{\bar i+\bar j+\bar k,\ \bar i-\bar j+\bar k,\ \bar i-\bar j-\bar k\}$.

§5. Некоторые приложения векторной алгебры

Допустим, что нам дана геометрическая фигура (многоугольник или многогранник) и известны координаты ее вершин. Тогда мы с помощью векторной алгебры можем находить длины сторон (ребер), углы между ними, площади многоугольников, граней призмы или пирамиды, объемы.

1. Длина стороны (ребра) AB.

Пусть $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$. Тогда

$$AB=|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

где $\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

2. Угол между сторонами (ребрами) AB и AC.

Пусть $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$. Тогда

$$\angle BAC=(\overline{AB}\wedge\overline{AC})=\arccos\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|},$$

где

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\ \ \overline{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1),$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$|\overline{AC}|=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}.$$

В частности, $\angle BAC=90^{\circ}$, то есть $\overline{AB}\perp\overline{AC}$ тогда и только тогда, когда $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=0$ (при условии, что $A\neq B$ и $A\neq C$).

3. Площадь параллелограмма ABCD.

$$S_{ABCD}=AB\cdot AC\cdot\sin(\angle BAC)=|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\cdot\sin(\overline{AB}\wedge\overline{AC})=|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

Так как

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\bar i-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\bar j+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\cdot\bar k,$$

то осталось воспользоваться формулой для вычисления модуля вектора.

4. Площадь треугольника ABC.

$$S_{\Delta ABC}=\frac12|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

5. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$$V=|\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AA_1}|.$$

6. Объем треугольной пирамиды SABC.

$$V=\frac16|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AS}|.$$

Докажем последнюю формулу. Имеем,

$$V=\frac13S_{осн}\cdot H,\ S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac12|\overline{AB}\times\overline{AC}|,\ \ H=|\text{пр}_{\overline{AB}\times\overline{AC}}\overline{AS}|$$

откуда и следует доказываемая формула:

$$V=\frac13S_{осн}H=$$

$$=\frac16\,||\overline{AB}\times\overline{AC}|\cdot\text{пр}_{\overline{AB}\times\overline{AC}}\overline{AS}|=\frac16|(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AS}|=\frac16|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AS}|.$$

7. Высота треугольной пирамиды SABC.

Пусть H – высота, опущенная из вершины S на плоскость основания ABC. Так как $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, то

$$H = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AS}|}{\frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|},$$

откуда следует

$$H = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AS}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}.$$

8. Момент силы относительно точки.

Пусть $\overline{F} = \overline{AB}$ – вектор силы, приложенный к точке A и пусть C – произвольная точка. Смотрите рисунок 62.

В механике моментом силы $\overline{F}$ относительно точки C называется вектор $\overline{M}$ равный векторному произведению вектора $\overline{CA}$ на вектор силы $\overline{F} = \overline{AB}$: $\overline{M} = \overline{CA} \times \overline{F}$. Отсюда легко получаем, что величина момента (то есть его модуль) равна величине силы на плечо h:

$$M = F \cdot h.$$

Действительно,

$$M = |\overline{M}| = |\overline{CA}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\overline{CA} \wedge \overline{F}) = Fh,$$

где

$$F = |\overline{F}|, \quad h = |\overline{CA}| \cdot \sin(\overline{CA} \wedge \overline{F}).$$

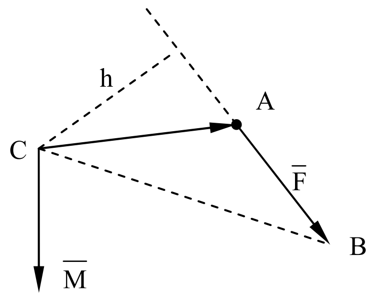


Рис. 62

9. Линейная скорость точки тела вращения.

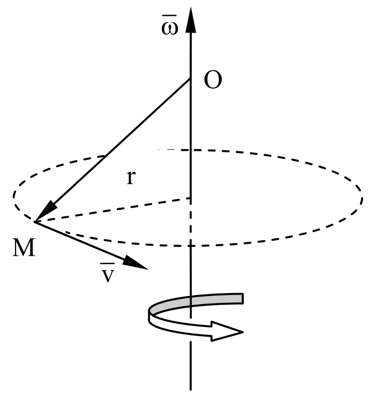


Рис. 63

Пусть M точка тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\overline{\omega}$, O – произвольная точка этой оси, $\overline{v}$ – вектор линейной скорости точки M. Смотрите рисунок 63.

Тогда

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{OM}.$$

Величина линейной скорости

$$v = |\overline{\omega} \times \overline{OM}| = |\overline{\omega}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{OM}) = \omega r.$$

Упражнение

91. Выведите формулу площади треугольника, лежащего на координатной плоскости Oxy, если известны координаты его вершин.

Глава 8. Уравнение прямой
§1. Понятие об уравнении линии и поверхности

С теоретико-множественной точки зрения, любая линия или поверхность есть множество точек. Каждое такое множество может обладать некоторыми свойствами. Математики с древних времен пытались отыскать такие свойства, которые полностью определяли бы такие интуитивно понятные объекты как прямая, кривая, поверхность. Эта задача была окончательно решена лишь в двадцатом веке, когда было введено понятие размерности множества. Популярно об этом можно прочитать в замечательной книжке Виленкина Н.Я. "Рассказы о множествах." Мы же ограничимся интуитивным пониманием линии и поверхности, причем мы полагаем, что и линия и поверхность состоят из точек.

Пусть в пространстве введена ПДСК Oxyz и пусть дана некоторая числовая функция трех действительных аргументов $F(x, y, z)$. Каждая точка M пространства имеет три координаты: $M(x, y, z)$. Если подставить координаты точки M в данную числовую функцию, то мы получаем некоторое числовое значение этой функции.

Определение. Пусть W некоторое подмножество множества точек координатного пространства Oxyz. Уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

называется уравнением множества W, если координаты каждой точки множества W удовлетворяет этому уравнению и, наоборот, каждое решение данного уравнения определяет координаты точки, лежащей именно в множестве W, то есть

$$M(x_M, y_M, z_M) \in W \Leftrightarrow F(x_M, y_M, z_M) = 0 .$$

Часто бывает, что одного уравнения не хватает для того чтобы описать данное множество точек (линию или поверхность) и тогда уравнениями данного множества точек называют систему (или совокупность) таких уравнений:

$$M(x_M, y_M, z_M) \in W \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_M, y_M, z_M) = 0 \\ \quad\quad ... \\ F_n(x_M, y_M, z_M) = 0 \end{cases} .$$

В аналитической геометрии существует два подхода при изучении линий и поверхностей. Первый подход заключается в том, что изначально имеется одно уравнение или система или совокупность уравнений и изучается множество их решений, причем каждое решение (x, y, z) рассматривается как координаты точки.

Образует ли какую-нибудь геометрическую форму такое множество решений? Может это какая-нибудь линия или поверхность? Чтобы предметно и конкретно обсуждать этот вопрос нам понадобятся несколько определений.

Определение. Пусть $P(x, y, z)$ – многочлен от трех переменных n-й степени. Тогда уравнение $P(x, y, z) = 0$ называется алгебраическим уравнением n-й степени с тремя неизвестными. Если это уравнение является уравнением кривой (поверхности), то такая кривая (поверхность) называется алгебраической кривой (поверхностью) n-го порядка.

Пример. Уравнение

$$x - 2 = 0$$

– алгебраическое уравнение первой степени с одним неизвестным. Однако, мы можем рассматривать это уравнение как уравнение с тремя неизвестными x, y и z. Тогда множество всех решений этого уравнения есть множество

$$P = \{(2, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} .$$

Рассматривая это множество P как множество точек в координатном пространстве Oxyz, мы находим, что данному уравнению удовлетворяют координаты всех точек плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz, отстоящей от нее на расстоянии 2 и проходящей через точку (2; 0; 0) и только они. Следовательно, данное уравнение $x - 2 = 0$ является уравнением плоскости и эта плоскость является алгебраической поверхностью первого порядка.

Мы можем рассматривать данное уравнение как уравнение с двумя неизвестными x и y. Тогда множество всех решений этого уравнения есть множество

$$L = \{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} .$$

Рассматривая это множество L как множество точек на координатной плоскости Oxy, мы находим, что данному уравнению удовлетворяют все точки прямой линии, параллельной координатной оси Oy, отстоящей от нее на расстоянии 2 и проходящая через точку (2, 0) и только они. В соответствии с определениями отсюда следует, что данное уравнение является уравнением прямой, лежащей на координатной плоскости Oxy и эта прямая является алгебраической линией первого порядка.

Определение. Уравнение, содержащее трансцендентные функции (тригонометрические, показательные, логарифмические), называется трансцендентными.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi).$$

Будем рассматривать множество решений (x, y) этой системы как координаты точек на координатной плоскости Oxy. Нетрудно доказать, что множество решений (x, y) данной системы совпадает на координатной плоскости Oxy с окружностью радиуса R с центром в начале координат. То есть, для любого значения параметра $t \in [0; 2\pi)$, пара чисел (x, y) определяет координаты точки, лежащей на указанной окружности и наоборот, взяв координаты любой точки, лежащей на этой окружности и подставив их в данную систему, получим два верных числовых равенства для некоторого числа $t \in [0; 2\pi)$. Это означает, что данная система является уравнением окружности.

Определение. Пусть t – переменная величина, принимающая значения из некоторого подмножества D множества действительных чисел $\mathbb{R}$, $x(t), y(t), z(t)$ – некоторые числовые функции от переменной t. Система уравнений вида

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in D \subset \mathbb{R}, \\ z = z(t) \end{cases}$$

называется параметрическим уравнением кривой (линии) L, если она устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками $M(x, y, z) \in L$ и всеми значениями $t \in D \subset \mathbb{R}$. При этом переменная t называется параметром.

Так в предыдущем примере система уравнений

$$\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi),$$

является параметрическим уравнением окружности. Следующая система уравнений является параметрическим уравнением винтовой линии:

$$x = R\sin t, \quad y = R\cos t, \quad z = h \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Второй подход при изучении линий и поверхностей заключается в том, что изначально мы имеем некоторую линию или поверхность, которая задается каким либо своим геометрическим свойством. Очень часто линия или поверхность определяется как множество точек координатной плоскости или координатного пространства, удовлетворяющих каким-либо условиям. Такое множество точек называется геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ). Задача заключается в том, чтобы описать это ГМТ с помощью одного уравнения или системы или совокупности уравнений с параметром или без такового.

Пример. Найти уравнение ГМТ координатной плоскости Oxy, равноудаленных от начала координат на расстоянии, равном R.

Решение. Из геометрии нам известно, что такое ГМТ образует окружность радиуса R с центром в начале координат. Наша задача найти уравнение окружности, используя ее определяющее свойство – равноудаленность всех ее точек от центра.

Пусть M(x, y) – произвольная точка этого ГМТ. Тогда

$$OM = R.$$

С другой стороны, длина отрезка OM может быть найдена по формуле

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \text{ или } x^2 + y^2 = R^2.$$

Таким образом, координаты любой точки окружности удовлетворяют последнему уравнению. С другой стороны, если точка M(x, y) не принадлежит окружности, то длина отрезка OM не равна R и ее координаты не удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, уравнению $x^2 + y^2 = R^2$ удовлетворяют координаты только тех точек, которые лежат на окружности и только они. Поэтому уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ является уравнением указанной окружности.

Ответ: $x^2 + y^2 = R^2$.

Аналогично можно найти уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Из последних двух примеров следует, что окружность является алгебраической кривой 2-го порядка, а сфера является алгебраической поверхностью 2-го порядка.

Пример. На координатной плоскости Oxy найти уравнение ГМТ, равноудаленных от координатных осей.

Очевидно, таким уравнением будет уравнение $|x|=|y|$ или $x^2-y^2=0$ или совокупность двух уравнений прямых:

$$\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. .$$

Пример. Найти уравнение траектории движения фиксированной точки окружности радиуса r, катящейся по прямой (без скольжения и пробуксовки). Такая линия называется циклоидой.

Ответ: (без доказательства)

$\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ – параметрическое уравнение циклоиды;

$r\cos\left(\dfrac{x+\sqrt{y(2r-y)}}{r}\right)=r-y$ – уравнение циклоиды.

Таким образом, мы видим, что циклоида является примером трансцендентной кривой.

Определение. Плоской кривой называется кривая, все точки которой лежат в одной плоскости.

Окружность, парабола, циклоида, графики элементарных функций являются примерами плоских кривых. Винтовая линия предоставляет нам пример не плоской кривой.

Уже из приведенных здесь примеров мы видим, что одна и та же кривая может быть описана различными уравнениями. Одна из задач геометрии заключается в том, чтобы параметризовать известную кривую, то есть найти параметрические уравнения кривой, удобные для дальнейшей работы с этой кривой.

Далеко не всякая параметризация бывает удачной. Например, если кривая на плоскости Oxy описывается уравнением $y=f(x)$, то тривиальной ее параметризацией является следующая: $x=t,\ \ y=f(t),\ \ t\in D$, где D – область изменения аргумента x.

Упражнения

92. Найдите геометрическое место точек координатного пространства Oxyz, координаты которых удовлетворяют уравнению $x=0$.
93. Найдите уравнение геометрического места точек координатной плоскости Oxy, равноудаленных от начала координат и от точки M(0; 1).
94. Найдите алгебраическое уравнение кривой, если её параметрическое уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} x=4\cos t \\ y=9\sin t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

§2. Параметрическое и каноническое уравнения прямой

Определение. Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой называется её направляющим вектором.

Пусть L – произвольная прямая и $M_o(x_o,y_o,z_o)$ – ее произвольная, но фиксированная точка, O – начало координат, $M(x,y,z)$ – произвольная (текущая) точка прямой L, $\bar{r}_o=\overline{OM_o}=(x_o,y_o,z_o)$ – радиус вектор точки M_o, $\bar{r}=\overline{OM}=(x,y,z)$ – радиус вектор текущей точки M, $\bar{s}=(m,n,p)$ – произвольный направляющий вектор прямой L. Смотрите рисунок 64.

Теорема (Параметрическое уравнение прямой)

Следующая система уравнений является уравнением прямой линии:

$$\begin{cases} x=x_o+mt \\ y=y_o+nt\ , \\ z=z_o+pt \end{cases}\quad t\in\mathbb{R},$$

где x_o,y_o,z_o *– координаты произвольной фиксированной точки данной прямой,* m,n,p *– соответствующие координаты произвольного направляющего вектора данной прямой,* t *– параметр.*

Доказательство. В соответствии с определением уравнения любого множества точек координатного пространства, мы должны доказать, что данной системе уравнений удовлетворяют все точки прямой L и, с другой стороны, не удовлетворяют координаты точки не лежащей на прямой.

Пусть произвольная точка $M(x,y,z)\in L$. Тогда векторы $\overline{M_oM}$ и $\bar{s}$ являются по определению коллинеарными и по теореме о коллинеарности двух векторов следует, что один из них линейно выражается через другой, то есть найдется такое число $t \in \mathbb{R}$, что

$$\overline{M_o M} = t \cdot \overline{s} .$$

Из равенства векторов следует равенство их координат:

$$x - x_o = t \cdot m, \quad y - y_o = t \cdot n, \quad z - z_o = t \cdot p,$$

что и требовалось доказать.

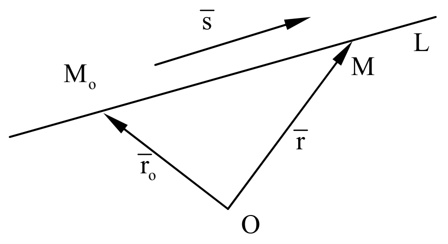


Рис. 64

Обратно, пусть точка $M(x, y, z) \notin L$. Тогда $\overline{M_o M} \not\parallel \overline{s}$ и по теореме о коллинеарности векторов ни один из них не может быть линейно выражен через другой, то есть, $\forall t \in \mathbb{R} : \overline{M_o M} \neq t \cdot \overline{s}$, и хотя бы одно из равенств системы не выполняется, то есть, системе уравнений удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат на прямой L. ▲

Определение. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = z_o + pt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где x_o, y_o, z_o – координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, m, n, p – координаты её произвольного направляющего вектора, $t \in \mathbb{R}$ – параметр, называется параметрическим уравнением прямой.

Следствие (Каноническое уравнение прямой)

Пусть дана прямая, x_o, y_o, z_o *– координаты её произвольной фиксированной точки,* m, n, p *– координаты её произвольного направляющего вектора. Тогда следующая система уравнений является уравнением данной прямой:*

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p} .$$

Доказательство. Выразив параметр t из параметрического уравнения, получаем:

$$t = \frac{x - x_o}{m}, \quad t = \frac{y - y_o}{n}, \quad t = \frac{z - z_o}{p},$$

откуда и следуют доказываемые равенства. Ясно, что системы уравнений, приведенные в теореме и следствии, равносильны, то есть их множества решений совпадают, и обе они являются уравнениями прямой. ▲

Определение. Система уравнений

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p},$$

где x_o, y_o, z_o – координаты точки, лежащей на данной прямой, m, n, p – координаты её направляющего вектора называется каноническим уравнением прямой в координатном пространстве Oxyz.

Каноническое уравнение отражает факт коллинеарности векторов $\overline{M_o M} \parallel \overline{s}$. Два вектора коллинеарные тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. При этом, одна или две координаты направляющего вектора прямой могут быть равны нулю и в канонических уравнения прямой нули появляются в знаменателе. Это лишь означает, что числитель такой дроби тоже равен нулю, то есть равны нулю соответствующие координаты коллинеарных векторов.

Заметим также, что модуль направляющего вектора задает масштаб на прямой, а его направление задает на прямой положительное направление. Иначе говоря, задание направляющего вектора прямой определяет на этой прямой декартовую систему координат, то есть превращает ее в числовую прямую с началом координат в точке M_o, которая соответствует значению параметра $t = 0$. Числовая координата t произвольной точки M этой оси определяется из параметрического уравнения. И наоборот, любое числовое значение параметра t определяет с помощью параметрического уравнения точку на этой прямой $M(t)$.

Упражнения

95. Найдите параметрические и канонические уравнения осей координат координатного пространства Oxyz (координатной плоскости Oxy).
96. Найдите параметрическое и каноническое уравнение биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов координатной плоскости Oxy.
97. Найдите параметрическое и каноническое уравнение прямой, составляющей равные углы с координатными осями координатного пространства Oxyz.

§3. Решение некоторых задач аналитической геометрии

Задача 1

Найти уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Вектор

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

очевидно, является направляющим вектором прямой, которая проходит через эти точки. В каноническом уравнении x_o, y_o, z_o суть координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, поэтому в качестве такой точки можно взять точку M_1 или M_2, без разницы которую. Подставляя в каноническое уравнение координаты точки M_1 и координаты направляющего вектора $\overline{M_1M_2}$, получаем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \ \blacktriangle$$

Задача 2

Найти угол между прямыми

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Решение. Из канонических уравнений прямых находим их направляющие векторы $\overline{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Тогда искомый угол равен либо углу между их направляющими векторами

$$(\overline{s}_1 \wedge \overline{s}_2) = \arccos\frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2|} \quad \text{или} \quad \pi - (\overline{s}_1 \wedge \overline{s}_2). \ \blacktriangle$$

Следующая теорема не нуждается в доказательстве в силу её очевидности.

Теорема (Условия параллельности и перпендикулярности прямых)

1) Две прямые параллельные или совпадают тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарные:

$$(L_1 \parallel L_2) \vee (L_1 = L_2) \Leftrightarrow \overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2) Две прямые перпендикулярные тогда и только тогда, когда их направляющие векторы ортогональные:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \perp \overline{s}_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \ \blacktriangle$$

Задача 3

Определить взаимное расположение двух прямых

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Решение. Две прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться в одной точке или быть скрещивающимися.

1) Если $\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2$, то есть, если $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, то прямые либо совпадают: $L_1 = L_2$, либо параллельные: $L_1 \parallel L_2$. Определить, какой из этих двух случаев имеет место быть очень просто. Если точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ лежит и на прямой L_2, то есть, её координаты удовлетворяют уравнениям прямой L_2:

$$\frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2},$$

то прямые совпадают. В противном случае прямые параллельные.

2) Если $\overline{s}_1 \nparallel \overline{s}_2$, то прямые либо скрещиваются, либо пересекаются. Если прямые пересекаются, то обе они лежат в одной плоскости и, следовательно, векторы $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{M_1M_2}$ компланарные, в противном случае, то есть, когда прямые скрещивающиеся, векторы $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{M_1M_2}$ – не компланарные.

Используя смешанное произведение векторов, получаем:

а) прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$(\overline{s}_1 \nparallel \overline{s}_2)\ \&\ (\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0);$$
б) прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда
$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} \neq 0.$$
Ответ:

1) прямые совпадают тогда и только тогда, когда
$$(\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2)\ \&\ (M_1 \in L_2),$$
то есть,
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$
2) прямые параллельные тогда и только тогда, когда
$$(\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2)\ \&\ (M_1 \notin L_2),$$
то есть,
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$
и не выполняется хотя бы одно из равенств
$$\frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$
3) прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$(\overline{s}_1 \nparallel \overline{s}_2)\ \&\ (\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0),$$
то есть, хотя бы одно из равенств $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ не выполняется, и
$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$
4) прямые скрещивающиеся тогда и только тогда, когда
$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} \neq 0,$$
то есть,
$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следующая теорема решает эту же задачу другим способом.

Теорема (О взаимном расположении двух прямых в пространстве)
Пусть
$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + m_1 t \\ y = y_1 + n_1 t \\ z = z_1 + p_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + m_2 k \\ y = y_2 + n_2 k \\ z = z_2 + p_2 k \end{cases},$$
где $t, k \in \mathbb{R}$ *– две произвольные прямые в пространстве. Тогда, если система уравнений*
$$\begin{cases} x_1 + m_1 t = x_2 + m_2 k \\ y_1 + n_1 t = y_2 + m_2 k \\ z_1 + p_1 t = z_2 + m_2 k \end{cases}:$$
а) имеет единственное решение, то прямые пересекающиеся;
б) не имеет решений, то прямые скрещивающиеся или параллельные;
в) имеет более одного решения, то прямые совпадают. ▲

Задача 4

Найти точку пересечения двух прямых
$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Решение. Запишем уравнения обеих прямых в параметрической форме и воспользуемся последней теоремой.

Если прямые пересекаются, то система должна иметь единственное решение (k, t). Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой L_1 (или k в параметрические уравнения прямой L_2), получаем координаты искомой точки. ▲

Все рассмотренные задачи аналогично решаются на координатной плоскости, например, Oxy. В этом случае третья координата равна нулю. Все остальное остается таким же.

Параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}$.

Каноническое уравнение прямой: $\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}$.

Пусть $L_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$ и $L_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$.

Условия совпадения прямых:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow (\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2) \,\&\, (M_1 \in L_2),$$

или

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2}.$$

Условия параллельности прямых:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow (\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2) \,\&\, (M_1 \notin L_2),$$

или

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - x_2}{m_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{n_2}.$$

Условия перпендикулярности прямых:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Теорема (О взаимном расположении двух прямых на плоскости)

Пусть

$$L_1 : \begin{cases} x = x_1 + m_1 t \\ y = y_1 + n_1 t \end{cases} \quad \textit{и} \quad L_2 : \begin{cases} x = x_2 + m_2 k \\ y = y_2 + n_2 k \end{cases},$$

где $t, k \in \mathbb{R}$, *– две произвольные прямые на координатной плоскости* Oxy. *Тогда, если система уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + m_1 t = x_2 + m_2 k \\ y_1 + n_1 t = y_2 + n_2 k \end{cases}:$$

а) имеет единственное решение, то прямые пересекающиеся;
б) не имеет решений, то прямые параллельные;
в) имеет более одного решения, то прямые совпадают. ▲

Упражнение

98. Пусть $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2, $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$, где $M_1 \neq M_2$. Докажите, что если векторное произведение $\overline{s}_1 \times \overline{s}_2 \neq \overline{0}$, двойное векторное произведение $(\overline{s}_1 \times \overline{s}_2) \times \overline{M_1 M_2} = \overline{0}$, то прямые являются скрещивающимися, и $M_1 M_2$ равно расстоянию между ними.

Глава 9. Общее уравнение прямой и плоскости

§1. Векторное уравнение плоскости и прямой на плоскости

Определение. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости (прямой на плоскости) называется нормальным вектором этой плоскости (прямой на плоскости).

Теорема (Векторное уравнение прямой на плоскости и плоскости)

Пусть $\overline{r} = \overline{OM}$ *– радиус-вектор текущей точки* M *плоскости (прямой на плоскости),* $\overline{r}_o = \overline{OM_o}$ *– радиус-вектор какой-нибудь фиксированной точки* M_o *плоскости (прямой на плоскости),* $\overline{n}$ *– нормальный вектор плоскости (прямой на плоскости). Тогда уравнение*

$$(\overline{r} - \overline{r}_o) \cdot \overline{n} = 0$$

является векторным уравнением плоскости (прямой на плоскости).

Доказательство. Пусть L – прямая на плоскости.

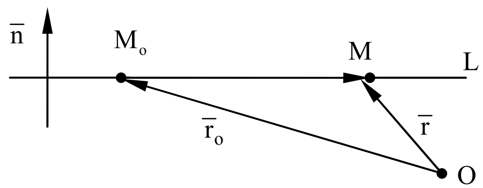


Рис. 65

Пусть $\overline{n}$ нормальный вектор прямой L, $\overline{r} = \overline{OM}$ и $\overline{r}_o = \overline{OM_o}$ – радиус-векторы текущей и фиксированной точек. Смотрите рисунок 65. По правилу треугольника сложения векторов имеем:

$$\overline{M_o M} = \overline{r} - \overline{r}_o,$$

и точка M принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_o M}$ и $\overline{n}$ ортогональные, то есть,

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_o M} \perp \overline{n} \Leftrightarrow \overline{M_o M} \cdot \overline{n} = 0,$$

откуда и следует доказываемое уравнение. Доказательство для случая плоскости точно такое же, смотрите рисунок 66. ▲

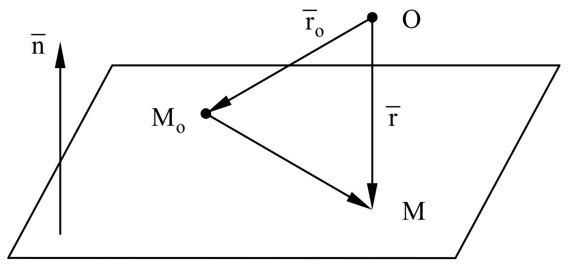


Рис. 66

Упражнение

99. Пусть $\overline{s}$ – произвольный направляющий вектор прямой L. В обозначениях этого параграфа докажите, что уравнение $(\overline{r}-\overline{r}_o)\times\overline{s}=\overline{0}$ также является уравнением прямой L.

§2. Общее уравнение прямой на плоскости

Теорема (Общее уравнение прямой на плоскости)

Для любой прямой на координатной плоскости Oxy *её уравнение имеет вид*

$$Ax+By+C=0,$$

где $A,B,C\in\mathbb{R}$, $(A,B)\neq(0,0)$, $\overline{n}=(A,B)$ *– нормальный вектор прямой.*

Доказательство. 1) Пусть L произвольная прямая на координатной плоскости Oxy и пусть точка $M_o(x_o,y_o)$ ее произвольная фиксированная точка, M(x, y) – ее текущая точка, $\overline{n}=(A,B)$ – ее произвольный нормальный вектор. Тогда уравнение

$$(\overline{r}-\overline{r}_o)\cdot\overline{n}=0$$

является векторным уравнением этой прямой, где

$$(\overline{r}-\overline{r}_o)=(x-x_o,y-y_o),\ \overline{n}=(A,B).$$

Расписывая скалярное произведение в координатной форме, получаем

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0 \text{ или } Ax+By+(-Ax_o-By_o)=0.$$

Обозначая через $C=-Ax_o-By_o$, получаем отсюда равенство

$$Ax+By+C=0,$$

которое и будет уравнением данной прямой. ▲

Справедлива и обратная теорема.

Теорема (Геометрический смысл алгебраического уравнения первой степени с двумя неизвестными)

Для любых $A,B,C\in\mathbb{R}$ *и одновременно не равных нулю, уравнение* $Ax+By+C=0$ *является уравнением прямой, лежащей на координатной плоскости* Oxy.

Доказательство. Пусть дано уравнение

$$Ax+By+C=0,$$

где A, B и C – произвольные действительные числа и пара (A, B) – не нулевая. Пусть для определенности $A\neq0$. Тогда $x=\dfrac{-By-C}{A}$, откуда мы видим, что любая пара $\left(\dfrac{-By-C}{A},y\right)$, где $y\in\mathbb{R}$ является решением уравнения $Ax+By+C=0$ и, следовательно, это уравнение имеет бесконечное множество решений. Пусть (x_1,y_1) и (x_2,y_2) – два различных произвольных фиксированных решений этого уравнения, и (x, y) произвольное его решение, то есть

$$Ax_1+By_1+C=0,\ Ax_2+By_2+C=0,\ Ax+By+C=0.$$

Отсюда

$$C=-Ax_1-By_1,$$

и подставляя в оставшиеся два равенства, получаем:

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0 \text{ и } A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

На координатной плоскости Oxy каждому решению уравнения $Ax+By+C=0$ соответствует точка. Пусть

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ M(x,y)$$

– точки, соответствующие выбранным решениям. Обозначим $\overline{n}=(A,B)$. Тогда предыдущие равенства в векторной форме имеют вид

$$\overline{n}\cdot\overline{M_1M_2}=0,\ \overline{n}\cdot\overline{M_1M}=0,$$

то есть $\overline{n}\perp\overline{M_1M_2}$ и $\overline{n}\perp\overline{M_1M}$, откуда следует, что

$$\overline{M_1M_2}\parallel\overline{M_1M},$$

что, в свою очередь, означает, что для любой точки M, координаты которой удовлетворяют уравнению $Ax+By+C=0$, точка M лежит на прямой L, проходящей через фиксированные точки M_1 и M_2.

Таким образом, все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$ лежат на прямой L, проходящей через фиксированные точки M_1 и M_2, и вектор $\overline{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой L.

С другой стороны, если точка M(x, y) лежит на этой прямой L, то $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{M_1M}$. А так как $\overline{n} \perp \overline{M_1M_2}$, то отсюда следует, что $\overline{n} \perp \overline{M_1M}$ и $\overline{n} \cdot \overline{M_1M} = 0$, то есть,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 .$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0 \text{ или } Ax + By + C = 0 ,$$

то есть координаты произвольной точки прямой L удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$.

Таким образом, уравнению $Ax + By + C = 0$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат на одной прямой. ▲

Определение. Уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

называется общим уравнением прямой на координатной плоскости Oxy. Действительные числа A, B, C называются коэффициентами уравнения.

Определение. Уравнение прямой вида

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$$

называется уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$ и с заданным нормальным вектором $\overline{n} = (A, B)$.

Упражнение

100. Докажите, что уравнения

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \text{ и } \frac{x - x_o}{B} = \frac{y - y_o}{-A}$$

равносильные, то есть, они являются уравнениями одной и той же прямой.

§3. Общее уравнение плоскости

Теорема (Общее уравнение плоскости)

Уравнение любой плоскости в координатном пространстве Oxyz *имеет вид*

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $\overline{n} = (A, B, C)$ *– нормальный вектор плоскости. Обратно, пусть* $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ *– произвольные действительные числа, причем числа* A, B *и* C *одновременно не равны нулю. Тогда уравнение* $Ax + By + Cz + D = 0$ *является уравнением плоскости в координатном пространстве* Oxyz.

Доказательство аналогично доказательству предыдущих теорем, хотя и технически немножко сложнее. Первая часть доказательства практически такая же, а во второй части нужно брать три фиксированных решения (соответственно три точки пространства) и одно произвольное решение уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, и доказать, что любое его решение, отождествленное с точкой пространства, лежит в той же плоскости, которая проходит через выбранные три точки и, что любая точка пространства лежащая на этой плоскости удовлетворяет этому уравнению. ▲

Определение. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется общим уравнением плоскости. Действительные числа A, B, C, D называются коэффициентами уравнения.

Определение. Уравнение плоскости вида

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

называется уравнением плоскости, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и с заданным нормальным вектором $\overline{n} = (A, B, C)$.

Упражнение

101. Докажите теорему этого параграфа.

§4. Уравнение прямой в отрезках

Пусть ни один из коэффициентов A, B, C общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0 ,$$

не равен нулю. Перенесем свободный член C в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на (– C):

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 ,$$

где обозначено $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Определение. Уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,.$$

называется уравнением прямой в отрезках.

Для построения прямой достаточно взять две точки на этой прямой. Для построения прямой в отрезках удобно найти ее точки пересечения с координатными осями: M(a, 0) – точка пересечения прямой с осью Ox и N(0, b) – точка её пересечения с осью Oy. Смотрите рисунок 67.

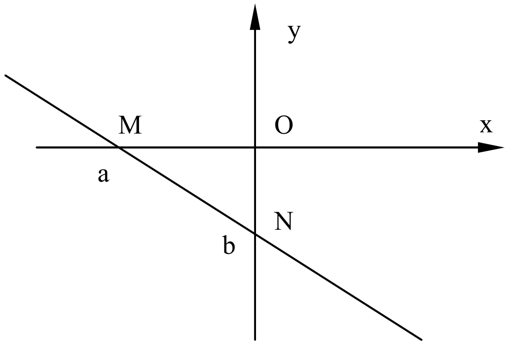


Рис. 67

Говорят, что прямая отсекает от координатных осей отрезки OM и ON величина которых равна числам a и b соответственно.

Замечание. Под величиной отрезка OM здесь понимается не его длина, а координата точки M, то есть число a. Аналогично, величина отрезка ON равна числу b.

Пример. Построить прямую $2x-3y-6=0$.

Решение. Запишем данное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках. Для этого перенесем свободный коэффициент (– 6) в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на 6:

$$\frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1\,.$$

Данная прямая отсекает от оси Ox отрезок величина которого равна 3, а от оси Oy – отрезок, величина которого равна –2. Откладываем на

оси Ox точку с координатой 3, а на оси Oy откладываем точку с координатой –2 и проводим через эти точки прямую. Смотрите рисунок 68.

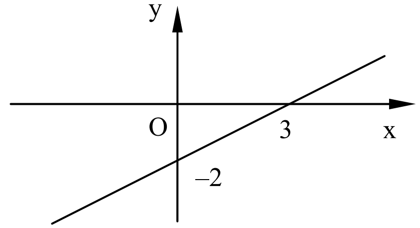


Рис. 68

Упражнение

102. Выясните геометрический смысл свободного коэффициента C в общем уравнении прямой на координатной плоскости Oxy.
103. Запишите уравнение прямой в отрезках на координатной плоскости Oyz.

§5. Неполные уравнения прямой на плоскости

Определение. Уравнение

$$Ax+By+C=0$$

называется неполным уравнением прямой на плоскости, если хотя бы один из его коэффициентов A, B, C равен нулю.

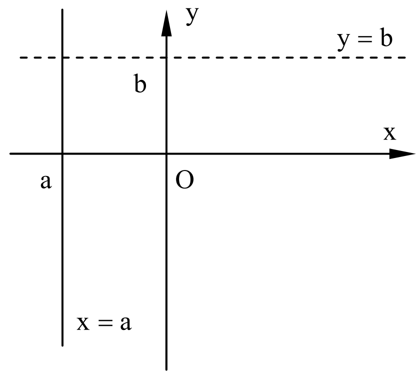


Рис. 69

Если коэффициент $B = 0$, $A \neq 0 \neq C$, то из уравнения следует

$$x = -\frac{C}{A} = a$$

– уравнение прямой, параллельной оси Oy, отсекающей от оси Ox отрезок величиной a. Смотрите рисунок 69.

Если коэффициент $A = 0$, $B \neq 0 \neq C$ то из уравнения следует

$$y = -\frac{C}{B} = b$$

– уравнение прямой, параллельной оси Ox, отсекающей от оси Oy отрезок величиной b. Смотрите рисунок 69.

Если $C = 0$, то общее уравнение прямой принимает вид

$$Ax + By = 0 .$$

Ясно, что эта прямая проходит через начало координат.

Если в этом уравнении коэффициент $B \neq 0$, то отсюда получаем $y = -\frac{A}{B}x$. Обозначив через $k = -\frac{A}{B}$, получаем уравнение, которое носит название уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx ,$$

которое изучалось в школьном курсе алгебры.

Если в уравнении $Ax + By = 0$, $A \neq B = 0$, то $Ax = 0$ и, сокращая на A, получаем уравнение оси Oy:

$$x = 0 .$$

Если в уравнении $Ax + By = 0$, $B \neq A = 0$, то $By = 0$ и, сокращая на B, получаем уравнение оси Ox:

$$y = 0 .$$

Подведем итог исследования общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0 .$$

1) Если $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение может быть записано в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

– прямая, отсекающая от осей координат отрезки величиной a и b соответственно.

2) Если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение можно записано в виде:

$$y = b$$

– прямая параллельная оси Ox и отсекающая от оси Oy отрезок величины b.

3) Если $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$, то уравнение можно записано в виде:

$$x = a$$

– прямая параллельная оси Oy и отсекающая от оси Ox отрезок величины a.

4) Если $A = 0, B \neq 0, C = 0$, то уравнение прямой имеет вид

$$y = 0$$

– прямая совпадает с осью Ox.

5) Если $A \neq 0, B = 0, C = 0$, то уравнение прямой имеет вид

$$x = 0$$

– прямая совпадает с осью Oy.

6) Если $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$, то уравнение можно записано в виде:

$$y = kx$$

– уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Упражнение

104. Придумайте по одному примеру к каждому виду неполного уравнения прямой на координатной плоскости Oyz, и изобразите эти прямые на чертеже.

§6. Уравнение плоскости в отрезках и неполные уравнения

Исследование общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

где $\overline{n} = (A, B, C)$ – координаты ее нормального вектора, производится аналогично исследованию общего уравнения прямой на плоскости. Приведем ниже все случаи.

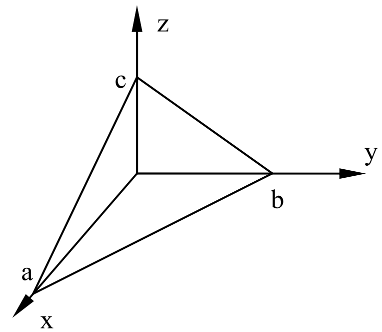


Рис. 70

Если $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то уравнение может быть записано в виде уравнения плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

Такая плоскость (смотрите рисунок 70) отсекает от осей координат отрезки величиной a, b и c соответственно, где обозначено

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C} .$$

Определение. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется неполным уравнением плоскости, если хотя бы один из его коэффициентов A, B, C, D равен нулю.

Если $A = 0, D \neq 0$, то уравнение принимает вид

$$By + Cz + D = 0$$

– уравнение прямой в координатной плоскости Oyz, а так как

$$\overline{n} = (0, B, C) \perp Ox ,$$

то данная плоскость параллельна оси Ox. В зависимости от коэффициентов B, C, D уравнение может быть записано в виде

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{или} \quad y = b \quad \text{или} \quad z = c .$$

Смотрите рисунки 71, 72, 73.

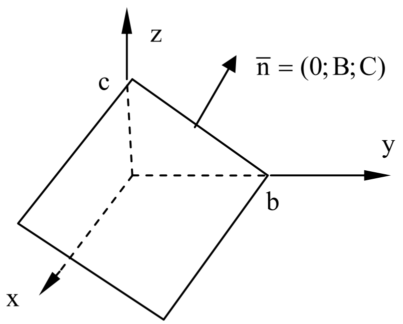


Рис. 71

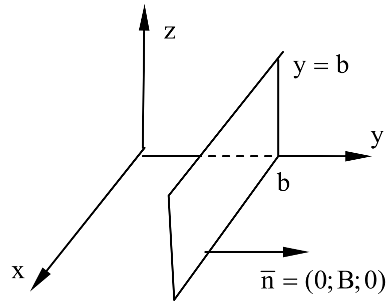


Рис.72

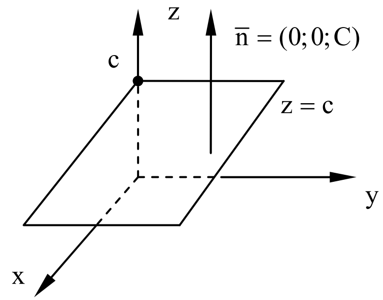


Рис. 73

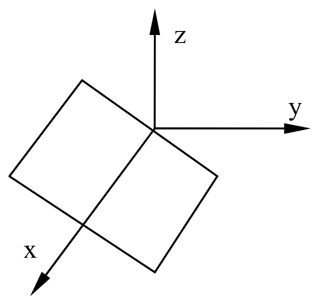


Рис. 74

Если $A = 0, D = 0$, то уравнение принимает вид

$$By + Cz = 0\,.$$

Это уравнение прямой в координатной плоскости Oyz, проходящая через начало координат и в то же время уравнение плоскости, содержащей ось Ox. Смотрите рисунок 74.

Если в этом уравнении $B = 0, C \neq 0$, то получаем

$$z = 0$$

– уравнение координатной плоскости Oxy.

Если $B \neq 0 = C$, то получаем

$$y = 0$$

– уравнение координатной плоскости Oxz.

Оставшиеся случаи исследуются аналогично.

Подведем итог исследованию общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

1) Если $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то уравнение можно записать в виде уравнения в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,,$$

где a, b, c – величины отрезков отсекаемых плоскостью от координатных осей.

2) Если $D \neq 0$, но один из коэффициентов A, B, C равен нулю, то получаем уравнение плоскости в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

– плоскость параллельная оси Oz или Oy или Ox соответственно.

3) Если $D \neq 0$, но два из коэффициентов A, B, C равны нулю, то получаем уравнение плоскости в виде

$$x = a \quad \text{или} \quad y = b \quad \text{или} \quad z = c$$

– соответственно плоскость параллельна координатной плоскости Oyz или Oxz или Oxy.

4) Если $D = 0$, то уравнение принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0$$

– плоскость содержит начало координат.

5) Если $D = 0$ и один из коэффициентов A, B, C равен нулю, то получаем уравнение плоскости в виде

$$By + Cz = 0 \quad \text{или} \quad Ax + Cz = 0 \quad \text{или} \quad Ax + By = 0$$

– плоскость содержит соответственно ось Ox или ось Oy или ось Oz.

6) Если $D = 0$ и два из коэффициентов A, B, C равны нулю, то получаем уравнение плоскости в виде

$$x = 0 \quad \text{или} \quad y = 0 \quad \text{или} \quad z = 0$$

– уравнение координатных плоскостей Oyz, Oxz или Oxy соответственно.

Упражнение

105. Посчитайте количество различных видов неполных уравнений плоскости. Придумайте для каждого случая свой пример и изобразите соответствующие плоскости на чертежах.

§7. Нормированное уравнение плоскости

Определение. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется нормированным или нормальным уравнением плоскости, если

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad \text{и} \quad D < 0\,.$$

Теорема (Геометрический смысл коэффициентов нормированного уравнения плоскости)

Нормированное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,,$$

где $p > 0$ *– расстояние от начала координат до данной плоскости,* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *– направляющие косинусы её нормального вектора* $\overline{n}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Доказательство. Пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– нормированное уравнение плоскости. Тогда из определения следует, что $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Это означает, что её нормальный вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ имеет модуль равный 1:

$$|\,\overline{n}\,| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1\,.$$

Так как координатами единичного вектора являются его направляющие косинусы, то

$$\overline{n} = \overline{n}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,,$$

то есть, $A = \cos\alpha$, $B = \cos\beta$, $C = \cos\gamma$. Обозначим

$$p \doteq -D > 0\,,$$

и подставим в исходное уравнение. Получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 .$$

Пусть $\overline{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор текущей точки плоскости. Тогда последнее уравнение можно записать в векторной форме:

$$\overline{r} \cdot \overline{n}^{o} = p .$$

Так как $p > 0$, то отсюда следует, что угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{n}^{o}$ является острым. Отсюда, в свою очередь следует, что если вектор $\overline{n}^{o}$ отложить от начала координат, то он направлен от начала координат к плоскости. Смотрите рисунок 75.

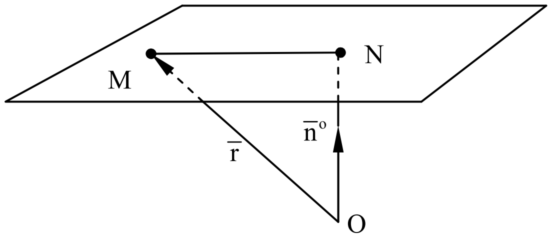


Рис. 75

Здесь N – основание перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат. Тогда $ON \perp MN$ и

$$ON = пр_{\overline{n}^{o}} \overline{OM} = \overline{r} \cdot \overline{n}^{o} = p$$

– расстояние от начала координат до плоскости. ▲

Определение. Нормирующим множителем общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется число

$$\mu \doteq \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ,$$

где знак выбирается противоположным знаку свободного члена D.

Теорема (О нормирующем множителе)

Пусть μ *– нормирующий множитель общего уравнения плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$. *Тогда уравнение*

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

является нормированным уравнением данной плоскости.

Доказательство. Из определения нормирующего множителя следует, что свободный член этого уравнения $\mu D < 0$, и

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = \mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1 . \ ▲$$

Пример. Записать нормированное уравнение плоскости, если его общее уравнение имеет вид:

$$3x - 4y + 12z + 26 = 0$$

и найти расстояние от начала координат до плоскости.

Решение. Находим нормирующий множитель уравнения:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13} .$$

Умножая обе части уравнения на нормирующий множитель, получаем нормированное уравнение данной плоскости:

$$-\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13}z - 2 = 0 .$$

Ответ: $-\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13}z - 2 = 0$ – нормированное уравнение плоскости. Расстояние от начала координат до плоскости равно 2.

Упражнение

106. Найдите нормированное уравнение плоскости и расстояние от неё до начала координат, если известно её уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

§8. Нормальное уравнение прямой на плоскости

Определение. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

называется нормальным, если

$$A^2 + B^2 = 1 \quad и \quad C < 0 .$$

Теорема (Геометрический смысл коэффициентов нормального уравнения прямой)

Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \quad или \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 ,$$

где $p > 0$ *– расстояние от начала координат до данной прямой,* φ *– полярный угол её нормального вектора,* $\cos\alpha, \cos\beta$ *– его направляющие косинусы:*

$$\overline{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\alpha, \cos\beta)\,.$$

Доказательство. Пусть

$$Ax + By + C = 0$$

– нормированное уравнение прямой на координатной плоскости Oxy. Тогда из определения следует, что $A^2 + B^2 = 1$. Это означает, что её нормальный вектор $\overline{n} = (A, B)$ имеет модуль равный 1:

$$|\,\overline{n}\,| = \sqrt{A^2 + B^2} = 1\,.$$

Следовательно, нормальный вектор имеет координаты:

$$\overline{n} = \overline{n}^o = (\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\alpha, \cos\beta)\,,$$

то есть

$$A = \cos\alpha,\ \ B = \cos\beta \ \text{ или } \ A = \cos\varphi,\ \ B = \sin\varphi\,.$$

Обозначим

$$p \doteq -C > 0\,,$$

и подставим в исходное уравнение. Получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \ \text{ или } \ x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\,.$$

Пусть $\overline{r} = (x, y)$ – радиус-вектор текущей точки прямой. Тогда последние уравнения можно записать в векторной форме:

$$\overline{r} \cdot \overline{n}^o = p\,.$$

Так как $p > 0$, то отсюда следует, что угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{n}^o$ является острым.

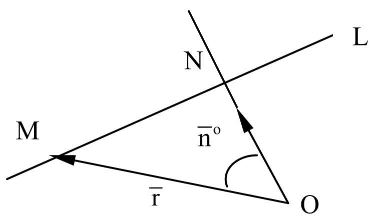


Рис. 76

Отсюда, в свою очередь следует, что если вектор $\overline{n}^o$ отложить от

начала координат, то он направлен от начала координат к прямой. Смотрите рисунок 76.

Здесь N – основание перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат. Тогда $ON \perp MN$ и

$$ON = \text{пр}_{\overline{n}^o}\overline{OM} = \overline{r} \cdot \overline{n}^o = p$$

– расстояние от начала координат до плоскости. ▲

Определение. Нормирующим множителем общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ называется число

$$\mu \doteq \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,,$$

где знак выбирается противоположным знаку свободного члена C уравнения прямой.

Теорема (Приведение уравнения прямой к нормальному виду)

Пусть μ *– нормирующий множитель прямой* $Ax + By + C = 0$. *Тогда уравнение*

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

является нормированным уравнением данной прямой.

Доказательство такое же, как в случае плоскости. ▲

Упражнение

107. Проведите доказательство последней теоремы.

§9 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Определение. Углом наклона прямой к оси абсцисс называется угол поворота оси абсцисс вокруг любой ее точки против часовой стрелки до положения параллельности (или совпадения) с данной прямой.

Из определения следует, что угол наклона α прямой L к оси Ox может изменяться от нуля до π: $\alpha \in [0; \pi)$. Если прямая $L \parallel Ox$, то $\alpha = 0$. Можно как и в тригонометрии считать, что $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой L, где $\overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой L и $L \nparallel Oy$. Тогда $\overline{n} \not\perp Oy$ и $B = \text{пр}_y\overline{n} \neq 0$

(смотрите рисунок 77). Выразим из уравнения y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Уравнение прямой L принимает вид:

$$y = kx + b.$$

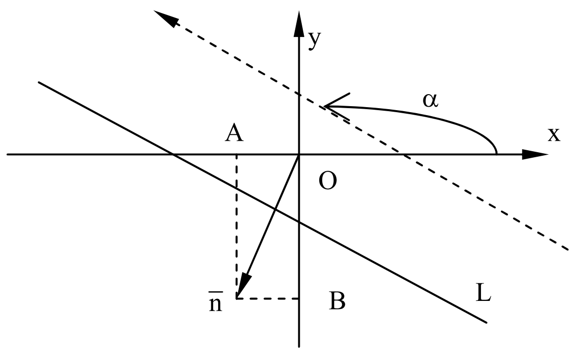


Рис. 77

Определение. Уравнение прямой вида $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, а коэффициент k называется угловым коэффициентом данной прямой.

Теорема (О геометрическом смысле углового коэффициента)
В уравнении прямой с угловым коэффициентом угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс: $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство. 1) Если прямая $L \parallel Ox$, то $\alpha = 0$ и $\operatorname{tg}\alpha = 0$. С другой стороны, ее нормальный вектор $\bar{n} \parallel Oy$ и $A = \text{пр}_x \bar{n} = 0$. Тогда $k = -\frac{A}{B} = 0$ и, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

2) Пусть $L \nparallel Ox$, тогда $\bar{n} \not\perp Ox$, $A = \text{пр}_x \bar{n} \neq 0$ и $k = -\frac{A}{B} \neq 0$. Пусть F – точка пересечения прямой L с осью абсцисс. Тогда

$$y_F = 0, \quad x_F = -\frac{b}{k}.$$

Опишем окружность единичного радиуса с центром в точке F, а в точке оси Ox с координатой $1 - \frac{b}{k}$ проведем касательную m к этой окружности. Смотрите рисунок 78.

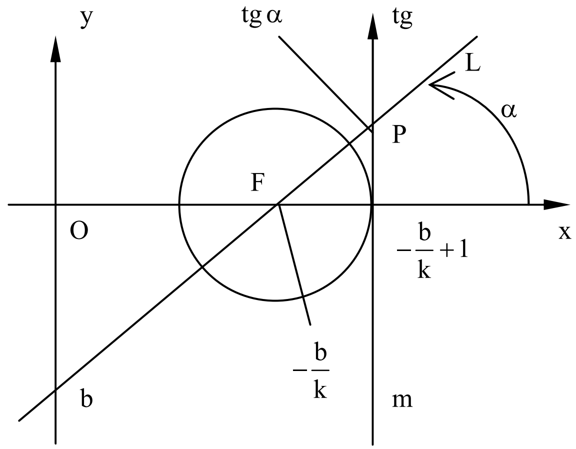


Рис. 78

Выберем положительное направление на прямой m, так, чтобы $m \uparrow\uparrow Oy$. Тогда ось m является осью тангенсов для данной единичной (тригонометрической) окружности. Пусть P – точка пересечения прямой L с осью тангенсов m. Тогда, с одной стороны, $y_P = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой L к оси Ox, а, с другой стороны, точка $P \in L$ и

$$y_P = kx_P + b = k\left(1 - \frac{b}{k}\right) + b = k,$$

откуда и следует равенство $\operatorname{tg}\alpha = k$. ▲

Приведенное доказательство принадлежит автору. Достоинством этого доказательства является то, что оно не зависит ни от величины угла наклона $\alpha \in (0;\pi)$, ни от величины коэффициента $b \in \mathbb{R}$.

Упражнение
108. Приведите какое-нибудь другое доказательство последней теоремы.

Глава 10. Взаимное расположение прямых и плоскостей
§1. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Этот вопрос уже обсуждался в предыдущей главе, когда оба уравнения данных прямых записывались в каноническом или параметрическом виде. Пусть сейчас оба уравнения прямых записаны в общем виде.

Теорема (О прямых на плоскости)
Пусть

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad и \quad L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Oxy. *Тогда*

1) *если* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, *то прямые* L_1 *и* L_2 *совпадают;*

2) *если* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, *то прямые* L_1 *и* L_2 *параллельные;*

3) *если* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, *то прямые пересекаются.*

Доказательство. Условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ равносильно коллинеарности нормальных векторов данных прямых:

$$\bar{n}_1 = (A_1, B_1) \parallel \bar{n}_2 = (A_2, B_2).$$

Поэтому, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$ и прямые пересекаются. Если же

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k,$$

то $A_1 = A_2 \cdot k$, $B_1 = B_2 \cdot k$, $C_1 = C_2 \cdot k$ и уравнение прямой L_1 принимает вид:

$$k(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \text{ или } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то есть прямые совпадают.

Заметим, что коэффициент пропорциональности $k \neq 0$, иначе все коэффициенты общего уравнения были бы равны нулю, что невозможно.

Если же прямые не совпадают и не пересекаются, то остается случай $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то есть прямые параллельные. ▲

Заметим, что если прямые пересекаются, то для нахождения координат их точки пересечения достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Следствие (Геометрический смысл системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными)

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ *– определитель системы. Если* $\Delta \neq 0$, *то прямые пересекаются в одной точке и система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta = 0$, *то прямые или параллельны и тогда система не имеет решений, или прямые совпадают и тогда система имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. По определению определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Если $\Delta \neq 0$, то $A_1B_2 \neq A_2B_1$ и $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то есть прямые пересекаются и координаты точки пересечения можно найти по формулам Крамера.

Если же $\Delta = 0$, то $A_1B_2 = A_2B_1$ и $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, то есть либо прямые параллельные и тогда система не может иметь ни одного решения, либо прямые совпадают и тогда система состоит из одного уравнения и решениями такой системы являются координаты любой точки, лежащей на прямой, а их бесконечно много. ▲

Упражнение

109. Исследуйте взаимное расположение двух прямых на плоскости, если одна прямая задана общим уравнением, а вторая – параметрическим уравнением.

§2. Взаимное расположение двух плоскостей

Плоскости могут совпадать, быть параллельными или пересекаться по прямой.

Теорема (О двух плоскостях)

Пусть

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad и \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– общие уравнения двух плоскостей. Тогда:

1) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, *то плоскости совпадают;*

2) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, *то плоскости параллельны;*

3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *или* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, *то плоскости пересекаются и система уравнений*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

является уравнениями прямой пересечения данных плоскостей.

Доказательство. Первое и второе условия теоремы равносильны коллинеарности нормальных векторов данных плоскостей:

$$\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \parallel \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = k,$$

то $A_1 = A_2 \cdot k$, $B_1 = B_2 \cdot k$, $C_1 = C_2 \cdot k$, $D_1 = D_2 \cdot k$ и уравнение плоскости α принимает вид:

$$\alpha : \; k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Коэффициент пропорциональности k не может быть равен нулю, так как

$$\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) = k \cdot \overline{n}_2 = (k \cdot A_2, k \cdot B_2, k \cdot C_2)$$

и при $k = 0$ получаем, что $\overline{n}_1 = \overline{0}$, что противоречит определению нормального вектора. Следовательно, уравнение плоскости α

$$\alpha : \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

совпадает с уравнением плоскости β, а это означает, что плоскости совпадают. Смотрите рисунок 79.

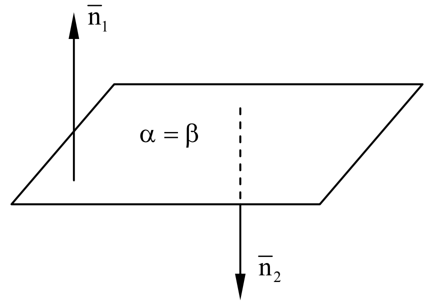


Рис. 79

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

то это означает коллинеарность нормальных векторов обеих плоскостей, а значит плоскости либо параллельные, либо совпадают. Но в этом случае плоскости не могут совпадать и остается единственная возможность их параллельности. Смотрите рисунок 80.

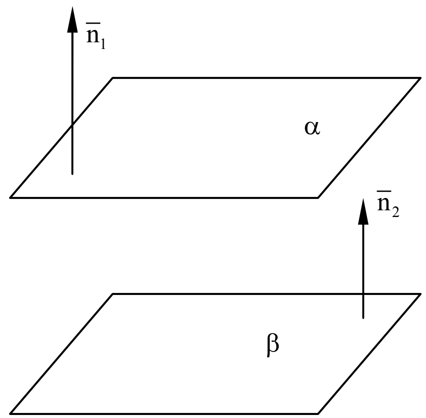


Рис. 80

Третье условие теоремы равносильно тому, что нормальные векторы плоскостей не коллинеарные, а потому плоскости не совпадают и не параллельны, а следовательно, они пересекаются. Из геометрии известно, что линия пересечения двух плоскостей является прямой. Точка M лежит на прямой пересечения двух плоскостей α и β тогда и только тогда, когда она лежит одновременно на обеих плоскостях и ее координаты удовлетворяют обоим уравнениям системы, то есть являются решением этой системы. А это означает, что система является уравнениями прямой пересечения плоскостей. Смотрите рисунок 81. ▲

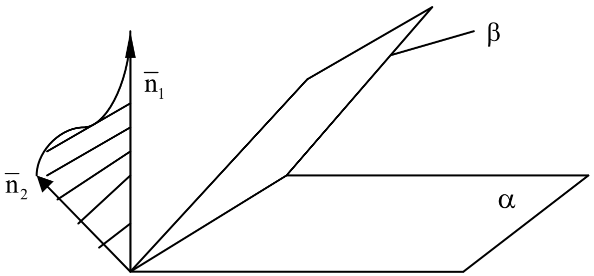


Рис. 81

Упражнение

110. Найдите способ вычисления направляющего вектора прямой, которая задана пересечением двух плоскостей, уравнения которых известны.

§3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая может лежать на данной плоскости, быть параллельной данной плоскости или пересекать её в одной точке, смотрите рисунки 82-84.

Теорема (О прямой и плоскости)

Пусть плоскость α *задана общим уравнением*

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая L задана каноническим или параметрическим уравнением:

$$L : \frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}, \quad L : \begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt, \\ z = z_o + pt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

в которых $\overline{n} = (A, B, C)$ *– координаты нормального вектора плоскости* α, $M_o(x_o, y_o, z_o)$ *– координаты произвольной фиксированной точки прямой L,* $\overline{s} = (m, n, p)$ *– координаты направляющего вектора прямой L. Тогда:*

1) если $\overline{n} \cdot \overline{s} = Am + Bn + Cp = 0$ *и* $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$, *то прямая лежит на плоскости;*

2) если $\overline{n} \cdot \overline{s} = Am + Bn + Cp = 0$ *и* $Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0$, *то прямая параллельная плоскости.*

3) если $\overline{n} \cdot \overline{s} = Am + Bn + Cp \neq 0$, *то прямая L пересекает плоскость* α *в точке, координаты которой* (x, y, z) *можно найти из системы уравнений*

$$\begin{cases} A(x_o + mt) + B(y_o + nt) + C(z_o + pt) + D = 0 \\ x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = z_o + pt \end{cases}.$$

Доказательство. Если $\overline{n} \cdot \overline{s} = Am + Bn + Cp = 0$, то это означает, что $\overline{n} \perp \overline{s}$. А такое возможно лишь тогда, когда прямая лежит на плоскости или параллельна ей. Если прямая лежит на плоскости, то любая точка прямой является точкой плоскости и координаты любой точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Поэтому достаточно проверить, лежит ли на плоскости точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

Если $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$, то точка $M_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$ – лежит на плоскости, а это означает, что и сама прямая лежит на плоскости.

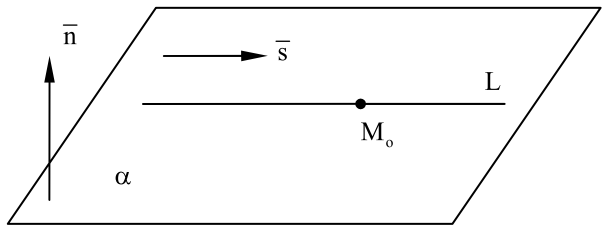


Рис. 82

Если $\overline{n} \cdot \overline{s} = 0$, а $Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0$, то точка на прямой не лежит на плоскости, а это означает, что прямая параллельна плоскости.

Условие

$$\overline{n} \cdot \overline{s} = Am + Bn + Cp \neq 0$$

говорит о том, что векторы $\overline{n}$ и $\overline{s}$ не ортогональные, а значит прямая не параллельна плоскости и не лежит в плоскости, а значит пересекает ее в некоторой точке M. Координаты точки M удовлетворяют как уравнению плоскости, так и уравнениям прямой, то есть системе из четырех уравнений. Решаем первое уравнение этой системы относительно неизвестной t и затем, подставляя найденное значение t в остальные уравнения системы, находим координаты искомой точки. ▲

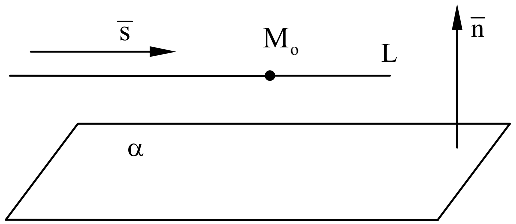


Рис. 83

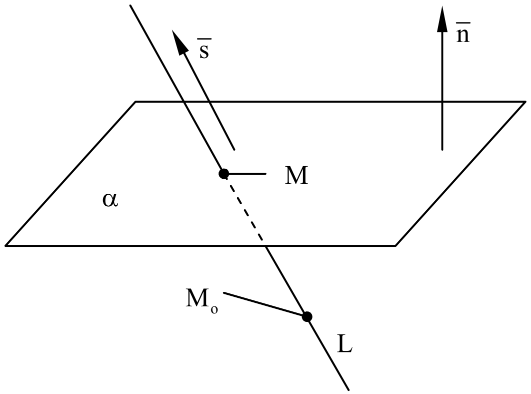


Рис. 84

Упражнение

111. Выясните взаимное расположение прямой и плоскости в условиях предыдущей теоремы в зависимости от множества решений одного уравнения:

$$A(x_o + mt) + B(y_o + nt) + C(z_o + pt) + D = 0 .$$

§4. Взаимное расположение трех плоскостей

Пусть даны три плоскости: α, β и γ, $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3$ – их нормальные векторы, соответственно. Рассмотрим все возможные случаи.

1) Все три плоскости совпадают: $\alpha = \beta = \gamma$. Очевидно, что в этом случае $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \parallel \overline{n}_3$.

2) Две плоскости совпадают, а третья параллельна им, например: $\alpha \parallel \beta = \gamma$ и в этом случае $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \parallel \overline{n}_3$.

3) две плоскости совпадают, а третья пересекает их, например: $\alpha = \beta \cap \gamma = L$ – прямая пересечения. В этом случае, $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \nparallel \overline{n}_3$

4) Все три плоскости параллельны друг другу: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$. Тогда $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \parallel \overline{n}_3$.

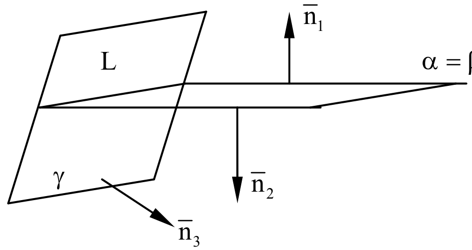


Рис. 85

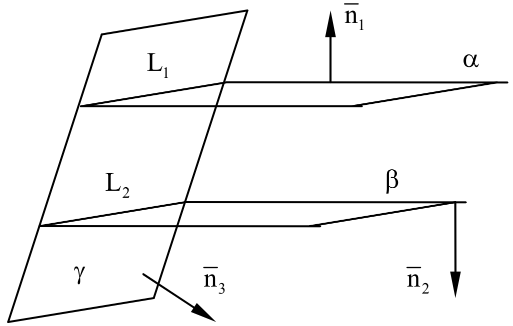


Рис. 86

5) Две плоскости параллельны, а третья пересекает их, например: $\alpha \parallel \beta \nparallel \gamma$. Смотрите рисунок 86.

В этом случае $\alpha \cap \gamma = L_1$ – прямая пересечения плоскостей α и γ, $\beta \cap \gamma = L_2$ – прямая пересечения плоскостей β и γ и, как известно из курса геометрии, $L_1 \parallel L_2$. Нормальные векторы $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \nparallel \overline{n}_3$.

6) Все три плоскости пересекаются по одной прямой и тогда $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2 \nparallel \overline{n}_3 \nparallel \overline{n}_1$, но все три вектора $\overline{n}_1, \overline{n}_2$, и $\overline{n}_3$ лежат в одной плоскости. Смотрите рисунок 87.

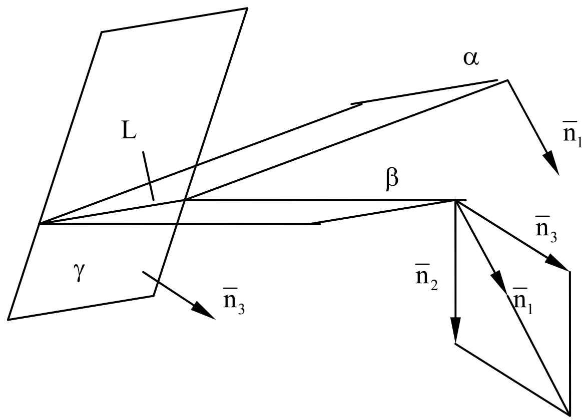


Рис. 87

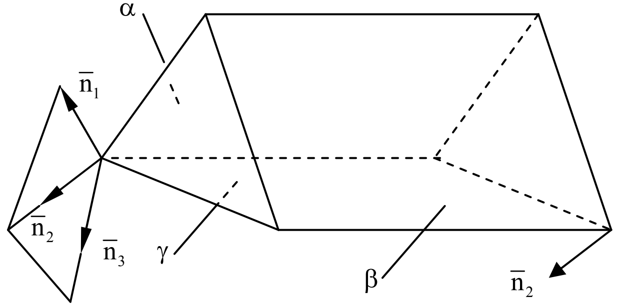


Рис. 88

7) Каждая пара плоскостей пересекается по своей прямой, образуя треугольную "трубу" и $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2 \nparallel \overline{n}_3 \nparallel \overline{n}_1$, но все три вектора $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ и $\overline{n}_3$ лежат в одной плоскости. Смотрите рисунок 88.

8) Все три плоскости пересекаются в одной точке и их нормальные векторы некомпланарные. Смотрите рисунок 89.

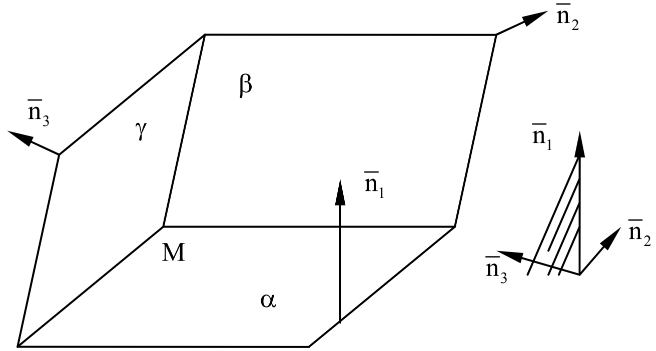


Рис. 89

Итог подводит следующая теорема.

Теорема (О расположении трех плоскостей)
Пусть даны общие уравнения трех плоскостей:

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$\gamma: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

где $\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\overline{n}_3 = (A_3, B_3, C_3)$ *– их соответствующие нормальные векторы. Тогда если:*

1) смешанное произведение

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 \cdot \overline{n}_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то все три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой можно найти решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases},$$

используя, например, формулы Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta=\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$ *– определитель системы,*

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-D_1 & B_1 & C_1\\ -D_2 & B_2 & C_2\\ -D_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}A_1 & -D_1 & C_1\\ A_2 & -D_2 & C_2\\ A_3 & -D_3 & C_3\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & -D_1\\ A_2 & B_2 & -D_2\\ A_3 & B_3 & -D_3\end{vmatrix};$$

2) смешанное произведение

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0,$$

а система уравнений не имеет решений, то имеет место случай 2, 4, 5 или 7 из рассмотренных выше.

3) смешанное произведение

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=0,$$

а система уравнений имеет бесконечно много решений, то имеет место случай 1, 3 или 6 из рассмотренных выше. ▲

Замечание 1. Чтобы различать расположение трех плоскостей, если смешанное произведение их нормальных векторов равно нулю, необходимо исследовать эти плоскости попарно, выявлять, нет ли среди них совпадающих или параллельных. Если совпадающих или параллельных плоскостей нет, то имеет место либо случай 6, либо случай 7 из рассмотренных выше. Но в случае 6, система имеет решения, а в случае 7 – нет.

Замечание 2. Если среди трех плоскостей есть хотя бы одна пара пересекающихся плоскостей, например, $\alpha\cap\beta=L$ – плоскости α и β пересекаются по прямой L, то исследование взаимного расположения трех плоскостей можно свести к исследованию расположения прямой L и плоскости γ, правда для этого нужно записать уравнение прямой L не в виде пересечения двух плоскостей, а в каноническом или параметрическом виде.

Задача. Найти канонические уравнения прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей:

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

Решение. Пусть $\overline{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Так как оба нормальных вектора перпендикулярны прямой пересечения L, то их векторное произведение будет вектором коллинерным этой прямой:

$$\overline{s}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=(m,n,p).$$

Таким образом, вычисляя векторное произведение нормальных векторов плоскости, мы находим направляющий вектор прямой L.

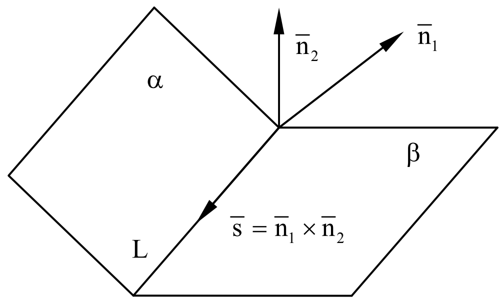


Рис. 90

Для написания канонического уравнения прямой кроме направляющего вектора необходимо знать координаты какой-нибудь точки лежащей на прямой L. С этой целью, найдем какое-нибудь решение (x_o,y_o,z_o) системы. Так как любое её решение есть координаты точки лежащей на прямой L, то тем самым мы находим точку на прямой L.

Теперь осталось написать канонические уравнения прямой

$$L:\ \frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}.$$

Упражнение

112. Подсчитайте количество возможных случаев расположений трех плоскостей.

Глава 11. Пучок и связка
§1. Уравнение пучка прямых на плоскости

Определение. Пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых данной плоскости, имеющих одну общую точку, которая называется центром пучка.

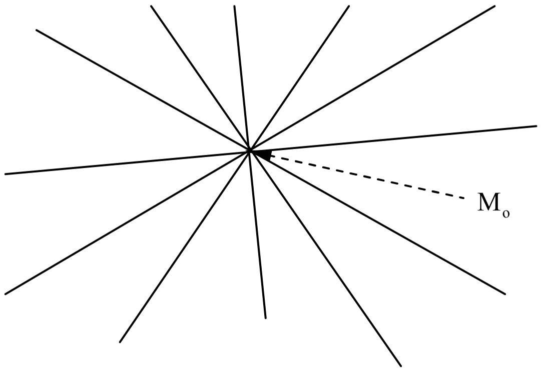


Рис. 91

На рисунке 91 точка M_o – центр пучка.

Теорема (О пучке прямых)
Пусть

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– две прямые в координатной плоскости Oxy*, пересекающиеся в точке* M_o*. Тогда уравнение любой прямой, лежащей на координатной плоскости* Oxy *и проходящей через точку* M_o *может быть записано в виде:*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *– некоторые действительные числа одновременно не равные нулю. Обратно, при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, одновременно не равных нулю, данное уравнение есть уравнение прямой, проходящей через точку* M_o.

Доказательство. Пусть L – призвольная прямая пучка прямых с центром пучка в точке M_o и $\overline{n}$ – ее нормальный вектор. Тогда векторное уравнение прямой L имеет вид:

$$\overline{n} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = 0,$$

где $\overline{r}_o$ – радиус-вектор точки M_o, $\overline{r}$ – текущий радиус-вектор, то есть радиус-вектор текущей точки $M \in L$. Смотрите рисунок 92.

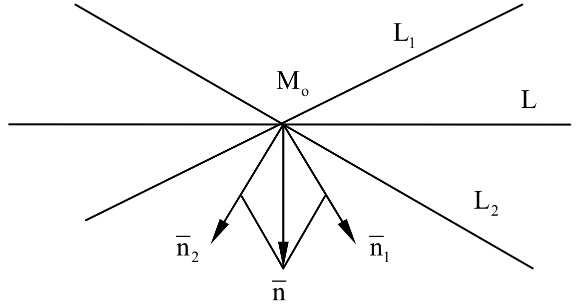


Рис. 92

Так как прямые L_1 и L_2 по условию теоремы пересекаются, то их нормальные векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ не коллинеарные и, следовательно, образуют базис $\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$ координатной плоскости Oxy. Тогда любой ненулевой вектор $\overline{n}$ этой плоскости может быть разложен по этому базису, то есть найдутся одновременно не равные нулю действительные числа α и β, такие, что будет выполняться равенство:

$$\overline{n} = \alpha \cdot \overline{n}_1 + \beta \cdot \overline{n}_2.$$

Подставим это выражение в векторное уравнение прямой:

$$(\alpha\overline{n}_1 + \beta\overline{n}_2) \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = 0,$$

где $\overline{r}_o$ – радиус вектор центра пучка. Раскрываем скобки:

$$\alpha\overline{n}_1 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) + \beta\overline{n}_2 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = 0.$$

Так как

$$\overline{n}_1 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = 0 \text{ и } \overline{n}_2 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = 0$$

– векторные уравнения прямых L_1 и L_2, то

$$\overline{n}_1 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = \overline{n}_1 \cdot \overline{r} - \overline{n}_1\overline{r}_o = A_1x + B_1y + C_1,$$

$$\overline{n}_2 \cdot (\overline{r} - \overline{r}_o) = \overline{n}_2 \cdot \overline{r} - \overline{n}_2\overline{r}_o = A_2x + B_2y + C_2.$$

Подставляя в векторное уравнение прямой получаем:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Обратно, докажем, что при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю, уравнение

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

есть уравнение некоторой прямой из данного пучка.

Действительно, с одной стороны, при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю, данное уравнение есть алгебраическое уравнение первой степени с двумя неизвестными, и, следовательно, является уравнением прямой. С другой стороны, по условию теоремы

$$A_1 x_o + B_1 y_o + C_1 = 0 \quad и \quad A_2 x_o + B_2 y_o + C_2 = 0 .$$

Отсюда следует равенство, верное при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(A_1 x_o + B_1 y_o + C_1) + \beta(A_2 x_o + B_2 y_o + C_2) = 0,$$

то есть данная прямая проходит через точку M_o. ▲

Определение. Пусть

$$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ и } L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

– две пересекающиеся прямые, лежащие в координатной плоскости Oxy. Уравнение

$$\alpha(A_1 x_o + B_1 y_o + C_1) + \beta(A_2 x_o + B_2 y_o + C_2) = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, называется уравнением пучка прямых с центром в точке их пересечения.

Замечание. Если в уравнение пучка подставить значение параметров $\alpha = 0 \neq \beta$, то получается уравнение прямой L_2. Если $\alpha \neq 0 = \beta$, то уравнение пучка есть уравнение прямой L_1. Поэтому, если уравнение пучка разделить на $\alpha \neq 0$, то получим уравнение любой прямой из данного пучка, кроме прямой L_2:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 .$$

Определение. Уравнение

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 ,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, называется уравнением пучка прямых с одним параметром.

Пример. Написать уравнение произвольной прямой, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$.

Решение. Искомая прямая есть прямая из пучка прямых с центром в

точке $M_o(x_o, y_o)$. Очевидно, следующие две прямые принадлежат этому пучку:

$$L_1 : x = x_o \quad и \quad L_2 : y = y_o .$$

Тогда уравнение любой прямой этого пучка имеет вид

$$\alpha(x - x_o) + \beta(y - y_o) = 0 .$$

Если заменить в этом уравнении греческие буквы на латинские, получаем

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$$

– уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$. В частности, при $x_o = y_o = 0$, получаем уравнение пучка прямых с центром пучка в начале координат:

$$Ax + By = 0 .$$

Разделив уравнение

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$$

на $B \neq 0$, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$:

$$y - y_o = k(x - x_o),$$

а при $x_o = y_o = 0$, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через начало координат:

$$y = kx .$$

Другими словами, уравнение $y = kx$, где $k \in \mathbb{R}$, есть уравнение пучка прямых с центром пучка в начале координат.

Упражнение

113. Докажите, что уравнение $y = kx + b$ есть уравнение пучка прямых с центром пучка в точке с координатами (0; b). Выберите из этого пучка прямую, отсекающую от оси абсцисс отрезок величиной a, и запишите её уравнение в отрезках.

§2. Уравнение связки плоскостей

Определение. Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, имеющих одну общую точку, которая называется центром связки.

Теорема (О связке плоскостей)

Пусть

$$\sigma_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 ,\ \sigma_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 ,$$

$$\sigma_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

– уравнения трех плоскостей, имеющие единственную общую точку M_o. *Тогда уравнение любой плоскости, проходящей через точку* M_o *может быть записано в виде*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$
$$+\gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *– некоторые действительные числа одновременно не равные нулю. Обратно, при любых* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *одновременно не равных нулю, данное уравнение есть уравнение плоскости, проходящей через точку* M_o.

Доказательство практически один к одному повторяет доказательство предыдущей теоремы об уравнении пучка прямых. ▲

Определение. Пусть

$$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$\sigma_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

– уравнения трех плоскостей, имеющие единственную общую точку. Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$
$$+\gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ называется уравнением связки плоскостей с центром связки в точке их пересечения.

Пример. Найти уравнение связки плоскостей с центром связки в точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

Решение. Очевидно, что следующие три плоскости пересекаются в единственной точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$:

$$\sigma_1 : x - x_o = 0, \quad \sigma_2 : y - y_o = 0, \quad \sigma_3 : z - z_o = 0.$$

Тогда уравнение

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0,$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$ и одновременно не равны нулю, есть искомое уравнение. В частности, если $x_o = y_o = z_o = 0$, то уравнение

$$Ax + By + Cz = 0$$

есть уравнение связки плоскостей с центром связки в начале координат.

Упражнение

114. Докажите теорему о связке плоскостей.
115. В каких случаях уравнение связки плоскостей можно записать с двумя параметрами? Например,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$
$$+\mu(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0.$$

§3. Уравнение пучка плоскостей

Определение. Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей пересекающихся по одной прямой, называемой осью пучка.

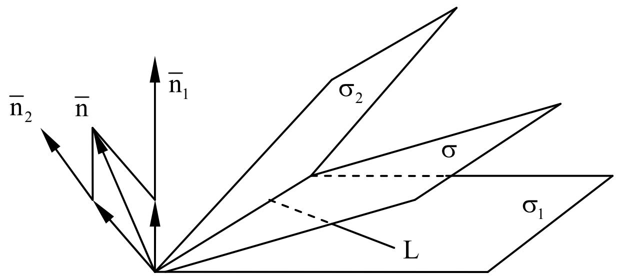


Рис. 93

Теорема (О пучке плоскостей)

Пусть

$$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{и} \ \sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– две плоскости, пересекающиеся по прямой L. *Тогда уравнение любой плоскости, содержащей прямую* L *может быть записано в виде*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *– некоторые действительные числа одновременно не равные нулю. Обратно, при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *одновременно не равных нулю, данное уравнение есть уравнение плоскости, проходящей через прямую* L.

Доказательство аналогично доказательству теоремы об уравнении пучка прямых и предоставляется читателю. Смотрите рисунок 93. ▲

Определение. Пусть

$$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{и} \ \sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– две , пересекающиеся плоскости. Уравнение
$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$
где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, называется уравнением пучка плоскостей с осью пучка, являющейся линией их пересечения.

Пример. Найти уравнение пучка плоскостей, осью которого является ось абсцисс.

Решение. Очевидно, что координатные плоскости
$$Oxz: y = 0 \quad \text{и} \quad Oxy: z = 0$$
пересекаются по оси Ox.

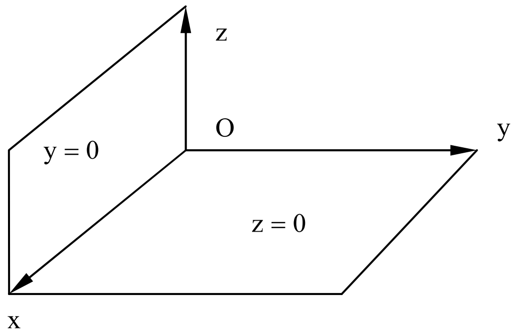


Рис. 94

Уравнение пучка плоскостей в данном случае принимает вид:
$$\alpha y + \beta z = 0 \quad \text{или} \quad By + Cz = 0,$$
где коэффициенты уравнения α, β или B, C – произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю. Оба уравнения являются искомыми уравнениями пучка плоскостей с осью пучка Ox.

Аналогично, уравнение $Ax + Cz = 0$, есть уравнение пучка плоскостей с осью пучка Oy, а уравнение $Ax + By = 0$ есть уравнение пучка плоскостей с осью пучка Oz.

Упражнение

116. Найдите уравнение пучка плоскостей с осью пучка $x = y = z$.

Глава 12. Основные задачи на прямые и плоскости

Задача 1. Найти уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Эта задача нами уже решена, смотрите главу 8, §3.

Ответ: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Задача 2. Найти угол между двумя прямыми
$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Решение. Эта задача была решена в главе 8, §3.

Ответ: искомый угол равен или углу между их направляющими векторами
$$(\overline{s}_1 \wedge \overline{s}_2) = \arccos\frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\,\overline{s}_1\,| \cdot |\,\overline{s}_2\,|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$
или углу равному $\pi - (\overline{s}_1 \wedge \overline{s}_2)$.

Задача 3. Найти общее уравнение плоскости, если известны координаты ее нормального вектора $\overline{n} = (A, B, C)$ и координаты точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$, лежащей на данной плоскости.

Решение. Достаточно воспользоваться уравнением
$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0,$$
Это же уравнение можно получить и по другому. Общее уравнение плоскости имеет вид
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
где A, B, C – координаты ее нормального вектора. Осталось найти коэффициент D. С этой целью подставим в уравнение координаты точки M_o:
$$Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0,$$
откуда
$$D = -Ax_o - By_o - Cz_o.$$
Подставляя в уравнение получаем:

$$Ax + By + Cz - Ax_o - By_o - Cz_o = 0$$

или

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

– искомое уравнение плоскости.

Ответ: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.

Задача 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Решение. Смотрите рисунок 95. Как мы видели в задаче 3, для составления общего уравнения плоскости достаточно знать координаты ее нормального вектора $\overline{n}$ и координаты любой точки, лежащей на данной плоскости.

В качестве нормального вектора плоскости можно взять векторное произведение вектора $\overline{M_1M_2}$ на вектор $\overline{M_1M_3}$, а в качестве точки, лежащей на плоскости можно взять точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Получаем

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

где $\overline{n} = (A, B, C) = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$.

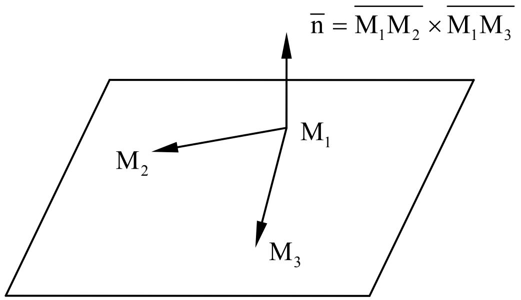


Рис. 95

Искомое уравнение плоскости можно получить и в другом виде. Уравнение плоскости в векторной форме имеет вид

$$(\overline{r} - \overline{r}_o) \cdot \overline{n} = 0,$$

откуда $(\overline{r} - \overline{r}_1) \cdot (\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) = 0$. Ответ запишем в скалярной форме.

Ответ: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Задача 5. Найти угол между двумя плоскостями.

Решение. Из геометрии нам известно, что двугранный угол между двумя плоскостями измеряется линейным углом. Смотрите рисунок 96. Нетрудно видеть, что линейный угол α, измеряющий двугранный угол между двумя плоскостями равен углу $\beta = (\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2)$ между нормальными векторами этих плоскостей или равен $\pi - \beta$. Здесь мы воспользовались признаком равенства углов со взаимно перпендикулярными сторонами.

Итак,

$$\alpha = (\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) \quad \text{или} \quad \alpha = \pi - (\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2).$$

Таким образом, задача вычисления угла между плоскостями сводится к задаче вычисления угла между векторами.

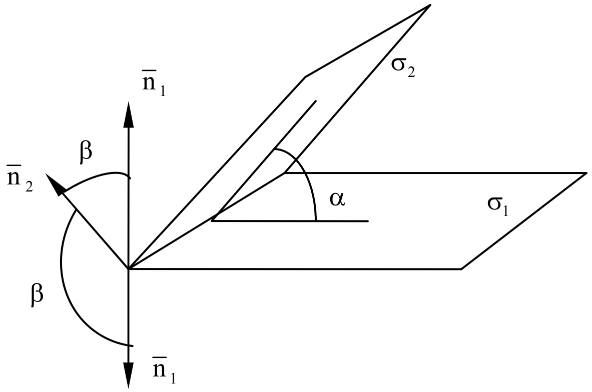


Рис. 96

Задача 6. Найти расстояние данной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до данной плоскости

$$\sigma: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Решение. Выберем произвольную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, лежащую на данной плоскости. Смотрите рисунок 97. Заметим, что если $D = 0$, то начало координат лежит на плоскости и его можно взять в качестве точки M_o. Если же $D \neq 0$, то в качестве такой точки можно взять точку пересечения плоскости с одной из координатных осей. Так как плоскость не может быть параллельной всем трем координатным осям, то хотя бы одна координатная ось пересекает данную плоскость.

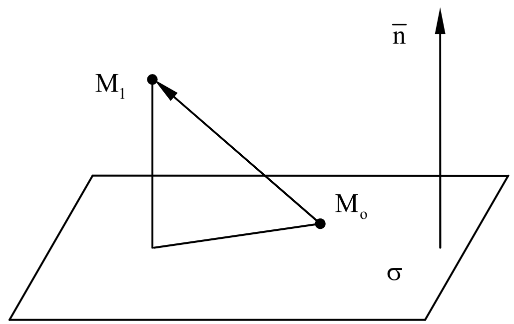


Рис. 97

Итак, пусть точка $M_o(x_o, y_o, z_o) \in \sigma$ выбрана, тогда расстояние $d = r(M_1; \sigma)$ от заданной точки M_1 до заданной плоскости σ равно модулю проекции вектора $\overline{M_oM_1}$ на нормальный вектор плоскости σ:

$$d = r(M_1; \sigma) = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_oM_1}| = \frac{|\bar{n} \cdot \overline{M_oM_1}|}{|\bar{n}|} =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) + C(z_1 - z_o)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как

$$-Ax_o - By_o - Cz_o = D,$$

то эту формулу можно записать в виде:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ответ: $d = r(M_1; \sigma) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Определение. Пусть дано произвольное общее уравнение плоскости $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ и произвольная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Число

$$\Delta(M_1; \sigma) \doteq Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

называется невязкой точки M_1 относительно данной плоскости σ.

С помощью введенного понятия невязки, формула расстояния от точки до плоскости может быть записана в виде:

$$d(M_1; \sigma) = \frac{|\Delta(M_1; \sigma)|}{|\bar{n}|}.$$

Определение. Величина

$$\delta(M_1; \sigma) = \frac{\Delta(M_1; \sigma)}{|\bar{n}|} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

называется отклонением точки M_1 от плоскости

$$\sigma: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Из последнего определения следует, что расстояние от точки M_1 до плоскости σ равно модулю отклонения точки M_1 от плоскости σ:

$$d(M_1; \sigma) = |\delta(M_1; \sigma)|.$$

Из определений также следует, что отклонение и невязка имеют одинаковый знак.

Замечание. Невязку, отклонение и расстояние можно записать в другом виде. Приведем данное уравнение плоскости к нормальному виду:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \bar{n}^o = \pm\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \pm\left(\frac{A}{|\bar{n}|}, \frac{B}{|\bar{n}|}, \frac{C}{|\bar{n}|}\right),$$

$$-p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

причем знак плюс берется в случае, когда $D < 0$ и минус, в противном случае. Теперь, формула расстояния от точки до плоскости принимает вид:

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|,$$

где

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p = \delta(M_1;\sigma)$$

– отклонение точки M_1 от плоскости σ.

Задача 7. Найти расстояние от данной точки $M_1(x_1, y_1)$ до данной прямой $L: Ax + By + C = 0$.

Решение. Задача решается аналогично предыдущей.

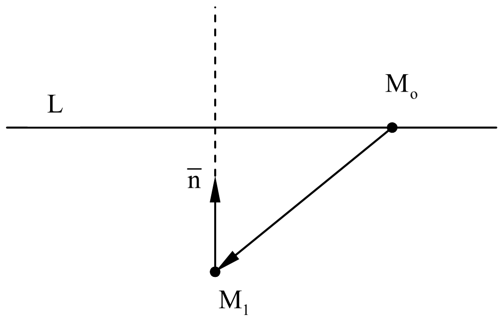


Рис. 98

$$d = r(M_1;L) = |\,\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_oM_1}\,| = \frac{|\,\bar{n}\cdot\overline{M_oM_1}\,|}{|\,\bar{n}\,|} = \frac{|\,A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o)\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как

$$-Ax_o - By_o = C,$$

то

$$d = \frac{|\,Ax_1 + By_1 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Аналогично вводятся понятия невязки точки относительно прямой и отклонения точки от прямой.

Определение. Пусть дано произвольное общее уравнение прямой $L: Ax + By + C = 0$ и произвольная точка плоскости $M_1(x_1, y_1)$. Число

$$\Delta(M_1;L) \doteq Ax_1 + By_1 + C$$

называется невязкой точки M_1 относительно прямой L.

Определение. Величина

$$\delta(M_1;L) = \frac{\Delta(M_1;L)}{|\,\bar{n}\,|} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

называется отклонением точки M_1 от прямой L.

Из последнего определения следует, что расстояние от точки M_1 до прямой L равно модулю отклонения точки M_1 от прямой L:

$$d(M_1;L) = |\,\delta(M_1;L)\,|.$$

Если привести уравнение прямой к нормальному виду:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

где

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = \bar{n}^o = \pm\frac{\bar{n}}{|\,\bar{n}\,|} = \pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right),$$

$$-p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

причем знак плюс берется в случае, когда $C < 0$ и минус, в противном случае, то формула расстояния от точки до прямой принимает вид:

$$d = |\,x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p\,|,$$

где

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p = \delta(M_1;L)$$

– отклонение точки M_1 от прямой L.

Задача 8. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Решение. 1-й способ. Найти на одной плоскости произвольную точку и найти расстояние от нее до второй плоскости, то есть свести эту задачу к задаче 6.

2-й способ. Приведем оба уравнения параллельных плоскостей к нормальному виду:

$$\sigma_1: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0$$

$$\sigma_2: \pm(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - p_2 = 0,$$

где $\bar{n}_1^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и $\bar{n}_2^o = \pm(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – нормальные векторы плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ – расстояния от начала координат до плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно.

Так как нормальные векторы $\overline{n}_1^o$ и $\overline{n}_2^o$ направлены от начала координат к плоскости, то возможны 2 случая:

а) $\overline{n}_1^o = \overline{n}_2^o$. Смотрите рисунок 99.

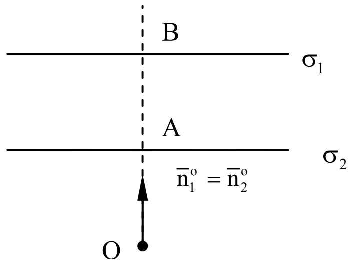


Рис. 99

На рисунке 99 схематически изображены две параллельные плоскости σ_1 и σ_2 и их единичные нормальные векторы, отложенные от начала координат O.

Здесь, $p_1 = OB$, $p_2 = OA$ – расстояния от начала координат до соответствующих плоскостей. Так как неизвестно, какая плоскость ближе к началу координат, то расстояние между плоскостями

$$d(\sigma_1;\sigma_2) = |\,OB - OA\,| = |\,p_1 - p_2\,|.$$

б) $\overline{n}_1^o = -\overline{n}_2^o$. Смотрите рисунок 100.

Так как нормальные векторы $\overline{n}_1^o$ и $\overline{n}_2^o$ направлены от начала координат к плоскостям и противоположны, то начало координат находится между плоскостями.

Здесь расстояние между плоскостями

$$d(\sigma_1;\sigma_2) = p_1 + p_2.$$

Ответ:

а) если нормальные уравнения плоскостей имеют вид

$$\sigma_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0$$

$$\sigma_2 : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_2 = 0,$$

то

$$d(\sigma_1;\sigma_2) = |\,p_1 - p_2\,|;$$

б) если нормальные уравнения плоскостей имеют вид

$$\sigma_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0$$

$$\sigma_2 : -x\cos\alpha - y\cos\beta + z\cos\gamma - p_2 = 0,$$

то

$$d(\sigma_1;\sigma_2) = p_1 + p_2.$$

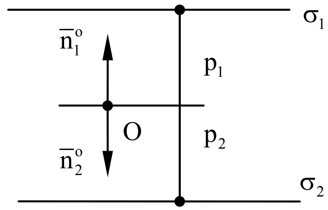


Рис. 100

Задача 9. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми.

Решение. Задача аналогична предыдущей. 1-й способ. Найти на одной прямой произвольную точку и найти расстояние от нее до второй прямой, то есть задача сводится к задаче 7.

2-й способ. Приведем оба уравнения параллельных прямых к нормальному виду:

$$L_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta - p_1 = 0,\ L_2 : \pm(x\cos\alpha + y\cos\beta) - p_2 = 0,$$

где $\overline{n}_1^o = (\cos\alpha, \cos\beta)$ и $\overline{n}_2^o = \pm(\cos\alpha, \cos\beta)$ – нормальные векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ – расстояния от начала координат до прямых L_1 и L_2 соответственно. Далее как в предыдущей задаче.

а) Если $\overline{n}_1^o = \overline{n}_2^o$, то $d(L_1;L_2) = |\,p_1 - p_2\,|$.

б) Если $\overline{n}_1^o = -\overline{n}_2^o$, то $d(L_1;L_2) = p_1 + p_2$.

Ответ:

а) если нормальные уравнения прямых имеют вид

$$L_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta - p_1 = 0,\ L_2 : x\cos\alpha + y\cos\beta - p_2 = 0,$$

то

$$d(L_1;L_2) = |\,p_1 - p_2\,|;$$

б) если нормальные уравнения прямых имеют вид

$$L_1: x\cos\alpha + y\cos\beta - p_1 = 0\,,\ L_2: -x\cos\alpha - y\cos\beta - p_2 = 0\,,$$

то

$$d(L_1;L_2) = p_1 + p_2\,.$$

Задача 10. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми в пространстве.

Решение. Пусть уравнения параллельных прямых даны в канонической форме

$$L_1: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}\,,\ L_2: \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}\,,$$

где $\overline{s} = (m,n,p)$ – их общий направляющий вектор, $M_1(x_1,y_1,z_1) \in L_1$, $M_2(x_2,y_2,z_2) \in L_2$ – точки на этих прямых. Смотрите рисунок 101.

Треугольник AM_1M_2 прямоугольный и

$$d(L_1;L_2) = |\,\overline{M_1M_2}\,| \cdot \sin\,(\overline{s} \wedge \overline{M_1M_2})\,.$$

Так как $\sin\alpha = \sin\,(\pi - \alpha)$, то направление вектора $\overline{s}$ не играет роли, лишь бы он был коллинеарный данным параллельным прямым. Далее,

$$\cos\,(\overline{s} \wedge \overline{M_1M_2}) = \frac{\overline{s} \cdot \overline{M_1M_2}}{|\,\overline{s}\,| \cdot |\,\overline{M_1M_2}\,|}\,,$$

откуда

$$d(L_1;L_2) = |\,\overline{M_1M_2}\,| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\overline{s} \wedge \overline{M_1M_2})}\,.$$

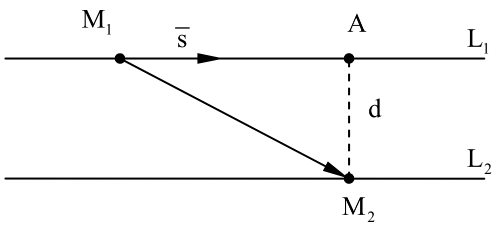


Рис. 101

Замечание. Можно решать прямоугольный треугольник AM_1M_2:

$$AM_1 = |\,\text{пр}_{\overline{s}}\,\overline{M_1M_2}\,| = \left|\frac{\overline{s} \cdot \overline{M_1M_2}}{|\,\overline{s}\,|}\right|,$$

$$d\,(L_1;L_2) = AM_2 = \sqrt{(M_1M_2)^2 - (AM_1)^2}\,.$$

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}\,,\ L_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}\,.$$

Решение. Выписываем направляющие векторы прямых:

$$\overline{s_1} = (3;-2;2)\,,\ \overline{s_2} = (-3;2;-2) = -\overline{s_1}\,.$$

Отсюда следует, что прямые либо совпадают, либо параллельные. Пусть

$$\overline{s} = (3;-2;2)$$

– их общий направляющий вектор. Из канонических уравнений прямых находим, что точки $M_1(0;1;-1) \in L_1$, $M_2(2;0;0) \in L_2$. Находим координаты вектора $\overline{M_1M_2} = (2;-1;1)$. Видим, что $\overline{M_1M_2} \nparallel \overline{s_1}$, то есть данные прямые не совпадают, а параллельные.

В обозначениях рисунка выше, находим

$$AM_1 = |\,\text{пр}_{\overline{s}}\,\overline{M_1M_2}\,| = \left|\frac{\overline{s} \cdot \overline{M_1M_2}}{|\,\overline{s}\,|}\right| = \frac{10}{\sqrt{17}}\,,$$

$$(M_1M_2)^2 = |\,\overline{M_1M_2}\,|^2 = 4 + 1 + 1 = 6\,,$$

$$d = AM_2 = \sqrt{(M_1M_2)^2 - (AM_1)^2} = \sqrt{6 - \frac{100}{17}} = \sqrt{\frac{2}{17}}\,.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{17}}$.

Замечание. Искомое расстояние d равно расстоянию от точки M_1 до прямой L_2 (смотрите рисунок 101). Так что решив задачу нахождения расстояния между параллельными прямыми, мы одновременно решаем задачу нахождения расстояния от точки до прямой в пространстве.

Теорема (Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми)
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

можно вычислить по формуле:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|},$$

где $|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|$ *– модуль векторного произведения направляющих векторов данных прямых:* $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ *;* $|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|$ *– модуль смешанного произведения направляющих векторов* $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ *и вектора* $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Доказательство. Векторы $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарные, (иначе прямые лежали бы в одной плоскости), в частности $\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$. Здесь $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$.

Отложим все три вектора $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \overline{M_1M_2}$ от одной точки M_1. Смотрите рисунок 102.

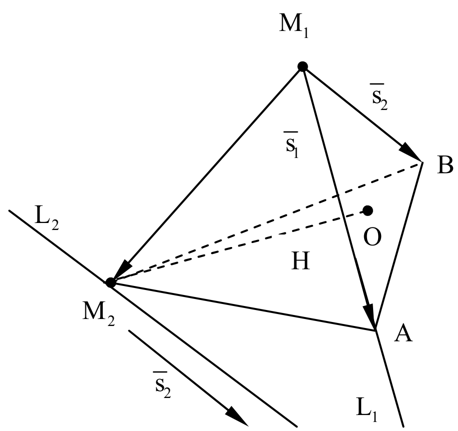


Рис. 102

Здесь, $\overline{M_1A} = \bar{s}_1$, $\overline{M_1B} = \bar{s}_2$. Из рисунка 102 ясно, что прямая L_2 параллельна грани M_1AB, так как прямая L_2 по построению параллельна

ребру M_1B треугольной пирамиды M_1M_2AB. (Если прямая параллельна какой-нибудь прямой лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.). Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми $d(L_1, L_2)$ равно расстоянию от прямой L_2 до плоскости грани M_1AB, а это расстояние, в свою очередь, равно высоте $H = M_2O$ пирамиды M_1M_2AB, опущенной из вершины M_2 на грань M_1AB:

$$H = \frac{3V_{M_1M_2AB}}{S_{M_1AB}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot |\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{\frac{1}{2}|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|} = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}. \blacktriangle$$

Пример. Установить, что прямые

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0} \text{ и } L_2 : x = y = z + 1$$

скрещивающиеся и найти расстояние между ними.

Решение. Из уравнений прямых находим:

$M_1(1;-1;0)$, $M_2(0;0;-1)$, $\overline{M_1M_2} = (-1;1;-1)$, $\bar{s}_1 = (2;-1;0)$, $\bar{s}_2 = (1;1;1)$.

Вычисляем смешанное и векторное произведения:

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = -4, \quad \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = -\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \quad |\bar{s}_1 \times \bar{s}_2| = \sqrt{14}.$$

Делаем вывод, что данные прямые скрещивающиеся. Находим расстояние между ними:

$$d = \frac{|\bar{s}_1 \bar{s}_2 \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$.

Глава 13. Эллипс
§1. Кривые второго порядка

Определение. Кривой второго порядка называется линия (кривая, геометрическое место точек) на координатной плоскости Oxy, уравнение которой имеет вид:
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 .$$

К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Определение. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости равноудаленных от одной фиксированной точки плоскости, называемой центром окружности.

Определение. Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется радиусом окружности.

Теорема (Об уравнении окружности)
Окружность является кривой второго порядка и на координатной плоскости Oxy *её уравнение имеет вид:*
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 ,$$
где (x_0, y_0) *– координаты центра окружности, R – радиус окружности.*

Доказательство. Предполагается, что нам известны координаты центра окружности $C(x_0, y_0)$ и её радиус R. Пусть M(x,y) – произвольная, текущая, точка окружности. Тогда расстояние от центра окружности до её произвольной точки есть величина постоянная, равная R:
$$CM = R .$$
Ясно, что это равенство верно тогда и только тогда, когда точка M лежит на окружности, то есть оно не выполняется для точек плоскости, которые не лежат на данной окружности. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками координатной плоскости. Тогда
$$CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R .$$
Возведем последнее равенство в квадрат:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$
Полученное уравнение является уравнением окружности, так как координаты любой её точки удовлетворяют этому уравнению.

Обратно, если координаты какой-либо точки M(x,y) удовлетворяют этому уравнению, то из этого равенства следует, что расстояние $CM = R$, то есть точка M является точкой окружности. ▲

Определение. Если центр окружности находится в начале координат, то такая система координат называется канонической для окружности, а уравнение
$$x^2 + y^2 = R^2$$
называется каноническим уравнением окружности.

Упражнение

117. Используя определение тригонометрических функций синус и косинус как функций угла поворота на тригонометрической окружности, выведите параметрическое уравнение окружности.

§2. Каноническое уравнение эллипса

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Фокусы эллипса принято обозначать буквами F_1 и F_2.

Определение. Расстояния от точки M, лежащей на эллипсе, до фокусов $r_1(M) \doteq MF_1$ и $r_2(M) \doteq MF_2$ называются фокальными радиусами точки M.

Замечание. Из определения эллипса следует, что точка M является точкой эллипса тогда и только тогда, когда сумма её фокальных радиусов $r_1(M) + r_2(M)$ есть величина постоянная для данного эллипса. Эту константу принято обозначать через 2a:
$$2a \doteq r_1(M) + r_2(M) .$$

Определение. Расстояние между фокусами эллипса называется фокусным расстоянием.

Фокусное расстояние для данного эллипса есть величина постоянная и ее принято обозначать через 2c:
$$2c \doteq F_1F_2 .$$

Из определения эллипса и из неравенства треугольника (смотрите рисунок 103) следует, что $2a > 2c$.

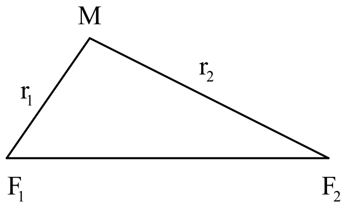


Рис. 103

Определение. Число 2a называется большой осью эллипса, число a называется большой полуосью эллипса.

Определение. Число 2b называется малой осью эллипса, число b называется малой полуосью эллипса, где

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}\ .$$

Определение. Отношение фокусного расстояния эллипса к его большой оси называется эксцентриситетом эллипса, и обозначается буквой e или ε:

$$\varepsilon \doteq \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}\,.$$

Определение. Ось, на которой лежат фокусы эллипса называется фокальной осью эллипса.

Определение. Прямоугольная декартовая система координат, ось абсцисс которой является фокальной осью эллипса, а начало координат лежит посередине между фокусами, называется канонической для эллипса.

Определение. Канонические для эллипса оси координат называются главными осями эллипса, а начало координат называется центром эллипса. Ось абсцисс называется большой осью эллипса, а ось ординат называется малой осью эллипса.

Определение. Точки пересечения эллипса с его главными осями называются вершинами эллипса.

Построим каноническую для эллипса ПДСК. Смотрите рисунок 104.

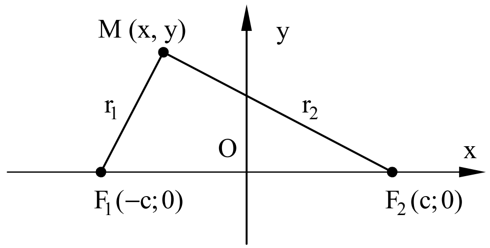


Рис. 104

Теорема (Каноническое уравнение эллипса)

В канонической для эллипса системе координат его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе мы докажем, что координаты любой точки, лежащей на эллипсе удовлетворяют уравнению (1). На втором этапе мы докажем, что любое решение уравнения (1) дает координаты точки, лежащей на эллипсе. Отсюда будет следовать, что уравнению (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые лежат на эллипсе, то есть уравнение (1) является уравнением эллипса.

1) Пусть точка M(x, y) является точкой эллипса, то есть сумма ее фокальных радиусов равна 2a:

$$r_1 + r_2 = 2a\ .$$

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками на координатной плоскости и найдем по этой формуле фокальные радиусы данной точки M:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,$$

откуда получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\ .$$

Перенесем один корень в правую часть равенства и возведем в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\ .$$

Сокращая, получаем:

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc .$$

Приводим подобные, сокращаем на 4 и уединяем радикал:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc .$$

Возводим в квадрат:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 .$$

Раскрываем скобки и сокращаем на $-2a^2xc$:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 ,$$

откуда получаем:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) .$$

Используя равенство $b^2 = a^2 - c^2$, получаем:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Деля последнее равенство на a^2b^2, получаем доказываемое равенство (1).

2) Пусть теперь пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (1) и пусть M(x, y) – соответствующая точка на координатной плоскости Oxy. Тогда из равенства (1) следует:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Подставляем это равенство в выражение для фокальных радиусов точки M:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{x^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2xc + (c^2 + b^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = | a + x\varepsilon | .$$

Здесь мы воспользовались равенством $b^2 = a^2 - c^2$ и определением эксцентриситета. Таким образом,

$$r_1 = | a + x\varepsilon | .$$

Аналогично доказывается, что

$$r_2 = | a - x\varepsilon | .$$

Теперь заметим, что из равенства (1) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \text{ или } | x | \le a$$

и так как $\varepsilon < 1$, то отсюда следует неравенство:

$$a \ge | x | > | x | \cdot \varepsilon = | x \cdot \varepsilon | .$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$a \pm | x\varepsilon | > 0 \text{ или } a \pm x\varepsilon > 0$$

и

$$r_1 = a + x\varepsilon, \quad r_2 = a - x\varepsilon .$$

Складывая эти равенства, получаем

$$r_1 + r_2 = 2a ,$$

то есть точка M(x, y) является точкой эллипса. ▲

Определение. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется каноническим уравнением эллипса.

Упражнение

118. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от концов какого-нибудь отрезка прямой. Систему координат выберите произвольным образом, как вам удобнее.

§3. Основные свойства эллипса

Теорема (Свойства эллипса)

1) В канонической для эллипса системе координат, все точки эллипса находятся в прямоугольнике

$$| x | \le a, \quad | y | \le b .$$

2) В канонической для эллипса системе координат вершины эллипса имеют координаты:

$$A_1(-a; 0), \; A_2(a; 0), \; B_1(0; -b), \; B_2(0; b) .$$

3) Эллипс является замкнутой кривой, симметричной относительно своих главных осей.

4) Центр эллипса является его центром симметрии.

Доказательство. 1, 2) Первые два утверждения сразу же следуют из канонического уравнения эллипса.

3) и 4) Пусть M(x, y) – произвольная точка эллипса, тогда её координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Очевидно, что координаты точек $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$, $M_3(-x; -y)$ также удовлетворяют уравнению эллипса, то есть являются точками эллипса, откуда и следуют утверждения теоремы. ▲

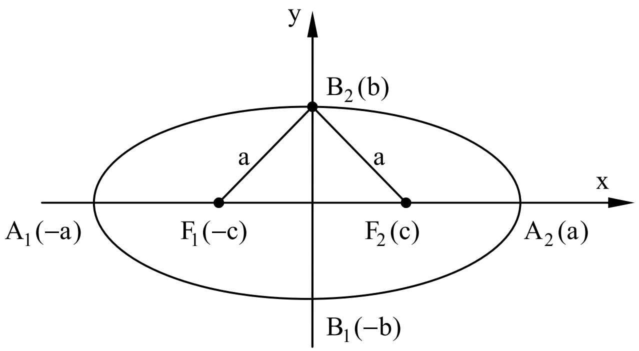


Рис. 105

Замечание. Эллипс можно построить следующим образом. На плоскости в фокусы "забиваем по гвоздю" и закрепляем на них нить длиной $2a > 2c$. Затем берем карандаш и с его помощью натягиваем нить. Затем передвигаем карандашный грифель по плоскости, следя за тем, чтобы нить была в натянутом состоянии. Смотрите рисунок 105.

Из определения эксцентриситета следует, что $0 < \varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$.

Зафиксируем число a и устремим число c к нулю. Тогда при $c \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и $b \to a$. В пределе мы получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

– уравнение окружности.

Таким образом, мы можем считать, что окружность есть эллипс с нулевым эксцентриситетом.

Устремим теперь c к a: $c \to a$. Тогда $\varepsilon \to 1$, $b \to 0$ и мы видим, что в пределе эллипс вырождается в отрезок прямой A_1A_2 в обозначениях рисунка 105.

Упражнение

119. Найдите уравнение эллипса, если его фокальная ось совпадает с осью ординат, а центр – с началом координат?
120. Найдите уравнение эллипса, если его центр находится в точке $(x_o; y_o)$, а его главные оси параллельны координатным осям.

§4. Параметрическое уравнение эллипса

Теорема (Параметрические уравнения эллипса)

Пусть $0 < b < a$ *– произвольные положительные действительные числа. Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi) \qquad (2)$$

являются параметрическими уравнениями эллипса в канонической для эллипса системе координат.

Доказательство. Достаточно доказать, что система уравнений (2) равносильна уравнению (1), то есть они имеют одно и то же множество решений.

Пусть (x, y) – произвольное решение системы (2). Разделим первое уравнение на a, второе – на b, возведем оба уравнения в квадрат, и сложим:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t \\ \dfrac{y}{b} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тем самым мы доказали, что любое решение системы (2) удовлетворяет уравнению (1).

Обратно, пусть пара (x, y) является решением уравнения (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из этого равенства следует, что точка с координатами $\left(\dfrac{x}{a}; \dfrac{y}{b}\right)$ лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, то есть является точкой тригонометрической окружности, которой соответствует некоторый угол $t \in [0; 2\pi)$. Смотрите рисунок 106.

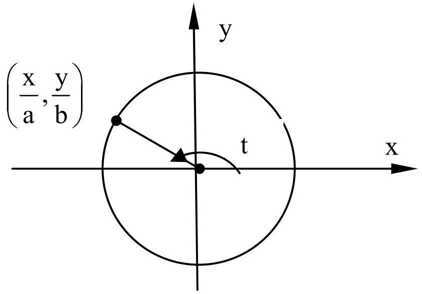


Рис. 106

Из определения синуса и косинуса сразу же следует, что

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t,$$

где $t \in [0; 2\pi)$, и пара (x, y) является решением системы (2). ▲

Замечание. Эллипс можно получить в результате равномерного "сжатия" окружности радиуса a к оси абсцисс.

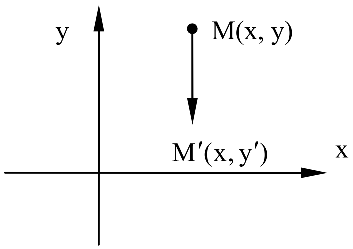


Рис. 107

Пусть $x^2 + y^2 = a^2$ – уравнение окружности с центром в начале координат. "Сжатие" окружности к оси абсцисс есть ни что иное, как преобразование координатной плоскости, осуществляемое по следующему правилу. Каждой точке M(x, y) поставим в соответствие точку этой же плоскости $M'(x; y')$, где $y' = k \cdot y$, $0 < k < 1$ – коэффициент "сжатия".

При этом преобразовании каждая точка окружности "переходит" в другую точку плоскости, имеющую ту же самую абсциссу, но меньшую ординату. Выразим старую ординату точки через новую:

$$y = \frac{y'}{k}$$

и подставим в уравнение окружности:

$$x^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 = a^2.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{(k \cdot a)^2} = 1.$$

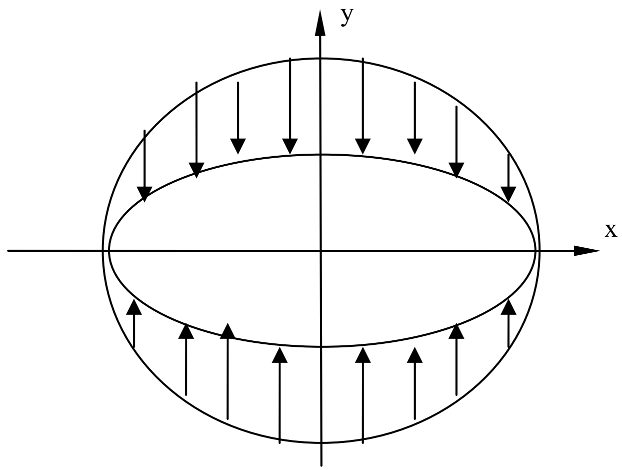


Рис. 108

Отсюда следует, что если до преобразования "сжатия" точка M(x, y) лежала на окружности, то есть ее координаты удовлетворяли уравнению окружности, то после преобразования "сжатия" эта точка "перешла" в точку $M'(x; y')$, координаты которой удовлетворяют уравнению эллипса. Если мы хотим получить уравнение эллипса с малой полуосью b, то нужно взять коэффициент сжатия $k = \frac{b}{a}$.

§5. Касательная к эллипсу

Теорема (О касательной к эллипсу)
Пусть $M_o(x_o, y_o)$ *– произвольная точка эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тогда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_o(x_o, y_o)$ *имеет вид:*

$$\frac{x_o\cdot x}{a^2}+\frac{y_o\cdot y}{b^2}=1.$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o),$$

где $f'(x_o)$ – значение производной данной функции в точке $x = x_o$. Найдем производную и её значение в точке касания. Каноническое уравнение эллипса можно рассматривать как неявное задание функции. Найдем производную этой функции, как функции, заданной неявно. Получаем,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0,$$

откуда находим

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad y'(x_o)=-\frac{b^2x_o}{a^2y_o}.$$

Подставляем найденное значение производной в уравнение касательной:

$$y-y_o=-\frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x-x_o),$$

откуда получаем:

$$a^2y_o(y-y_o)=-b^2x_o(x-x_o)$$

или

$$a^2y_oy-a^2y_o^2=-b^2x_ox+b^2x_o^2.$$

Отсюда следует:

$$b^2x_ox+a^2y_oy=b^2x_o^2+a^2y_o^2.$$

Разделим это равенство на a^2b^2:

$$\frac{x_ox}{a^2}+\frac{y_oy}{b^2}=\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}.$$

Здесь $\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}=1$, так как точка $M_o(x_o, y_o)$ принадлежит эллипсу и ее координаты удовлетворяют его уравнению. ▲

Упражнение

121. Выразите из канонического уравнения эллипса переменную y, и найдите производную $y'(x_o)$ в явном виде и уравнение касательной к эллипсу.
122. Найдите уравнение касательной к окружности в любой её точке.

§6. Зеркальное свойство эллипса

Пусть $M(x_o, y_o)$ – точка касания касательной к эллипсу, $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ – её фокальные радиусы, P и Q – проекции фокусов на эту касательную. Смотрите рисунок 109.

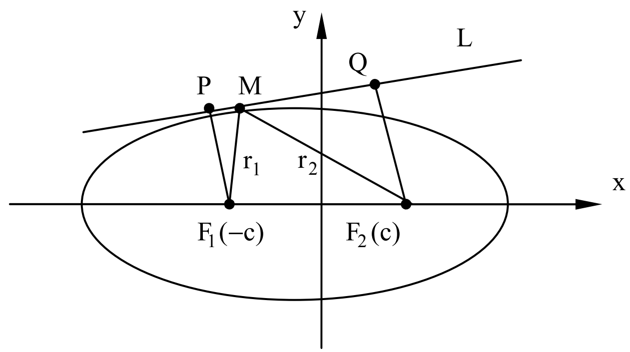


Рис. 109

Теорема (Зеркальное свойство эллипса)
Касательная к эллипсу имеет равные углы с фокальными радиусами точки касания.

Теорема утверждает (смотрите рисунок 109), что

$$\angle F_1MP = \angle F_2MQ.$$

Это равенство можно интерпретировать как равенство углов падения и отражения луча света от эллипса, выпущенного из его фокуса. Это свойство получило название зеркального свойства эллипса:

Луч света, выпущенный из фокуса эллипса, после отражения от зеркала эллипса проходит через другой фокус эллипса.

Доказательство. Для доказательства равенства углов мы докажем подобие треугольников F_1MP и F_2MQ, в которых стороны F_1P и F_2Q будут сходственными. Так как треугольники прямоугольные, то достаточно доказать равенство

$$\frac{PF_1}{QF_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Так как

$$PF_1 = |\text{пр}_{\overline{n}}\overline{F_1M}| = \frac{|\overline{F_1M}\cdot\overline{n}|}{|\overline{n}|},$$

то найдем координаты вектора $\overline{F_1M}$ и вычислим скалярное произведение $\overline{F_1M}\cdot\overline{n}$, где $\overline{n} = \left(\frac{x_o}{a^2}; \frac{y_o}{b^2}\right)$ – нормальный вектор касательной L:

$$\overline{F_1M} = (x_o + c; y_o).$$

$$\overline{F_1M}\cdot\overline{n} = (x_o + c)\frac{x_o}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} + \frac{x_o c}{a^2} = 1 + \frac{x_o c}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(a + x_o\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{a}(a + x_o\varepsilon) = \frac{r_1}{a}.$$

Отсюда, находим:

$$PF_1 = \frac{r_1}{a|\overline{n}|}.$$

Аналогично находим:

$$QF_2 = \frac{r_2}{a|\overline{n}|}.$$

Разделив первое из полученных равенств на второе, получаем:

$$\frac{PF_1}{QF_2} = \frac{r_1}{r_2}. \ ▲$$

§7 Директрисы эллипса

Определение. Директрисами эллипса называются две прямые, которые в канонической для эллипса системе координат имеют уравнения

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

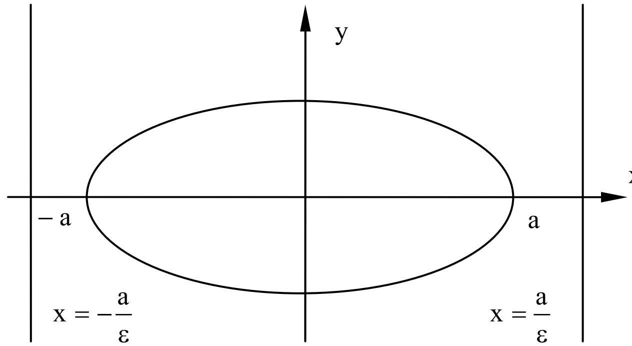


Рис. 110

Теорема (Свойство директрис эллипса)

Пусть M *– произвольная точка эллипса,* r_1, r_2 *– ее фокальные радиусы,* d_1 *– расстояние от точки* M *до левой директрисы,* d_2 *– до правой. Тогда*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

где ε *– эксцентриситет эллипса.*

Доказательство. Пусть M(x, y) – координаты произвольной точки эллипса. Смотрите рисунок 111. Для вычисления расстояний от точки M до директрис, воспользуемся формулой расстояния между двумя точками числовой оси:

$$AB = |x_B - x_A|.$$

Получаем,

$$d_1 = \left|x - \left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right| = \frac{|a + \varepsilon x|}{\varepsilon} = \frac{r_1}{\varepsilon}.$$

Аналогично находим, $d_2 = \frac{r_2}{\varepsilon}$, откуда и следуют доказываемые равенства. ▲

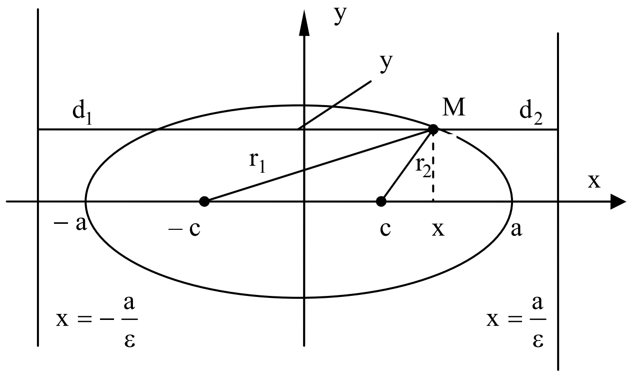


Рис.111

§8 Фокальный параметр эллипса

Определение. Фокальным параметром эллипса называется длина перпендикуляра, восстановленного в его фокусе до пересечения с эллипсом.

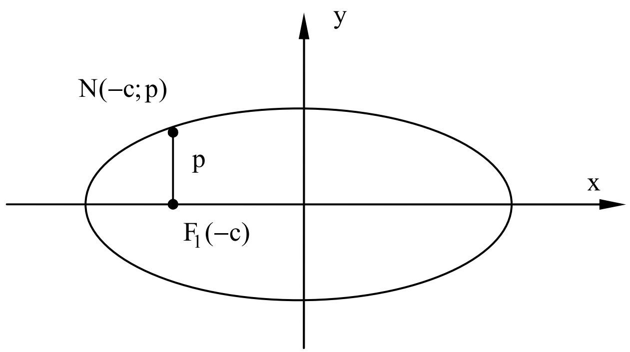


Рис. 112

Фокальный параметр принято обозначать буквой p. Смотрите рисунок 112. Из определения следует, что фокальный параметр $p = F_1N$.

Теорема (О фокальном параметре)

Фокальный параметр эллипса равен: $p = \frac{b^2}{a}$.

Доказательство. Так как точка N(–c; p) является точкой эллипса, то ее координаты удовлетворяют его уравнению:

$$\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1.$$

Отсюда находим:

$$p^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = b^2\frac{a^2 - c^2}{a^2} = b^2\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}. \ ▲$$

§9 Второе определение эллипса

Определение. Эллипсом называется ГМТ плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная меньше единицы, и называемая его эксцентриситетом: $\frac{r}{d} = \varepsilon < 1$.

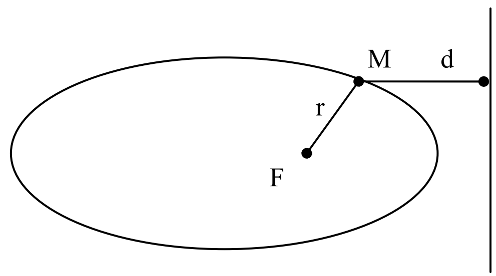


Рис. 113

Дополнительные упражнения к главе 13

123. Дана прямая на координатной плоскости и две точки, не лежащие на ней, но лежащие в одной полуплоскости. Из одной точки выходит луч света по направлению к прямой, который после отражения от прямой проходит через вторую точку. Найти уравнения падающего и отраженного луча.

Глава 14. Гипербола
§1. Каноническое уравнение гиперболы

Определение. Гиперболой называется ГМТ плоскости модуль разности расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

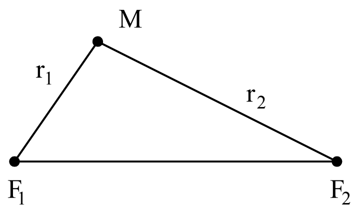


Рис. 114

Определение. Расстояние от произвольной точки M плоскости до фокуса гиперболы называется фокальным радиусом точки M.

Обозначения: F_1, F_2 – фокусы гиперболы, r_1, r_2 – фокальные радиусы точки M.

По определению гиперболы, точка M является точкой гиперболы тогда и только тогда, когда $|r_1 - r_2|$ – постоянная величина. Эту постоянную принято обозначать 2a:

$$2a \doteq |r_1 - r_2|.$$

Заметим, что $a > 0$.

По определению гиперболы, его фокусы суть фиксированные точки, поэтому расстояние между ними есть также величина постоянная для данной гиперболы.

Определение. Расстояние между фокусами гиперболы называется фокусным расстоянием, и обозначается:

$$2c \doteq F_1F_2.$$

Из треугольника F_1F_2M следует, что $|r_1 - r_2| < F_1F_2$, то есть $c > a$.

Обозначим

$$b \doteq \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Определение. Отношение

$$\varepsilon \doteq \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1$$

называется эксцентриситетом гиперболы.

Введем на данной плоскости систему координат, которую мы будем называть канонической для гиперболы.

Определение. Ось, на которой лежат фокусы гиперболы, называется фокальной осью или действительной осью гиперболы.

Построим каноническую для гиперболы прямоугольную декартовую систему координат, смотрите рисунок 115.

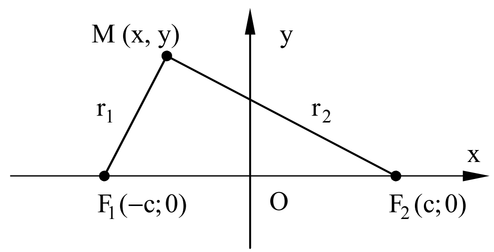


Рис. 115

В качестве оси абсцисс выбираем фокальную ось, ось ординат проводим через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно фокальной оси. Тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Теорема (Каноническое уравнение гиперболы)

В канонической для гиперболы системе координат уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе мы докажем, что координаты любой точки, лежащей на гиперболе удовлетворяют уравнению (1). На втором этапе мы докажем, что любое решение уравнения (1) дает координаты точки, лежащей на гиперболе.

Отсюда будет следовать, что уравнению (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые лежат на гиперболе. Отсюда и из определения уравнения кривой будет следовать, что уравнение (1) является уравнением гиперболы.

1) Пусть точка M(x, y) является точкой гиперболы, то есть модуль разности ее фокальных радиусов равен 2a:

$$|r_1 - r_2| = 2a \ \text{ или } \ r_1 - r_2 = \pm 2a .$$

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками на координатной плоскости и найдем по этой формуле фокальные радиусы данной точки M:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

откуда получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Перенесем один корень в правую часть равенства и возведем в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 .$$

Откуда получаем:

$$2xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc .$$

Приводим подобные, сокращаем на 4 и уединяем радикал:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2 .$$

Возводим в квадрат

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 .$$

Раскрываем скобки и сокращаем на $-2a^2xc$:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 ,$$

откуда получаем:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) .$$

Используя равенство $b^2 = c^2 - a^2$, получаем:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Разделив последнее равенство на a^2b^2, получаем (1).

2) Пусть теперь пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (1) и пусть M(x, y) – соответствующая точка на координатной плоскости Oxy. Тогда из (1) следует:

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Подставляем в выражение для фокального радиуса точки M:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 - b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 - b^2} = \sqrt{x^2\frac{a^2 + b^2}{a^2} + 2xc + (c^2 - b^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = |a + x\varepsilon| .$$

Здесь мы воспользовались определением эксцентриситета и равенством $b^2 = c^2 - a^2$. Таким образом,

$$r_1 = |a + x\varepsilon| .$$

Аналогично получается равенство

$$r_2 = |a - x\varepsilon| = |\varepsilon x - a| .$$

Теперь заметим, что из равенства (1) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \ge 1$ или $|x| \ge a$. Умножим неравенство $\varepsilon > 1$ на $|x|$:

$$|x| < |x| \cdot \varepsilon = |x \cdot \varepsilon| ,$$

откуда получаем неравенства:

$$a \le |x| < |x \cdot \varepsilon| = \begin{cases} \varepsilon x, & x > 0 \\ -\varepsilon x, & x < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varepsilon x - a > 0, & x > 0 \\ -\varepsilon x - a > 0, & x < 0 \end{cases} \ \text{или} \ \begin{cases} \varepsilon x - a > 0, & x > 0 \\ \varepsilon x + a < 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что числа x, εx и $\varepsilon x \pm a$ имеют одинаковые знаки, то есть если $x > 0$, то $\varepsilon x - a > 0$ и $\varepsilon x + a > 0$. Если $x < 0$, то $\varepsilon x + a < 0$ и $\varepsilon x - a < 0$. Раскрывая модули, получаем:

$$r_1 = |a + x\varepsilon| = \begin{cases} \varepsilon x + a, & x > 0 \\ -\varepsilon x - a, & x < 0 \end{cases}, \ r_2 = |x\varepsilon - a| = \begin{cases} \varepsilon x - a, & x > 0 \\ -\varepsilon x + a, & x < 0 \end{cases}.$$

Отсюда,

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & x > 0 \\ -2a, & x < 0 \end{cases},$$

то есть $|r_1 - r_2| = 2a$ и точка M(x, y) является точкой гиперболы. ▲

Определение. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением гиперболы.

Определение. Канонические для гиперболы оси координат называются главными осями гиперболы.

Определение. Начало канонической для гиперболы системы координат называется центром гиперболы.

Определение. Величина 2a называется действительной осью гиперболы, a – действительной полуосью гиперболы.

Определение. Величина 2b называется мнимой осью гиперболы, b – мнимой полуосью гиперболы.

Определение. Точки пересечения гиперболы с действительной (фокальной) осью: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, называются действительными вершинами гиперболы.

Определение. Точки $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ называются мнимыми вершинами гиперболы.

§2. Основные свойства гиперболы

Теорема (Простейшие свойства гиперболы)

1) В канонической для гиперболы системе координат, в полосе $|x| < a$ *нет точек гиперболы.*

2) Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ *лежат на гиперболе.*

3) Гипербола является кривой, симметричной относительно своих главных осей и центра.

Доказательство. 1, 2) Сразу же следует из канонического уравнения гиперболы.

3) Пусть M(x, y) – произвольная точка гиперболы. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Но тогда координаты точек $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$, $M_3(-x; -y)$ также удовлетворяют уравнению (1), и, следовательно, являются точками гиперболы. ▲

Определение. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$, высекают прямоугольник, который называется основным прямоугольником гиперболы.

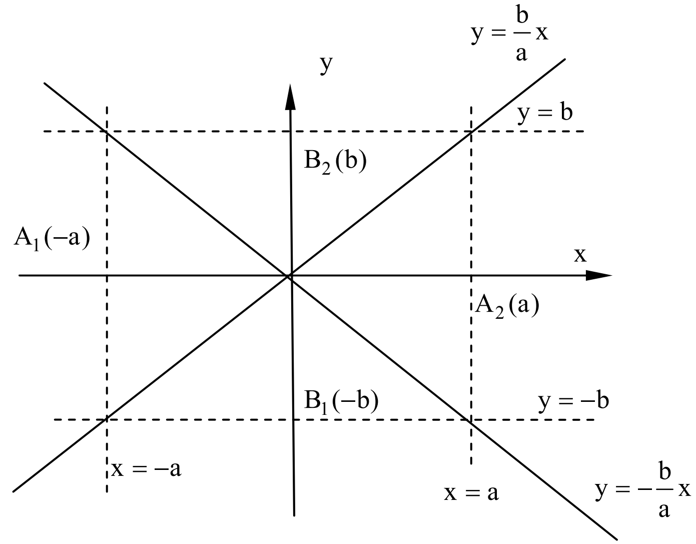


Рис. 116

§3. Асимптоты гиперболы

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если при удалении от начала координат расстояние между ними стремится к нулю.

Уточним понятие расстояния от кривой L до прямой a. Смотрите рисунок 117. Пусть M – произвольная (текущая) точка кривой L. Опустим из точки M перпендикуляр MN на прямую. Тогда наименьшее возможное значение длины этого перпендикуляра называется расстоянием от кривой L до данной прямой:

$$d(L; a) \doteq \min_{M \in L} MN .$$

Вернемся к понятию асимптоты кривой. Пусть дана прямая $a \nparallel Oy$ и кривая L. Смотрите рисунок 118. Пусть $M \in L$ – точка на кривой L, $d = MN$ – длина перпендикуляра, опущенного на прямую a из точки M, $\delta = MK$ – длина отрезка прямой, проходящей через точку M параллельно оси ординат, заключенного между прямой a и кривой L. Из построения следует, что если M(x, y) – координаты точки M, то $K(x, y_a)$ – координаты точки $K \in a$.

По определению, прямая a является асимптотой кривой L тогда и только тогда, когда $d \to 0$ при $OM \to \infty$. В свою очередь

$$OM \to \infty \Leftrightarrow x \to \infty .$$

Таким образом, прямая a является асимптотой кривой L тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty} d = 0 .$$

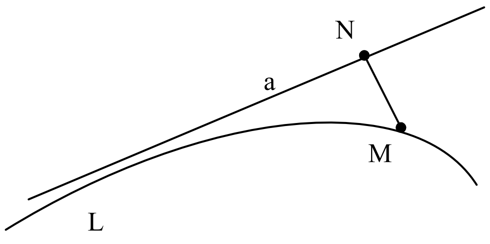


Рис. 117

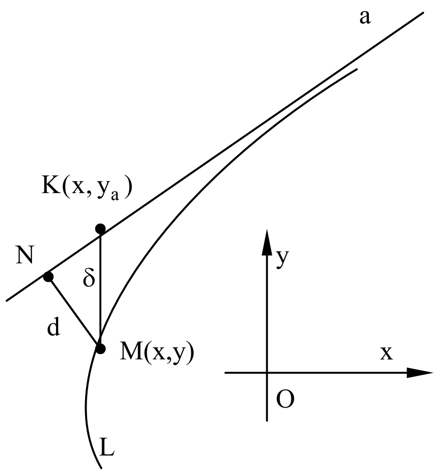


Рис. 118

Теорема (Об асимптоте кривой)

Для того, чтобы прямая a *была асимптотой для кривой* L *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x\to\infty} \delta = \lim_{x\to\infty} | y - y_a | = 0 .$$

Доказательство. Угол между прямой a и осью ординат Oy остается неизменным при любом расположении точки M на кривой L и не равным нулю (мы предполагаем, что прямая $a \not\parallel Oy$). Из прямоугольного треугольника MNK следует, что

$$d = \delta \cdot \sin K ,$$

где $\sin K \neq 0$. Отсюда,

$$\lim_{x\to\infty} d = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \delta = 0 . \ \blacktriangle$$

Применим доказанную теорему к нахождению асимптот гиперболы.

Теорема (Об асимптотах гиперболы)

Прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

являются асимптотами гиперболы.

Доказательство. В силу симметричности гиперболы относительно осей координат, достаточно доказать, что прямая

$$y = \frac{b}{a} x$$

является асимптотой для гиперболы в 1 – й четверти, то есть при $x > 0$ и $y > 0$. Выражая из канонического уравнения гиперболы y, получаем равенство

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} .$$

Мы можем рассматривать гиперболу в 1-й четверти как график функции, задаваемой этим равенством. Найдем ее производную:

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} > 0 .$$

Следовательно, в первой четверти эта функция является возрастающей. Далее,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}x,$$

то есть график функции (гипербола) лежит ниже прямой $y = \frac{b}{a}x$ для всех $x > 0$. Вычисляем предел:

$$\lim_{x\to\infty} \delta = \lim_{x\to\infty} |\, y - y_a \,| = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Отсюда, в силу предыдущей теоремы, следует, что прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой для гиперболы в первой четверти. Теперь справедливость теоремы следует из симметрии гиперболы относительно осей и начала координат. ▲

§4. Построение гиперболы

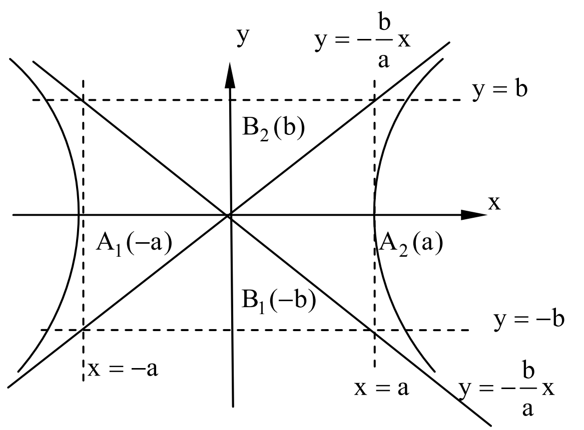


Рис. 119

Строим основной прямоугольник гиперболы и проводим его диагонали. Продолжая диагонали прямоугольника за его пределы, получаем асимптоты гиперболы. В силу симметрии достаточно построить гиперболу в первой четверти, где она является графиком функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Строим график, учитывая, что данная функция является возрастающей на промежутке $[a;\infty)$, $y(a) = 0$, и ее график приближается снизу к асимптоте $y = \frac{b}{a}x$. Смотрите рисунок 119. Далее, построенный в первой четверти график симметрично отображаем относительно оси Ox и получаем правую ветвь гиперболы. Осталось отобразить построенную правую ветвь гиперболы отобразить относительно оси Oy.

Упражнение

124. Исследуйте гиперболу как функцию $y = f(x)$ методами математического анализа: найдите её асимптоты, интервалы монотонности, интервалы выпуклости и вогнутости, и постройте график, то есть ту часть гиперболы, которая лежит выше оси Ox. Затем, используя симметричность гиперболы, постройте её целиком.

§5. Эксцентриситет гиперболы

По определению эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$. Зафиксируем действительную ось 2a и начнем изменять фокусное расстояние 2c. Так как $b^2 = c^2 - a^2$, то при этом изменяется и величина b.

1) Пусть $c \to a$. При этом $\varepsilon \to 1$, $b \to 0$ и мнимые вершины B_1, B_2 стремятся к началу координат, асимптоты приближаются к оси Ox. Основной прямоугольник гиперболы вырождается в пределе в отрезок A_1A_2, а сама гипербола вырождается в два луча на оси абсцисс: $(-\infty;-a]$ и $[a;\infty)$.

2) Пусть $c \to \infty$. При этом $\varepsilon \to \infty$, $b \to \infty$ и мнимые вершины B_1, B_2 стремятся к бесконечности, асимптоты приближаются к оси Oy. Основной прямоугольник гиперболы вытягивается вдоль оси ординат и ветви гиперболы приближаются к прямым $x = \pm a$ и в пределе сливаются с ними. Гипербола вырождается в две прямые $x = \pm a$, параллельные оси Oy.

§6. Равнобочная гипербола

Определение. Гипербола, с эксцентриситетом $\varepsilon = \sqrt{2}$, называется равнобочной.

Из определения следует, что для равнобочной гиперболы $a = b$ и её каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Действительно, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$, откуда $c^2 = 2a^2$ и

$$b^2 = c^2 - a^2 = a^2.$$

Учитывая, что a и b положительные числа, получаем отсюда $a = b$.

Основной прямоугольник равнобочной гиперболы является квадратом, уравнения асимптот $y = \pm x$. Значит, асимптотами равнобочной гиперболы являются биссектрисы координатных углов, угол между которыми является прямым.

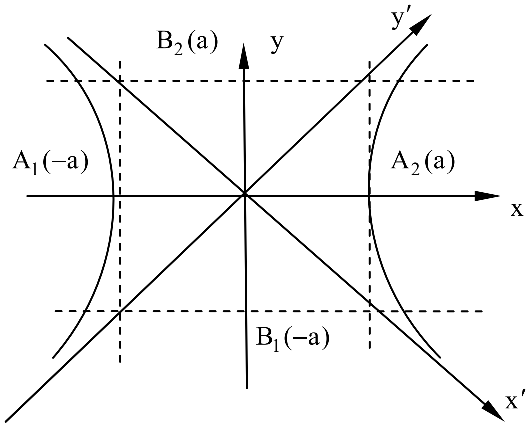


Рис. 120

Введем новую ПДСК со старым началом координат, оси которой совпадают с асимптотами равнобочной гиперболы. Смотрите рисунок 120. Новую систему координат можно получить из старой, если повернуть старые оси координат вокруг начала координат по часовой стрелке на угол 45°.

Теорема (О равнобочной гиперболе)

В новой системе координат $Ox'y'$ *уравнение равнобочной гиперболы имеет вид*

$$y' = \frac{k}{x'},$$

где $k = \dfrac{a^2}{2}$. ▲

Из этой теоремы следует, что если уравнение равнобочной гиперболы в новой системе координат имеет вид

$$y' = \frac{1}{x'},$$

то в старой канонической системе координат её уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = 2, \text{ то есть } a = \sqrt{2}.$$

Упражнение

125. Докажите теорему о равнобочной гиперболе.

§7. Директрисы гиперболы

Определение. Директрисами гиперболы называются две прямые, уравнения которых в канонической для гиперболы системе координат имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Заметим, что так как $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$.

Обозначение: расстояние между директрисами обозначается 2d и равно

$$2d = \frac{2a}{\varepsilon}.$$

Теорема (Свойство директрис гиперболы)

Для любой точки гиперболы отношение ее фокального радиуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная равная эксцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Доказательство. При выводе канонического уравнения гиперболы мы получили формулы для вычисления фокальных радиусов точки гиперболы с координатами M(x, y):

$$r_1 = |\,\varepsilon x + a\,|, \quad r_1 = |\,\varepsilon x - a\,|,$$

где числа x, $\varepsilon x + a$ и $\varepsilon x - a$ имеют одинаковые знаки. Из рисунка 121 мы видим, что при $x > 0$

$$d_1 = x + \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 = x - \frac{a}{\varepsilon},$$

или

$$d_1 = x + \frac{a}{\varepsilon} = \frac{x\varepsilon + a}{\varepsilon} = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{x\varepsilon - a}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon},$$

откуда и следуют доказываемые равенства.

Аналогично доказываются формулы при $x < 0$. ▲

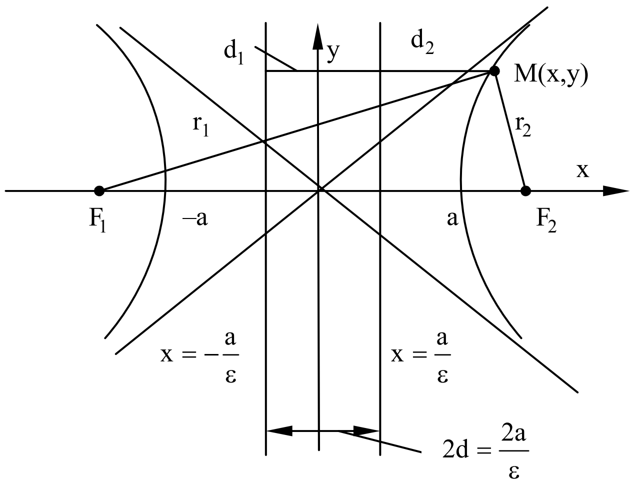


Рис. 121

Доказанная теорема позволяет нам дать следующее определение гиперболы, равносильное данному выше.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная больше единицы и называемая её эксцентриситетом:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon > 1\,.$$

В этом случае, первое определение гиперболы является теоремой, которую необходимо доказывать.

Упражнение

126. Закончите доказательство теоремы, рассмотрев случай $x < 0$.

§8. Фокальный параметр гиперболы

Определение. Фокальным параметром гиперболы называется длина перпендикуляра, восстановленного в его фокусе до пересечения с гиперболой.

Фокальный параметр принято обозначать буквой p.

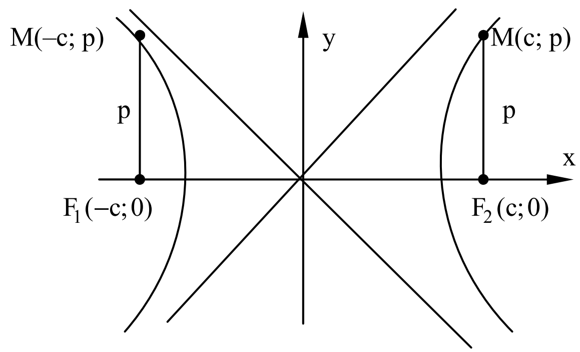


Рис. 122

Теорема (О фокальном параметре гиперболы)

Фокальный параметр гиперболы равен

$$p = \frac{b^2}{a}\,.$$

Доказательство. Так как точка M(–c; p) является точкой гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$\frac{(-c)^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1.$$

Отсюда находим

$$p^2=b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=b^2\,\frac{c^2-a^2}{a^2}=b^2\,\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2},$$

откуда и следует утверждение теоремы. ▲

§9. Касательная к гиперболе

Теорема (О касательной к гиперболе)

Пусть $M_o(x_o,y_o)$ *– произвольная точка гиперболы* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Тогда уравнение касательной к этой гиперболе в точке* $M_o(x_o,y_o)$ *имеет вид:*

$$\frac{x_o\cdot x}{a^2}-\frac{y_o\cdot y}{b^2}=1.$$

Доказательство. Пусть $y_o\neq 0$. Воспользуемся уравнением касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_o(x_o,y_o)$:

$$y-y_o=f'(x_o)(x-x_o),$$

где $f'(x_o)$ – значение производной данной функции в точке $x=x_o$, $y_o=f(x_o)$ – значение данной функции в точке $x=x_o$.

Уравнение гиперболы можно рассматривать как функцию, заданную в неявной форме:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Найдем производную этой функции и её значение в точке касания:

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}y'=0,\ \ y'(x_o)=\frac{b^2x_o}{a^2y_o}.$$

Подставляем найденное значение производной в уравнение касательной:

$$y-y_o=\frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x-x_o),$$

откуда получаем:

$$a^2y_o(y-y_o)=b^2x_o(x-x_o)$$

или

$$a^2y_oy-a^2y_o^2=b^2x_ox-b^2x_o^2.$$

Отсюда следует:

$$b^2x_ox-a^2y_oy=b^2x_o^2-a^2y_o^2.$$

Разделим это равенство на a^2b^2:

$$\frac{x_ox}{a^2}-\frac{y_oy}{b^2}=\frac{x_o^2}{a^2}-\frac{y_o^2}{b^2}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{x_o^2}{a^2}-\frac{y_o^2}{b^2}=1,$$

так как точка $M_o(x_o,y_o)$ принадлежит гиперболе и её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы.

Легко убеждаемся, что уравнение касательной в точках $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ имеет вид $x=-a$ или $x=a$ соответственно, и эти уравнения получаются из общего уравнения касательной. ▲

Теорема (Зеркальное свойство гиперболы)

Касательная к гиперболе является биссектрисой угла, образованного фокальными радиусами точки касания.

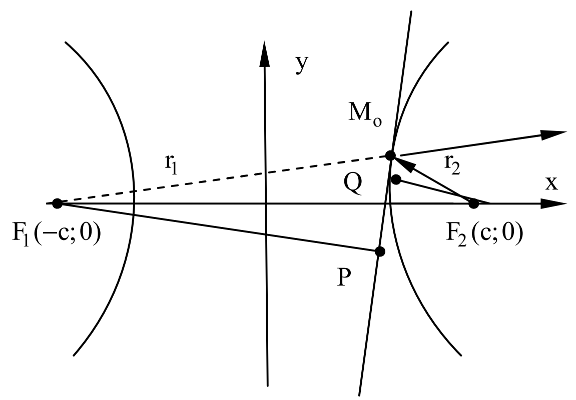


Рис. 123

Доказательство. Пусть $M_o(x_o, y_o)$ – точка касания, r_1, r_2 – ее фокальные радиусы. Опустим из фокусов перпендикуляры на касательную и докажем подобие треугольников F_1M_oP и F_2M_oQ. Так как треугольники прямоугольные, то для этого достаточно доказать, что

$$\frac{F_1P}{F_2Q} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Катеты F_1P и F_2Q будут в этих подобных треугольниках сходственными сторонами, против которых лежат равные углы, то есть

$$\angle F_1M_oP = \angle F_2M_oQ,$$

что и является утверждением теоремы.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M_o(x_o, y_o)$ имеет вид

$$\frac{x_o}{a^2}x - \frac{y_o}{b^2}y - 1 = 0,$$

и, по формуле расстояния от точки до прямой на плоскости, получаем

$$F_1P = \frac{\left|\frac{x_o}{a^2}(-c) - \frac{y_o}{b^2}\cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4} + \frac{y_o^2}{b^4}}} = \frac{\frac{1}{a}\left|-x_o\frac{c}{a} - a\right|}{\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4} + \frac{y_o^2}{b^4}}} = \frac{|\,\varepsilon x_o + a\,|}{a\cdot\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4} + \frac{y_o^2}{b^4}}} =$$

$$= \frac{r_1}{a\cdot\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4} + \frac{y_o^2}{b^4}}},$$

где мы воспользовались равенством $r_1 = |\,a + x_o\varepsilon\,|$, которое мы получили при выводе канонического уравнения гиперболы.

Аналогично находим

$$F_2Q = \frac{r_2}{a\cdot\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4} + \frac{y_o^2}{b^4}}},$$

откуда и следует доказываемое равенство. ▲

Замечание. Доказанную теорему можно сформулировать в виде зеркального свойства гиперболы:

луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от зеркала гиперболы, кажется наблюдателю идущим из другого фокуса гиперболы.

Глава 15. Парабола
§1. Каноническое уравнение параболы

Определение. Параболой называется ГМТ плоскости равноудаленных от одной фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, и одной фиксированной прямой, называемой директрисой.

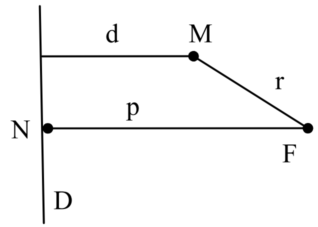


Рис. 124

Определение. Расстояние от произвольной точки M плоскости до фокуса параболы называется фокальным радиусом точки M.

Определение. Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется фокальным параметром параболы.

Обозначения:
F – фокус параболы;
r – фокальный радиус точки M;
d – расстояние от точки M до директрисы D.
$p \doteq d(F; D) = FN$ – фокальный параметр.

По определению параболы, точка M является точкой параболы тогда и только тогда, когда $r = d$.

По определению параболы, его фокус и директриса есть фиксированные объекты, поэтому расстояние от фокуса до директрисы есть величина постоянная для данной параболы.

Введем на данной плоскости систему координат, которую мы будем называть канонической для параболы.

Определение. Ось, проведенная через фокус параболы перпендикулярно директрисе называется фокальной осью параболы.

Построим каноническую для параболы систему координат, смотрите рисунок 125.

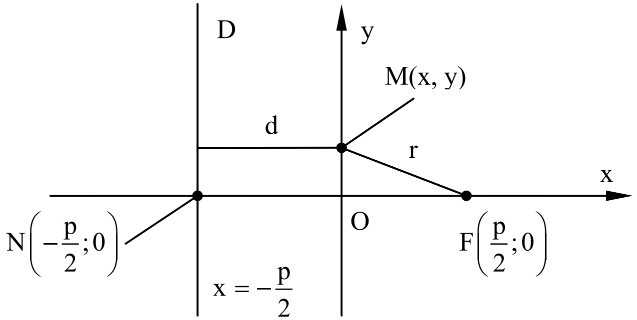


Рис. 125

В качестве оси абсцисс выбираем фокальную ось, направление на которой выбираем от директрисы к фокусу. Ось ординат проводим через середину отрезка FN перпендикулярно фокальной оси. Тогда фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Теорема (Каноническое уравнение параболы)

В канонической для параболы системе координат уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе мы докажем, что координаты любой точки, лежащей на параболе удовлетворяют уравнению (1). На втором этапе мы докажем, что любое решение уравнения (1) дает координаты точки, лежащей на параболе. Отсюда будет следовать, что уравнению (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые лежат на параболе. Отсюда и из определения уравнения кривой будет следовать, что уравнение (1) является уравнением параболы.

1) Пусть точка M(x, y) является точкой параболы, то есть

$$r = d.$$

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками для вычисления фокального радиуса точки M:

$$r = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Из рисунка 125 мы видим, что точка параболы не может иметь отрицательной абсциссы, так как в этом случае $r > d$. Поэтому $x \ge 0$ и

$$d = \frac{p}{2} + x.$$

Отсюда получаем равенство

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

и после сокращения получаем: $y^2 = 2px$.

2) Пусть теперь пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (1) и пусть M(x, y) – соответствующая точка на координатной плоскости Oxy. Тогда подставляем равенство (1) в выражение для фокального радиуса точки M:

$$r = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2} = d,$$

откуда следует, что точка M(x,y) лежит на параболе.

Здесь мы воспользовались тем, что из равенства (1) следует, что $x \ge 0$ и, следовательно, $x + \frac{p}{2} > 0$. ▲

Определение. Уравнение $y^2 = 2px$ называется каноническим уравнением параболы.

Определение. Начало канонической для параболы системы координат называется вершиной параболы.

Упражнение

127. Найдите фокальный параметр, фокус и директрису параболы $y = ax^2$.

§2. Основные свойства параболы

Теорема (Основные свойства параболы)

1) В канонической для параболы системе координат, в полуплоскости $x < 0$ *нет точек параболы.*

2) В канонической для параболы системе координат вершина параболы $O(0;0)$ *лежит на параболе.*

3) Парабола является кривой, симметричной относительно фокальной оси.

Доказательство. 1, 2) Сразу же следует из канонического уравнения параболы.

3) Пусть M(x, y) – произвольная точка параболы. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Но тогда координаты точки $M_1(x;-y)$ также удовлетворяют уравнению (1), и, следовательно, эта точка также является точкой параболы, откуда и следует утверждение теоремы.

Построение параболы

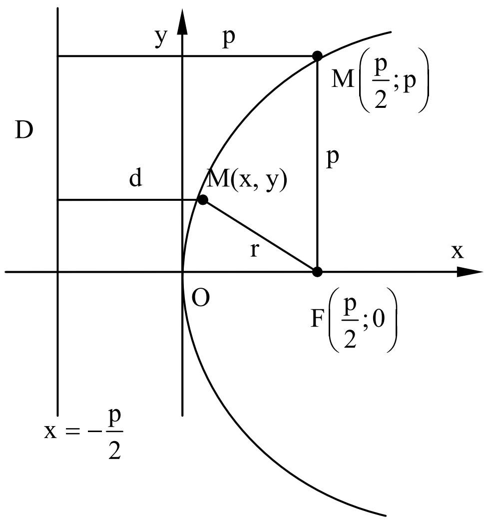


Рис. 126

В силу симметрии достаточно построить параболу в первой четвер-

ти, где она является графиком функции $y = \sqrt{2px}$, а затем, отобразить полученный график симметрично относительно оси абсцисс. Смотрите рисунок 126.

При построении графика учитываем, что данная функция является возрастающей на промежутке $[0;\infty)$.

Единое определение эллипса, гиперболы и параболы

Используя доказанные свойства эллипса и гиперболы, и определение параболы можно дать единое для всех трех кривых определение.

Определение. Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до одной фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до одной фиксированной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная, называется:
а) эллипсом, если эта постоянная величина меньше 1;
б) гиперболой, если эта постоянная величина больше 1;
в) параболой, если эта постоянная величина равна 1.

Эта постоянная величина, о которой идет речь в определении, называется эксцентриситетом и обозначается ε, расстояние от данной точки до фокуса есть ее фокальный радиус r, расстояние от данной точки до директрисы обозначается через d.

Из определения следует, что те точки плоскости, для которых отношение

$$\varepsilon = \frac{r}{d}$$

есть величина постоянная образуют эллипс, гиперболу или параболу, в зависимости от величины этого отношения. Если $\varepsilon < 1$, то мы получаем эллипс, если $\varepsilon > 1$, то мы получаем гиперболу, если $\varepsilon = 1$, то мы получаем параболу.

§3. Фокальный параметр параболы

Теорема (О фокальном параметре параболы)

Фокальный параметр параболы равен длине перпендикуляра к ее оси симметрии, восстановленного в фокусе параболы до пересечения с параболой.

Доказательство. Так как точка $M\left(\frac{p}{2}; y\right)$ является точкой пересечения параболы $y^2 = 2px$ с перпендикуляром $x = \frac{p}{2}$ (смотрите рисунок 126), то её координаты удовлетворяют уравнению параболы:

$$y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2 .$$

Отсюда находим $y = \pm p$, откуда и следует утверждение теоремы. ▲

§4. Касательная к параболе

Теорема. (О касательной к параболе)

Пусть $M_o(x_o, y_o)$ *– произвольная точка параболы* $y^2 = 2px$. *Тогда уравнение касательной к этой параболе в точке* $M_o(x_o, y_o)$ *имеет вид:*

$$y_o \cdot y = p(x + x_o) .$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o) .$$

Достаточно рассмотреть случай, когда точка касания лежит в первой четверти. Тогда параболу можно рассматривать как график неявно заданной функции $y^2 = 2px$. Найдем её производную и её значение в точке касания:

$$2yy' = 2p , \quad y'(x_o) = \frac{p}{y_o} .$$

Подставляем найденное значение производной в уравнение касательной:

$$y - y_o = \frac{p}{y_o}(x - x_o) ,$$

откуда получаем:

$$y_o(y - y_o) = p(x - x_o) \quad \text{или} \quad y_o y - y_o^2 = px - px_o .$$

Так как точка $M_o(x_o, y_o)$ принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют ее уравнению, то есть $y_o^2 = 2px_o$, откуда получаем

$$y_o y - 2px_o = px - px_o \quad \text{или} \quad y_o y = px + px_o .$$

Отсюда следует

$$y_o y = p(x + x_o) . \ ▲$$

§5. Зеркальное свойство параболы и его применение

Теорема (Зеркальное свойство параболы)

Касательная к параболе образует равные углы с ее осью симметрии и с фокальным радиусом точки касания.

Доказательство. Смотрите рисунок 127.

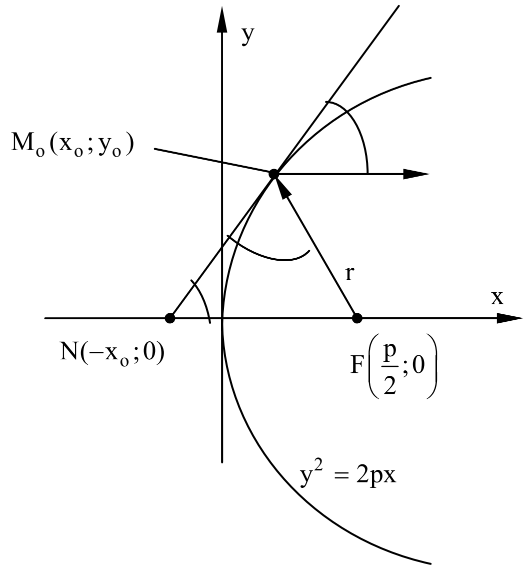


Рис. 127

Пусть $M_o(x_o, y_o)$ – точка касания, r – её фокальный радиус. Обозначим через N точку пересечения касательной с осью абсцисс. Ордината точки N равна нулю и точка N лежит на касательной, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной. Подставляя координаты точки N в уравнение касательной, получаем:

$$y_o \cdot 0 = p(x + x_o) ,$$

откуда находим абсциссу точки N:

$$x_N = -x_o .$$

Рассмотрим треугольник FNM_o. Докажем, что он равнобедренный. Действительно,

$$FM_o = r = d = x_o + \frac{p}{2} = FN\ .$$

Здесь мы воспользовались равенством, полученным при выводе канонического уравнения параболы:

$$r = d = x_o + \frac{p}{2}\ .$$

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Отсюда

$$\angle M_o NF = \angle NM_o F\ . \ \blacktriangle$$

Доказанную теорему можно сформулировать в виде зеркального свойства параболы.

Зеркальное свойство параболы

Луч света, выпущенный из фокуса параболы, после отражения от зеркала параболы, идет параллельно оси симметрии параболы.

Действительно, так как угол падения луча на касательную равен углу отражения от нее, то угол между касательной и отраженным лучом равен углу между касательной и осью абсцисс, откуда следует, что отраженный луч параллелен оси абсцисс.

Это свойство параболы получило широкое применение в технике. Если параболу вращать вокруг ее оси симметрии, то получим поверхность, которая называется параболоидом вращения. Если выполнить отражающую поверхность в форме параболоида вращения и в фокусе поместить источник света, то отраженные лучи идут параллельно оси симметрии параболоида. Так устроены прожектора и автомобильные фары. Если же в фокусе поместить устройство принимающее электромагнитные волны, то они отражаясь от поверхности параболоида попадают в это принимающее устройство. По такому принципу работают спутниковые тарелки.

Существует легенда, что в древности один полководец выстроил своих воинов вдоль берега моря, придав их строю форму параболы. Солнечный свет, отражаясь от начищенных до блеска щитов воинов собирался в пучок (в фокусе построенной параболы). Так были сожжены корабли противника. Некоторые источники приписывают это Архимеду. Так или иначе, но арабы называли параболоид вращения "зажигательным зеркалом". Кстати, слово "focus" латинское и в переводе означает огонь, очаг. С помощью "зажигательного зеркала" можно в солнечный день разжечь

костер и вскипятить воду. Становится понятным происхождение этого термина. Слово "фокус" означает также некоторый трюк или хитрый прием. Так еще балаганные артисты использовали зеркальное свойство эллипса и зажигая свет в одном фокусе эллипса они разжигали что-нибудь легко воспламеняющееся, помещенное в другом его фокусе. Это зрелище также стали называть фокусом. (Читайте замечательную книжку Виленкина Н.Я. "За страницами учебника математики")

§6. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

Пусть на плоскости дана точка F, которую мы назовем фокусом и прямая D, которую мы назовем директрисой. Проведем через фокус прямую перпендикулярную директрисе (фокальная ось) и введем полярную систему координат. Полюс поместим в фокус, а в качестве полярного луча возьмем ту часть фокальной оси, которая не пересекает директрису Смотрите рисунок 128.

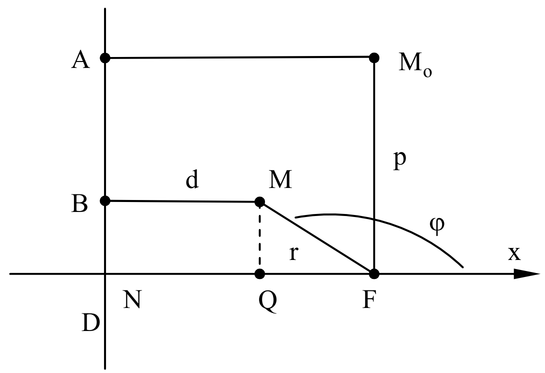


Рис. 128

Пусть точка M лежит на эллипсе, гиперболе или параболе. В дальнейшем будем называть эллипс, гиперболу или параболу просто кривой.

Теорема (О полярном уравнении)

Пусть $M(r;\varphi)$ *– полярные координаты точки кривой (эллипса, гиперболы или параболы). Тогда*

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\,,$$

где p *– фокальный параметр кривой,* ε *– эксцентриситет кривой (для параболы полагаем* $\varepsilon = 1$*).*

Доказательство. Смотрите рисунок 128. Пусть Q – проекция точки M на фокальную ось кривой, B – на директрису кривой. Пусть полярный угол φ точки M является тупым, как на рисунке 128. Тогда

$$NF = NQ + QF,$$

где по построению, $NQ = d$ – расстояние от точки M до директрисы,

$$QF = r\cos(\pi - \varphi) = -r\cos\varphi \quad \text{и} \quad NF = d - r\cos\varphi.$$

С другой стороны, по единому определению эллипса, гиперболы и параболы отношение $\frac{r}{d} = \varepsilon$ равно эксцентриситету соответствующей кривой для любой точки M на данной кривой. Пусть точка M_o – точка пересечения кривой с перпендикуляром к фокальной оси, восстановленного в фокусе F и A – ее проекция на директрису. Тогда $\frac{M_oF}{M_oA} = \varepsilon$, откуда

$$M_oA = \frac{M_oF}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Но $M_oA = NF$. Отсюда,

$$NF = \frac{p}{\varepsilon}$$

и, учитывая, что $NF = d - r\cos\varphi$, получаем

$$\frac{p}{\varepsilon} = d - r\cos\varphi.$$

Учитывая, что $d\varepsilon = r$, получаем

$$p = d\cdot\varepsilon - r\varepsilon\cos\varphi = r - r\varepsilon\cos\varphi = r(1 - \varepsilon\cos\varphi),$$

откуда и следует доказываемое равенство.

Заметим, что если полярный угол φ точки M является острым, то точка Q находится правее фокуса F и

$$NF = NQ - QF = d - r\cos\varphi,$$

и все остается верным. ▲

Упражнение

128. Найдите полярное уравнение кривой второго порядка с полюсом не в фокусе, а в начале координат.

Глава 16. Поверхности второго порядка
§1. Конические и цилиндрические поверхности

Определение. Поверхность называется цилиндрической, если она образована параллельным перемещением некоторой прямой, называемой образующей, вдоль некоторой кривой, называемой направляющей.

Пример. Возьмем в качестве направляющей окружность. Рассмотрим множество прямых параллельных друг другу и расположенных под некоторым углом к плоскости в которой лежит окружность и проходящих через каждую точку окружности. Смотрите рисунок 129.

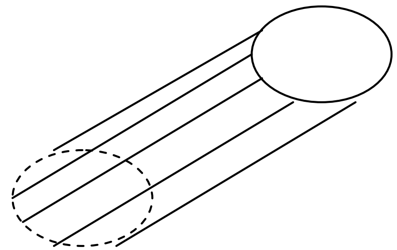


Рис. 129

Поверхность, изображенная на рисунке 129 является цилиндрической. Она может быть получена параллельным перемещением одной прямой (образующей) вдоль окружности (направляющей). Если угол наклона прямой к плоскости направляющей является прямым, то получаем поверхность, которая называется прямым круговым цилиндром.

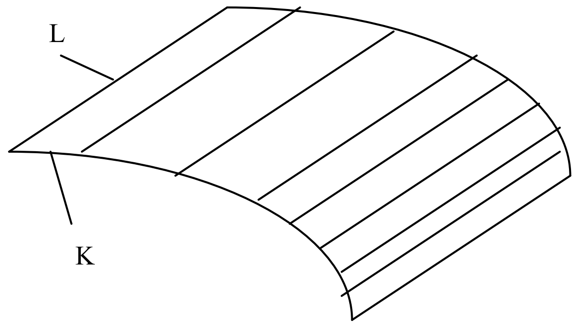


Рис. 130

Не нужно думать, что образующая должна быть замкнутой кривой. Это вовсе не обязательно. Смотрите, например, рисунок 130.

Здесь K – направляющая, L – образующая цилиндрической поверхности. В частности, плоскость является цилиндрической поверхностью, так как может быть получена параллельным перемещением прямой (образующей) вдоль другой прямой, которая служит направляющей.

Теорема (О цилиндрических поверхностях)

Если уравнение $F(x,y)=0$ *является уравнением кривой на координатной плоскости* Oxy*, то это же уравнение является уравнением цилиндрической поверхности в координатном пространстве* Oxyz*, направляющей которой служит данная кривая, а образующей является прямая, проходящая через точку данной кривой и параллельной оси* Oz.

Доказательство. Смотрите рисунок 131. Пусть точка $M_o(x_o, y_o)$ лежит на кривой $F(x,y)=0$. Тогда $F(x_o, y_o)=0$. Так как это уравнение не содержит переменной z, то для любого числа $z \in \mathbb{R}$ координаты точки $M(x_o, y_o, z)$ также удовлетворяют этому уравнению. Другими словами, любое решение этого уравнения есть координаты точки, лежащей на прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку кривой $F(x,y)=0$ на плоскости Oxy. Очевидно, верно и обратное. ▲

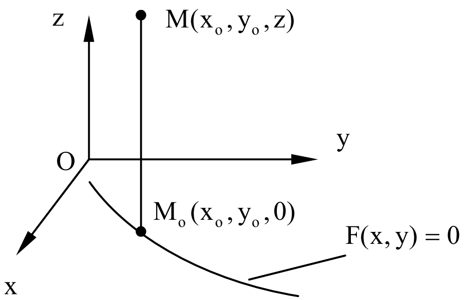


Рис. 131

Аналогично, уравнение кривой $F(x,z)=0$ на плоскости Oxz является одновременно и уравнением цилиндрической поверхности, направляющей для которой служит данная кривая, а образующая параллельна

оси ординат. Так же и уравнение $F(y,z)=0$ есть уравнение цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Ox.

Пример. Изобразить в координатном пространстве Oxyz тело, лежащее в первом октанте, ограниченное координатными плоскостями, плоскостью $x=2$ и прямым круговым цилиндром $y^2+z^2=1$.

Ответ: рисунок 132.

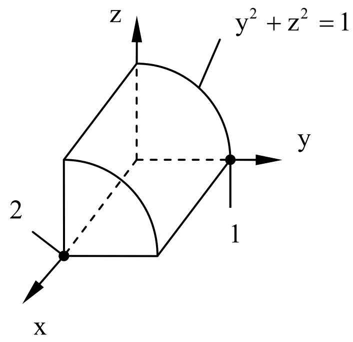


Рис. 132

Конические поверхности

Определение. Конической поверхностью называется поверхность образованная перемещением прямой линии, называемой образующей и проходящей через одну фиксированную точку, называемую вершиной, и текущую точку фиксированной линии, называемой направляющей.

В качестве примера смотрите рисунок 134, на котором изображен конус второго порядка. Направляющей конуса служит эллипс или окружность, вершина конуса совпадает с началом координат.

Заметим, что как и в случае цилиндрической поверхности, направляющая не обязана быть замкнутой кривой как на рисунке 134.

Из определения следует, что плоскость является как цилиндрической, так и конической поверхностью. Вершиной может служить любая точка плоскости, а направляющей – любая прямая не проходящая через вершину.

Линейчатые поверхности

Определение. Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением одной или нескольких прямых, называемых образующими, вдоль некоторой линии, называемой направляющей.

Из определения следует, что конические и цилиндрические поверхности являются линейчатыми поверхностями. Как мы увидим далее, примером линейчатой поверхности, не являющейся ни конической, ни цилиндрической может служить однополостный гиперболоид. Смотрите рисунок 135.

§2. Классификация поверхностей второго порядка

Определение. Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек координатного пространства Oxyz, координаты которых, и только они, удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени с тремя неизвестными:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 .$$

Мы примем без доказательства тот факт, что для любой поверхности второго порядка существует такая прямоугольная декартовая система координат, в которой ее уравнение будет иметь наиболее простой вид. Такое уравнение поверхности называется каноническим, а соответствующая система координат называется канонической для данной поверхности.

Теорема. (О каноническом уравнении поверхности)

Уравнение любой поверхности второго порядка можно привести к каноническому виду. ▲

Полная классификация поверхностей второго порядка

1) Эллипсоид (смотрите рисунок 133):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Здесь и далее константы a, b, c – положительные действительные числа.

2) Мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 .$

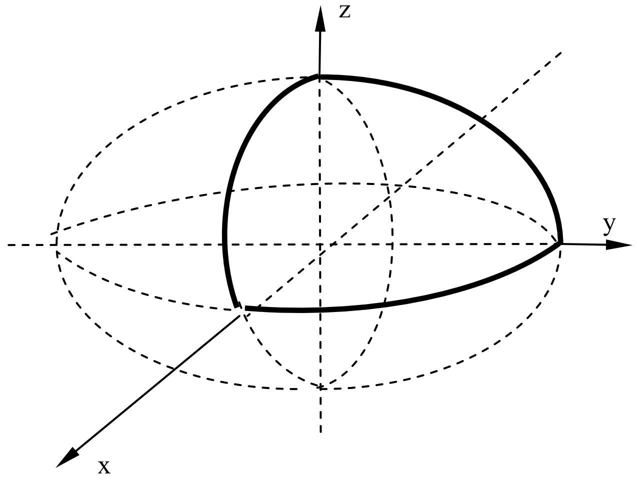


Рис. 133

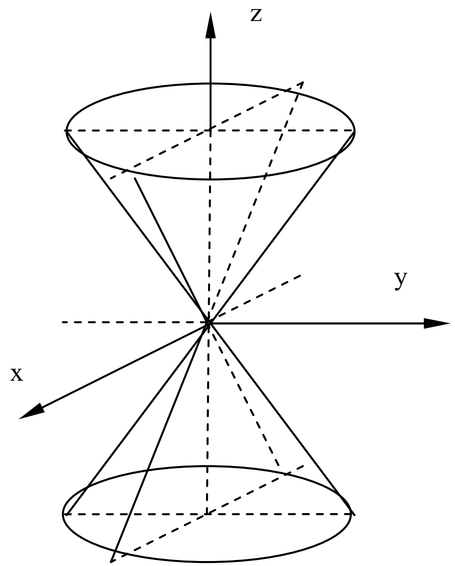


Рис. 134

3) Конус (смотрите рисунок 134):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

4) Мнимый конус:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

5) Однополостный гиперболоид (смотрите рисунок 135):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

6) Двуполостный гиперболоид (смотрите рисунок 137):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

7) Эллиптический параболоид (смотрите рисунок 136):

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\;\; p>0,\, q>0\,.$$

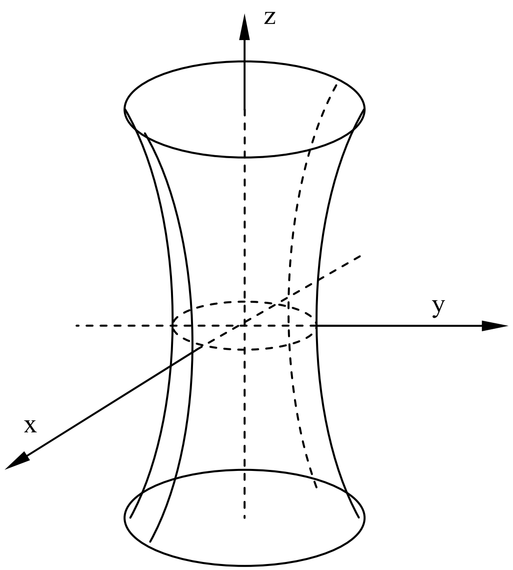


Рис. 135

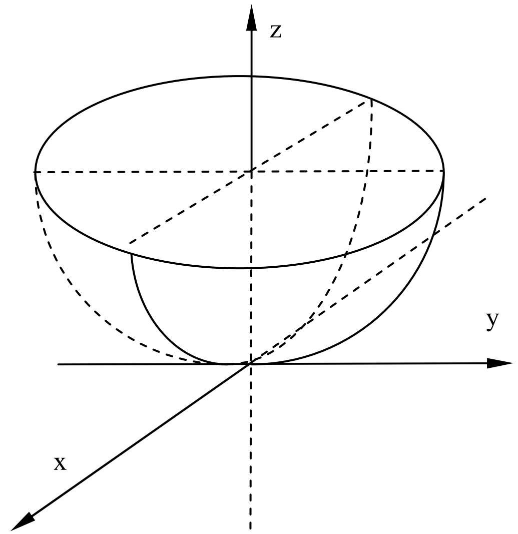


Рис. 136

8) Гиперболический параболоид (смотрите рисунок 138):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\;\; p>0,\, q>0\,.$$

9) Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

10) Мнимый эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1\,.$$

11) Пара мнимых пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \;\text{ или }\; \left(\frac{y}{a}-\frac{x}{b}i\right)\left(\frac{y}{a}+\frac{x}{b}i\right)=0 \;\text{ или }\; y=\pm\frac{bi}{a}x\,.$$

12) Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

13) Пара пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ или } \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0 \text{ или } y=\pm\frac{b}{a}x .$$

14) Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px\ ,\ p>0 .$$

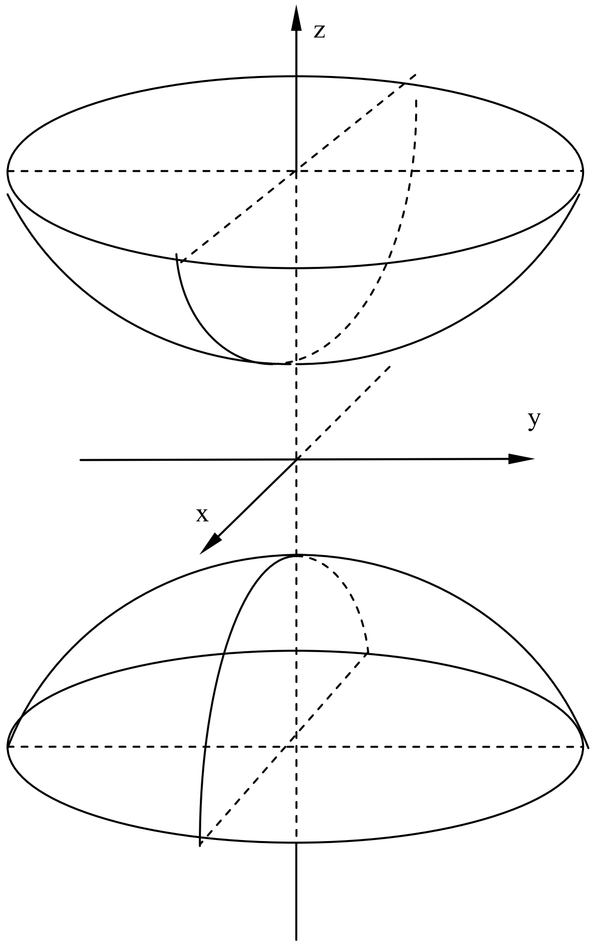


Рис. 137

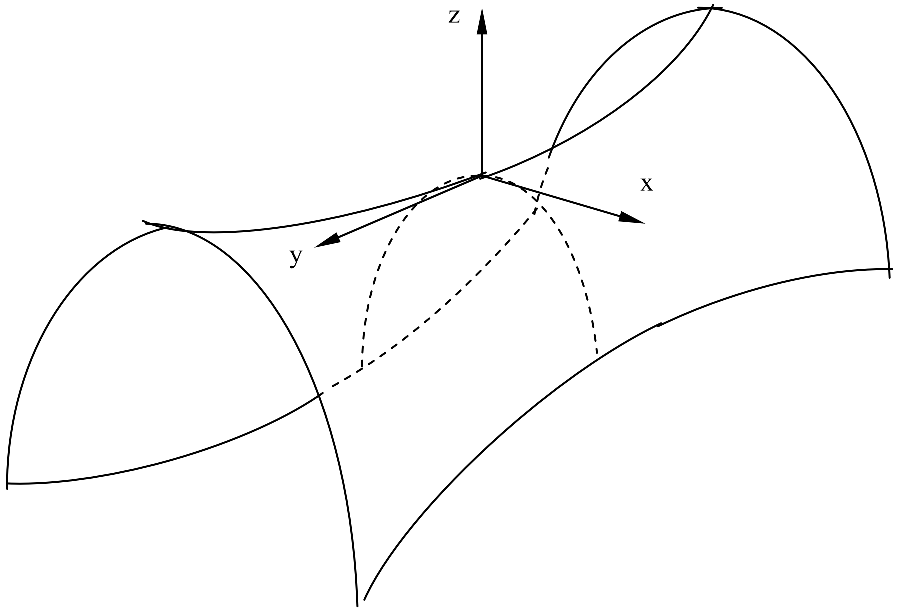


Рис. 138

15) Пара параллельных плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \text{ или } x=\pm a .$$

16) Пара мнимых параллельных плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2}=-1 \text{ или } x=\pm a\cdot i .$$

17) Сдвоенная плоскость:

$$x^2=0 .$$

Замечание. Как легко видеть, мнимым поверхностям не удовлетворяют координаты ни одной точки вещественного пространства, а мнимому конусу удовлетворяет единственная точка – начало координат.

§3. Метод сечений

Метод сечений заключается в том, что поверхность рассекается плоскостями параллельными координатным плоскостям, после чего исследуется кривая, лежащая в сечении. Таким образом мы получаем представление о данной поверхности.

Рассмотрим в качестве примера однополостный гиперболоид, и применим для исследования этой поверхности метод сечений. Смотрите рисунок 135.

1) Рассечем однополостный гиперболоид плоскостью $z = h$. Подставляем в уравнение однополостного гиперболоида $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1.$$

Обозначим $c_1^2 \doteq \frac{h^2}{c^2} + 1$. Тогда получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c_1^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(a \cdot c_1)^2} + \frac{y^2}{(b \cdot c_1)^2} = 1.$$

Обозначая $a_1 = ac_1 = a \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$, $b_1 = bc_1 = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$, получаем

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Таким образом, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $z = h$ мы получаем эллипс. Причем мы видим как изменяются полуоси этого эллипса в зависимости от величины h. С увеличением h его полуоси увеличиваются. Наименьшие полуоси получаются в сечении $z = 0$, то есть в координатной плоскости Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Этот эллипс получил название горлового эллипса.

2) Рассечем однополостный гиперболоид плоскостью $y = h$. Подставляем в уравнение однополостного гиперболоида $y = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Рассмотрим три возможных случая: $|h| < b$, $|h| > b$ и $|h| = b$.

а) Пусть $|h| < b$. Тогда $1 - \frac{h^2}{b^2} > 0$. Разделим последнее уравнение на его правую часть:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1.$$

Обозначим $a_1 = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$, $c_1 = c \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$. Отсюда получаем

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

– каноническое уравнение гиперболы с действительной осью Ox и мнимой осью Oz.

б) Пусть $|h| > b$. Тогда $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$. Разделим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

на его правую часть. В обозначениях пункта а) получаем

$$\frac{z^2}{c_1^2} - \frac{x^2}{a_1^2} = 1$$

– каноническое уравнение гиперболы с действительной осью Oz и мнимой осью Ox.

в) Пусть $|h| = b$. Тогда $1 - \frac{h^2}{b^2} = 0$. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде совокупности двух уравнений:

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{z}{c} \quad \text{или} \quad z = \pm\frac{c}{a}x.$$

Таким образом, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $y = b$ или $y = -b$ получается пара пересекающихся прямых.

Аналогично исследуется поверхность однополостного гиперболоида сечениями плоскости $x = h$.

Замечание. Можно доказать, что однополостный гиперболоид является линейчатой поверхностью. Она может быть получена параллельным переносом пары прямых $z = \pm\frac{c}{a}x$ вдоль горлового эллипса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Глава 17. Определители 2-го и 3-го порядков
§1. Определители второго порядка

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

где $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, x и y – неизвестные.

Решим систему методом алгебраического сложения. Умножим первое уравнение системы на d, второе – на $(-b)$ и сложим их:

$$(ad - bc)x = de - bf \Rightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc}.$$

Аналогично находим второе неизвестное. Умножим первое уравнение системы на $(-c)$, второе – на a и складываем:

$$(ad - bc)y = af - ce \Rightarrow y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Решение системы $x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}$, $y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}$.

Определение. Выражение $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \doteq ad - bc$ называется определителем 2-го порядка. По отношению к данной системе линейных уравнений этот определитель называется определителем системы.

Теперь решение системы можно записать в виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера. Если обозначить

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \doteq \Delta, \quad \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \doteq \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \doteq \Delta_2,$$

то формулы Крамера можно записать в виде:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Определение. В определителе $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ числа a, b, c, d называются элементами определителя. Говорят, что элементы a и b образуют первую строку определителя, элементы c и d – вторую строку, элементы a и c образуют первый столбец определителя, элементы b и d – второй столбец. Говорят также, что элементы a и d образуют главную диагональ определителя, элементы b и c – его побочную диагональ.

§2. Определители третьего порядка

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Определение. Выражение

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \doteq a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

называется определителем 3-го порядка. По отношению к системе линейных уравнений этот определитель называется определителем системы. А ещё последнее равенство называется разложением определителя по элементам первой строки.

Обозначим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Следующую теорему мы принимаем без доказательства.

Теорема

Если определитель системы линейных уравнений не равен нулю, тогда система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

которые называются формулами Крамера. ▲

§3. Схема треугольника вычисления определителя 3-го порядка

По определению, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению трех определителей 2-го порядка, вычисляя которые мы получаем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \doteq a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$
$$= a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 .$$

Мы видим, что определитель 3-го порядка равен алгебраической сумме шести слагаемых, которые называются членами определителя, а знак, с которым член определителя входит в сумму, называется знаком члена определителя.

Этот же результат можно получить, вычисляя сначала члены определителя, которые входят в сумму со знаком плюс, а затем – со знаком минус. Это делается с помощью правила, которое называется правилом треугольника.

Первый член определителя $a_1b_2c_3$ равен произведению элементов определителя, стоящих на главной диагонали, второй и третий члены определителя $a_3b_1c_2$, $a_2b_3c_1$ образуют треугольники с основаниямм параллельными главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} & * & \\ & & * \\ * & & \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} & & * \\ * & & \\ & * & \end{vmatrix}.$$

Эти члены определителя входят в сумму со знаком плюс. Следующие три члена определителя входят в сумму со знаком минус.

Четвертый член определителя $a_3b_2c_1$ равен произведению элементов, стоящих на побочной диагонали определителя, пятый и шестой $a_2b_1c_3$, $a_1b_3c_2$ образуют треугольники с основанием параллельным побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} & & * \\ & * & \\ * & & \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} & * & \\ * & & \\ & & * \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} * & & \\ & & * \\ & * & \end{vmatrix}.$$

В заключение приведем еще одну схему вычисления определителя 3-го порядка.

Выпишем рядом с определителем первые два столбца в качестве 4-го и 5-го столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}.$$

Первые три члена определителя $a_1b_2c_3$, $b_1c_2a_3$, $c_1a_2b_3$, входящие в сумму со знаком плюс, получаются перемножением элементов стоящих на главной диагонали и на диагоналях параллельных ей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ * & b_2 & c_2 \\ * & * & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} * & * \\ a_2 & * \\ a_3 & b_3 \end{matrix}.$$

Члены определителя $a_3b_2c_1$, $b_3c_2a_1$, $c_3a_2b_1$, входящие в сумму со знаком минус, получаются перемножением элементов стоящих на побочной диагонали и на диагоналях параллельных ей:

$$\begin{vmatrix} * & * & c_1 \\ * & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & * \\ * & * \end{matrix}.$$

Упражнения

129. Докажите теорему §2.
130. Докажите для определителей 2-го и третьего порядков, что если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то такой определитель равен нулю. Докажите также, что если переставить местами любые две строки или любые два столбца, то определитель изменит свой знак на противоположный.
131. Докажите для определителя 3-го порядка формулы разложения определителя по элементам 2-й и 3-й строк. (Указание: используйте предыдущее упражнение о перестановке строк.)

Глава 18. Отношение эквивалентности
§1. Способы задания множеств

Множество является одним из основных понятий математики, которое невозможно определить опираясь на какие-либо другие математические понятия. Так, например, в геометрии не определяются такие фундаментальные понятия как точка, прямая и плоскость, потому что их невозможно определить с помощью других понятий.

Мы предполагаем, что у читателя имеются определенные навыки работы с множествами, и понимание того, что любое множество состоит из элементов.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита, а его элементы – строчными буквами. Широко применяется и греческий алфавит. За некоторыми множествами закреплены постоянные обозначения. Например:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Запись $n \in \mathbb{Z}$ означает, что n есть элемент множества $\mathbb{Z}$, следовательно, является целым числом. Вообще, если A есть некоторое множество и "a" есть его элемент, то пишут $a \in A$ и говорят: элемент a принадлежит множеству A. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не является элементом множества A и читается так: элемент a не принадлежит множеству A.

Примеры: $0 \notin \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием подмножества, пустого множества – $\varnothing$, со знаками включения – $\subset$, объединения – $\cup$ и пересечения – $\cap$ множеств, и с их простейшими свойствами.

Важное значение имеют способы, с помощью которых задаются множества и их подмножества.

Один из самых простых способов задания множества заключается в простом перечислении всех его элементов. Например, пусть множество A состоит из первых трех натуральных чисел. Мы задали это множество задав (перечислив) все его элементы. Это же множество можно записать следующим образом: $A = \{1, 2, 3\}$.

Далее, широко применяется описательный способ. Например, множество состоящее из первых десяти миллионов простых чисел. Этой фразой мы задали множество и его элементы. Понятно, что перечислить все его элементы практически невозможно, так как это является не просто трудоемким и утомительным занятием, но и сложной математической проблемой.

Наиболее часто для задания подмножества данного множества применяют следующий прием. Пусть элементы нужного нам подмножества обладают каким-либо свойством, которым не обладают другие элементы данного множества. Чтобы показать, как это можно записать с помощью математических символов, введем обозначения.

Пусть A данное множество, его элементы будем обозначать буквой x, пусть далее P(x) - свойство, которым обладают исключительно элементы подмножества B. Тогда множество B можно записать так:

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Читается эта запись следующим образом. Множество B состоит из тех элементов множества A, для которых выполняется условие P(x).

Разберем подробнее эту форму записи множества. После левой фигурной скобки до вертикальной черты указывается из какого множества берутся элементы, которые составляют подмножество B. После вертикальной черты указывается свойство, которому удовлетворяют элементы подмножества B. Тем самым в множество B включаются только те элементы множества A, которые удовлетворяют условию P(x), и только они, а те элементы множества A, для которых это условие не выполняется, не включаются в множество B. Иногда вместо вертикальной черты ставится двоеточие. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Обозначим через $\mathbb{R}^+$ множество всех положительных вещественных чисел. Тогда это же множество можно записать так:

$$\mathbb{R}^+ \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^+ \doteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Еще один пример. Пусть a и b произвольные вещественные числа и $a < b$. Обозначим через

$$[a;b] \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}.$$

Хорошо известно, что это подмножество вещественных чисел называется отрезком.

Однако, существуют и другие способы записи подмножеств данных множеств. Вы будете знакомиться с ними по мере изучения математики. Рассмотрим два примера, иллюстрирующие еще один способ.

Обозначим через A множество всех четных натуральных чисел. Это же множество можно описать так:

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Прочитаем эту запись: обозначим через A множество чисел вида $2n$, где n “пробегает” множество натуральных чисел.

Равные множества

Определение. Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если два множества A и B равны, то этот факт записывается так:

$$A = B.$$

Это определение можно записать с помощью математических символов следующим образом:

$$A = B \overset{df}{\Leftrightarrow} (A \subset B) \,\&\, (B \subset A),$$

где $\&$ – знак конъюнкции, знак логической связки, союза "и".

Теперь прочитаем нашу запись.

Множества A и B будем считать равными, по определению, тогда и только тогда, когда множество A является подмножеством множества B и наоборот, множество B является подмножеством множества A.

Можно прочитать и так: равенство двух множеств равносильно, по определению, тому, что каждое из них содержит другое.

Почему мы уделяем такое внимание этому, в общем то, простому определению? Дело в том, что довольно часто встречается ситуация, когда два множества определяются независимо друг от друга и причем различными способами, и невозможно заранее сказать равны они или нет. И чтобы установить их равенство или опровергнуть таковое, необходимо приложить определенные усилия. Рассмотрим пример.

Пусть A - множество положительных корней уравнения:

$$x^2 - 2 = 0,$$

B – одноэлементное множество, единственным элементом которого является число равное длине диагонали квадрата со стороной равной 1. Конечно, нетрудно установить в этом примере, что $A = B$, однако, для этого все же необходимо решить уравнение и знать теорему Пифагора.

Вот еще один пример. Обозначим через S множество нечетных совершенных чисел. Требуется доказать или опровергнуть равенство:

$$S = \varnothing.$$

Другими словами, существует ли хотя бы одно совершенное нечетное число? Напомним, что натуральное число n называется совершенным, если сумма всех его положительных делителей равна 2n. Задачке этой более двух с половиной тысяч лет, однако ответ до сих пор неизвестен.

В дальнейшем читатель еще не раз встретится с задачей выяснения равенства двух множеств, а сейчас, в заключение, обращаем ваше внимание еще на одно весьма важное обстоятельство.

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1, 2\}$. Как вы думаете, равны ли эти два множества ? Правильный ответ основывается на определении равенства двух множеств, а в нем нет ни одного слова о том, что каждый элемент должен быть записан только один раз, как и о порядке, в котором перечисляются элементы множеств. Следовательно, согласно определения, $A = B$, так как оба множества состоят из одних и тех же элементов. Отсюда, кстати, следует, что при перечислении элементов множества нет смысла записывать любой элемент множества более одного раза.

Заметим, что запись $A \subset B$ не исключает того, что множества A и B могут быть равными. Иногда требуется подчеркнуть, что A есть подмножество множества B и в то же время $A \neq B$. Тогда можно использовать знак $\subsetneq$:

$$A \subsetneq B \overset{df}{\Leftrightarrow} (A \subset B) \,\&\, (A \neq B).$$

В этом случае непустое подмножество A часто называют собственным подмножеством множества B.

Упражнения

132. Выпишите все подмножества множества $A = \{1, 2, 3\}$. (Не забудьте про пустое подмножество!)
133. Докажите, что если $A \subset B$ и $A \neq B$, то $\exists x \in B$, такой что $x \notin A$.
134. Укажите множество, имеющее: ровно одно подмножество; ровно два подмножества. Подумайте: может ли множество иметь ровно 3 различных подмножества?
135. Докажите, что любое бесконечное множество имеет как конечные, так и бесконечные подмножества.
136. Прочитайте и разберитесь самостоятельно, какое множество описывает следующая запись: $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Задайте множество A описанием.
137. С помощью характеристического свойства задайте множество всех натуральных двузначных чисел.

138. Пусть P – множество всех точек какой-нибудь плоскости. Задайте с помощью характеристического свойства подмножество K всех точек плоскости удаленных от некоторой фиксированной точки плоскости O на расстояние не превышающее некоторого фиксированного числа R.
139. Обозначим через A – множество всех действительных корней всех квадратных уравнений вида $x^2 + 2p + q = 0$,где p и q – целые числа. Пусть
$$B = \{m \pm \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$
Равны ли множества A и B? Укажите хотя бы одно действительное число не принадлежащее множеству B.

§2. Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть A – произвольное множество, x, y – два его произвольных различных элемента. Рассмотрим подмножество множества A. Из определения равных множеств следует, что подмножества $\{x, y\}$ и $\{y, x\}$ равны, так как оба состоят из одних и тех же элементов. Однако, возникают ситуации, когда необходимо различать эти подмножества. Но единственное их отличие заключается в том, в каком порядке выписаны элементы x и y. В этом случае говорят не о подмножестве из двух элементов, а об упорядоченной паре элементов (x, y) или (y, x). Начнем, однако, с более общего случая.

Определение. Пусть A и B – произвольные непустые множества. Декартовым (прямым) произведением множества A на множество B называется множество
$$A \times B \doteq \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$
Элементы этого множества называются упорядоченными парами. Элемент $a \in A$ называется первой компонентой упорядоченной пары $(a, b) \in A \times B$, а элемент $b \in B$ – второй компонентой.

Определим на множестве $A \times B$ отношение равенства.

Определение. Две упорядоченные пары $(a; b), (c; d) \in A \times B$ называются равными, если равны их соответствующие компоненты:
$$(a; b) = (c; d) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} (a = c) \,\&\, (b = d).$$

Из определений следует, что, вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$, если множества A и B различные. Более того, даже если элементы

$a, b \in A \cap B$, но различные, $a \neq b$, то упорядоченные пары этих элементов не равные:
$$(a; b) \neq (b; a).$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, где элементы множеств A и B – обычные натуральные числа. Рассмотрим упорядоченные пары $(3; 4)$ и $(4; 3)$. Пара $(3; 4) \in A \times B$, но $(3; 4) \notin B \times A$. Следовательно,
$$A \times B \neq B \times A.$$
Далее, обе пары $(1; 2)$ и $(2; 1)$ являются элементами обоих декартовых произведений $A \times B$ и $B \times A$, но не удовлетворяют определению равенства упорядоченных пар: $(1; 2) \neq (2; 1)$, так как $1 \neq 2$.

Приведем еще один пример декартова произведения множеств.

Пример. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ – множество первых восьми букв латинского алфавита. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – множество первых восьми натуральных чисел. Тогда декартово произведение множества A на множество B есть множество
$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), \ldots, (h; 8)\}.$$
Для удобства все элементы этого множества можно записывать проще: $a1, a2, \ldots, e4, \ldots, h8$ и мы получаем обозначение всех 64 клеток шахматной доски.

Рассмотрим теперь частный случай декартова произведения, в котором оба множителя равны.

Определение. Пусть A – произвольное непустое множество. Декартово произведение множества A на множество A называется его декартовым квадратом, и обозначается
$$A^2 \doteq A \times A.$$

Из определения следует, что
$$A^2 \doteq \{(a; b) \mid a, b \in A\},$$
причем, если элементы a и b различные, тогда они образуют две различные упорядоченные пары $(a; b) \neq (b; a)$, и обе они являются элементами декартова квадрата множества A.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$. Тогда
$$A^2 = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2)\}.$$

Пример. Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел. Тогда $\mathbb{R}^2$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Это множество можно интерпретировать как множество точек координатной плоскости. Отождествление упорядоченной пары с точкой плоскости стало возможным благодаря введению понятия координат точки плоскости. Первая компонента пары есть абсцисса точки, вторая – ее ордината. Собственно говоря, от этого примера и произошло название декартова произведения множеств.

Понятие декартова произведения естественно обобщается на случай конечного числа сомножителей.

Определение. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – произвольные непустые множества. Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество
$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \doteq \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}.$$
Элементы этого множества называются упорядоченными наборами (а также кортежами длины n, или "n-ками"). Элемент $x_1 \in A_1$ называется первой компонентой n-ки $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, элемент $x_2 \in A_2$ – второй компонентой, и так далее… Элемент $x_n \in A_n$ называется n-й (последней) компонентой упорядоченного набора.

Определим на множестве $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ отношение равенства.

Определение. Два упорядоченных набора
$$(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$
называются равными, если равны их соответствующие компоненты:
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \doteq (y_1, y_2, ..., y_n) \overset{df}{\Leftrightarrow} (x_1 = y_1) \,\&\, (x_2 = y_2) \,\&\, ... \,\&\, (x_n = y_n).$$

Определение. Пусть A – произвольное непустое множество. Декартово произведение
$$A^n \doteq \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ штук}}$$
называется его n-ой декартовой степенью.

Пример. $\mathbb{R}^3$ – декартов куб множества действительных чисел $\mathbb{R}$, является по определению, множеством всех упорядоченных троек действительных чисел. Это множество можно интерпретировать как множество точек координатного пространства.

Упражнения

140. Перечислите все элементы декартова куба множества $A = \{1, 2\}$.
141. Методом математической индукции, докажите формулу числа элементов n-й декартовой степени конечного множества.
142. Подумайте, какое получится декартово произведение $A \times B$, если $B = \varnothing$?

§3. Понятие бинарного отношения

Определение. Пусть A произвольное множество. Любое подмножество его декартового квадрата называется бинарным отношением на множестве A:
$$S \subset A \times A = A^2.$$

Определение. Пусть S – бинарное отношение на множестве A. Если пара $(x, y) \in S$, то говорят, что элемент x находится в отношении S с элементом y, и пишут
$$xSy \overset{df}{\Leftrightarrow} (x, y) \in S.$$

Определение. Два бинарных отношения, S и T, определенные на одном и том же множестве A, называются равными, если S и T равны как множества.

Так как мы будем рассматривать только бинарные отношения, то слово "бинарные" мы будем часто пропускать и говорить об отношении S на множестве A.

Определение. Пусть S – отношение, определенное на множестве A и $x, y \in A$. Выражение
$$(x, y) \in S \quad \text{или} \quad xSy$$
называется соотношением.

Если элемент x находится в отношении S с элементом y, то говорят, что выполнено (верно) соотношение xSy. Часто для отношения S употребляются специальные названия (имя отношения) и символы.

Примеры бинарных отношений

1) Отношения "меньше", "больше", "меньше или равно" ("не больше"), "больше или равно" ("не меньше") суть примеры бинарных отношений на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$x < y,\ x \le y,\ x > y,\ x \ge y\ .$$

Например, отношение "меньше". Это множество упорядоченных пар действительных чисел. Наглядно, геометрически, это множество можно задать на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ как множество точек (x, y) лежащих на координатной плоскости выше прямой $y = x$. Если обозначить это множество буквой M, то

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow xMy \Leftrightarrow x < y\ .$$

Из определения бинарного отношения следует, что даже на конечном множестве A из n элементов можно задать 2^{n^2} бинарных отношений, ибо именно столько имеется подмножеств множества A^2. Понятно, что на бесконечном множестве можно задать бесконечно много бинарных отношений. Поэтому нас будут интересовать только те бинарные отношения., которые обладают какими-то свойствами. Но даже в этих случаях, далеко не каждое бинарное отношение имеет собственное имя, как в приведенном примере.

2) На любом множестве A можно определить отношение равенства:

$$E \doteq \{(x, x) \mid x \in A\}\ .$$

Соотношение xEy означает по определению, что $x = y$. Таким образом, отношение E имеет собственное имя: "равенство" и специальное обозначение – знак равенства: "$=$".

3) Определим на множестве натуральных чисел отношение делимости:

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N} : y = xz\}\ .$$

Если число x находится в отношении D с числом y, то говорят, что число x делит число y или y делится на x, и обозначается

$$x \mid y \overset{df}{\Leftrightarrow} xDy\ .$$

Посмотрим на приведенные примеры еще с одной стороны. Для того, чтобы задать бинарное отношение на некотором множестве мы должны указать подмножество его декартова квадрата. Одним из способов задания подмножества является задание подмножества с помощью харак-

теристического свойства. Пусть A произвольное множества, P(x) некоторое условие, которому может удовлетворять элемент множества A, а может и не удовлетворять. Тогда, мы можем указать все элементы множества A, которые удовлетворяют данному условию в виде подмножества:

$$B \doteq \{x \in A \mid P(x)\}\ .$$

Применим этот способ для определения бинарного отношения. Пусть A произвольное непустое множество, на котором мы хотим определить бинарное отношение, обозначим его буквой S:

$$S \doteq \{(x, y) \in A^2 \mid P(x, y)\}\ .$$

Иначе говоря, подмножество S можно задать, указывая какие пары (x, y) из декартового квадрата множества A удовлетворяют условию P(x,y):

$$xSy \overset{df}{\Leftrightarrow} P(x, y)\ .$$

Именно таким способом задаются бинарные отношения на бесконечных множествах. Например, отношение делимости на множестве натуральных чисел можно задать следующим образом.

Определение. Говорят, что натуральное число x делит натуральное число y, если существует натуральное число z, такое, что $y = xz$:

$$x \mid y \overset{df}{\Leftrightarrow} (x, y \in \mathbb{N})\ \&\ (\exists z \in \mathbb{N} : y = xz)\ .$$

При этом, как можно заметить, слова "бинарное отношение" или "отношение" вообще не упоминаются.

4) Обозначим через Я множество всех слов литературного русского языка. Длиной слова называется число букв в этом слове. Любое слово есть ни что иное, как упорядоченный набор букв:

$$x_1 x_2 ... x_n\ ,$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – буквы русского алфавита. Понятно, что два слова равны тогда и только тогда, когда равны упорядоченные наборы букв, из которых они состоят.

Определение. Слово $x = x_1 x_2 ... x_n$ называется толерантным слову $y = y_1 y_2 ... y_m$, если они имеют одинаковую длину и упорядоченные наборы букв, составляющие эти слова отличаются друг от друга не более, чем одной своей компонентой.

Если слово x толерантно слову y, то будем писать xTy. Тогда, из определения следует $(x_1x_2...x_n)T(y_1y_2...y_m) \overset{df}{\Leftrightarrow} (n = m)$ и из всех равенств $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$ может быть неверным не более одного.

Из определения следует, что толерантность есть отношение на множестве Я. Например, (муха)T(мука) – верное соотношение, а соотношение (мука)T(кума) – неверное. Несмотря на то, что в словах "мука" и "кума" участвуют одни и те же буквы, упорядоченные наборы (м, у, к, а) и (к, у, м, а) отличаются друг от друга двумя компонентами – первой и третьей, поэтому эти слова не толерантны друг другу, в то время, как упорядоченные наборы (м, у, х, а) и (м, у, к, а) отличается только третьей компонентой, значит являются толерантными.

Обозначим через M множество всех слов русского языка, которые являются нарицательными существительными в именительном падеже и в единственном числе, и состоят из четырех букв.

Интерес здесь представляет следующая задача: написать цепочку слов из множества M, такую, чтобы любые два соседних слова в этой цепочке были толерантными, причем первое и последнее слово в этой цепочке задаются заранее. Например, если первое слово “муха”, а второе “слон”, то искомая цепочка слов представляет собой процесс последовательного превращения мухи в слона. (Смотрите ниже упражнение 144.) Вторая задача - поиск самой короткой цепочки. Так как при переходе в цепочке от одного слова к соседнему изменяется только одна буква, а нужно (в задаче о слоне и мухе) поменять четыре буквы, то теоретически длина самой короткой цепочки не может быть меньше пяти слов. Интересно также, попытаться заставить решать эту задачу компьютер.

5) Пусть $x \in Я$ – произвольное слово. Обозначим через $L(x)$ длину слова x. Например, $L(\text{мама}) = 4$.

Назовем два слова равномощными, если они имеют одинаковую длину. Если слово x равномощное слову y, то будем писать xLy. Таким образом,

$$xLy \overset{df}{\Leftrightarrow} L(x) = L(y) .$$

Понятно, что тем самым мы задали отношение на множестве Я.

6) Большое число примеров отношений дают отношения между людьми (бинарные отношения на множестве людей). Вот примеры таких отношений: муж, жена, супруги, дочь, сын, мать, отец, шурин, теща и так далее. Обозначим через H множество людей (homo sapiens). Определим,

например, отношение "муж". Для формализации этого отношения введем обозначения. Обозначим через M – подмножество H, состоящее из людей мужского пола, через W – подмножество H, состоящее из людей женского пола. Пусть $x, y \in H$ и Б(x, y) – означает, что пара людей x и y прошли через процедуру заключения брака. Тогда мы можем определить отношение "x муж y" следующим образом:

$$x \text{ муж } y \overset{df}{\Leftrightarrow} (x \in M) \,\&\, (y \in W) \,\&\, Б(x, y) .$$

Аналогично можно формализовать и другие отношения на множестве людей. Смотрите упражнения ниже.

Упражнения

143. Формализуйте по своему выбору пару отношений на множестве людей (дочь, сын, мать, отец и тому подобное).
144. Постройте цепочку слов, каждое из которых имеет длину 4 и является нарицательным существительным в единственном числе именительного падежа, причем каждое слово в цепочке толерантно соседним. Начинается цепочка словом "муха", а заканчивается словом "слон".
145. Расширим понятие толерантности на множестве слов русского языка. Обозначим через $A(x)$ множество букв, из которых составлено слово x. Назовем слово x толерантным слову y и будем писать x ~ y, если множества $A(x)$ и $A(y)$ либо равны, либо отличаются (как множества) друг от друга не более одной буквой. Постройте цепочку толерантных слов от "ухи" к "борщу". Используйте только нарицательные существительные в именительном падеже в единственном числе.

§4. Отношение эквивалентности

Пусть S бинарное отношение, определенное на множестве A, то есть, согласно определения, $S \subset A^2$. Обозначение $(x, y) \in S$ не очень удобное, как впрочем и xSy. Оба эти обозначения какие-то безликие. Однако, далеко не каждое бинарное отношение, из тех, которые приходится рассматривать, имеют собственное имя, такие как: отношение делимости на множестве целых чисел, отношение "меньше" на множестве вещественных чисел или отношение толерантности на множестве слов и некоторые другие.

Если элемент x находится в бинарном отношении с элементом y, то этот факт чаще всего принято обозначать с помощью небольшой волнистой линии: x ~ y. (Хотя, на наш взгляд, это обозначение ничем не лучше двух предыдущих и столь же безлико. Но ничего более лучшего пока никто не придумал.) Такого же обозначения будем придерживаться и мы, и будем писать: пусть на множестве A определено бинарное отношение $\sim$. Иногда буква, обозначающая бинарное отношение, пишется над или под этой волнистой чертой: $x \overset{s}{\sim} y$ или $x \underset{s}{\sim} y$.

Если же нам нужно подчеркнуть, что данный элемент x не находится в данном бинарном отношении к элементу y, то мы будем писать $x \not\sim y$, просто зачеркивая волнистую линию.

Из определения и примеров бинарных отношений, понятно, что на любом бесконечном множестве можно определить бесконечно много бинарных отношений. Однако, далеко не всякое бинарное отношение имеет интерес для математики. Само понятие бинарного отношения возникло как результат обобщения конкретных бинарных отношений, имеющих место быть в различных (иногда даже весьма отдаленных друг от друга) математических теориях. Смысл этого обобщения как раз и состоит в том, чтобы изучить свойства наиболее распространенных бинарных отношений и при этом абстрагироваться от конкретной природы элементов множеств, на которых они определены. То есть, выделить в первую очередь те свойства бинарных отношений, которые не зависят от природы элементов множества. Такие свойства бинарных отношений мы сейчас и рассмотрим. Именно они и представляют наибольший интерес. Перейдем к строгим определениям.

Определение. Говорят, что бинарное отношение $\sim$, определенное на множестве A, обладает свойством:

1) рефлексивности, если любой элемент множества A находится в этом бинарном отношении с самим собой, то есть,

$$\forall x \in A : x \sim x;$$

2) симметричности, если из того, что верно соотношение $x \sim y$ следует, что верно соотношение $y \sim x$:

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x;$$

3) транзитивности, если

$$(x \sim y) \,\&\, (y \sim z) \Rightarrow x \sim z;$$

4) антисимметричности, если

$$(x \sim y) \,\&\, (y \sim x) \Rightarrow x = y;$$

5) антирефлексивности, если любой элемент множества A не находится в этом бинарном отношении с самим собой, то есть

$$\forall x \in A : x \not\sim x;$$

6) асимметричности, если

$$x \sim y \Rightarrow y \not\sim x.$$

Некоторые бинарные отношения, обладающих одним или несколькими из выше определенных свойств, получили специальные названия.

Определение. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение. Бинарное отношение называется отношением толерантности, если оно рефлексивно и симметрично.

Определение. Бинарное отношение называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Определение. Бинарное отношение называется отношением строгого порядка, если оно транзитивно, антирефлексивно и асимметрично.

Выясним, какими свойствами обладают бинарные отношения, рассмотренные в качестве примеров в предыдущем параграфе.

1). Отношение “меньше или равно” на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Легко проверяется, что это есть бинарное отношение порядка, как и отношение “больше или равно”, в то время как, отношения “меньше” и “больше” являются отношениями строгого порядка.

2). Отношение равенства на любом множестве, очевидно, есть отношение эквивалентности.

3). Отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Очевидно, оно обладает свойством рефлексивности: $x \mid x$ для всех натуральных чисел; транзитивности: $(x \mid y) \,\&\, (y \mid z) \Rightarrow x \mid z$. Понятно, что оно антисимметрично: $(x \mid y) \,\&\, (y \mid x) \Rightarrow x = y$. Таким образом, отношение делимости на множестве натуральных чисел является отношением порядка.

4) Отношение толерантности, введенное на множестве слов русского языка действительно является отношением толерантности, то есть, как это следует из определений, обладает свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности (для доказательства последнего достаточно привести контрпример).

5) Отношение равномощности на множестве слов русского языка, очевидно, является отношением эквивалентности.

6) Отношение "быть мужем" на множестве людей, очевидно антирефлексивно и асимметрично, и оставшимися четырьмя свойствами не обладает.

Для отношений эквивалентности чаще всего применяется один и тот же символ: ~ . Если на множестве M определено отношение эквивалентности ~ , то это обозначают так: (M, ~).

Если элемент x находится в отношении эквивалентности с элементом y, то пишут $x \sim y$ и говорят, что элемент x эквивалентен элементу y. Если соотношение $x \sim y$ неверное, то пишут $x \nsim y$.

Приведем еще несколько примеров отношений эквивалентности на различных множествах.

7) Пусть P – множество точек плоскости, O – фиксированная точка. Для двух точек плоскости $A, B \in P$ положим по определению:

$$A \sim B \Leftrightarrow OA = OB,$$

где OA, как обычно, расстояние от точки O до точки A.

8) Пусть F – множество всех числовых функций, каждая из которых определена в некоторой окрестности нуля и которые являются бесконечно малыми при $x \to 0$, то есть

$$\forall \alpha(x) \in F : \lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0 .$$

Определение. Бесконечно малая $\alpha(x) \in F$ называется эквивалентной бесконечно малой $\beta(x) \in F$, если

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 .$$

Это определение задает бинарное отношение на множестве F. Если бесконечно малая функция $\alpha(x)$ эквивалентна бесконечно малой функции $\beta(x)$, то пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ или $\alpha \sim \beta$.

Нетрудно убедиться в том, что это отношение действительно есть отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивное, симметричное и транзитивное.

9) Комплексное число $z_1 = x_1 + iy_1$ назовем эквивалентным комплексному числу $z_2 = x_2 + iy_2$, если равны их аргументы:

$$z_1 \sim z_2 \overset{df}{\Leftrightarrow} \arg z_1 = \arg z_2 .$$

Легко убедиться, что введенное отношение на множестве комплексных чисел есть отношение эквивалентности.

10) Пусть $m > 1$ – произвольное фиксированное натуральное число.

Определение. Целое число x называется сравнимым по модулю m с целым числом y, если их разность $x - y$ делится на m:

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\, m) \text{ или } x \equiv y(m) .$$

Таким образом, по определению,

$$x \equiv y(m) \Leftrightarrow m \mid (x - y) .$$

Тем самым на множестве целых чисел задано отношение сравнимости по модулю, которое является отношением эквивалентности. Смотрите ниже упражнение 150.

Упражнения

146. Определим на множестве людей отношение "быть родственником". Мы будем говорить, что человек x является родственником человеку y, если генеалогические древа обоих людей, содержащих не более четырех поколений, имеют непустое пересечение. (Если более четырех, то можно ввести отношение "быть дальним родственником".) Какими свойствами обладает это бинарное отношение?
147. Для каждого из шести свойств бинарных отношений (рефлексивности, симметричности и так далее…) найдите по одному примеру бинарного отношения, обладающего данным свойством. Поищите такие примеры среди бинарных отношений, определенных на множестве людей. Правда, здесь нужно быть весьма осторожным. Например, является ли человек другом самому себе, то есть обладает ли отношение "быть другом" свойством рефлексивности, зависит от вашего определения этого отношения. Также не совсем ясно, обладает ли это отношение свойством симметричности.
148. На множестве всех людей введем отношение "быть знакомым". Будет ли это отношение отношением эквивалентности?
149. На множестве всех числовых функций, область определения и множество значений которых суть подмножества множества $\mathbb{R}$, определим отношение "совместимости". Будем говорить, что функция f совместима с функцией g, если определена их композиция $f \circ g$. Обладает ли это отношение хотя бы одним из 6 основных свойств? На каком множестве функций это отношение рефлексивно?
150. Докажите, что отношение сравнимости по модулю есть отношение эквивалентности.

151. Докажите, что отношение подобия треугольников является отношением эквивалентности. (Для доказательства используйте какой-нибудь признак подобия.)
152. На декартовом квадрате множества натуральных чисел определим бинарное отношение: $\forall(a;b),(c;d)\in\mathbb{N}^2$ положим по определению
$$(a;b)\sim(c;d)\Leftrightarrow ad=bc\,.$$
Докажите, что это отношение есть отношение эквивалентности.
153. Назовем два действительных числа эквивалентными, если их разность является целым числом. Докажите, что тем самым мы определяем отношение эквивалентности на множестве действительных чисел.

§5. Разбиение множеств

Определение. Семейство непустых подмножеств $\{A_i\}$ множества A называется разбиением множества A, если эти подмножества попарно не пересекаются и их объединение равно множеству A.

Пример. Обозначим $A=\{1,2,3\}$, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$. Тогда $\{A_1,A_2\}$ – разбиение множества A. Действительно, $A_1\cap A_2=\varnothing$ и $A=A_1\cup A_2$.

Обозначим $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2\}$, $B_3=\{3\}$. Тогда $A=B_1\cup B_2\cup B_3$ и множества B_1,B_2,B_3 попарно не пересекаются. Следовательно, семейство подмножеств $\{B_1,B_2,B_3\}$ есть разбиение множества A.

Легко видеть, что само множество A также есть разбиение множества A, так как A есть подмножество самого себя и удовлетворяет определению разбиения множества.

Легко подсчитать, что существует ровно 5 разбиений множества из трех элементов.

Понятно, что существует бесконечно много разбиений бесконечного множества. При этом, существуют разбиения, состоящие из конечного числа подмножеств и разбиения, состоящие из бесконечного числа подмножеств.

Приведем два примера разбиений множества действительных чисел.

1) Обозначим через $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ – множества, соответственно, положительных и отрицательных действительных чисел. Тогда $\{\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^-,0\}$ – разбиение множества действительных чисел.

2) Обозначим через $A_n=(n;n+1]$. Тогда $A_n\cap A_m=\varnothing$ для всех различных целых чисел n и m и $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}A_n$. Таким образом, семейство подмножеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ есть разбиение множества $\mathbb{R}$.

Теорема (О разбиении множества и отношении эквивалентности)
Пусть $\{A_i\}_{i\in J}$ – произвольное разбиение множества A, где J – некоторое множество индексов. Определим на множестве A бинарное отношение ~ правилом:
$$\forall x,y\in A,\ \ x\sim y\ \overset{df}{\Leftrightarrow}\ \exists k\in J: x,y\in A_k\,,$$
где A_k – одно из подмножеств данного разбиения. Тогда это отношение является отношением эквивалентности на множестве A.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность данного отношения очевидны из определения. Докажем транзитивность. Пусть $x\sim y$. Тогда существует подмножество A_k из семейства подмножеств $\{A_i\}$, такое, что $x,y\in A_k$. Пусть $y\sim z$. Тогда элементы y и z принадлежат одному и тому же подмножеству из семейства $\{A_i\}$ и, так как $y\in A_k$, то и $z\in A_k$. Таким образом, x и z принадлежат одному и тому же подмножеству из семейства $\{A_i\}$ и, по определению, $x\sim z$. Следовательно, данное отношение транзитивное. ▲

Следствие
Любое разбиение множества индуцирует (определяет) на нем отношение эквивалентности. ▲

Из теоремы и ее следствия мы можем сделать практический вывод, что для задания какого-нибудь отношения эквивалентности на каком-либо множестве, достаточно задать какое-нибудь разбиение этого множества. Например, разобьем множество всех людей на подмножества по признаку возраста. Пусть H – множество людей,
$$A_n=\{x\in H\,|\,B(x)=n\}\,,$$
где B(x) – возраст человека x, то есть, его полное число лет. Понятно, что эти подмножества не пересекаются. Пусть M – наибольший возраст из ныне живущих людей. Тогда семейство подмножеств $\{A_n\}$, где $n=0,1,2,\ldots,M$ есть разбиение множества H. Называя людей одного

возраста "одногодками", мы получаем на множестве всех людей бинарное отношение "быть одногодком", которое является отношением эквивалентности.

Упражнение

154. Выпишите все разбиения множества из трех элементов.
155. Образуют ли следующие семейства множеств разбиение множества:
а) $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{4,5\}$; б) $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6,7\}$?
156. Обозначим:
A - множество всех равносторонних треугольников;
B - множество всех прямоугольных треугольников;
C - множество всех тупоугольных треугольников;
D - множество всех остроугольных треугольников;
T - множество всех треугольников.
а) Являются ли система подмножеств {A, B, C, D} разбиением множества T?
б) Какая система данных подмножеств образует разбиение множества T?
157. Пусть $\mathbb{R}[x]$ – множество всех многочленов с одной неизвестной (или – от одной буквы x) с действительными коэффициентами. Придумайте два разбиения этого множества. Одно семейство подмножеств, образующих разбиение должно быть конечным, второе – бесконечным.
158. Придумайте разбиение множества людей по какому-нибудь признаку, и придумайте название бинарному отношению эквивалентности, которое следует из этого разбиения.

§6. Классы эквивалентности и фактор-множество

Пусть на некотором множестве A определено отношение эквивалентности $\sim$.

Определение. Пусть A – произвольное непустое множество и $x \in A$ – произвольный его элемент. Множество всех элементов множества A эквивалентных элементу x называется классом эквивалентности, и обозначается

$$[x] \doteq \{a \in A \mid a \sim x\}.$$

Теорема (О классах эквивалентности)

Пусть на некотором множестве A *определено отношение эквивалентности. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Любой элемент множества A *содержится в некотором классе эквивалентности.*

2) Все элементы из одного класса эквивалентности эквивалентны друг другу.

3) Любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.

4) Классы эквивалентности образуют разбиение множества A.

Доказательство. 1) В силу рефлексивности, любой элемент $x \in A$, эквивалентен самому себе, поэтому $x \in [x]$.

2) Пусть $a, b \in [x]$. Тогда, $a \sim x$ и $b \sim x$. В силу симметричности $x \sim b$ и в силу транзитивности: $a \sim x,\ x \sim b \Rightarrow a \sim b$.

3) Пусть $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ и $z \in [x] \cap [y]$. Тогда, $z \sim x$ и $z \sim y$, откуда, в силу симметричности и транзитивности, следует $x \sim y$. Для любого $a \in [x]$, $a \sim x$. И, так как $x \sim y$, то $a \sim y$, то есть, $a \in [y]$. Следовательно, $[x] \subset [y]$. Аналогично доказывается, что $[y] \subset [x]$. Из обоих включений следует равенство $[x] = [y]$.

4) Классы эквивалентности, представляют собой непустые, непересекающиеся подмножества множества A, отсюда следует, что

$$\bigcup_{x \in A} [x] \subset A.$$

С другой стороны, $\forall x \in A$,

$$x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in A}[x] \Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A}[x] \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A}[x]. \ ▲$$

Следствие 1

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y. \ ▲$$

Следствие 2

Любое отношение эквивалентности определенное на некотором множестве индуцирует (задает) его разбиение. ▲

Определение. Множество всех классов эквивалентности называется фактор-множеством множества A относительно отношения эквивалентности $\sim$, и обозначается $A/\sim$.

Определение. Любой элемент из класса эквивалентности называется его представителем.

Определение. Множество представителей классов эквивалентности, взятых в точности по одному из каждого класса эквивалентности, называется полной системой представителей классов эквивалентности.

Для описания фактор-множества применяют такой прием. Составляют полную систему представителей классов эквивалентности. Далее, отождествляют весь класс эквивалентности с его выбранным представителем. Тогда фактор-множеством можно считать полную систему представителей классов эквивалентности.

Примеры

Рассмотрим примеры отношений эквивалентности, и те, которые были приведены выше и новые, и для каждого отношения эквивалентности опишем его классы эквивалентности и фактор-множество.

1) Отношение равенства на произвольном множестве A:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

Здесь любой класс эквивалентности состоит из одного единственного элемента: $[x] = \{x\}$ с единственным его представителем x. Поэтому, полная система представителей классов эквивалентности совпадает с самим множеством A. Можно отождествить класс $[x]$ с элементом x и фактор-множество $(A/\sim) = A$.

2) Равномощность слов русского языка:

$$x \sim y \overset{df}{\Leftrightarrow} L(x) = L(y),$$

где L(x) – длина слова x. Здесь класс эквивалентности состоит из слов одинаковой длины. Например,

$$[\text{рука}] = \{\text{рука, слон, часы, ...}\}.$$

Полная система представителей классов эквивалентности содержит по одному слову длины 1, 2, …, M, где M наибольшая длина слова из множества Я – множества всех литературных слов русского языка:

{я, он, она, мама, …, математика, …}.

Здесь удобно отождествить класс эквивалентности с натуральным числом – длиной слова. Тогда,

$$(Я/\sim) = \{1, 2, ..., M\}.$$

3) Определим отношение "быть родственником" на множестве всех людей H более широко, чем, может быть, это принято. Мы будем полагать, что любой человек является родственником самому себе, и будем придерживаться принципа: родственник моего родственника и мой родственник. Тогда это отношение, очевидно, есть отношение эквивалентности, и понятно, что класс эквивалентности представляет собой множество людей, состоящих в родстве друг с другом. Часто такое множество людей называют кланом или родом. Клан может состоять и из одного человека, если он круглый сирота. Фактор-множество есть множество всех кланов. Если из каждого клана в качестве его представителя взять человека наибольшего возраста и назвать его старейшиной, то полную систему представителей классов эквивалентности можно назвать "Советом старейшин". А если отождествить клан с его старейшиной, то Совет старейшин и есть фактор-множество.

4) Отношение "равноудаленности" точек плоскости P от фиксированной точки O этой плоскости:

$$A \sim B \Leftrightarrow OA = OB.$$

Это отношение есть отношение эквивалентности. Класс эквивалентности есть точки окружности с центром в точке O и фиксированного радиуса R. Фактор-множество есть множество всех концентрических окружностей с центром в точке O. Полная система представителей классов эквивалентности есть множество точек, взятых в точности по одной из каждой окружности.

Введем на данной плоскости прямоугольную декартовую систему координат с точкой O в начале координат. Любая окружность с центром в начале координат пересекает неотрицательную полуось абсцисс в единственной точке и наоборот, через каждую ее точку проходит единственная окружность с центром в начале координат. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми окружностями плоскости с центром в точке O и всеми неотрицательными действительными числами – радиусами этих окружностей.

Из каждого класса, то есть из каждой окружности, мы выбираем одного представителя – ту точку окружности, которая лежит на положительной полуоси абсцисс. Координата точки на оси абсцисс равна радиусу окружности, проходящей через эту точку.

Таким образом, неотрицательная полуось оси абсцисс будет полной системой представителей классов эквивалентности, то есть

$$\mathbb{R}^+_o = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Если мы отождествим каждый класс эквивалентности, то есть окружность, с ее радиусом, тогда мы можем считать, что фактор-множество есть неотрицательная полуось оси абсцисс или множество: $(P/\sim) = \mathbb{R}^+_o$.

5) Эквивалентные бесконечно малые числовые функции, определенные в некоторой окрестности нуля, при $x \to 0$.

Класс эквивалентности состоит из эквивалентных друг другу бесконечно малых. Здесь, в качестве представителя класса эквивалентности удобно взять действительную степень x, где полагаем, что $x > 0$. Тогда, системой представителей классов эквивалентности будет множество $\{x^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$. Правда, остается открытым вопрос: будет ли эта система представителей полной? Если мы ограничимся лишь теми бесконечно малыми числовыми функциями, каждая из которых эквивалентна некоторой степени положительной переменной x, тогда любой класс эквивалентности содержит некоторую степень x и его удобно обозначить через $[x^\alpha]$. Фактор-множество в этом случае есть множество

$$(F/\sim) = \{[x^\alpha]\}_{\alpha\in\mathbb{R}}.$$

Если отождествить класс эквивалентности $[x^\alpha]$ с его представителем x^α, тогда фактор-множество есть множество всех действительных степеней положительного аргумента x, то есть полная система представителей классов эквивалентности:

$$(F/\sim) = \{x^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}.$$

6) Отношение эквивалентности на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$, определенное условием:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2.$$

Отождествим комплексные числа с точками на комплексной плоскости. Тогда класс эквивалентности совпадает с множеством комплексных чисел, имеющих одинаковый аргумент, то есть с лучом с выколотым началом в начале координат. Комплексное число равное нулю отождествляется с началом координат и имеет аргумент равный нулю, поэтому принадлежит лучу, совпадающему с положительной полуосью оси абсцисс.

Из каждого класса выберем по одному представителю, то есть из каждого луча возьмем по одной точке, находящейся на расстоянии 1 от начала координат, то есть комплексное число, модуль которого равен 1. Тогда полная система представителей классов эквивалентности будет представлять собой множество комплексных чисел, модуль которых равен 1, то есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Обозначим через

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

– множество точек окружности радиуса 1 с центром в начале координат, то есть тригонометрическая окружность. Тогда T – полная система представителей классов эквивалентности, и если мы отождествим каждый

класс эквивалентности (то есть луч) с его представителем, то множество T и будет фактор-множеством:

$$(\mathbb{C}/\sim) = T.$$

Следующий пример имеет множество приложений и поэтому имеет большое значение.

7) Сравнение по заданному модулю на множестве целых чисел:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y(m) \Leftrightarrow m \mid (x - y),$$

где фиксированное натуральное число $m > 1$ мы будем называть модулем.

Как легко видеть, сравнение по модулю есть отношение эквивалентности на множестве целых чисел.

Определение. Пусть $x \equiv y(m)$. Тогда число y называется вычетом числа x по модулю m.

Теорема (О наименьшем неотрицательном вычете)

Наименьший неотрицательный вычет целого числа x *по модулю* m *равен остатку от деления числа* x *на модуль* m.

Доказательство. Разделим число x на модуль m с остатком. Тогда, $x = m \cdot q + r$, где q – неполное частное, r – остаток от деления, который может быть равен одному из следующих чисел: $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Так как $x - r = mq$, то $m \mid x - r$ и $x \equiv r(\mathrm{mod}\, m)$, то есть число r есть вычет числа x по модулю m. Если $r = 0$, тогда нуль является наименьшим неотрицательным вычетом числа x по модулю m. Пусть $0 < r < m$ и не является наименьшим неотрицательным вычетом. Тогда существует вычет $0 \le a < r$, и $x \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$. Отсюда, в силу симметричности, $r \equiv x(\mathrm{mod}\, m)$ и, в силу транзитивности, $r \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$, то есть $m \mid r - a$, откуда следует, что $m \le r - a$. Однако, последнее неравенство невозможно, так как из неравенств $0 < r < m$ и $0 \le a < r$ следует неравенство $0 < r - a < m$. Таким образом, r есть наименьший неотрицательный вычет числа x по модулю m. ▲

Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности, в котором находится число x. Из определения класса эквивалентности и свойства симметричности следует, что

$$[x] = \{a \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(\mathrm{mod}\, m)\}.$$

Из определения вычетов следует, что класс состоит из вычетов числа x по модулю m и поэтому называется классом вычетов по модулю m.

Определение. Классом вычетов по модулю m называется множество всех чисел, сравнимых друг с другом по данному модулю:

$$[x] = \{a \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(\operatorname{mod} m)\}.$$

В качестве представителя класса вычетов возьмем наименьший неотрицательный вычет r, так что $[x] = [r]$, где $r = 0,1,2,...,m-1$.

Определение. Множество чисел, взятых в точности по одному из каждого класса вычета, называется полной системой вычетов по модулю m.

Из определения следует, что множество $\{0,1,2,...,m-1\}$ является полной системой вычетов по модулю m. Отсюда, в частности, следует, что существует ровно m классов вычетов по модулю m. Тогда фактор-множество есть множество классов вычетов по модулю m:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2],..,[m-1]\}.$$

Данное фактор-множество получило специальное обозначение:

$$Z_m \doteq \mathbb{Z}/\sim.$$

Таким образом, фактор-множество в этом примере есть множество

$$Z_m = \{[0],[1],[2],..,[m-1]\}.$$

Определение. Множество $Z_m = \{[0],[1],[2],..,[m-1]\}$ называется множеством классов вычетов по модулю m.

Можно пойти дальше и отождествить класс вычетов $[r]$ с самим наименьшим неотрицательным вычетом r. Тогда фактор-множество, то есть множество классов вычетов по модулю m, есть полная система вычетов по модулю m:

$$Z_m = \{0,1,2,...,m-1\}.$$

Подытожим все сказанное и доказанное выше в виде теоремы.

Теорема (О сравнении по модулю и классах вычетов)

1) Отношение сравнимости по модулю на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности:

$$x \equiv y(m) \Leftrightarrow m \mid (x-y).$$

2) Класс эквивалентности совпадает с классом вычетов по заданному модулю:

$$[x] = \{a \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(\operatorname{mod} m)\}.$$

3) Каждое целое число находится в том классе вычетов по модулю m*, в котором находится его наименьший неотрицательный вычет:*

$$x \in [r], \text{ где } x = m \cdot q + r, \ 0 \le r < m.$$

4) Существует ровно m *классов вычетов по модулю* m.

5) Полная система вычетов по модулю m*:* $\{0,1,2,...,m-1\}$ *является полной системой представителей классов эквивалентности.*

6) Все классы вычетов по модулю m *образуют фактор-множество множества целых чисел относительно сравнения по модулю m:*

$$Z_m \doteq \mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2],..,[m-1]\}. \ \blacktriangle$$

Например, пусть $m = 2$. Тогда

$$Z_2 = \{[0],[1]\}$$

– множество классов вычетов по модулю 2, где $[0] = 2\mathbb{Z}$ – множество всех четных чисел, $[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1(\operatorname{mod} 2)\}$ – множество всех нечетных чисел.

Множества

$$\{0;1\}, \ \{2;5\}, \ \{-1,10\}$$

представляют собой различные полные системы вычетов по модулю 2.

Дополнительные примеры отношений эквивалентности

1) Пусть p – простое число и n – целое число. Целое число $t \ge 0$, удовлетворяющее условию: $(p^t \mid n) \& (p^{t+1} \nmid n)$ называется показателем числа n в "точке" p и обозначается: $t \doteq \nu_p(n)$. Например, $\nu_2(12) = 2$, $\nu_2(13) = 0$, $\nu_2(32) = 5$, $\nu_2(30) = 1$. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ положим по определению

$$a \sim b \Leftrightarrow \nu_2(a) = \nu_2(b).$$

2) Для любых двух упорядоченных пар натуральных чисел

$$(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$$

положим по определению

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Если обозначить через $S(n)$ – множество упорядоченных пар натуральных чисел $(a;b)$, таких, что $a+b=n$, то понятно, что $S(n)$ – это и есть класс эквивалентности, где n – любое натуральное число кроме 1. Так, что фактор-множество

$$\mathbb{N}^2/\sim = \{S(n)\}_{n=2}^{\infty}.$$

3) Пусть A - произвольное непустое множество. Конечной последовательностью элементов множества A длины $n \in \mathbb{N}$ называется произвольный элемент n-й декартовой степени A^n множества A. Пусть P – множество всех конечных последовательностей элементов множества A.

$$P \doteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$$

Заметим, что в отличие от A^n в множество P входят кортежи любой конечной длины. Если x - произвольная конечная последовательность из P, то обозначим через $l(x)$ длину этой последовательности и $\forall x, y \in P$ положим по определению

$$x \sim y \Leftrightarrow l(x) = l(y).$$

Ясно, что это отношение эквивалентности. Класс эквивалентности – это в точности A^n. Фактор-множество:

$$P/\sim = \{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

4) Пусть $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, где $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}$ положим по определению:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Если представить элементы из $\mathbb{Q}$ в виде дроби, то условие эквивалентности выглядит следующим образом:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \overset{df}{\Leftrightarrow} ad = bc,$$

но последнее в свою очередь равносильно тому, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Таким образом, класс эквивалентности (а то, что это отношение есть отношение эквивалентности проверяется тривиально) есть ни что иное, как множество упорядоченных пар целых чисел, которые представляют одну и ту же дробь. Таким образом, если отождествить классы эквивалентности с рациональными дробями, то фактор-множество есть ни что иное, как множество рациональных чисел.

5) Пусть P - множество точек координатной плоскости, O - начало координат, $P_O = P\setminus\{O\}$ - множество точек координатной плоскости без начала координат.

а) $\forall A, B \in P$, $A \sim B$ тогда и только тогда, когда точка A лежит на прямой OB;

б) приведите свой пример отношения эквивалентности на множестве P или P_O.

6) Пусть A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} - множество цифр. Назовем две цифры x и y топологически эквивалентными, если цифру y можно получить из цифры x путем сжатия и растяжения без разрыва, как если бы они были сделаны из пластилина. Тогда,

$$\{0,4,6\}, \{1,2,3,5,7\}, \{8\}$$

- все классы эквивалентности.

Упражнения

159. Докажите, что отношение "быть однофамильцем" есть отношение эквивалентности на множестве людей. Приведите пример класса эквивалентности. Опишите фактор-множество.
160. На множестве всех слов русского языка, положим слово x эквивалентным слову y, если их первые буквы совпадают. Докажите, что это отношение действительно является отношением эквивалентности. Приведите пример класса эквивалентности. Опишите фактор-множество, какова его мощность. Является ли алфавит русского языка полной системой представителей классов эквивалентности?
161. Обозначим через N(x) – количество вхождений первой буквы слова x в слово x. Например, $N(\text{мама}) = 2$. Определим отношение (Я, ~) правилом:
$$x \sim y \Leftrightarrow N(x) = N(y).$$
Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности. Приведите пример класса эквивалентности. Опишите фактор-множество.
162. Укажите две полные системы вычетов по модулю 3, кроме {0,1,2} и опишите словами класс вычетов [2] по модулю 3.

Глава 19. Понятие поля и линейного пространства
§1. Отображение множеств

Определение. Отображением множества A в множество B называется правило (соответствие), по которому каждому элементу множества A ставится в соответствие единственный для него элемент множества B.

Обозначение:

$$f : A \to B,$$

где f – имя (наименование) отображения. Если $a \in A$ – элемент множества A, то элемент множества B, который ставится ему в соответствие при этом отображении обозначается $f(a)$. Это записывается следующим образом:

$$a \in A \mapsto f(a) \in B.$$

Определение. Элемент $f(a)$ называется образом элемента a или значением отображения f "в точке a". При этом сам элемент a называется прообразом элемента $f(a)$.

Замечание. Слова "отображение" и "функция" являются синонимами, их применение в различных областях математики сложилось исторически. Термин функция традиционно применяется, когда множества A и B являются числовыми множествами. В современной алгебре и геометрии больше принят термин отображение. В зависимости от конкретной природы множеств A и B применяют и другие термины: преобразование, оператор, функционал, и так далее . . .

Определение. Пусть $f : A \to B$ – отображение множества A в множество B. Множество A называется областью определения отображения f, и обозначается $\operatorname{Dom} f$ или $D(f)$, а множество значений отображения f обозначается

$$\operatorname{Im} f \doteq \{f(a) \in B \mid a \in A\},$$

и называется образом отображения f.

Замечание. Если $f : A \to B$, то $D(f) = A$, а $\operatorname{Im} f$ является подмножеством множества B, то есть $\operatorname{Im} f \subset B$.

Для того, чтобы определить (задать) отображение множества A в множество B нужно задать сами множества A и B, а затем задать правило с помощью которого мы сможем для каждого $a \in A$ находить соответствующий ему элемент $f(a) \in B$.

Это правило можно задать простой таблицей, если множество A конечное и имеет небольшое число элементов. Это правило можно задать с помощью формулы (математического выражения). Это правило можно задать с помощью некоторого алгоритма (процедуры). Все зависит от конкретной ситуации.

Упражнения

163. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задано формулой: $f(x) = x^2$. Найдите $\operatorname{Im} f$.
164. Пусть A – множество букв русского языка, то есть, его алфавит; Я – множество всех слов современного русского литературного языка. Поставим в соответствие каждой букве алфавита A слово из множества Я, которое оканчивается на данную букву. Определяет ли указанное соответствие отображение множества A в множество Я? А если наоборот? Поставим в соответствие каждому слову из множества Я его последнюю букву. Будет ли это соответствие отображением множества Я в множество A? Будет ли это соответствие инъективным, сюръективным или биективным?

§2. Алгебраическая операция

Определение. Пусть A – произвольное множество, $A^2 \doteq A \times A$ – его декартов квадрат. Внутренней бинарной алгебраической операцией на множестве A называется отображение $A^2 \to A$.

Другими словами, говорят, что на множестве A задана алгебраическая операция, если каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x и y множества A поставлено в соответствие, по некоторому правилу, единственный для этой пары элемент $z \in A$.

Говорят также, что этот элемент z есть результат алгебраической операции, примененной к паре (x, y) и этот элемент (результат операции) записывается специальным образом. Вот примеры записи результата алгебраической операции:

$$z = x + y,\ z = x \cdot y,\ z = x \circ y,\ z = x * y,\ z = x \cup y,\ z = x \oplus y.$$

Применяются и другие символы. Для записи произвольной алгебраической операции на произвольном множестве мы будем применять знак звездочки: *.

Пусть A - произвольное множество. Для того, чтобы задать на множестве A алгебраическую операцию * необходимо выполнить два условия:

1) нужно определить правило, по которому любым двум элементам x и y множества A ставился бы в соответствие единственный для этой пары элементов (именно в этом порядке: x, y) элемент $z = x * y$;

2) элемент $z = x * y$ должен принадлежать множеству A. В этом случае говорят, что множество A замкнуто относительно этой операции *.

Так как по определению алгебраическая операция есть отображение множеств, то способы задания алгебраической операции повторяют способы задания отображения (функции): описательный, аналитический, табличный, графический и так далее.

Рассмотрим на примере табличный способ задания алгебраической операции.

Пример. Пусть $A = \{a, b, c\}$ – произвольное множество из трех элементов. Зададим на множестве A алгебраическую операцию * с помощью таблицы:

*	a	b	c
a	$a*a$	$a*b$	$a*c$
b	$b*a$	$b*b$	$b*c$
c	$c*a$	$c*b$	$c*c$

Эта таблица пока еще не задает никакой алгебраической операции на множестве A, так как мы еще не определили отображения $A^2 \to A$. Заполним эту таблицу, поставив в соответствие каждой упорядоченной паре элементов множества A конкретный элемент множества A:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	a
c	a	c	b

Здесь, $a * b = b$, $b * a = c$, $c * b = c$, и так далее.

Такая таблица, задающая операцию, называется таблицей Кэли. Если операцию называют сложением, то таблицу Кэли называют таблицей сложения. Если операцию называют умножением, то таблицу Кэли называют таблицей умножения.

Понятно, что заполняя клетки этой таблицы другими элементами множества A, мы получим другую операцию на том же множестве A.

Нетрудно подсчитать, что на данном множестве A можно определить $3^9 = 19683$ различных алгебраических операций. Действительно, каждую клетку этой таблицы (а их ровно 9) можно заполнить тремя способами. Таким образом, мы видим, что алгебраических операций, даже на конечных множествах можно определить много. Конечно же, не все из них представляют интерес. А интерес для нас будут представлять только те алгебраические операции, которые обладают некоторыми свойствами.

Упражнение

165. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определены две внутренние бинарные алгебраические операции – сложение и умножение. Какие из этих двух операций определены на подмножестве $A = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$? Другими словами, замкнуто ли подмножество A относительно операций сложения и умножения?

§3. Свойства алгебраических операций

Определение. Алгебраическая операция *, определенная на множестве A называется коммутативной, если она подчиняется закону коммутативности, то есть, если для любых двух элементов x и y множества A верно равенство:

$$x * y = y * x .$$

В школьных учебниках математики это свойство, относительно операций сложения и умножения чисел, называется переместительным законом.

Определение. Алгебраическая операция *, определенная на множестве A называется ассоциативной, если она подчиняется закону ассоциативности, то есть, для любых трех элементов x, y, z множества A верно равенство:

$$(x * y) * z = x * (y * z) .$$

Здесь сначала определяется результат операции в скобках, а затем еще раз применяется операция к оставшимся двум элементам. При этом, если результат операции не зависит от способа расстановки скобок, то операция называется ассоциативной. В школьных учебниках математики это свойство, относительно операций сложения и умножения чисел, называется сочетательным законом.

Пусть на множестве A определены две алгебраических операции: $*$ и $\perp$ (назовем их "звездочкой" и "перпендикулярчиком").

Определение. Говорят, что операция звездочка дистрибутивна относительно операции перпендикулярчик, если $\forall x, y, z \in A$ верны два равенства:

$$x*(y \perp z) = (x*y) \perp (x*z) \text{ и } (y \perp z)*x = (y*x) \perp (z*x).$$

В школьных учебниках математики это свойство, относительно операций сложения и умножения чисел, называется распределительным законом умножения относительно сложения:

$$(x+y)z = xz + yz \text{ и } z(x+y) = zx + zy.$$

Заметим, что операция сложения чисел не дистрибутивна относительно их умножения:

$$x + (yz) \neq (x+y)(x+z).$$

Наиболее распространенными обозначениями алгебраических операций являются символы "$+$" и "$\cdot$". В соответствии с этими обозначениями алгебраические операции называются сложением и умножением. Результат сложения называется суммой, умножения – произведением.

Определение. Если алгебраическую операцию называют сложением и обозначают символом сложения "$+$", то говорят, что алгебраическая операция имеет аддитивную форму записи. Если алгебраическую операцию называют умножением и обозначают символом умножения "$\cdot$", то говорят, что алгебраическая операция имеет мультипликативную форму записи.

Примеры

1) Пусть дано некоторое множество V. Обозначим через $\mathfrak{P}(V)$ – множество всех подмножеств множества V. Тогда на множестве $\mathfrak{P}(V)$ определены две операции: объединение и пересечение множеств.

Действительно, для любых двух подмножеств A и B множества V, то есть, $\forall A, B \in \mathfrak{P}(V)$, $A \cup B$ и $A \cap B$ – тоже подмножества множества

V, то есть, $A \cup B, A \cap B \in \mathfrak{P}(V)$. Легко проверяется (например, с помощью диаграмм Венна), что обе операции являются коммутативными, ассоциативными и каждая из них является дистрибутивной относительно другой.

2) Обозначим через $\mathbb{R}[x]$ – множество всех многочленов с действительными коэффициентами и от одной переменной (буквы) x. На этом множестве определены операции сложения многочленов и их умножение. Обе операции являются ассоциативными и коммутативными, причем умножение многочленов дистрибутивно относительно их сложения.

Упражнения

166. Пусть на множестве действительных чисел заданы две операции:
   а) $x \dagger y \doteq x^2 \cdot y$, где умножение в правой части равенства есть обычное умножение действительных чисел;
   б) $x \downarrow y \doteq \min\{x, y\}$.
   Выясните, обладают ли эти алгебраические операции свойствами коммутативности или ассоциативности. Является ли хотя бы одна из них дистрибутивной относительно другой, то есть, верны ли следующие равенства:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x \dagger (y \downarrow z) = (x \dagger y) \downarrow (x \dagger z)$ и $(x \downarrow y) \dagger z = (x \dagger z) \downarrow (y \dagger z)$;
   или $x \downarrow (y \dagger z) = (x \downarrow y) \dagger (x \downarrow z)$ и $(x \dagger y) \downarrow z = (x \downarrow z) \dagger (y \downarrow z)$.
167. Проверьте, подчиняется ли закону ассоциативности операция разности множеств, то есть, верно ли следующее равенство для произвольных множеств A, B и C:
   $$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)\ ?$$
168. Множество $A \vartriangle B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ называется симметрической разностью множеств A и B. Докажите, что симметрическая разность множеств является коммутативной и ассоциативной операцией.
169. Докажите, что пересечение множеств подчиняется закону дистрибутивности относительно симметрической разности, то есть, для любых множеств A, B и C верно равенство:
   $$A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C) \text{ и } (A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$$
170. Определим на множестве всех слов конечной длины W в алфавите русского языка операцию приписывания слов, которую назовем умножением: $\forall x, y \in W:\ x \cdot y \doteq xy$. (К слову x без пробела приписывается слово y.) Для любых слов $x, y \in W$, обозначим через y_x слово, которое получается из слова y удалением тех букв, которые есть в слове x, и определим операцию сложения: $\forall x, y \in W: x + y \doteq xy_x$. Докажите, что обе операции ассоциативные и некоммутативные. Покажите на примерах, что ни одна из них не дистрибутивна относительно другой.

§4. Обобщенный закон ассоциативности

Пусть на некотором множестве S определена алгебраическая операция, которую мы будем записывать в мультипликативной форме и называть умножением.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ – произвольные элементы множества S. Чтобы их произведение $x_1 x_2 ... x_n$ имело смысл, необходимо расставить скобки, указывающие порядок умножения элементов. Скобки, в свою очередь, можно расставить различными способами. Например, для произведения четырех элементов скобки можно расставить пятью способами:

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4), x_1((x_2 x_3)x_4), ((x_1 x_2)x_3)x_4, (x_1(x_2 x_3))x_4, x_1(x_2(x_3 x_4)).$$

Определение. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ – произвольные элементы множества S. Произведение

$$(...((x_1 x_2)x_3)...x_{n-1})x_n$$

называется стандартным произведением и обозначается

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \doteq (...((x_1 x_2)x_3)...x_{n-1})x_n .$$

Теорема (Обобщенный закон ассоциативности)

Пусть на множестве S *определена ассоциативная операция умножения. Тогда произведение любых* n *(*$n > 2$*) элементов* $x_1, x_2, ..., x_n$ *этого множества не зависит от способа расстановки скобок и равно их стандартному произведению* $\prod_{k=1}^{n} x_k$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу множителей n.

База индукции $n = 3$.

Для трех множителей есть лишь два способа расставить скобки: $x_1(x_2 x_3)$ и $(x_1 x_2)x_3$. Но в силу ассоциативности умножения верно равенство

$$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)x_3,$$

где произведение справа является по определению стандартным. База индукции доказана.

Индукционная гипотеза.

Допустим, что теорема верна, если число множителей в произведении меньше или равно $n-1$.

Индукционный переход.

Обозначим через $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ произведение элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in S$, в котором некоторым способом расставлены скобки. Тогда, очевидно, при любой расстановке скобок в произведении $x_1 x_2 ... x_n$ найдется такое число k, $1 \le k \le n-1$, что

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k)\varphi(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n).$$

В силу индукционной гипотезы

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_k) = \prod_{i=1}^{k} x_i , \quad \varphi(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n-k} x_{k+j}$$

– стандартные произведения. Следовательно,

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} x_{k+j}\right).$$

Рассмотрим два возможных здесь случая. Пусть $k = n-1$. Тогда

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

– стандартное произведение. Пусть теперь, $k < n-1$. Тогда

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\left(\prod_{j=1}^{n-k-1} x_{k+j}\right)x_n\right) = \left(\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k-1} x_{k+j}\right)\right)x_n =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i ,$$

где мы снова применили закон ассоциативности для трех множителей:

$$\prod_{i=1}^{k} x_i , \ \prod_{j=1}^{n-k-1} x_{k+j} \text{ и } x_n ,$$

а затем воспользовались индукционной гипотезой:

$$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k-1} x_{k+j}\right) = \prod_{i=1}^{n-1} x_i ,$$

и определением стандартного произведения:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i . \ \blacktriangle$$

Заметим, что если операция, определенная на множестве S записывается в аддитивной форме и называется сложением, то по определению стандартной суммой n элементов множества S называется сумма

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \doteq (...((x_1 + x_2) + x_3) + ... + x_{n-1}) + x_n ,$$

и, естественно, обобщенный закон ассоциативности справедлив и в этом случае, с заменой знака умножения на знак суммы.

Упражнение

171. Докажите обобщенный закон ассоциативности, принимая в качестве стандартного произведения следующую расстановку скобок:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \doteq x_1(x_2...(x_{n-1}x_n)...) .$$

§5. Степени и кратные элементов

Пусть на множестве S определена ассоциативная операция умножения. Введем понятие натуральной степени произвольного элемента $x \in S$.

Определение. Пусть $x \in S$ и n – натуральное число. Натуральной степенью элемента x называется произведение

$$x^n \doteq \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{\text{n штук}} = \prod_{1}^{n} x .$$

Последнее равенство в определении имеет смысл в силу обобщенного закона ассоциативности.

Теорема (Действия со степенями)

Пусть на множестве S *определена ассоциативная операция умножения. Пусть* n *и* m *– произвольные натуральные числа. Тогда* $\forall x \in S$*:*

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn} .$$

Доказательство. Оба равенства верны в силу обобщенного закона ассоциативности:

$$x^m \cdot x^n = \left(\prod_{1}^{m} x\right)\left(\prod_{1}^{n} x\right) = \prod_{1}^{m+n} x = x^{m+n} ,$$

$$(x^m)^n = \underbrace{\left(\prod_{1}^{m} x\right) \cdot \left(\prod_{1}^{m} x\right) \cdot ... \cdot \left(\prod_{1}^{m} x\right)}_{\text{n штук}} = \prod_{1}^{m \cdot n} x = x^{m \cdot n} . \ \blacktriangle$$

Аналогично определяется понятие кратного элемента, если на множестве S определена ассоциативная операция сложения.

Определение. Пусть $x \in S$ и n – натуральное число. Кратным элемента x называется сумма

$$nx \doteq \underbrace{x + x + ... + x}_{\text{n штук}} = \sum_{1}^{n} x .$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме о действиях со степенями.

Теорема (Действия с кратными)

Пусть на множестве S определена ассоциативная операция сложения, и пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall x \in S$:

$$(mx) + (nx) = (m + n)x , \quad m(nx) = (m \cdot n)x .$$

Упражнения

172. Пусть на множестве действительных чисел определена операция:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \downarrow y \doteq \min\{x, y\} .$$

Докажите, что она ассоциативная и найдите натуральную степень элемента

$$x^n \doteq \underbrace{x \downarrow x \downarrow ... \downarrow x}_{\text{n штук}} .$$

173. Пусть A – произвольное множество, $\mathfrak{P}(A)$ – множество всех подмножеств множества A. Определим на множестве $\mathfrak{P}(A)$ операцию сложения:

$$\forall x, y \in \mathfrak{P}(A) : x + y \doteq x \vartriangle y \doteq (x \cup y) \setminus (x \cap y) .$$

Найдите кратное nx для произвольного элемента $x \in \mathfrak{P}(A)$ и $n \in \mathbb{N}$.

§6. Нейтральные элементы

Определение. Множество S, вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, определенными на этом множестве называется алгебраической структурой.

Обозначение:

(S, *) – алгебраическая структура с одной алгебраической операцией *;

$(S, *, \perp)$ – алгебраическая структура с двумя алгебраическими операциями.

Определение. Элемент $e \in S$ называется левым (правым) нейтральным элементом относительно алгебраической операции *, если
$$\forall x \in S : e * x = x \;,\; (\, x * e = x \,).$$

Определение. Элемент $e \in S$ называется двусторонним нейтральным элементом относительно алгебраической операции * или просто нейтральным элементом, если он является одновременно и левым и правым нейтральным элементом:
$$\forall x \in S : e * x = x * e = x \,.$$

Определение. Пусть на множестве S определена операция сложения. Нейтральный элемент относительно сложения называется нулевым элементом или просто нулем и обозначается цифрой 0:
$$\forall x \in S : x + 0 = 0 + x = x \,.$$

Определение. Пусть на множестве S определена операция умножения. Нейтральный элемент относительно умножения называется единичным элементом или просто единицей и обозначается либо цифрой 1, либо буквой e:
$$\forall x \in S : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \text{или} \quad x \cdot e = e \cdot x = x \,.$$

Аналогично односторонние нейтральные элементы относительно сложения или умножения называются левым (правым) нулем или, соответственно, левой (правой) единицей.

Теорема (О единственности нейтрального элемента)
Пусть $(S, *)$ *– алгебраическая структура. Тогда, если во множестве* S *существуют левые и правые нейтральные элементы, то все они равны между собой, и этот элемент является единственным двусторонним нейтральным элементом.*

Доказательство. Пусть $e' \in S$ – произвольный левый нейтральный элемент, а $e'' \in S$ – произвольный правый нейтральный элемент. Тогда $\forall x \in S$ выполняются равенства:
$$e' * x = x \quad \text{и} \quad x * e'' = x \,.$$
Это значит, что эти равенства выполняются и при $x = e''$ и при $x = e'$:
$$e' * e'' = e'' \quad \text{и} \quad e' * e'' = e' \,.$$

Отсюда следует, что
$$e'' = e' * e'' = e' \,. \;\blacktriangle$$

Следствие
Пусть $(S, *)$ *– алгебраическая структура. Тогда, если во множестве* S *существует нейтральный элемент, то он единственный.* ▲

Заметим, что алгебраическая структура (S, *) может иметь бесконечно много односторонних нейтральных элементов (только левых или только правых). Смотрите далее примеры и упражнения.

Примеры

1) Число $0 \in \mathbb{R}$ является нейтральным (нулевым) элементом в алгебраической структуре $(\mathbb{R}, +)$. Это же число является нулевым элементом в алгебраических структурах $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Z}, +)$. Число 1 является нейтральным (единичным) элементом в алгебраических структурах $(\mathbb{R}^{\bullet}, \cdot)$ $(\mathbb{Q}^{\bullet}, \cdot)$ и $(\mathbb{Z}^{\bullet}, \cdot)$, где $\mathbb{R}^{\bullet} \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^{\bullet} \doteq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^{\bullet} \doteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) Определим на декартовом квадрате $\mathbb{R}^2 \doteq \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ алгебраическую операцию умножения: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) \cdot (c, d) \doteq (ac, ad) \,.$$
Тогда любая пара $(1, x) \in \mathbb{R}^2$, очевидно, является левой единицей:
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (1, x) \cdot (a, b) = (a, b) \,.$$
Легко убедиться, что умножение пар не подчиняется закону коммутативности, и что правых единиц нет. Проверьте, в качестве упражнения, что умножение пар подчиняется закону ассоциативности.

Упражнения

174. На произвольном множестве M определена операция: $\forall x, y \in M : x \triangleright y \doteq y$. Обладает ли алгебраическая структура $(M, \triangleright)$ нейтральными элементами? Проверьте для данной алгебраической операции законы коммутативности и ассоциативности.
175. В упражнении 170 на множестве всех слов конечной длины W в алфавите русского языка определены две операции – сложение и умножение слов. Покажите, что относительно обеих операций единственным нейтральным элементом является пустое слово (слово длины 0, то есть слово не имеющее в

своем составе ни одной буквы), а значит обе операции не имеют никаких других нейтральных элементов (ни односторонних, ни двусторонних).

176. Придумайте алгебраическую структуру с одной операцией, имеющую бесконечно много правых нейтральных элементов.

§7. Симметричные элементы

Определение. Пусть (S, *) – алгебраическая структура с нейтральным элементом e. Элемент $x' \in S$ называется левым (правым) симметричным элементу $x \in S$ относительно алгебраической операции *, если

$$x' * x = e \quad (x * x' = e).$$

Определение. Элемент $x' \in S$ называется двусторонним симметричным элементу $x \in S$ или просто симметричным элементу $x \in S$, если $x * x' = x' * x = e$.

Определение. Пусть (S, *) – алгебраическая структура с нейтральным элементом e. Если каждый элемент $x \in S$ имеет симметричный ему $x' \in S$, тогда говорят, что множество S симметричное относительно операции *.

Теорема (О единственности симметричного элемента)

Пусть $(S,*)$ *– алгебраическая структура с нейтральным элементом* e *и ассоциативной алгебраической операцией *. Если элемент* $x \in S$ *имеет левые и правые симметричные ему элементы , то все они равны между собой, и этот элемент является единственным двусторонним симметричным элементу* $x \in S$.

Доказательство. Пусть элемент $x \in S$ и $x' \in S$ – произвольный левый симметричный ему элемент, $x'' \in S$ – произвольный правый симметричный. Тогда из определения симметричных элементов следует, что выполняются два равенства:

$$x' * x = e \text{ и } x * x'' = e.$$

Но, тогда, $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$. ▲

Следствие

Если элемент алгебраической структуры с ассоциативной операцией имеет симметричный ему элемент, тогда этот симметричный элемент является единственным. ▲

Определение. В алгебраической структуре с аддитивной формой записи алгебраической операции элемент, симметричный элементу x, называется противоположным, и обозначается (– x):

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Определение. В алгебраической структуре с мультипликативной формой записи алгебраической операции элемент, симметричный элементу x, называется обратным, и обозначается x^{-1}, а сам элемент x называется при этом обратимым:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \text{ или } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Определение. В алгебраической структуре с мультипликативной формой записи алгебраической операции элемент, левый (правый) симметричный элементу x, называется левым (правым) обратным, и обозначается x_l^{-1} (x_r^{-1}), а сам элемент x называется при этом обратимым слева (справа):

$$x_l^{-1} \cdot x = e \text{ или } x_l^{-1} \cdot x = 1, \; (x \cdot x_r^{-1} = e \text{ или } x \cdot x_r^{-1} = 1).$$

Примеры

Алгебраические структуры $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ являются симметричными, так как каждый элемент структуры имеет симметричный (противоположный) ему. Алгебраические структуры $(\mathbb{Q}^{\bullet},\cdot)$, $(\mathbb{R}^{\bullet},\cdot)$ являются симметричными, так как каждое ненулевое рациональное число обратимо в $\mathbb{Q}^{\bullet}$, и каждое ненулевое действительное число обратимо в $\mathbb{R}^{\bullet}$.

Упражнения

177. Определим на множестве $\mathfrak{P}(A)$ (смотрите упражнение 173) операцию сложения и умножения:

$$\forall x, y \in \mathfrak{P}(A): x + y \doteq x \vartriangle y \doteq (x \cup y) \setminus (x \cap y), \; xy \doteq x \cap y.$$

а) Докажите, что обе операции ассоциативные и коммутативные, и умножение дистрибутивно относительно сложения. Докажите, что сложение не дистрибутивно относительно умножения.
б) Докажите, что обе операции имеют нейтральные элементы, и найдите их.
в) Докажите, что любой элемент имеет противоположный, и найдите его.

§8. Законы сокращения

Теорема (Общее свойство алгебраических операций)

Пусть $(S,*)$ *– произвольная алгебраическая структура и* $a,b,c,d \in S$. *Если* $a=b$ *и* $c=d$*, то*

$$a*c=b*d \quad и \quad c*a=d*b.$$

Доказательство. Из определения равенства упорядоченных пар следует, что $(a;c)=(b;d)$. Теперь, из определения алгебраической операции следует, что

$$(a;c)\mapsto a*c \ и \ (b;d)\mapsto b*d.$$

Так как каждой паре элементов множества S ставится в соответствие единственный элемент множества S (результат алгебраической операции), то из равенства $(a;c)=(b;d)$ сразу же следует равенство $a*c=b*d$. Аналогично доказывается второе равенство. ▲

Следствие

Если на некотором множестве определена операция сложения (или умножения), то любые два равенства можно почленно складывать (или, соответственно, умножать), то есть, если $a=b$ *и* $c=d$*, то*

$$a+c=b+d \ \ и \ \ c+a=d+b, \quad (ac=bd \ \ и \ \ ca=db).$$

Определение. Говорят, что в алгебраической структуре $(S,*)$ алгебраическая операция * подчиняется закону сокращения слева (справа), если

$$\forall a,b,c\in S: \ \ a*b=a*c \ \Rightarrow \ b=c, (\,a*b=c*b \ \Rightarrow \ a=c\,).$$

Определение. Говорят, что в алгебраической структуре алгебраическая операция подчиняется закону сокращения, если она подчиняется закону сокращения как слева, так и справа.

Например, операции сложения и умножения, определенные на множестве действительных чисел, подчиняются законам сокращения:

$$a+b=a+c \ \Rightarrow \ b=c, \quad b+a=c+a \ \Rightarrow \ b=c,$$

и, если $a\neq 0$, то

$$a\cdot b=a\cdot c \ \Rightarrow \ b=c, \quad b\cdot a=c\cdot a \ \Rightarrow \ b=c.$$

Алгебраические структуры с одной или более алгебраическими операциями, которые подчиняются определенным законам (аксиомам), получили в современной алгебре специальные названия, например: полугруппа, группа, кольцо, тело, поле, модуль, линейное (векторное) пространство и так далее.

Нам, в нашем курсе, необходимо хорошо знать две алгебраические структуры: поле и линейное (векторное) пространство.

Упражнение

178. Пусть на множестве S определена ассоциативная операция умножения с единичным элементом. Докажите, что умножение в S подчиняется закону сокращения слева (справа), если любой элемент из S обратим слева (справа).

Дополнительные примеры алгебраических операций

1) $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\uparrow y \doteq \max\{x,y\}$.

2) $\forall x,y\in\mathbb{N}: x\wedge y \doteq x^y$.

3) $\forall x,y\in\mathbb{Q}: x\odot y \doteq 2xy$, где в правой части равенства – обычное умножение рациональных чисел.

4) $\forall x,y\in Q: x\oplus y \doteq \dfrac{x+y}{2}$, где в правой части равенства – обычные действия с рациональными числами.

5) $\forall x,y\in M: x\lhd y \doteq x$, где M – произвольное непустое множество.

6) $\forall x,y\in M: x\Diamond y \doteq \theta$, где M – произвольное непустое множество, θ – произвольный фиксированный элемент из M.

7) Пусть P – произвольная плоскость. $\forall A,B\in P: A\perp B \doteq C$, где середина отрезка AB или, если $A=B$, то $C\doteq A$.

8) Пусть P – произвольная плоскость и $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq -1$ – произвольное фиксированное число. $\forall A,B\in P: A\underset{\lambda}{\oplus}B \doteq C$, где C – точка, которая делит отрезок AB в отношении λ, считая от точки A, то есть, C – точка, для которой верно равенство: $\overline{AC}=\lambda\cdot\overline{CB}$. Здесь, $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ – векторы.

9) Пусть V – множество векторов как направленных отрезков в трехмерном евклидовом пространстве. На множестве V определена операция – векторное произведение векторов $\bar a\times\bar b$. Известно, что эта операция не ассоциативная и не коммутативная, но дистрибутивная относительно сложения векторов, и не имеет нейтрального элемента.

§9. Поле

Определение. Полем называется множество $\mathbb{F}$, на котором определены две внутренние бинарные алгебраические операции (сложение и умножение) и подчиняющиеся следующим законам (аксиомы поля):

1) закон ассоциативности относительно сложения:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{F} : x + (y + z) = (x + y) + z ;$$
2) существование нулевого элемента:
$$\exists 0 \in \mathbb{F} : \forall x \in \mathbb{F}, \quad x + 0 = 0 + x = x ;$$
3) существование противоположного элемента:
$$\forall x \in \mathbb{F}, \ \exists(-x) \in \mathbb{F} : \quad x + (-x) = (-x) + x = 0 ;$$
4) закон коммутативности относительно сложения:
$$\forall x, y \in \mathbb{F} : x + y = y + x ;$$
5) закон ассоциативности относительно умножения:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{F} : x(yz) = (xy)z ;$$
6) существование единичного элемента отличного от нулевого:
$$\exists 1 \in \mathbb{F}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{F} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x ;$$
7) существование обратного элемента:
$$\forall x \in \mathbb{F}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{F} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 ;$$
8) закон коммутативности относительно умножения:
$$\forall x, y \in \mathbb{F} : xy = yx .$$
9) закон дистрибутивности умножения относительно сложения:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{F} : (x + y)z = xz + yz \quad \text{и} \quad x(y + z) = xy + xz .$$

Теорема (Простейшие свойства поля)

1) В поле сложение и умножение подчиняются закону сокращения;

2) $\forall x \in \mathbb{F} : 0 \cdot x = 0$*;*

3) $\forall x \in \mathbb{F} : (-1) \cdot x = -x$ *;*

4) если x *и* y *– элементы поля* $\mathbb{F}$*, то равенство* $xy = 0$ *возможно лишь при* $x = 0$ *или* $y = 0$.

Доказательство. 1) Докажем, что в поле выполняется закон сокращения слева относительно операции сложения. Пусть, $a, b, c \in \mathbb{F}$ – произвольные элементы поля $\mathbb{F}$, и верно равенство
$$a + b = a + c .$$
Любой элемент поля имеет противоположный ему элемент (смотрите аксиому 3 в определении поля). Пусть $-a \in \mathbb{F}$ – элемент поля $\mathbb{F}$, противо-

положный элементу $a \in \mathbb{F}$. Тогда
$$-a + a = 0 ,$$
где $0 \in \mathbb{F}$ – нулевой элемент поля $\mathbb{F}$.
Сложим два равенства:
$$a + b = a + c \quad \text{и} \quad -a = -a .$$
Получаем,
$$-a + (a + b) = -a + (a + c) .$$
Воспользуемся законом ассоциативности сложения (аксиома 1):
$$-a + (a + b) = (-a + a) + b \quad \text{и} \quad -a + (a + c) = (-a + a) + c ,$$
откуда следует равенство
$$(-a + a) + b = (-a + a) + c .$$
Так как $-a + a = 0$, то отсюда следует равенство
$$0 + b = 0 + c .$$
Так как 0 – нулевой элемент, то в силу аксиомы 2 получаем требуемое равенство
$$b = c .$$

Закон сокращения справа сразу же следует из закона коммутативности сложения и закона сокращения слева. Пусть
$$b + a = c + a .$$
Так как $b + a = a + b$ и $c + a = a + c$, то имеем равенство
$$a + b = a + c ,$$
откуда, по только что доказанному закону сокращения слева следует
$$b = c .$$

Аналогично доказывается закон сокращения относительно операции умножения: если
$$a \cdot b = a \cdot c \ \text{ и } \ a \neq 0 \text{, то } \ b = c ,$$
и если
$$b \cdot a = c \cdot a \ \text{ и } \ a \neq 0 \text{, то } \ b = c .$$

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

2) Прибавим к элементу $0 \cdot x$ элемент x и воспользуемся аксиомами поля:
$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x = 0 + x .$$
Таким образом имеем равенство
$$0 \cdot x + x = 0 + x .$$
Применяя закон сокращения, получаем равенство
$$0 \cdot x = 0 .$$

3) Применяя аксиомы поля, получаем равенство:

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0 .$$

Из этого равенства сразу же следует, что элемент $(-1) \cdot x$ является противоположным элементу x, то есть

$$(-1) \cdot x = -x .$$

4) Если $x = 0$ или $y = 0$, то по уже доказанному свойству верно равенство $xy = 0$.

Обратно, пусть $xy = 0$, и допустим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Воспользуемся доказанным свойством 2 и законом сокращения относительно умножения:

$$x \cdot y = 0 = 0 \cdot y .$$

Так как $y \neq 0$, то мы можем сократить на y. Получаем равенство $x = 0$, которое противоречит предположению $x \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то и $xy \neq 0$. ▲

Примеры полей

1) Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

2) Поле действительных чисел $\mathbb{R}$.

3) Поле из двух элементов: $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Здесь 0 – нулевой элемент, 1 – единичный. Сложение и умножение задаются таблицами Кэли:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

и

·	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Упражнения

179. Докажите, что множество $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ замкнуто относительно сложения и умножения, и является полем.
180. Докажите, что в любом поле равенство $xy = 0$ невозможно при ненулевых сомножителях $x \neq 0$ и $y \neq 0$.
181. Докажите, что в любом поле нет элементов кроме 0 и 1, для которых $x^2 = x$.
182. Докажите, что следующее подмножество поля действительных чисел, является замкнутым относительно сложения и умножения и является полем:

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \doteq \{x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\} .$$

§10. Линейное (векторное) пространство

Определение. Пусть A и K – произвольные непустые множества, $K \times A$ – их декартовое произведение. Отображение

$$K \times A \to A$$

называется внешней бинарной алгебраической операцией, определенной на множестве A над множеством K.

Другими словами, каждой паре элементов $(\alpha; x)$ из декартова произведения $K \times A$ ставится в соответствие единственный для этой пары элемент $\alpha * x \in A$. (Обычно при написании результата алгебраической операции элемент $\alpha \in K$ пишется слева от элемента $x \in A$).

Определение. Пусть V – произвольное множество, элементы которого мы будем называть векторами, $\mathbb{F}$ – поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком "+" и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция над полем $\mathbb{F}$, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения.

Другими словами определены два отображения:

$$V \times V \to V : \quad \forall x, y \in V : (x, y) \to x + y \in V ;$$

$$\mathbb{F} \times V \to V : \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V : (\lambda, x) \to \lambda \cdot x \in V .$$

Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется линейным (векторным) пространством над полем $\mathbb{F}$, если эти алгебраические операции подчиняются следующим законам (аксиомам линейного пространства):

1) закон ассоциативности сложения:

$$\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z) ;$$

2) существование нулевого вектора:

$$\exists\, 0 \in V, \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x ;$$

3) существование противоположного вектора:

$$\forall x \in V, \exists (-x) \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0 ;$$

4) закон коммутативности сложения:

$$\forall x, y \in V : x + y = y + x ;$$

5) закон ассоциативности умножения вектора на скаляр:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in V : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) ;$$

6) закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов:

$$\forall\lambda \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \,;$$

7) закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров:

$$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{F}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \,;$$

8) $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$, где 1 – это единица поля $\mathbb{F}$.

Определение. Линейное пространство V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется вещественным линейным пространством.

Теорема (Простейшие свойства линейных пространств)

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2) В линейном пространстве любой вектор имеет единственный противоположный ему.

3) Произведение скаляра на вектор равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда либо скаляр нулевой, либо вектор нулевой:

$$\forall\lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V : \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \textit{или} \quad x = 0 .$$

4) $\forall x \in V : (-1) \cdot x = -x$.

Доказательство. 1), 2). Первые два утверждения следуют из единственности нейтрального элемента и единственности симметричного элемента (смотрите соответствующие теоремы параграфа 5)

3), 4) Сначала мы докажем, что произведение нулевого скаляра на любой вектор равен нулевому вектору.

Пусть скаляр $\lambda = 0$. Тогда, применяя аксиомы линейного пространства, получаем:

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x = 0 + x .$$

Применяя закон сокращения, получаем

$$0 \cdot x = 0 .$$

Теперь докажем утверждение 4). Пусть $x \in V$ – произвольный вектор. Тогда

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0 .$$

Отсюда сразу же следует, что вектор $(-1)x$ является противоположным вектору x.

Пусть теперь $x = 0$. Тогда, применяя аксиомы векторного пространства, $\forall y \in V$ получаем:

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (y + (-y)) = \lambda \cdot y + \lambda \cdot (-y) = \lambda y + \lambda(-1)y = \\ = (\lambda + (-\lambda))y = 0 \cdot y = 0 .$$

Пусть $\lambda x = 0$ и допустим, что $\lambda \neq 0$. Так как $\lambda \in \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ – поле, то существует $\lambda^{-1} \in \mathbb{F}$. Умножим равенство $\lambda x = 0$ слева на λ^{-1}:

$$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0 ,$$

откуда следует

$$(\lambda^{-1}\lambda)x = 0 \Rightarrow 1 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 . \ \blacktriangle$$

Примеры линейных пространств

1) Пусть V – множество всех векторов как направленных отрезков. Известно, что векторы можно складывать и умножать на число. Все аксиомы линейного пространства выполняются, поэтому V – вещественное линейное пространство.

2) Множество упорядоченных пар элементов поля $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^2 \doteq \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$$

образует вещественное линейное пространство относительно покомпонентного сложения

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{F}^2 : (a, b) + (c, d) \doteq (a + c, b + d)$$

и покомпонентного умножения на скаляр

$$\forall (a, b) \in \mathbb{F}^2, \forall \lambda \in \mathbb{F} : \lambda(a, b) \doteq (\lambda a, \lambda b) .$$

Такое линейное пространство называется арифметическим линейным пространством строк длины 2 над полем $\mathbb{F}$. Здесь под вектором понимается любая упорядоченная пара элементов поля $\mathbb{F}$, а под скаляром – любой элемент поля $\mathbb{F}$.

3) Вещественное линейное пространство строк произвольной фиксированной длины n, в котором сложение строк и умножение строки на скаляр определяется также, как в предыдущем примере

$$\mathbb{R}^n \doteq \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\} .$$

Упражнения

183. Проверьте все аксиомы линейного пространства $\mathbb{F}^2$, где $\mathbb{F}$ – поле.

184. Выпишите все векторы линейного пространства $\mathbb{F}_2^2$, где $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ – поле из двух элементов.

Глава 20. Поле комплексных чисел
§1. Построение поля комплексных чисел

Пусть $\mathbb{R}^2$ – декартов квадрат поля действительных чисел, то есть, $\mathbb{R}^2 \doteq \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ – множество упорядоченных пар действительных чисел. Определим на этом множестве две внутренние бинарные алгебраические операции – сложение и умножение по следующим правилам: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ положим по определению

$$(a,b)+(c,d) \doteq (a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) \doteq (ac-bd,ad+bc)\,.$$

Очевидно, что сумма и произведение двух пар из $\mathbb{R}^2$ снова есть пара из множества $\mathbb{R}^2$, так как сумма, произведение и разность действительных чисел есть действительные числа. Таким образом, $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ – алгебраическая структура с двумя внутренними бинарными алгебраическими операциями.

Теорема (О поле комплексных чисел)

Алгебраическая структура $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *является полем.*

Доказательство. Последовательно проверяем выполнение всех девяти аксиом поля.

1) Закон ассоциативности относительно сложения:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^2 : x+(y+z)=(x+y)+z\,.$$

Пусть $x=(a,b), y=(c,d), z=(e,f) \in \mathbb{R}^2$. Тогда по определению сложения пар

$$y+z=(c+e,d+f)\,,$$
$$x+(y+z)=(a,b)+(c+e,d+f)=(a+(c+e),b+(d+f))\,.$$

С другой стороны,

$$x+y=(a+c,b+d)\,,$$
$$(x+y)+z=(a+c,b+d)+(e,f)=((a+c)+e,(b+d)+f)\,.$$

Так как сложение действительных чисел подчиняется закону ассоциативности:

$$a+(c+e)=(a+c)+e \quad \text{и} \quad b+(d+f)=(b+d)+f\,,$$

то

$$(a+(c+e),b+(d+f))=((a+c)+e,(b+d)+f)\,,$$

а отсюда следует, в свою очередь, равенство

$$x+(y+z)=(x+y)+z\,.$$

2) Существование нулевого элемента:

$$\exists \theta \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2 : x+\theta=\theta+x=x\,.$$

Обозначим

$$\theta \doteq (0,0)\,,$$

где 0 – нулевой элемент поля действительных чисел, то есть число нуль. Пусть $x=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ – произвольная пара из $\mathbb{R}^2$. Тогда по определению сложения пар

$$\theta+x=(0,0)+(a,b)=(0+a,0+b)=(a,b)=x$$

и

$$x+\theta=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=x\,.$$

Следовательно, $x+\theta=\theta+x=x$ и пара $\theta \doteq (0,0)$ есть нулевой элемент относительно операции сложения, существование которого и требовалось доказать.

3) Существование противоположного элемента:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists (-x) \in \mathbb{R}^2 : x+(-x)=(-x)+x=\theta\,.$$

Пусть $x=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ – произвольная пара из $\mathbb{R}^2$. Покажем, что противоположным элементом является пара

$$-x \doteq (-a,-b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Действительно, по определению сложения пар имеем:

$$x+(-x)=(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)=\theta\,,$$
$$(-x)+x=(-a,-b)+(a,b)=((-a)+a,(-b)+b)=(0,0)=\theta\,.$$

Отсюда следует доказываемое равенство $x+(-x)=(-x)+x=\theta$.

4) Закон коммутативности относительно сложения:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^2 : x+y=y+x\,.$$

Пусть $x=(a,b), y=(c,d)\in\mathbb{R}^2$ – две произвольные пары. Тогда по определению сложения пар имеем:

$$x+y=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\,,\quad y+x=(c,d)+(a,b)=(c+a,d+b)\,.$$

Так как множество действительных чисел $\mathbb{R}$ относительно операций сложения и умножения является полем, то в нем выполняется закон коммутативности сложения

$$a+c=c+a,\ \ b+d=d+b\,,$$

откуда следует равенство пар: $(a+c,b+d)=(c+a,d+b)$ и $x+y=y+x$.

5) Закон ассоциативности относительно умножения:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : x(yz) = (xy)z .$$

Пусть $x = (a, b),\ y = (c, d),\ z = (e, f) \in \mathbb{R}^2$. Тогда по определению умножения пар

$$yz = (ce - df, cf + de), \quad xy = (ac - bd, ad + bc),$$

$$x(yz) = (a, b)(ce - df, cf + de) =$$

$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) =$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) .$$

$$(xy)z = (ac - bd, ad + bc)(e, f) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) .$$

В результате получились равные пары. Следовательно,

$$x(yz) = (xy)z .$$

6) Существование единичного элемента:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \neq \theta, \forall x \in R^2 : x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x .$$

Положим по определению

$$\varepsilon \doteq (1, 0) ,$$

и покажем, что ε – единичный элемент относительно умножения. Пусть $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Тогда по определению умножения пар

$$x \cdot \varepsilon = (a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = x ,$$

$$\varepsilon \cdot x = (1, 0)(a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b) = x .$$

Таким образом, $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$.

7) Существование обратного элемента:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, x \neq \theta, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}^2 : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \varepsilon .$$

Пусть $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ и $x \neq \theta$, то есть числа a и b одновременно не равны нулю, а значит $a^2 + b^2 \neq 0$. Положим по определению

$$x^{-1} \doteq \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

и покажем, что этот элемент удовлетворяет равенству

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \varepsilon .$$

Действительно, по определению умножения пар

$$x \cdot x^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) =$$

$$= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{(-b)}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{(-b)}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = \varepsilon ,$$

$$x^{-1} \cdot x = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a, b) =$$

$$= \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot a - \frac{(-b)}{a^2 + b^2} \cdot b, \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot b + \frac{(-b)}{a^2 + b^2} \cdot a \right) = (1, 0) = \varepsilon .$$

8) Закон коммутативности относительно умножения:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : xy = yx .$$

Пусть

$$x = (a, b),\ y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

– две произвольные пары. Тогда по определению умножения пар

$$xy = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) , \quad yx = (c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da) .$$

Так как $\mathbb{R}$ – поле, то умножение и сложение действительных чисел подчиняется закону коммутативности и

$$ac - bd = ca - db, \quad ad + bc = cb + da ,$$

откуда и следует равенство $xy = yx$.

9) Закон дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : (x + y)z = xz + yz, \ \ x(y + z) = xy + xz .$$

Пусть

$$x = (a, b),\ y = (c, d),\ z = (e, f) \in \mathbb{R}^2 .$$

Тогда по определению сложения и умножения пар

$$(x + y)z = (a + c, b + d)(e, f) = ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e) =$$

$$= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) .$$

Здесь мы воспользовались законом дистрибутивности умножения относительно сложения, которому подчиняются действительные числа.

Аналогично,

$$xz = (ae - bf, af + be), \quad yz = (ce - df, cf + de) ,$$

$$xz + yz = (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) =$$

$$= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de) .$$

Отсюда мы видим, что $(x + y)z = xz + yz$.

Для доказательства второго закона дистрибутивности воспользуемся только что доказанным законом дистрибутивности и законом коммутативности относительно умножения, который мы тоже уже доказали:

$$x(y + z) = (y + z)x = yx + zx = xy + xz . \ \blacktriangle$$

Определение. Поле $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ называется полем комплексных чисел, а его элементы – упорядоченные пары действительных чисел, называются комплексными числами.

Упражнение

185. Докажите, что множество $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \doteq \{x+y\sqrt{p} \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$ является полем, где p – произвольное простое число.
186. Пусть ω – корень уравнения $x^2+x+1=0$ с коэффициентами из простого поля $\mathbb{F}_2 \doteq \{0,1\}$, так что $\omega^2=\omega+1$. Докажите, что множество
$$\mathbb{F}_2(\omega) \doteq \{x+y\omega \mid x,y \in \mathbb{F}_2\} = \{0,1,\omega,\omega+1\}$$
является полем. Составьте для него таблицы сложения и умножения.

§2. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Обозначим через
$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
– подмножество поля $\mathbb{R}^2$, состоящее из тех пар действительных чисел, второй элемент которых равен нулю. Пусть
$$x=(a,0),\ y=(b,0) \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Тогда по правилам сложения и умножения пар
$$x+y=(a+b,0),\quad xy=(ab,0).$$

Это дает нам возможность отождествить такие пары с их первым элементом, а само множество $\overline{\mathbb{R}}$ с множеством $\mathbb{R}$. Положим по определению
$$(a,0) \doteq a \in \mathbb{R}.$$
Отсюда, в частности,
$$\theta=(0,0)=0 \in \mathbb{R},\quad \varepsilon=(1,0)=1 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что любую пару из $\mathbb{R}^2$ мы можем представить в виде:
$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+b(0,1).$$

Для пары (0,1) введем специальное обозначение. Положим по определению
$$i \doteq (0,1).$$
Тогда
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)=a+b\cdot i.$$

Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической. Само поле комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} \doteq \{a+b\cdot i \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$
Заметим, далее, что
$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$
Это означает, что комплексное число $i \in \mathbb{C}$ является корнем квадратного уравнения
$$x^2+1=0.$$

Легко видеть, что вторым корнем этого уравнения является комплексное число $-i \in \mathbb{C}$. Действительно,
$$(-i)^2=(0,-1)\cdot(0,-1)=(-1,0)=-1.$$

Таким образом, можно дать следующее определение комплексных чисел.

Определение. Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $z=(a,b)$, которая обычно записывается в виде $z=a+b\cdot i$, где элемент i является корнем квадратного уравнения $x^2+1=0$, то есть, $i^2=-1$.

Определение. Пусть $z=a+b\cdot i$ – алгебраическая форма записи комплексного числа. Элемент i называется мнимой единицей. Действительное число a называется вещественной частью комплексного числа z, и обозначается: $a=\operatorname{Re} z$. Действительное число b называется мнимой частью комплексного числа z, и обозначается: $b=\operatorname{Im} z$.

Определение. Комплексное число, вещественная часть которого равна нулю, называется чисто мнимым.

Из определения алгебраической формы записи комплексного числа сразу же вытекает условие равенства двух комплексных чисел:

Следствие (Условие равенства комплексных чисел.)
Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, то есть,
$$a+bi=c+di \Leftrightarrow (a=c)\,\&\,(b=d).\ \blacktriangle$$

Здесь & – знак конъюнкции, логическая связка "и".

Замечание. Из определений следует, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то есть, любое действительное число есть комплексное число с нулевой мнимой частью.

Более того, любое комплексное число можно рассматривать как результат сложения двух комплексных чисел, одно из которых является действительным числом (его мнимая часть равна нулю), другое – чисто мнимое:
$$z = a + b\cdot i = (a + 0\cdot i) + (0 + b\cdot i).$$

Определение. Поле $\mathbb{F}$ называется изоморфным полю $\mathbb{S}$, если существует биекция $f:\mathbb{F}\to\mathbb{S}$, удовлетворяющая условию:
$$\forall x, y\in\mathbb{F} : f(x+y) = f(x) + f(y),\ \ f(xy) = f(x)f(y),$$
отображение f называется в этом случае изоморфизмом полей.

Упражнение

187. Докажите, что подмножество $\overline{\mathbb{R}} \doteq \{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ является полем, изоморфным полю $\mathbb{R}$.
188. Пусть $(\mathbb{F},+,\cdot)$ – поле, $(\mathbb{S},+,\cdot)$ – алгебраическая структура, $f:\mathbb{F}\to\mathbb{S}$ – изоморфизм полей. Докажите, что $\mathbb{S}$ является полем, в котором нулевым и единичным элементами являются $f(0)$ и $f(1)$ соответственно, где 0 и 1 – нулевой и единичный элементы поля $\mathbb{F}$.

§3. Действия с комплексными числами

Из определения сложения пар и алгебраической формы записи комплексного числа следуют правила сложения и умножения комплексных чисел в алгебраической форме записи.

Пусть
$$x = a + bi,\ \ y = c + di$$
– произвольные комплексные числа. Тогда
$$x + y = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$
$$xy = (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + dc)i.$$

Заметим, что этот же результат можно получить используя следующие соображения. Множество комплексных чисел образует поле. В поле справедливы законы ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Рассматриваем каждое комплексное число как результат сложения двух чисел – действительного и чисто мнимого. Тогда
$$(a+bi) + (c+di) = a + (bi + c) + di = a + (c + bi) + di =$$
$$= (a+c) + (bi + di) = (a+c) + (b+d)i.$$
$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bic + bidi =$$
$$= (ac + bdi^2) + (adi + bci) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$
Здесь мы воспользовались равенством

$$i^2 = -1.$$

Таким образом, нет нужды запоминать правила сложения и особенно умножения. Далее, понятно, что
$$0 = 0 + 0\cdot i$$
– нулевой элемент,
$$-(a + b\cdot i) = (-a) + (-b)\cdot i$$
– противоположный.

Как обычно, определяем операцию вычитания, как сложение с противоположным:
$$(a+bi) - (c+di) = (a+bi) + (-c-di) = (a-c) + (b-d)i.$$

Примеры

1) $(-1+7i) + (2-5i) = 1 + 2i$;
2) $(3+4i) - 2i = 3 + 2i$,
3) $(1+i)(2-3i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 2 + 3 - i = 5 - i$,
4) $(2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$.

Определим операцию деления в любом поле $\mathbb{F}$ как умножение на обратный элемент: $\forall x, y\in\mathbb{F}, x\neq 0$ положим по определению
$$\frac{1}{x}\doteq x^{-1}\quad\text{и}\quad \frac{y}{x}\doteq y\cdot x^{-1}.$$
Легко проверить, что для любого комплексного числа $x = a + bi \neq 0$,
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+bi} = (a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$
Действительно,
$$xx^{-1} = (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a+bi)(a-bi) =$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}(a^2 - (bi)^2 = \frac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2) = 1.$$

Однако, нет необходимости запоминать эту формулу. Лучше использовать одно простое правило. Но для этого, введем сначала одно понятие.

Определение. Комплексное число $a - bi$ называется комплексно сопряженным комплексному числу $a + bi$.

Из определения сразу же следует, что число $a+bi$ является комплексно сопряженным числу $a-bi$, то есть такие числа, которые отличаются друг от друга лишь знаком мнимой части являются, по определению, комплексно сопряженными друг другу.

Примеры

1) $2+3i$ и $2-3i$;
2) i и $-i$;
3) $1\pm 2i$.

Правило деления комплексных чисел

Для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(ac-bdi^2)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\,.$$

Примеры

1) $\frac{1+2i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+4i-2i^2}{4-i^2}=\frac{4+3i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$;
2) $\frac{1}{i}=-i$;
3) $\frac{2+3i}{i}=\frac{2}{i}+3=-2i+3=3-2i$.

Обозначение: если $z=a+bi$, то комплексно сопряженное к нему число обозначается $\overline{z}=\overline{a+bi}\doteq a-bi$.

§4. Свойства комплексно сопряженных чисел

Теорема (Свойства комплексно сопряженных чисел)

1) $\forall z\in\mathbb{C}:\overline{\overline{z}}=z$;
2) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}:\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$;

3) $\forall z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}:\overline{z_1+z_2+\dots+z_n}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\dots+\overline{z}_n$;
4) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}:\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$;
5) $\forall z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}:\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\cdot\ldots\cdot\overline{z}_n$;
6) $\forall z\in\mathbb{C},\forall k\in\mathbb{N}:\overline{z^k}=(\overline{z})^k$, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
7) $\forall a\in\mathbb{R}:\overline{a}=a$;
8) $\forall z\in\mathbb{C},\forall a\in\mathbb{R}:\overline{a\cdot z}=a\cdot\overline{z}$;
9) Для любого многочлена $f(z)\in\mathbb{R}[z]$ с действительными коэффициентами от комплексной переменной z верно равенство

$$f(\overline{z})=\overline{f(z)}\,.$$

Доказательство. 1) Пусть $z=a+bi\in\mathbb{C}$ – произвольное комплексное число. Тогда по определению комплексно сопряженного числа

$$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi \text{ и } \overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z\,.$$

2) Пусть $z_1=a+bi,\ z_2=c+di\in\mathbb{C}$. Тогда

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i \quad\text{и}\quad \overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i\,.$$

С другой стороны,

$$\overline{z}_1=a-bi,\ \overline{z}_2=c-di \quad\text{и}\quad \overline{z}_1+\overline{z}_2=(a+c)-(b+d)i\,,$$

откуда и следует, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$.

3) Докажем с помощью метода математической индукции, что равенство $\overline{z_1+z_2+\dots+z_n}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\dots+\overline{z}_n$ верно для любого числа слагаемых n.

а) База индукции. При $n=2$, равенство $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$ только что доказано.

б) Индукционная гипотеза. Предположим, что утверждение верно, если число слагаемых меньше или равно $n-1$:

$$\overline{z_1+z_2+\dots+z_{n-1}}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\dots+\overline{z}_{n-1}\,.$$

в) Индукционный переход. Так как утверждение верно для двух слагаемых, то

$$\overline{(z_1+z_2+\dots+z_{n-1})+z_n}=\overline{z_1+z_2+\dots+z_{n-1}}+\overline{z}_n\,.$$

Далее используем индукционное предположение:

$$\overline{z_1+z_2+\dots+z_{n-1}}+\overline{z}_n=(\overline{z}_1+\overline{z}_2+\dots+\overline{z}_{n-1})+\overline{z}_n\,,$$

откуда и следует доказываемое равенство.

4) Пусть $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \in \mathbb{C}$. Тогда

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad \text{и} \quad \overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i .$$

С другой стороны,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i ,$$

откуда и следует, что $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

5) Доказывается аналогично пункту 3) методом математической индукции.

6) Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$ и k – произвольное натуральное число. Тогда по определению натуральной степени числа

$$\overline{z^k} = \underbrace{\overline{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}}_{k \text{ штук}} = \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z}}_{k \text{ штук}} = (\overline{z})^k .$$

7) Пусть a – действительное число. Тогда $a = a + 0 \cdot i$ и по определению комплексно сопряженного числа $\overline{a} = a - 0 \cdot i = a$.

8) Пусть $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$. По уже доказанным в пунктах 4) и 7) свойствах $\overline{a \cdot z} = \overline{a} \cdot \overline{z} = a \cdot \overline{z}$.

9) Пусть z – комплексная переменная и $f(z)$ – многочлен от комплексной переменной z с действительными коэффициентами:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_o ,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_o \in \mathbb{R}$ – действительные числа. Тогда, используя уже доказанные свойства, получаем:

$$\overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_o} = \overline{a_n z^n} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_o} =$$

$$= a_n \overline{z^n} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_o = a_n (\overline{z})^n + \ldots + a_1 \overline{z} + a_o = f(\overline{z}) . \ ▲$$

Пример. Вычислить $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$.

Решение. Обозначим $1 + i = z$. Тогда $z^2 = (1 + i)^2 = 2i$,

$$z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = -4 , \ (1 - i)^4 = \left(\overline{z}\right)^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4 .$$

Отсюда, $(1 + i)^4 + (1 - i)^4 = (-4) + (-4) = -8$.

Ответ: – 8.

Упражнение

189. Докажите пятое утверждение теоремы.

§5. Понятие корня из комплексного числа

Определение. Пусть n – произвольное натуральное число. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число α, такое, что $\alpha^n = z$.

Позже будет доказана следующая теорема, которую мы пока примем без доказательства.

Теорема (О корнях n-й степени из комплексного числа)

Существует ровно n *корней* n*-й степени из комплексного числа, отличного от нуля.* ▲

Замечание

Для обозначения корней n-й степени из комплексного числа применяют обычный знак радикала. Но есть одно существенное отличие. Если a – положительное действительное число, то $\sqrt[n]{a}$ по определению обозначает положительный корень n-й степени, его называют арифметическим корнем.

Если n – нечетное число, то существует единственный корень n-й степени из любого действительного числа a. При $a \geq 0$ этот единственный корень $\sqrt[n]{a}$ является по определению арифметическим, при $a < 0$ этот единственный корень $\sqrt[n]{a}$ не является арифметическим, но может быть выражен через арифметический корень из противоположного числа: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$, где $\sqrt[n]{-a}$ является арифметическим, так как $-a > 0$.

Если n – четное число, то существует ровно два действительных корня n-й степени из положительного числа и они являются противоположными числами, поэтому один из них положительный, его и обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют его арифметическим, а второй будет отрицательным, противоположным арифметическому и его обозначают $-\sqrt[n]{a}$.

В любом случае, знак $\sqrt[n]{a}$ обозначает (при условии, что это выражение имеет смысл) только одно число, один корень.

В случае же, если $z \in \mathbb{C}$ – комплексное число, то для любого натурального числа n выражение $\sqrt[n]{z}$ всегда имеет смысл и обозначает все множество корней n-й степени из комплексного числа z.

Обозначение:

$$\sqrt[n]{z} = \{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} ,$$

где $\alpha_o, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ – все n корней n-й степени из комплексного числа z, так что по определению $\forall k \in \{0,1,...,n-1\} : \alpha_k^n = z$.

В частности, при $n = 2$ существуют ровно два корня из комплексного числа z и легко видеть, что, если α – квадратный корень из комплексного числа z, то $\alpha^2 = (-\alpha)^2 = z$, то есть, оба корня α и $-\alpha$ являются противоположными комплексными числами, поэтому вместо записи $\sqrt{z} = \{\alpha, -\alpha\}$ применяют запись

$$\sqrt{z} = \pm\alpha .$$

Заметим, что если $z \neq 0$, то $\alpha \neq -\alpha$. Действительно, допустив противное, мы бы имели равенство

$$\alpha = -\alpha \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 = z = 0,$$

то есть получили бы противоречие предположению, что $z \neq 0$.

Упражнение

190. Используя определение корня, докажите следующие свойства корней из неотрицательных действительных чисел:

а) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; б) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; в) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

§6. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

В дальнейшем нам понадобится одна числовая функция:
$\forall x \in \mathbb{R}$, положим по определению

$$\operatorname{sgn} x \doteq \begin{cases} 1, \text{ при } x \geq 0 \\ -1, \text{ при } x < 0 \end{cases}.$$

Эту функцию называют знаком числа x и читается она так: "сигнум икс".

Теорема (О квадратных корнях из комплексного числа)
Пусть $z = a + bi$. *Тогда*

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn} b \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где квадратные корни в скобках являются арифметическими квадратными корнями из неотрицательных чисел.

Доказательство. Как мы уже выяснили существует ровно два квадратных корня из комплексного числа, причем они являются противоположными числами. Пусть $\sqrt{z} = \pm\alpha$, где $\alpha = x + yi$. Тогда $\alpha^2 = z$ или $(x+yi)^2 = a + bi$. Возведем в квадрат левую часть этого равенства и воспользуемся условиями равенства двух комплексных чисел. Получаем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Возведем в квадрат каждое уравнение этой системы:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases}.$$

Прибавим второе уравнение к первому:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = a^2 + b^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2y^2 = \dfrac{b^2}{4} \end{cases}.$$

Здесь $\sqrt{a^2+b^2}$ – обычный арифметический квадратный корень из положительного действительного числа. Далее, если полученная система имеет решение, то по обратной теореме Виета x^2 и y^2 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - \sqrt{a^2+b^2} \cdot t + \frac{b^2}{4} = 0.$$

Находим дискриминант $D = (a^2+b^2) - 4 \cdot \frac{b^2}{4} = a^2$. Отсюда

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} \pm a}{2}.$$

Оба корня квадратного уравнения оказываются положительными, так как, очевидно, $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$. При выборе корней учитываем, что $x^2 - y^2 = a$. Отсюда следует:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Осталось правильно выбрать знаки перед знаками радикалов. Так как $2xy = b$, то $\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} b$. Положим $x \ge 0$, тогда

$$\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} b,$$

откуда и следует доказываемая формула. ▲

Пример. Вычислить $\sqrt{3+4i}$.

Решение. Используем только что доказанную формулу корней. Здесь,

$$a = 3, b = 4, \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5, \operatorname{sgn} b = 1.$$

Подставляем в формулу и получаем:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm(2+i).$$

Ответ: $\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$.

Нам будет интересен частный случай формулы корней, когда мнимая часть числа z равна нулю.

Следствие

Пусть $a \in \mathbb{R}$ *– произвольное действительное число. Тогда имеет место следующая формула:*

$$\sqrt{a} = \pm\left(\sqrt{\frac{|a|+a}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{|a|-a}{2}}\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно подставить в формулу $b = 0$ и вспомнить, что арифметический квадратный корень из квадрата действительного числа равен его модулю: $\sqrt{a^2} = |a|$. ▲

Теперь, если $a > 0$, то последняя формула дает оба корня из положительного действительного числа a: $\sqrt{a} = \pm\sqrt{a}$.

Не будем забывать, что квадратный корень в левой части формулы корней обозначает все множество корней из комплексного числа $a + 0\cdot i$, а квадратные корни в правой части этой формулы обозначают арифметические квадратные корни из неотрицательных действительных чисел. Обозначение одно и то же, а смысл различный.

Пусть теперь $a < 0$. Тогда $|a| = -a$ и по формуле следствия получаем равенство $\sqrt{a} = \pm i\cdot\sqrt{-a}$. Здесь $\sqrt{-a}$ – арифметический квадратный корень из положительного числа: $-a > 0$.

Случай $a = 0$ очевиден: $\sqrt{0} = 0$. Интерес представляет случай корня квадратного из отрицательного числа. Сформулируем этот случай отдельно в виде следствия.

Следствие

Пусть $z = a \in R$ *и* $a < 0$. *Тогда оба квадратных корня из числа* z *могут быть найдены по формуле:*

$$\sqrt{z} = \sqrt{a} = \pm i\cdot\sqrt{-a}.$$

Примеры

1) $\sqrt{-4} = \pm i\cdot\sqrt{-(-4)} = \pm 2i$; 2) $\sqrt{-3} = \pm i\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{-1} = \pm i$.

Замечание. Обратите внимание на последнее равенство:

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

Это верное равенство, то есть, $\sqrt{-1}$ по определению есть множество всех корней из числа -1, в то время как равенство $\sqrt{-1} = i$ неверное, с этой точки зрения! Именно поэтому нельзя переносить свойства корней из действительных чисел на корни из комплексных чисел, как показывает следующий простой пример.

Пример. Найдите ошибку в следующих преобразованиях:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = i^2 = -1.$$

Теорема (О вынесении множителя из под знака корня)

Пусть $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *– произвольное натуральное число. Тогда*

$$\sqrt[n]{a\cdot z} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{z},$$

где $\sqrt[n]{a}$ – обычный арифметический корень из положительного числа a.

Доказательство. Последнее равенство здесь нужно понимать как равенство двух множеств:

$$\sqrt[n]{a\cdot z} = \{\beta_o, \beta_1, ..., \beta_{n-1}\}$$

– множество всех корней n-й степени из комплексного числа $a \cdot z$,

$$\sqrt[n]{z} = \{\alpha_o, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$$

– множество всех корней n-й степени из комплексного числа z,

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{a} \cdot \alpha_o, \sqrt[n]{a} \cdot \alpha_1, ..., \sqrt[n]{a} \cdot \alpha_{n-1}\}.$$

Отсюда вытекает и способ доказательства. Мы докажем, что оба множества состоят из одних и тех же элементов.

Пусть $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Тогда

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \alpha_k\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\alpha_k)^n = a \cdot z.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{a} \cdot \alpha_k \in \sqrt[n]{a \cdot z}.$$

Обратно, пусть $\beta_k \in \sqrt[n]{a \cdot z}$. Тогда

$$(\beta_k)^n = a \cdot z = (\sqrt[n]{a})^n \cdot z \Rightarrow \left(\frac{\beta_k}{\sqrt[n]{a}}\right)^n = z.$$

Следовательно,

$$\frac{\beta_k}{\sqrt[n]{a}} \in \sqrt[n]{z} \Rightarrow \beta_k \in \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{z}. \ ▲$$

Предыдущее следствие можно вывести и из только что доказанной теоремы.

Следствие (Квадратный корень из отрицательного числа)

Пусть $a \in \mathbb{R}$ *и* $a < 0$. *Тогда* $\sqrt{a} = \pm i\sqrt{|a|}$.

Доказательство. Рассматриваем отрицательное число a как комплексное число $z = a = -|a| = |a|(-1 + 0 \cdot i)$. Тогда доказываемое равенство сразу же следует из только что доказанной теоремы:

$$\sqrt{a} = \sqrt{|a| \cdot (-1 + 0 \cdot i)} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{|a|} \cdot (\pm i). \ ▲$$

Например, $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2(\pm i) = \pm 2i$.

Упражнения

191. Найдите все 4 корня уравнения $x^4 - 16 = 0$.
192. Найдите все 4 корня уравнения $x^4 + 4 = 0$.

§7. Решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел

Теорема (О корнях квадратного уравнения)

Пусть $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$ *, z – комплексная переменная. Тогда квадратное уравнение*

$$az^2 + bz + c = 0$$

имеет ровно два корня (они могут быть равными), которые можно найти по формуле:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ *– дискриминант квадратного уравнения.*

Доказательство. Рассмотрим квадратное уравнение, очевидно, равносильное данному:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = z^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения. Получаем уравнение

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0$$

или

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Отсюда получаем:

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}}, \text{ где } \frac{D}{4a^2} \in \mathbb{C}.$$

Если дискриминант $D \neq 0$, то существует 2 противоположных друг другу квадратных корня из комплексного числа $\frac{D}{4a^2}$.

Обозначим

$$\sqrt{D} = \pm\alpha$$

– два корня из дискриминанта. Тогда легко проверить, что

$$\sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \pm\frac{\alpha}{2a}.$$

Действительно,

$$\left(\pm\frac{\alpha}{2a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4a^2}=\frac{D}{4a^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{D}{4a^2}}=\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

и

$$z+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a}=\frac{\pm\alpha}{2a}.$$

Отсюда получаем формулу для корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2}=-\frac{b}{2a}+\frac{\pm\alpha}{2a}=\frac{-b\pm\alpha}{2a},$$

где α один из квадратных корней из дискриминанта, то есть

$$\alpha^2=D.$$

Заметим, что в нашем случае, формулу корней квадратного уравнения можно записать в виде:

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

так как $\sqrt{D}$ есть множество из двух противоположных корней. Однако, сохраняя традиции, эту формулу пишут в виде:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.\ ▲$$

Пример. Решить уравнение $z^2-(7-2i)z+13(1-i)=0$.

Решение. Вычисляем дискриминант

$$D=b^2-4ac=(7-2i)^2-4\cdot13(1-i)=49-28i-4-52+52i=-7+24i.$$

Вычисляем корни из дискриминанта по формуле квадратных корней из комплексного числа:

$$\sqrt{-7+24i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}-7}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}+7}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{25-7}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{25+7}{2}}\right)=\pm(3+4i).$$

Вычисляем корни уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{(7-2i)\pm(3+4i)}{2},$$

$$z_1=\frac{(7-2i)-(3+4i)}{2}=2-3i,\quad z_2=\frac{(7-2i)+(3+4i)}{2}=5+i.$$

Ответ: $z_1=2-3i; z_2=5+i$.

Аналогично решаются квадратные уравнения с действительными коэффициентами, но с отрицательным дискриминантом.

Пример. Решить уравнение в поле комплексных чисел:

$$x^2+4x+5=0.$$

Решение. Находим дискриминант $D=4^2-20=-4$, и по формуле корней квадратного уравнения находим:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm2i}{2}=-2\pm i.$$

Ответ: $-2\pm i$.

Упражнение

193. Решите квадратное уравнение $x^2-6x+25=0$

194. Решите биквадратное уравнение $x^4-6x^2+25=0$.

Глава 21. Комплексная плоскость
§1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартовая система координат, тогда каждую точку плоскости можно отождествить с упорядоченной парой действительных чисел, которые являются ее координатами: $M \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ или просто $M(x,y)$. С другой стороны, каждое комплексное число $z = x + yi \in \mathbb{C}$ можно также отождествить с упорядоченной парой действительных чисел $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, где $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z. Отсюда выводим, что каждое комплексное число $z = x + yi \in \mathbb{C}$ можно отождествить с точкой координатной плоскости.

Определение. Координатная плоскость, каждая точка которой отождествлена с комплексным числом, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, ось ординат называется мнимой осью.

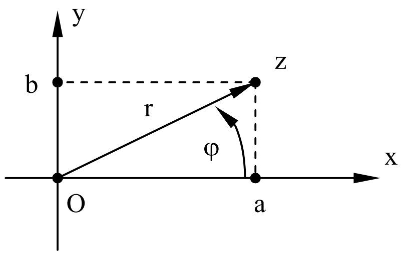


Рис. 139

Замечание. Существует взаимно однозначное соответствие между точками координатной плоскости и их радиус-векторами. Поэтому также существует взаимно однозначное соответствие и между всеми комплексными числами и радиус-векторами соответствующих точек комплексной плоскости.

Итак, чтобы изобразить комплексное число z точкой на комплексной плоскости нужно записать его в алгебраической форме, найти его действительную и мнимую части и построить в ПДСК на этой плоскости

точку, абсцисса которой равна действительной части, а ордината – мнимой части данного комплексного числа z:

$$z = x + yi \leftrightarrow z(x,y) \leftrightarrow \overline{Oz},$$

где вектор $\overline{Oz}$ является радиус-вектором точки z.

Введем на комплексной плоскости полярную систему координат стандартным образом совмещенную с ПДСК, то есть с полюсом в начале координат и полярным лучом, совмещенным с положительной полуосью абсцисс. Тогда точка z имеет полярные координаты (r,φ), где r – полярный радиус точки z, а φ – ее полярный угол.

Замечание. В дальнейшем мы постоянно и молчаливо будем подразумевать, что на комплексной плоскости введена полярная система координат стандартным образом совмещенная с ПДСК и, что любое комплексное число отождествлено с точкой комплексной плоскости и имеет на этой плоскости как декартовые координаты, так и полярные.

При такой геометрической интерпретации комплексного числа как точки на комплексной плоскости ее полярные координаты, как и декартовые, получили специальные названия и обозначения.

Определение. Модулем комплексного числа называется полярный радиус точки комплексной плоскости отождествленной с этим числом.

Определение. Аргументом комплексного числа называется полярный угол точки комплексной плоскости отождествленной с этим числом.

Обозначения:
$|z| = r$ – модуль комплексного числа z,
$\arg z = \varphi$ – аргумент комплексного числа z.

Таким образом, полярными координатами точки z комплексной плоскости являются модуль и аргумент комплексного числа z:

$$z(|z|, \arg z).$$

Из определений следует, что

$$|z| \in [0;\infty), \quad \arg z \in [0;2\pi) \quad \text{или} \quad \arg z \in (-\pi;\pi].$$

Можно дать такое определение модуля комплексного числа совпадающее с первым.

Определение. Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат комплексной плоскости до точки, отождествленной с этим числом.

Замечание. Так как действительные числа изображаются здесь точками на координатной оси Ох, то данное выше определение модуля комплексного числа является одновременно и определением модуля действительного числа.

Определение. Модулем действительного числа называется расстояние от начала координат до точки числовой оси, отождествленной с этим числом.

Замечу в скобках, что я бесконечно благодарен своей бывшей ученице 8-го класса Алёне Гузнищевой, от которой я и услышал, в далеком уже 2002 г., эту чеканную формулировку определения модуля действительного числа.

Упражнение

195. Отметьте на комплексной плоскости комплексные числа:

$$\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\ ;\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ \ \pm1\ ;\ \ \pm i\ .$$

Для всех чисел найдите их модули и аргументы.

§2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Точка $z = x + yi$ комплексной плоскости имеет декартовые координаты (x, y). Пусть (r, φ) – её полярные координаты. Тогда они связаны соотношением:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Так как по определению, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, то отсюда получаем:

$$\begin{cases} x = |z|\cos(\arg z) \\ y = |z|\sin(\arg z) \end{cases}.$$

Подставляя в алгебраическую форму записи числа z получаем:

$$z = x + yi = |z|\cos(\arg z) + i\,|z|\sin(\arg z)\ ,$$

или

$$z = |z|\,(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))\ .$$

Определение. Запись комплексного числа в виде

$$z = |z|\,(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))\ .$$

называется его тригонометрической формой.

Замечание. Поскольку одну букву писать экономнее нежели несколько, то чаще всего тригонометрическую форму комплексного числа пишут в виде:

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ ,\ \text{где}\ \ \varphi = \arg z\ .$$

Теорема (О равенстве комплексных чисел)

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули и аргументы.

Доказательство. Так как между всеми комплексными числами и всеми точками комплексной плоскости существует взаимно однозначное соответствие, то равные комплексные числа отождествляются на комплексной плоскости с одной и той же точкой, следовательно, имеют одни и те же полярные координаты, то есть полярный радиус, который по определению равен модулю комплексного числа, и полярный угол, который по определению равен аргументу комплексного числа.

Обратно, если комплексные числа имеют равные модули и аргументы, то они изображаются на комплексной плоскости одной точкой и, следовательно, равны. ▲

Используя соотношения, которые связывают полярные и декартовые координаты точки плоскости, можно найти модуль и аргумент комплексного числа зная его действительную и мнимую части.

Пусть $z = x + yi$, то есть, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Если точка z лежит в первой или четвертой четверти, то $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, а если точка z лежит во второй или третьей четверти, то $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$.

Также можно воспользоваться результатами упражнения 74 (§2, глава 5).

Пример. Найти тригонометрическую форму записи комплексного числа z, если:

а) $z = -2$; б) $z = 3$; в) $z = 3i$; г) $z = -2i$; д) $z = -1 - 2i$.

Решение. а) $z = -2 + 0\cdot i$, $x = -2, y = 0$,

$$|-2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2,\ \arg(-2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-2}\right) + \pi = \pi.$$

Ответ: $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

б) $z = 3 + 0\cdot i,\quad x = 3,\ y = 0,\ |3| = 3,\ \arg 3 = 0$.

Ответ: $3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.

в) $z = 0 + 3i,\quad x = 0,\ y = 3,\quad |3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$,

$$\arg(3i) = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos\frac{0}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

г) $z = 0 - 2i,\quad x = 0,\ y = -2,\quad |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$,

$$\arg(-2i) = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arcsin\frac{(-2)}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

д) $z = -1 - 2i,\ x = -1,\ y = -2,\quad |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$,

$$\arg(-1 - 2i) = \operatorname{arctg}\left(\frac{(-2)}{(-1)}\right) + \pi = \pi + \operatorname{arctg}2.$$

Ответ: $-1 - 2i = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}2$.

В некоторых случаях удобнее не пользоваться формулами, а изображать на чертеже соответствующую точку на комплексной плоскости и находить модуль и аргумент комплексного числа пользуясь чертежом.

Заметим, что запись

$$z = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

не является тригонометрической, так как $\varphi \neq \arg z = -\varphi$. В этом случае правильной записью тригонометрической формы будет следующая:

$$z = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \quad \text{или} \quad z = |z|(\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi)).$$

Упражнение

196. Запишите все числа из предыдущего упражнения в тригонометрической форме.

§3. Умножение комплексных чисел

Теорема (Об умножении комплексных чисел)

Пусть

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \text{где}\ \varphi_1 = \arg z_1,$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),\ \text{где}\ \varphi_2 = \arg z_2$$

– два произвольных комплексных числа записанных в тригонометрической форме. Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1|\cdot|z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).\ \blacktriangle$$

Отсюда вытекает правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме записи:

чтобы перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме записи нужно перемножить их модули, а аргументы сложить.

Следствие 1

Пусть k *натуральное число и* $k \in \{1, 2, ..., n\}$. *Пусть далее*

$$z_k = |z_k|(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ \textit{где}\ \varphi_k = \arg z_k$$

– произвольные n *комплексных чисел записанных в тригонометрической форме записи. Тогда*

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) +$$

$$+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)).\ \blacktriangle$$

Следствие 2

Пусть n натуральное число и $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *– произвольное комплексное число в тригонометрической форме записи. Тогда*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).\ \blacktriangle$$

Доказательство первого следствия проводится индукцией по числу сомножителей и предоставляется читателю. Следствие 2 сразу же вытекает из следствия 1.

§4. Свойства модуля комплексного числа

Теорема (Свойства модуля)

Пусть $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *– произвольные комплексные числа и соответствующие точки на комплексной плоскости. Тогда:*

1) модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей и модули противоположных чисел равны;

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \ \text{и} \ |-z| = |z|;$$

2) произведение комплексно-сопряженных чисел равно квадрату их модуля:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2;$$

3) расстояние между двумя точками комплексной плоскости равно модулю разности соответствующих комплексных чисел:

$$|z_1 - z_2|;$$

4) модуль суммы (разности) двух комплексных чисел не превосходит суммы их модулей (неравенство треугольника):

$$|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|;$$

5) Модуль разности двух комплексных чисел не меньше модуля разности их модулей:

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|;$$

Доказательство. 1) По предыдущей теореме имеем:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

где

$$\varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi) \quad \text{и} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2, & \text{если} \quad 0 \le (\varphi_1 + \varphi_2) \le 2\pi \\ \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi, & \text{если} \quad (\varphi_1 + \varphi_2 > 2\pi \end{cases},$$

то есть, $\varphi = \arg(z_1 z_2) \in [0; 2\pi)$.

Таким образом, равенства

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad \text{и} \quad z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

есть тригонометрическая форма записи числа $z_1 z_2$, следовательно, по теореме о равенстве комплексных чисел в тригонометрической форме записи, имеем $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Далее, так как

$$-z = (-1) \cdot z,$$

то по только что доказанному свойству

$$|-z| = |(-1)| \cdot |z| = |z|.$$

Заметим, что последнее равенство можно получить и из других соображений. Противоположные числа на комплексной плоскости изображаются точками симметричными относительно начала координат. Действительно, пусть $z = x + iy$. Тогда $-z = -x - iy$ и точки $z(x; y)$, $-z(-x; -y)$ имеют противоположные координаты. Значит, в силу симметрии, расстояния от этих точек до начала координат равны, то есть $|-z| = |z|$, что и требовалось доказать.

Заметим, что такой же результат можно получить с помощью формулы модуля комплексного числа (смотрите упражнение 197).

2) Пусть $z = x + i \cdot y$. Тогда

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

3). Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

и

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

С другой стороны, рассмотрим числа $z_1(x_1; y_1)$ и $z_2(x_2; y_2)$ как точки на комплексной плоскости. Тогда искомое расстояние между ними вычисляется по выше приведенной формуле.

4) Рассмотрим на комплексной плоскости точки z_1 и z_2, и начало координат O. В общем случае эти три точки являются вершинами треугольника Oz_1z_2:

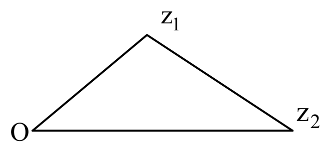


Рис. 140

Воспользуемся известным свойством треугольника: длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух его других сторон.

Мы только что доказали, что длина стороны $z_1 z_2$ этого треугольника равна $|z_1 - z_2|$, а длины сторон Oz_1 и Oz_2 равны по определению модулям чисел z_1 и z_2: $Oz_1 = |z_1|$, $Oz_2 = |z_2|$. Отсюда и получаем, что

$$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Заменим в последнем неравенстве число z_2 на противоположное ему число $(-z_2)$, тогда получаем:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Заметим, что равенство в этих неравенствах достигается тогда и только тогда, когда треугольник вырождается в отрезок прямой, то есть, когда все три точки O, z_1 и z_2 лежат на одной прямой.

5) Имеем, по уже доказанному, неравенство:

$$|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \le |z_2| + |z_1 - z_2|,$$

откуда следует

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|.$$

Поменяв местами z_1 и z_2, получаем

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \ge |z_2| - |z_1|,$$

откуда и следует доказываемое неравенство. ▲

Теория комплексных чисел имеет много приложений в различных областях математики. Автор не может удержаться от искушения привести хотя бы один такой пример, относящийся к теории чисел.

Определение. Говорят, что натуральное число n представимо в виде суммы двух квадратов, если существуют такие целые числа x и y, что выполняется равенство:

$$n = x^2 + y^2.$$

Теорема (О представлении числа суммой двух квадратов)

Если два числа представимы в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представимо в виде суммы двух квадратов.

Доказательство. Пусть $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и

$$n_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad n_2 = x_2^2 + y_2^2,$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. Нам нужно доказать, что найдутся два целых числа a и b такие, что

$$n_1 \cdot n_2 = a^2 + b^2.$$

С этой целью рассмотрим два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

и вычисляя модуль, получаем:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2}.$$

С другой стороны,

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Так как $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, то $|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ или

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

Отсюда получаем равенство:

$$n_1 n_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = a^2 + b^2,$$

где $x_1 x_2 - y_1 y_2 = a$, $x_1 y_2 + x_2 y_1 = b \in \mathbb{Z}$. ▲

Упражнение

197. Докажите равенство модулей противоположных комплексных чисел с помощью формулы модуля комплексного числа.
198. Найдите произведение всех чисел из упражнения 195.

Глава 22. Корни из комплексных чисел
§1. Формула Муавра

Теорема (Муавр Абрахам, 1707 г.)
Для любого целого числа n *и любого действительного числа* α *имеет место следующее равенство:*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Доказательство. Разобьем доказательство на 3 этапа.

1) Пусть $n \in \mathbb{N}$ – натуральное число. Так как комплексное число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ имеет модуль $|z| = 1$, то справедливость формулы Муавра в этом случае следует из правила умножении комплексных чисел в тригонометрической форме записи.

2) Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha).$$

3) Пусть $n = -m$, где $m \in \mathbb{N}$ – натуральное число. Тогда по свойству целых степеней, которые справедливы в любом поле, в том числе и в поле комплексных чисел, имеем:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = ((\cos\alpha + i\sin\alpha)^m)^{-1} =$$

$$= (\cos(m\alpha) + i\sin(m\alpha))^{-1} = \cos(-m\alpha) + i\sin(-m\alpha) = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Здесь мы использовали уже доказанные случаи формулы Муавра возведения в натуральную степень и в степень, равную (–1).

Остался последний случай $n = 0$. В любом поле $\mathbb{F}$ для любого его ненулевого элемента x полагают по определению $x^0 \doteq 1$. Так как $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha + i\sin\alpha \neq 0$, то, по определению, верно равенство:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^0 \doteq 1 = \cos 0 + i \cdot \sin 0. \ \blacktriangle$$

Следствие (О целых степенях комплексного числа)
Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)). \ \blacktriangle$$

Пример. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2014}$.

Решение. Комплексное число $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости находится в третьей четверти, поэтому

$$|z| = 1, \quad \varphi = \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

$$z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Применим формулу Муавра. Заметим, что

$$z^3 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1.$$

Отсюда находим

$$z^{2014} = \left(z^3\right)^{671} \cdot z = z.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2014} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение

199. Найдите все целые степени числа $(\sqrt{3} + i)/2$.

§2. Деление комплексных чисел

Теорема (О делении комплексных чисел)
Пусть

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ \varphi_1 = \arg z_1,$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0, \ \varphi_2 = \arg z_2$$

– два произвольных комплексных числа записанных в тригонометрической форме. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Доказательство. Воспользуемся следствием формулы Муавра и правилом умножения комплексных чисел в тригонометрической форме записи. Получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot (z_2)^{-1} = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2))^{-1} =$$

$$= |z_1|\cdot|z_2|^{-1}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) . \ \blacktriangle$$

Пример. Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме, и найти их частное.

Решение. Комплексное число $z_1 = -1 + i$ на комплексной плоскости находится во второй четверти, поэтому

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \pi + \mathrm{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} .$$

Комплексное число $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ на комплексной плоскости находится во четвертой четверти, поэтому

$$|z_2| = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} .$$

Находим частное данных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}) .$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$.

§3. Корни из комплексных чисел

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число α, такое, что $\alpha^n = z$.

Теорема (Формула корней из комплексного числа)
Для любого ненулевого комплексного числа

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi = \arg z ,$$

существует ровно n корней n-й степени из комплексного числа z и все они могут быть найдены по формуле:

$$\alpha_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \{0,1,...,n-1\}$, $\sqrt[n]{|z|}$ *– арифметический корень* n*-й степени из положительного числа* $|z|$.

Доказательство. Обозначим

$$\sqrt[n]{z} \doteq \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} ,$$

и докажем, что данное множество исчерпывает все множество корней n-й степени из комплексного числа z.

Доказательство проведем в 3 этапа. Сначала мы докажем, что все элементы множества $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$ являются корнями n-й степени из комплексного числа z. Затем мы покажем, что среди корней этого множества нет равных. И, наконец, мы покажем, что любой корень n-й степени из комплексного числа z является элементом множества $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$.

1) По следствию 2 формулы Муавра $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$

$$\alpha_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)^n =$$

$$= |z|(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z .$$

2) Допустим, что $\alpha_m = \alpha_k$, где $m, k \in \{0,1,...,n-1\}$ и $m \neq k$. Тогда по теореме о равенстве двух комплексных чисел в тригонометрической форме записи следует, что равны их аргументы. Но, аргумент числа α_k может отличаться от числа $\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ на число кратное числу 2π (то есть на целое число оборотов) и аналогично для аргумента числа α_m. Отсюда следует, что

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} - \frac{\varphi + 2\pi m}{n} = 2\pi t , \ t \in \mathbb{Z} .$$

Умножим это равенство на n:

$$\varphi + 2\pi k - \varphi - 2\pi m = 2\pi t \cdot n .$$

Отсюда следует, что

$$k - m = t \cdot n ,$$

и так как по нашему предположению $m \neq k$, то

$$|k - m| = |t \cdot n| = |t|n \geq n ,$$

чего не может быть, так как $m, k \in \{0,1,...,n-1\}$ и $|k - m| \leq n - 1$. Получили противоречие. Следовательно, среди корней в множестве $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$ нет равных, что и требовалось доказать.

3) Пусть теперь комплексное число

$$\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

является корнем n-й степени из комплексного числа z, то есть $\beta^n = z$. Так как

$$\beta^n = |\beta|^n (\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда, из тех же соображений, что и во второй части доказательства, следуют равенства:

$$|\beta|^n = |z|, \quad n\psi = \varphi + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Из первого равенства получаем, что

$$|\beta| = \sqrt[n]{|z|},$$

а из второго следует

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi t}{n}.$$

Далее, разделим целое число t на n с возможным остатком:

$$t = n \cdot q + r,$$

где $q \in \mathbb{Z}$, а остаток r также является целым числом, но $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Отсюда

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi t}{n} = \frac{\varphi + 2\pi nq + 2\pi r}{n} = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q,$$

и

$$\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi) = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi r}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi r}{n}) = \alpha_r.$$

Таким образом, корень $\beta = \alpha_r$ является корнем из множества корней $\{\alpha_o, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$. ▲

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение. Запишем число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме записи:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i} = \{\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2\},$$

где

$$\alpha_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-1+i} = \{\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2\}$, где $\alpha_o = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\alpha_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right), \ \alpha_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Упражнение

200. Найдите все корни уравнения $x^6 + 1 = 0$.

§4. Расположение корней на комплексной плоскости

Перепишем формулу корней в виде

$$\alpha_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right), \ \varphi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \ k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Заметим, что

$$\varphi_{k+1} = \frac{\varphi + 2\pi(k+1)}{n} = \varphi_k + \frac{2\pi}{n},$$

откуда мы видим, что аргументы корней образуют арифметическую прогрессию. Так как модуль у всех корней одинаковый, то на комплексной плоскости они удалены от начала координат на одинаковое расстояние. Отсюда делаем вывод, что все корни на комплексной плоскости изображаются точками, лежащими на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Далее, мы видим, что угол между такими двумя соседними точками одинаковый:

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{2\pi}{n}.$$

Отсюда делаем вывод, что все корни располагаются на окружности равномерно. Смотрите рисунок 141.

Если соединить все соседние точки (корни) отрезками прямой, то получим правильный n-угольник. При изображении корней на комплексной плоскости около точки, с которой отождествляется корень проставляется только его аргумент, поскольку модули у всех корней одинаковые.

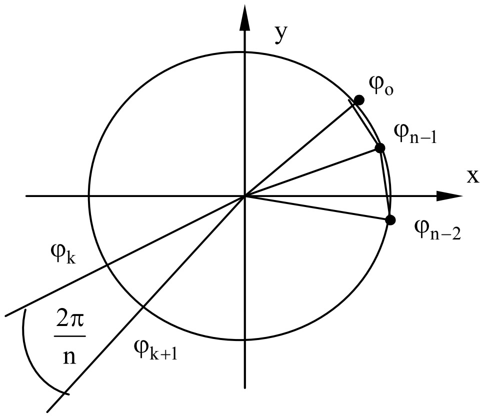


Рис. 141

Пример. Изобразить все корни $\sqrt[3]{-1+i}$ на комплексной плоскости.

Решение. Смотрите рисунок 142. Сами корни мы уже вычислили (смотрите пример §3). Изображаем координатные оси, проводим окружность радиуса $\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат и отмечаем на ней точки полярный угол которых равен:

$$\varphi_o = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_1 = \frac{11\pi}{12}, \quad \varphi_2 = \frac{19\pi}{12}.$$

Соединим построенные точки отрезками прямых и получаем правильный треугольник.

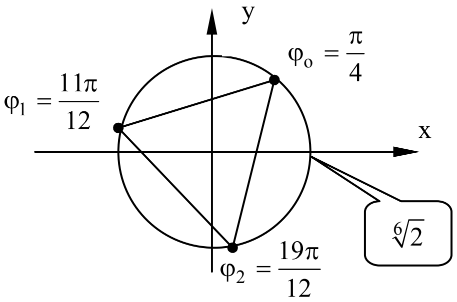


Рис. 142

§5. Корни из единицы

Пусть $n > 1$ – натуральное число. По формуле корней из комплексного числа, существует ровно n корней из комплексного числа $z = 1 + i \cdot 0 = 1$. Для вычисления этих корней запишем единицу в тригонометрической форме:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \quad |1| = 1, \arg 1 = 0.$$

Обозначим все множество корней через T_n:

$$T_n \doteq \sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\},$$

где

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

В частности,

$$\varepsilon_o = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Заметим, что $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ верна формула:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k.$$

Это равенство сразу же получается из формулы Муавра:

$$\varepsilon_1^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right) = \varepsilon_k.$$

Теперь мы все множество корней T_n из 1 можем записать так:

$$T_n = \{\varepsilon_1^o = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^2, ..., \varepsilon_1^{n-1}\}.$$

§6. Многочлен деления круга

Определение. Многочлен $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ называется многочленом деления круга.

Теорема (О корнях многочлена деления круга)

Все корни многочлена деления круга являются корнями $(n+1)$*-й степени из* 1.

Доказательство. Достаточно рассмотрим многочлен деления круга как сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем x. Тогда

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \ \blacktriangle$$

Так как корни из 1 делят единичную окружность на n равных дуг, то из теоремы следует, что все корни многочлена деления круга вместе с 1 делят окружность на равные дуги, откуда и произошло название этого многочлена.

Поставим задачу разложить многочлен деления круга на неприводимые (неразложимые) множители с действительными коэффициентами. Известно, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения неприводимых над полем действительных чисел многочленов с действительными коэффициентами:

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{t_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{k_s},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ – все различные действительные корни многочлена f(x), m – их число, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{N}$ – их кратности, s – число квадратных трехчленов с действительными коэффициентами $p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$ и отрицательными дискриминантами, $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$ – кратности соответствующих комплексных корней, $a_n \neq 0$ – старший коэффициент многочлена f(x), n – его степень.

Замечание. Линейных множителей может и не быть. Тогда $m = 0$ и многочлен не имеет действительных корней. Аналогично, многочлен может не иметь комплексных корней, тогда $s = 0$. Далее, очевидно, что степень многочлена f(x)

$$\deg f(x) = n = m + 2s.$$

Из последнего равенства вытекает следующее следствие.

Следствие (О действительном корне многочлена)

Любой многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень. ▲

Легко получить разложение на неприводимые множители, если известны все корни многочлена f(x). Тогда многочлен раскладывается над полем комплексных чисел на линейные множители. Так как коэффициенты многочлена f(x) предполагаются действительными, то если многочлен имеет комплексный корень $z = x + iy$, то комплексно сопряженное ему число $\overline{z} = x - iy$ также является корнем этого многочлена.

Действительно, если $f(z) = 0$, то $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0$.

Разложение многочлена на линейные множители будет иметь вид:

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{t_m} \cdot$$
$$\cdot (x - z_1)^{k_1} (x - \overline{z}_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - z_s)^{k_s} (x - \overline{z}_s)^{k_s},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ – все различные действительные корни многочлена f(x), m – их число, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{N}$ – их кратности, $z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_s, \overline{z}_s \in \mathbb{C}$ – все различные комплексно сопряженные корни многочлена f(x), s – число пар всех различных комплексно сопряженных корней, $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$ – их кратности, $a_n \neq 0$ – старший коэффициент многочлена f(x), n – его степень.

Теперь, перемножим пару линейных множителей содержащие комплексно сопряженные корни. Пусть

$$z_1 = a_1 + i \cdot b_1, \ \overline{z}_1 = a_1 - i \cdot b_1.$$

Тогда

$$z_1 + \overline{z}_1 = 2a_1 \doteq p_1 \in \mathbb{R}, \ z_1 \cdot z_2 = a_1^2 + b_1^2 \doteq q_1 \in \mathbb{R},$$

откуда и получаем:

$$(x - z_1)(x - \overline{z}_1) = x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1 \cdot \overline{z}_1 = x^2 + p_1 x + q_1 \in \mathbb{R}[x].$$

Проделав то же самое со всеми парами комплексно сопряженных корней, получим искомое разложение.

Осталось заметить, что все корни многочлена деления круга различны и их легко вычислить и, следовательно, получить разложение на линейные множители.

Пример. Разложить на неприводимые множители с действительными коэффициентами (то есть на полем $\mathbb{R}$) многочлен деления круга пятой степени:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Решение. Решим уравнение $x^6 - 1 = 0$. Так как

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),$$

то найдя все корни уравнения $x^6 - 1 = 0$, мы найдем тем самым все корни многочлена $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Имеем,

$$\sqrt[6]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\},$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вычисляя остальные корни по формуле

$$\varepsilon^k = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}, \quad k = 2,3,4,5,$$

получаем (смотрите рисунок 143):

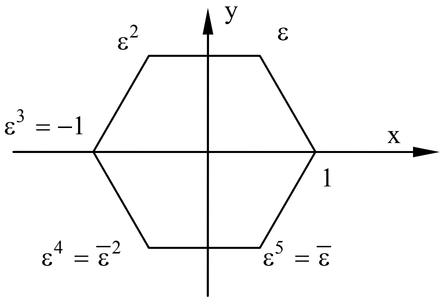


Рис. 143

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$\varepsilon^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon^5 = \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда,

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})(x-\varepsilon^2)(x-\overline{\varepsilon^2}),$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^6 - 1}{x - 1} = (x+1)(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})(x-\varepsilon^2)(x-\overline{\varepsilon^2}) =$$

$$= (x+1)(x^2 - (\varepsilon + \overline{\varepsilon})x + \varepsilon\cdot\overline{\varepsilon})(x^2 - (\varepsilon^2 + \overline{\varepsilon}^2)x + \varepsilon^2\cdot\overline{\varepsilon}^2) =$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1),$$

так как

$$\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon} = |\varepsilon|^2 = 1, \quad \varepsilon^2\cdot\overline{\varepsilon}^2 = |\varepsilon^2|^2 = 1, \quad \varepsilon + \overline{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,$$

$$\varepsilon^2 + \overline{\varepsilon}^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1.$$

Ответ: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Замечание. Конечно, мы могли бы получить искомое разложение в данном примере гораздо проще, если бы разложили многочлен $x^6 - 1 = 0$ сначала по формуле разности квадратов

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1),$$

а затем применили бы формулы разности и суммы кубов:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Однако, мы хотели продемонстрировать общий подход к решению данной задачи.

Упражнение

201. Разложите на неприводимые над полем действительных чисел многочлены многочлен деления круга четвертой степени: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

§7. Исторический экскурс

(Материал этого параграфа позаимствован из замечательной книги Виленкина Н.Я. и др. «За страницами учебника математики»)

Геометрические задачи на построение с помощью циркуля и линейки зародились еще в древней Греции во времена Евклида и Платона. Еще в те времена, математики умели строить с помощью циркуля и линейки правильные треугольники, пятиугольники и квадраты. Более того, они умели с помощью циркуля и линейки делить угол пополам, поэтому они умели строить и правильные 6-ти, 10-ти и 15-ти угольники и все правильные n-угольники, где $n = 2^m$, $n = 3\cdot 2^m$, $n = 5\cdot 2^m$ и $n = 15\cdot 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Очень важно, что с помощью линейки проводятся только отрезки прямых, а длины отрезков измеряются с помощью циркуля, а не делений на линейке. Так, используя эти инструменты можно построить отрезок, длина которого выражается числом, полученным из 1 с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и извлечением квадратного корня.

То есть вначале есть только отрезок, длина которого принимается за 1. Тогда можно построить отрезок, длина которого равна рациональному числу или квадратному корню из рационального числа.

Далее, если отрезок длины a уже построен с помощью циркуля и линейки, то можно построить с помощью этих инструментов отрезок длины b, если число b выражается через a с помощью арифметических действий и квадратных корней. Говорят, что такое число выражается в квадратных радикалах.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок, длина которого выражается в квадратных радикалах. Все это знали еще математики древней Греции. Задачу построения других правильных многоугольников (или доказательство невозможности таких построений) не могли решить в течение двух последующих тысячелетий, а решена она была немецким студентом филологического факультета Гёттингенского университета Карлом Фридрихом Гауссом в 1796 году. В то время Гауссу было 18 лет и он разрывался между занятиями филологией и математикой и не мог сделать окончательного выбора. Решение древней задачи помогло ему сделать окончательный выбор в пользу (заметим, что и на пользу) математики. До сих пор математики всего мира называют Гаусса королем математики.

Однако, вернемся к обсуждаемой задаче. Сначала Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить только такие отрезки, длины которых выражаются в квадратных радикалах и только они. Гаусс использовал для решения задачи комплексные числа, в частности, корни из единицы. Так как корни из 1 делят окружность на равные дуги, то задача построения правильного n-угольника сводится к вопросу: при каких n корни n-й степени из 1 выражаются в квадратных радикалах. Здесь имеется ввиду их действительные и мнимые части. Таким образом, геометрическая задача была сведена к чисто алгебраической.

Обозначим через a_n длину стороны правильного n-угольника. Гаусс нашел способ, с помощью которого ему удалось выразить число a_{17} в квадратных радикалах и тем самым доказать, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник.

Но Гаусс не был бы "королем" математики, если бы он остановился на этом. Позднее он решил задачу полностью, выяснив при каких n задача построения правильного n-угольника может быть решена, а при каких нет.

Чтобы понять этот результат нам понадобится одно определение.

Определение. Числа вида

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

где $n = 0$ или $n \in \mathbb{N}$, называются числами Ферма.

При $n = 0$, получаем

$$F_o = 2^{2^0} + 1 = 3.$$

Далее,

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5,\ F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17,\ F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257,$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Первые пять чисел Ферма являются простыми числами. Однако, до настоящего времени не известно более ни одного простого числа Ферма. Более того, неизвестно, существует ли еще хотя бы одно простое число Ферма и эта проблема еще ждет своего гения.

Гаусс доказал следующую теорему.

Теорема (О правильных многоугольниках)

С помощью циркуля и линейки построить правильный n*-угольник можно тогда и только тогда, когда*

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k,\ m = 0 \text{ или } m \in \mathbb{N},$$

$p_1, \ldots, p_k$ *– различные между собой простые числа Ферма.* ▲

Замечание. Теорема утверждает только принципиальную возможность построения правильного n-угольника. Поэтому оставалась задача выразить сторону p-угольника в квадратных радикалах для оставшихся известных простых чисел Ферма $p = 257$ и $p = 65537$. Для числа 257 эту задачу решил немецкий математик Фридрих Ришелло. Решение занимает 80 страниц текста. Случай числа 65537 был выполнен О.Гермесом, который потратил на вычисления 10 лет, а сама работа не опубликована ввиду ее необъятных размеров и хранится в архивах Гёттингенсного университета. Интересно было бы составить программу для решения этой задачи на компьютере.

Гаусс очень ценил эту свою первую математическую работу и перед смертью завещал высечь на своей могильной плите правильный 17-ти угольник. Увы, это не было сделано. Но в городе Брауншвейге стоит на 17-ти угольном постаменте памятник Карлу Фридриху Гауссу – королю математики.

Несколько задач для исследования

Задача 1

Известно неравенство треугольника: длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон. Введем следующее определение.

Определение. Пусть дан произвольный треугольник со стронами a,b и c. Число $\alpha \doteq k_a \doteq \frac{a}{b+c}$ называется коэффициентом связки стороны a (или просто связкой стороны a).

Предметом исследования является изучение коэффициентов связки сторон треугольника. В частности, получение необходимых и достаточных условий равенства и подобия треугольников с участием коэффициентов связки сторон треугольника.

Любой треугольник имеет три коэффициента связки: (k_1, k_2, k_3) или (α, β, γ):

$$k_1 \doteq \alpha \doteq \frac{a}{b+c},\ k_2 \doteq \beta \doteq \frac{b}{a+c},\ k_3 \doteq \gamma \doteq \frac{c}{a+b},$$

где a, b, c – длины сторон треугольника.

Можно упорядочить их по возрастанию. Ясно, что подобные треугольники имеют один и тот же упорядоченный набор коэффициентов связки. Верно ли обратное, то есть справедливо ли следующее утверждение.

Теорема (О связках треугольника)

Полный упорядоченный набор связок треугольника с точностью до подобия однозначно определяет этот треугольник.

Другими словами, два треугольника подобны тогда и только тогда, когда их упорядоченные полные наборы связок равны. Возможно для подобия треугольников достаточно совпадения двух соответствующих связок из их полных упорядоченных наборов. Докажите или опровергните следующие утверждения.

Теорема (О новом критерии подобия треугольников)

Любой треугольник однозначно определяется (с точностью до подобия) одним из своих внутренних углов и коэффициентом связки противоположной (прилегающей) стороны.

Для треугольника ABC через $\theta(ABC)$ будем обозначать наименьший из коэффициентов связки сторон этого треугольника.

Гипотеза (О наименьшей связке треугольника)

Наименьший коэффициент связки любого треугольника не превосходит $0,5$.

Задача 2

Буквой T будем обозначать множество всех треугольников.

Определение. Два треугольника $x, y \in T$ назовем взаимными, если

$$\theta(x) = \theta(y).$$

Теорема (Об отношении взаимности треугольников)

Отношение взаимности, определенное на множестве треугольников является отношением эквивалентности.

Докажите или опровергните следующие утверждения.

Теорема (Критерии подобия взаимных треугольников)

Два взаимных треугольника подобны тогда и только тогда когда выполняется одно из следующих условий:

1) углы противолежащие сторонам с наименьшей связкой равны;

2) углы прилежащие к сторонам с наименьшей связкой равны;

3) вторые по величине связки этих треугольников равны.

Возможно следующие задачи помогут прояснить ситуацию.

1) Докажите, что существует бесконечно много произвольных (не подобных друг другу) треугольников, одна из сторон которых имеет коэффициент связки $k = 0,5$, то есть, треугольников ABC, для которых верно равенство:

$$AC = \frac{AB + BC}{2}.$$

2) Найдите геометрический способ построения всех треугольников, одна из сторон которых имеет один и тот же заранее фиксированный коэффициент связки. Рассмотрите сначала частный случай, когда наименьший коэффициент связки равен 0,5.

Задача 3 (Родионов В. И.)

Дан выпуклый n-угольник, выполненный в виде однородной пластины, толщиной которой можно пренебречь, и помещенный в прямоугольную декартовую систему координат на плоскости. Координаты его вершин считаются известными. Требуется так распределить массу n-угольника по всем его n вершинам, чтобы ГЦТ n-угольника совпал с ГЦТ полученной системы из n материальных точек.

Комментарии к задаче

Задача была предложена и сформулирована Родионовым В.И. Для $n = 3$ решение задачи хорошо известно. Но, уже для произвольного 4-х угольника неясно, имеет ли эта задача решение (для параллелограмма она очевидна). Мы можем предложить направление поиска решения.

Пусть $A_1A_2A_3A_4$ - произвольный выпуклый 4-х угольник и M - его масса. В вершину $A_i, i = 1,2,3,4$ помещается масса, равная $m_i \doteq k_i \cdot M, i = 1,2,3,4$, так, что $\sum_{i=1}^{4} k_i = 1$. Коэффициенты $k_i, i = 1,2,3,4$ будем называть "весами" i-й вершины. (Если массу M пластины принять за 1, то веса будуть совпадать с массами, помещенными в вершины.)

Сначала, видимо, нужно найти ГЦТ n-угольника по известным координатам её вершин. Далее, полагая известным ГЦТ n-угольника, найти веса, исходя из условия задачи, то есть, чтобы ГЦТ n-угольника совпадал с ГЦТ системы из n материальных точек, помещенных в его вершины.

Задача 4

В прямоугольной декартовой системе координат в пространстве известны координаты четырех точек некоторой плоскости (необязательно координатной, но и не исключается и этот случай). Известно, что первые три точки не лежат на одной прямой. Определить месторасположение четвертой точки относительно треугольника с вершинами в первых трех точках: внутри треугольника, вне треугольника или на границе треугольника.

Задача 5

Исследовать возможность обобщения теоремы о координатах точки пересечения биссектрис треугольника на произвольный выпуклый четырехугольник, который можно вписать в окружность (смотрите §6, глава 4, рисунок 46). Исследовать возможность обобщения теоремы предыдущей задачи на произвольную треугольную пирамиду.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. 512 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985. 320 с.
3. Боревич З.И. Определители и матрицы. – М.: Наука, 1970. 200 с.
4. Волков В.А. Аналитическая геометрия и векторная алгебра. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 192 с.
5. Головизин В.В. Практические занятия по курсу "Алгебра и геометрия". Ч.1: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2010. 152 с.
6. Головизин В.В. Основные задачи курса "Алгебра и геометрия". Часть 1: Основные задачи векторной алгебры: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 156 с.
7. Головизин В.В. Основные задачи курса "Алгебра и геометрия". Часть 2: Основные задачи аналитической геометрии на прямую и плоскость: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 158 с.
8. Головизин В.В. Основные задачи курса "Алгебра и геометрия". Часть 3: комплексные числа: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 59 с.
9. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск: ТетраСистемс, 2001. 288 с.
10. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. 272 с.
11. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2002. 240 с.
12. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1960. 256 с.
13. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2003. 416 с.
14. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск.: Вышэйшая школа, 1968. 504 с.

Учебное издание

Головизин Вячеслав Владимирович

Основы аналитической геометрии и линейной алгебры
Часть I

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.В. Головизин

Авторская редакция

Подписано в печать . .14. Формат $60 \times 84 \ ^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4
Тел./факс: +7(3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru