

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Составление математической модели расчета оптимальной производственной программы

Чтобы процесс составления математической модели расчета оптимальной производственной программы предприятия изложить проще и в более доступной форме, рассмотрим его на конкретном примере

Для изготовления двух видов продукции А и Б предприятие расходует три вида ресурсов: сырье, оборудование и труд. Информация о нормах затрат ресурсов на единицу выпускаемой продукции, лимиты ресурсов, на которые рассчитывает предприятие в плановом периоде, и рыночные цены реализации каждой единицы продукции приведены ниже.

Наименование ресурса	Норма затрат на		Объем ресурса
	продукт А	продукт В	
Сырье (кг)	1	2	40
Оборудование (ст.-ч)	2	1	50
Труд (чел.-ч)	1	1	35
Цена реализации (руб.)	50	70	

Задача администрации предприятия заключается в разработке такой программы выпуска продукции в плановом периоде, затраты ресурсов на которую не превысят имеющихся лимитов, а ожидаемая выручка после продажи выпущенной продукции будет максимальной.

Требуется:

1. Составить экономико-математическую модель расчета оптимальной производственной программы предприятия на плановый период.

2. Применяя графический метод решения задачи линейного программирования, найти оптимальное решение для составленной модели и дать его экономическую интерпретацию.

3. Используя положения теории двойственности, найти оптимальное решение двойственной задачи к модели расчета оптимальной производственной программы и привести его экономическую интерпретацию.

4. Определить функцию предельной эффективности сырья на этом предприятии и функцию зависимости максимальной выручки от затраченного сырья, построить графики этих функций.

Для построения экономико-математической модели заданной производственной ситуации обозначим через x_1 искомую программу выпуска изделий А, а через x_2 – искомую программу выпуска изделий В.

Тогда производственная программа полностью будет представлена вектором $\bar{x} = (x_1, x_2)$.

Эта программа должна выбираться с учетом объемов имеющихся ресурсов в рассматриваемом периоде.

Суммарный расход сырья на производственную программу, рассчитываемый по формуле $1x_1 + 2x_2$, не должен превысить 40 кг сырья. Отсюда *ограничение* на расход сырья представится неравенством

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40.$$

Общая загрузка оборудования на производственную программу рассчитывается по формуле $2x_1 + 1x_2$, и эта загрузка не должна превысить 50 ст.-ч работы оборудования. Отсюда получаем *ограничение* на работу оборудования:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 50.$$

Суммарные затраты труда на производственную программу рассчитываются по формуле $1x_1 + 1x_2$, и эти затраты не должны превысить 35 чел.-ч. Отсюда получаем *ограничение* на затраты труда:

$$1x_1 + 1x_2 \leq 35.$$

Кроме того, для искоемых переменных x_1 , x_2 должны выполняться *граничные условия* (или *требования неотрицательности*), а именно:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Показателем качества выбранной производственной программы является ожидаемая выручка от реализации всех выпущенных изделий. Эту выручку необходимо рассчитывать по формуле

$$z = 50x_1 + 70x_2.$$

Искомая программа должна максимизировать сумму z , которая также называется *целевой функцией*, или *критерием* оптимизационной модели. Символически требование максимизации отражается записью

$$z = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max.$$

Представим составленную модель в следующей компактной записи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Найти } \bar{x} = (x_1, x_2); \\ x_1 + 2x_2 \leq 40; \\ 2x_1 + x_2 \leq 50; \\ x_1 + x_2 \leq 35; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \\ z = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max. \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Модель (1.1), представленная такой записью ограничений, граничных условий и целевой функции, относится к типу *задач линейного программирования*. Термин «линейное программирование» объясняется тем, что при подсчете расходов ресурсов на программу выпуска и расчете ожидаемой выручки после реализации всей выпущенной по этой программе продукции используются только линейные функции.

В общем случае задача линейного программирования может быть представлена в так называемой стандартной записи. Известно, что к стандартной записи можно привести задачу линейного программирования (задачу ЛП), данную в любой другой записи, используя для этого специальные правила эквивалентных преобразований. Поэтому во всех дальнейших утверждениях,

без потери общности, под задачей ЛП будем понимать ее стандартную постановку (1.2).

$$\left. \begin{aligned} &\text{Найти } \bar{x} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n); \\ &a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ &a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i; \\ &a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ &z = c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

1.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Пользуясь тем, что в задаче ЛП (1.1) имеется две искомые переменные, ее можно решить графическим способом, который состоит из следующих двух этапов.

1. Изображение области допустимых решений предложенной задачи ЛП в декартовой системе координат.

2. Визуальное нахождение оптимального решения на построенной области допустимых решений и его аналитическое уточнение.

Выполним названные этапы для задачи (1.1).

1. Под *допустимым решением* задачи ЛП понимается такой числовой набор значений искомых переменных, который при подстановке во все ограничения и граничные условия задачи обращает их в истинные числовые неравенства и равенства. Под *областью допустимых решений* (ОДР) задачи ЛП понимается геометрическое место точек, координаты которых являются допустимыми решениями.

Прежде всего, укажем в декартовой системе координат на рис. 1.1 область допустимых решений для первого ограничения задачи (1.1). Для этого проведем в системе координат прямую, соответствующую первому ограничению. Уравнение этой прямой будет получено, если первое ограничение будет записано как равенство

$$x_1 + 2x_2 = 40.$$

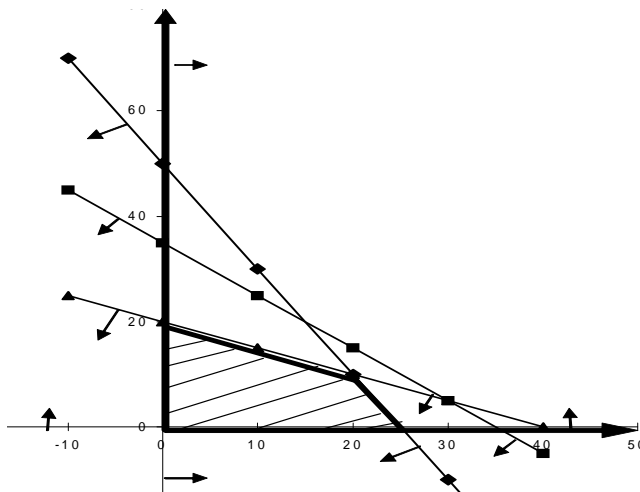


Рис. 1.1. Построение области допустимых решений задачи ЛП

Задавая произвольно значение одной из координат точки, лежащей на этой прямой, можно через полученное уравнение вычислить значение другой координаты этой же точки. Если данная прямая имеет точки пересечения с обеими осями в пределах создаваемого рисунка, то лучше присваивать нулевое значение сначала первой переменной, затем второй переменной, находя соответствующее значение другой переменной.

Результаты этих вычислений рекомендуется заносить в таблицу.

x_1	0	40
x_2	20	0

Отметим эти точки на осях рис. 1.1 и проведем через них прямую, соответствующую первому ограничению. На рисунке она маркирована треугольниками. Если взять координаты любой точки, лежащей на этой прямой, то они обратят первое ограничение в равенство. Для выявления точек, координаты которых строго удовлетворяют данному ограничению, нужно указать на одну из образовавшихся полуплоскостей.

Для определения полуплоскости, координаты точек которой являются строгими решениями данного неравенства, необходимо выбрать *пробную точку*, явно принадлежащую какой-либо из двух полуплоскостей, полученных после проведения прямой, соответствующей этому неравенству.

Если координаты пробной точки обращают неравенство в истинное числовое неравенство, то полуплоскость, которой она принадлежит, является искомой. На рис. 1.1 искомые полуплоскости выделены стрелками. Если числовое неравенство получилось ложным, то стрелками нужно указать полуплоскость, которой не принадлежит пробная точка.

Таким образом, с помощью одной пробы графически выявляется область допустимых решений для любого из ограничений и граничных условий анализируемой задачи ЛП.

В тех случаях, когда прямая не проходит через начало координат, в качестве пробной точки проще всего брать значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Подставим эти значения в анализируемое неравенство и, получив утверждение $0 \leq 40$, находим его истинным. Поэтому стрелки от этой прямой откладываем в направлении начала координат, показывая тем самым, где лежат все точки, координаты которых являются допустимыми решениями для ограничения по сырью.

Подобным образом следует поступить с каждым ограничением и граничным условием задачи ЛП, выделив стрелками пять соответствующих им полуплоскостей на одном и том же рисунке. При этом прямая, маркированная ромбами, соответствует второму ограничению и имеет следующие координаты точек пересечения с осями:

x_1	0	25
x_2	50	0

Прямая, помеченная квадратами, соответствует третьему ограничению задачи и пересекается с осями в точках с координатами:

x_1	0	35
x_2	35	0

Следующим шагом нужно выделить общую часть обозначенных этими стрелками полуплоскостей или, другими словами, найти их пересечение. На рис. 1.1 заштрихованный четырехугольник с выделенными жирной линией сторонами представляет собой все множество точек, координаты которых обращают в истинные утверждения все ограничения и граничные условия модели. Это означает, что первый этап завершен, и область допустимых решений задачи ЛП построена. Полезно обратить внимание на то, что, если третье ограничение исключить из модели, то ОДР останется неизменной. Такое нельзя сказать о других ограничениях модели.

2. Под *оптимальным решением* задачи ЛП понимается такое допустимое *решение*, при котором целевая функция задачи принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное). Доказано, что среди множества оптимальных решений задачи ЛП, если они есть у этой задачи, обязательно существуют координаты вершины или угловой точки многоугольной области допустимых решений задачи ЛП (ограниченной или неограниченной). Набор числовых значений координат угловой точки ОДР называется *опорным решением* задачи ЛП. Другими словами, среди множества оптимальных решений задачи ЛП всегда существует подмножество опорных решений.

Выделенному на рис. 1.1 четырехугольнику допустимых решений соответствуют четыре опорных решения – четыре варианта координат угловых точек: $\overline{x_1} = (0, 0)$, $\overline{x_2} = (25, 0)$, $\overline{x_3} = (20, 10)$, $\overline{x_4} = (0, 20)$. Координаты угловой точки $\overline{x_3} = (20, 10)$ можно найти, вычислив координаты точки пересечения прямых, маркированных треугольниками и ромбами, для чего нужно решить систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 40; \\ 2x_1 + x_2 = 50. \end{array} \right\}$$

Для визуального выявления оптимального решения среди этих опорных решений используем следующие теоретические понятия.

Под *линией уровня целевой функции* понимается геометрическое место точек, для координат которых зависимая переменная z имеет постоянное числовое значение.

Например, уравнение линии нулевого уровня будет иметь вид:

$$0 = 50x_1 + 70x_2;$$

или уравнение линии уровня 100 будет иметь вид:

$$100 = 50x_1 + 70x_2;$$

или уравнение линии уровня 1000 будет иметь вид:

$$1000 = 50x_1 + 70x_2.$$

Очевидно, что для всех возможных числовых значений линии уровня целевой функции являются прямыми, которые будут параллельными между собой и покрывать всю плоскость.

Под *градиентом целевой функции* понимается вектор с началом в текущей точке плоскости $\bar{x} = (x_1, x_2)$, координаты которого рассчитываются, как значение частных производных целевой функции z в этой точке:

$$\text{grad}Z(\bar{x}) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right). \quad (1.3)$$

Градиент целевой функции обладает двумя характерными свойствами:

1. Он перпендикулярен линиям уровня целевой функции.
2. Он указывает сторону наискорейшего роста целевой функции.

Используем изложенные выше теоретические положения для нахождения точки оптимального решения на построенной области допустимых решений. Вычислим градиент целевой функции $z = 50x_1 + 70x_2$ в текущей точке x по формуле (1.3) и получим

$$\text{grad}Z(\bar{x}) = (50, 70).$$

Очевидно, что в случае линейной целевой функции, направление градиента не зависит от текущей точки, от которой он откладывается.

Для того чтобы уложиться в заданный масштаб, отложим от начала координат на рис. 1.2 вектор \bar{c} такого же направления, как и вычисленный градиент, но вдвое меньший по длине, то есть $\bar{c} = (25, 35)$. Затем, согласно названному выше свойству градиента, проведем через начало координат перпендикулярно градиенту линию нулевого уровня. На рис. 1.2 она изображена пунктирной линией, которая используется как начало отсчета для роста уровня целевой функции.

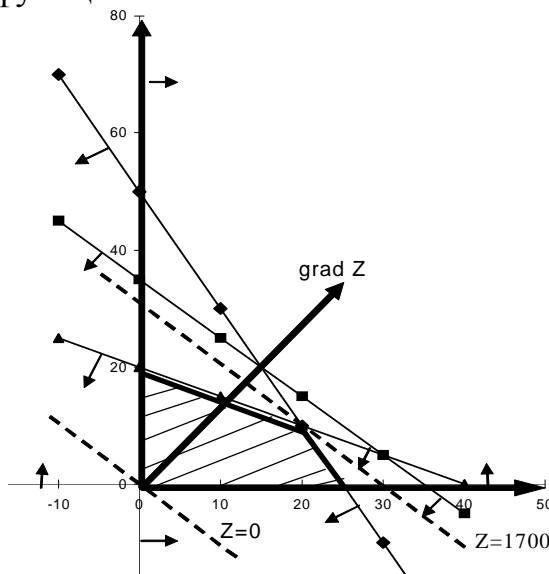


Рис. 1.2. Визуальное определение оптимального решения на построенной области допустимых решений

Определим наиболее удаленную в направлении градиента линию уровня, имеющую общую точку с областью допустимых решений. Такой линии уровня соответствует пунктирная прямая, проходящая через точку ОДР с координатами (20, 10). Значит, в этой точке достигается максимальное значение уровня целевой функции над построенной областью допустимых решений, которое легко вычисляется подстановкой координат точки в целевую функцию

$$z_{\max} = 50 \cdot 20 + 70 \cdot 10 = 1\,700.$$

Отсюда оптимальным решением задачи является $x_1^* = 20$, $x_2^* = 10$.

Правильному визуальному определению оптимальной точки ОДР может мешать погрешность сделанных графических построений. Например, при повороте градиента чуть вправо по часовой стрелке, линия уровня при движении в новом направлении покинет последней уже точку ОДР с координатами (25, 0). В целях аналитической подстраховки графически найденного оптимального решения вычислим значение целевой функции в этой точке

$$z = 50 \cdot 25 + 70 \cdot 0 = 1\,250.$$

Так как $1\,250 < 1\,700$, то это подтверждает правильность найденного визуально оптимального решения задачи (1.1).

В качестве экономической интерпретации найденного оптимального решения предлагается сделать вывод, что оптимальной производственной программой предприятия в плановом периоде будет выпуск первого продукта в объеме 20 единиц и второго продукта в объеме 10 единиц. При этом предприятие получит ожидаемую максимальную выручку в размере 1 700 руб.

1.3. Контрольные задания к разделу 1

Условия задачи расчета оптимальной производственной программы (линейная модель)

Наименование ресурса	Норма затрат		Объем ресурса
	на продукт А	на продукт В	
Сырье (кг)	a_{11}	a_{12}	b_1
Оборудование (ст.-ч)	a_{21}	a_{22}	b_2
Трудоресурсы (чел.-ч)	a_{31}	a_{23}	b_3
Цена реализации (руб.)	c_1	c_2	—

Варианты исходных данных задачи

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3	c_1	c_2
1	1	2	40	2	1	50	1	1	35	50	70
2	2	4	238	2	3	211	5	4	476	194	343
3	3	2	160	3	5	291	4	3	225	276	201
4	4	5	601	4	2	418	3	2	335	312	194
5	1	1	89	6	1	213	1	4	293	100	181

Ответы по вариантам

Номер варианта	x_1	x_2	Z_{\max}	u_1	u_2	u_3	Эффективность сырья			Правые границы		
1	20	10	1 700	30	10	0	50	30	20	25	55	70
2	65	27	21 871	52	45	0	97	78,25	52,007	190,38	225,73	281,4
3	30	35	15 315	24	0	51	100,5	86,333	23,995	116,39	157,64	168,8
4	83	43	34 238	0	21	76	78	12,667	0	418,04	546,89	1E+30
5	21	68	14 408	73	0	27	181	73	0	73,252	91,478	1E+30

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ АНАЛИЗЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ РЕСУРСОВ

2.1. Двойственная задача ЛП как модель расчета предельных эффективностей используемых ресурсов

Как правило, наряду с проблемой расчета оптимальной производственной программы при заданных на плановый период ограниченных ресурсах рассматривается проблема оптимального расширения существующего производства за счет дополнительного привлечения ресурсов к уже имеющимся объемам. Для выбора оптимальной стратегии расширения производства нужно знать, какой прирост достигнутого максимума выручки следует ожидать от дополнительного привлечения единицы того или иного ресурса при сохранении других ресурсов в прежнем объеме. Эту проблему рассмотрим на примере составленной и решенной графически в разделе 1 модели расчета оптимальной производственной программы.

Предположим, что u_1^* – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного привлечения в производство 1 кг сырья к прежним 40 кг. Эту величину назовем предельной эффективностью (полезностью) 41-го кг сырья;

u_2^* – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного привлечения в производство 1 ст.-ч оборудования к имеющимся 50 ст.-ч. Эту величину назовем предельной эффективностью 51-го ст.-ч оборудования;

u_3^* – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного привлечения в производство 1 чел.-ч труда к имеющимся 35 чел.-ч. Эту величину назовем предельной эффективностью 36-го чел.-ч труда.

Доказано, что величины предельной эффективности u_1^* , u_2^* , u_3^* могут быть вычислены как решение нижеследующей задачи линейного программирования, называемой двойственной задачей. Она составлена на основе тех же исходных данных, как и предыдущая задача (1.1), называемая прямой задачей.

$$\left. \begin{aligned} &\text{Найти } \bar{u} = (u_1, u_2, u_3); \\ &u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 50; \\ &2u_1 + u_2 + u_3 \geq 70; \\ &u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0; \\ &w = 40u_1 + 50u_2 + 35u_3 \rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В общем случае двойственная задача имеет следующий вид.

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Найти } \bar{u} = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m); \\
 &a_{11}u_1 + \dots + a_{i1}u_i + \dots + a_{m1}u_m \geq c_1; \\
 &a_{1j}u_1 + \dots + a_{ij}u_i + \dots + a_{mj}u_m \geq c_j; \\
 &a_{1n}u_1 + \dots + a_{in}u_i + \dots + a_{mn}u_m \geq c_n; \\
 &u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\
 &w = b_1u_1 + \dots + b_iu_i + \dots + b_mu_m \rightarrow \min.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Сформулируем правила построения двойственной задачи к стандартной форме записи прямой задачи ЛП (1.2).

1. Каждому ограничению исходной задачи (1.2) ставится в соответствие переменная двойственной задачи

$$\left. \begin{aligned}
 &u_1 \leftrightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\
 &u_i \leftrightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i; \\
 &u_m \leftrightarrow a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\
 &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \\
 &z = c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Каждой переменной исходной задачи ставится в соответствие ограничение двойственной задачи

$$\left. \begin{aligned}
 &x_1 \leftrightarrow a_{11}u_1 + \dots + a_{i1}u_i + \dots + a_{m1}u_m \geq c_1; \\
 &x_j \leftrightarrow a_{1j}u_1 + \dots + a_{ij}u_i + \dots + a_{mj}u_m \geq c_j; \\
 &x_n \leftrightarrow a_{1n}u_1 + \dots + a_{in}u_i + \dots + a_{mn}u_m \geq c_n; \\
 &u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\
 &w = b_1u_1 + \dots + b_iu_i + \dots + b_mu_m \rightarrow \min.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

2. Левая часть ограничения двойственной задачи (2.4), соответствующего переменной x_j , представляет собой сумму произведений коэффициентов столбца при переменной x_j ограничений прямой задачи (2.3) на соответствующие им двойственные переменные. В качестве правой части этого же ограничения берется коэффициент целевой функции при переменной x_j прямой задачи. Между левой и правой частями ограничения двойственной задачи ставится знак \geq .

3. Граничные условия на переменные двойственной задачи заключаются в требовании их неотрицательности $u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$.

4. Целевая функция двойственной задачи представляет собой сумму произведений правых частей ограничений прямой задачи на соответствующие им двойственные переменные и ориентируется на минимум.

Эти правила можно применить при построении задачи, двойственной к задаче (2.2), после ее приведения к нижеприведенной стандартной форме записи задачи линейного программирования.

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Найти } \bar{u} = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m); \\
 &-a_{11}u_1 - \dots - a_{i1}u_i - \dots - a_{m1}u_m \leq -c_1; \\
 &-a_{1j}u_1 - \dots - a_{ij}u_i - \dots - a_{mj}u_m \leq -c_j; \\
 &-a_{1n}u_1 - \dots - a_{in}u_i - \dots - a_{mn}u_m \leq -c_n; \\
 &u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\
 &w' = -b_1u_1 - \dots - b_iu_i - \dots - b_mu_m \rightarrow \max.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Применив предложенные ранее правила построения двойственной задачи к задаче (2.5), нетрудно убедиться, что в итоге получится задача, эквивалентная по смыслу прямой задаче (1.2).

Это доказывает свойство сопряженности прямой и двойственной задачи, которое заключается в том утверждении, что двойственная задача к двойственной задаче является прямой задачей. В соответствии с этим свойством двойственную задачу можно считать прямой, а прямую задачу – двойственной к ней, т. е. названия «прямая задача» и «двойственная задача» не являются навсегда закрепленными названиями за той или иной задачей линейного программирования. Это оправдывает применяемый в дальнейшем термин: пара взаимодвойственных задач.

2.2. Экономическая интерпретация основных положений теории двойственности в линейном программировании

Пусть дана пара взаимодвойственных задач ЛП (2.3) и (2.4). Относительно этих задач имеет место следующая основная (первая) теорема двойственности.

Основная теорема двойственности

Если одна из этой пары взаимодвойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача тоже обязательно имеет оптимальное решение. При этом выполняется соотношение

$$z_{\max} = w_{\min}.$$

Следствие основной теоремы двойственности

Допустимое решение задачи (2.3) $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$ и допустимое решение задачи (2.4) $\bar{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_j^0, \dots, u_m^0)$ будут оптимальными для своих задач, если выполняется равенство

$$c_1x_1^0 + \dots + c_jx_j^0 + \dots + c_nx_n^0 = b_1u_1^0 + \dots + b_iu_i^0 + \dots + b_mu_m^0.$$

Под условиями «дополняющей нежесткости» для задач (2.3) и (2.4) понимаются следующие две группы математических соотношений:

$$\left. \begin{aligned}
 &u_1(b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1j}x_j - \dots - a_{1n}x_n) = 0; \\
 &u_i(b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{ij}x_j - \dots - a_{in}x_n) = 0; \\
 &u_m(b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mj}x_j - \dots - a_{mn}x_n) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_l(a_{l1}u_1 + \dots + a_{li}u_i + \dots + a_{lm}u_m - c_l) &= 0; \\ x_j(a_{lj}u_1 + \dots + a_{ij}u_i + \dots + a_{mj}u_m - c_j) &= 0; \\ x_n(a_{ln}u_1 + \dots + a_{in}u_i + \dots + a_{mn}u_m - c_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Вторая теорема двойственности

Допустимое решение задачи (2.3) $\bar{x}^0 = (x_l^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$ и допустимое решение задачи (2.4) $\bar{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_j^0, \dots, u_m^0)$ будут оптимальными для своих задач тогда и только тогда, когда для них выполняются «условия дополняющей нежесткости» (2.6) и (2.7).

Первая группа условий «дополняющей нежесткости» (2.6) интерпретируется следующим образом.

1а. Если предельная эффективность ресурса под номером i больше нуля, т. е., $u_i^* > 0$, то этот ресурс является лимитирующим или, иначе, полностью расходуется по данной оптимальной производственной программе $\bar{x}^* = (x_l^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$, так как должно выполняться равенство

$$a_{l1}x_l^* + \dots + a_{ij}x_j^* + \dots + a_{in}x_n^* = b_i.$$

1б. Если ресурс под номером i не является лимитирующим для данной оптимальной производственной программы $\bar{x}^* = (x_l^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$ или, иначе, $a_{l1}x_l^* + \dots + a_{ij}x_j^* + \dots + a_{in}x_n^* < b_i$, то предельная эффективность этого ресурса должна равняться нулю, т. е. $u_i^* = 0$.

Вторая группа условий дополняющей нежесткости (2.7) интерпретируется следующим образом.

2а. Если продукт под номером j выпускается по оптимальной производственной программе $\bar{x}^* = (x_l^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$, т. е. $x_j^* > 0$, то суммарная эффективность всех затраченных ресурсов на выпуск единицы этого продукта должна равняться эффективности его реализации (цене продукта)

$$a_{lj}u_1^* + \dots + a_{ij}u_i^* + \dots + a_{mj}u_m^* = c_j.$$

2б. Если суммарная эффективность всех затраченных ресурсов на выпуск единицы продукта под номером j превышает эффективность его реализации, т. е. $a_{lj}u_1^* + \dots + a_{ij}u_i^* + \dots + a_{mj}u_m^* > c_j$, то продукт по оптимальной программе $\bar{x}^* = (x_l^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$ не должен производиться, т. е. $x_j^* = 0$.

Относительно рассматриваемого варианта задач (1.1) и (2.1) соответствующие условия «дополняющей нежесткости» первой и второй группы выглядят следующим образом.

$$\left. \begin{aligned} u_1(40 - x_1 - 2x_2) &= 0; \\ u_2(50 - 2x_1 - x_2) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} u_3(35 - x_1 - x_2) &= 0; \\ x_1(u_1 + 2u_2 + u_3 - 50) &= 0; \\ x_2(2u_1 + u_2 + u_3 - 70) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Из группы условий (2.8), так как $35 - x_1^* - x_2^* = 35 - 20 - 10 = 5$, на основе интерпретации 1б следует, что труд не лимитирует оптимальную программу, т. е. $u_3^* = 0$, а из рис. 1.2 видно, что прямая, связанная с трудовыми ресурсами, проходит выше точки, которая соответствует оптимальной производственной программе, что показывает избыточность трудовых ресурсов для этой программы.

Из группы условий (2.9), на основе интерпретации 2а, следует, что если оба продукта выпускаются по оптимальной производственной программе, т. е. $x_1^* = 20$ и $x_2^* = 10$, то должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + u_3 &= 50; \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &= 70. \end{aligned}$$

Из двух последних уравнений, с учетом $u_3^* = 0$, перейдем к решению следующей системы:

$$\left. \begin{aligned} u_1^* + 2u_2^* &= 50; \\ 2u_1^* + u_2^* &= 70. \end{aligned} \right\}$$

Откуда получаем $u_1^* = 30$, $u_2^* = 10$, при этом для проверки вычислим

$$w_{min} = 40 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 35 \cdot 0 = 1700.$$

В соответствии с вышесказанным найденное оптимальное решение двойственной задачи интерпретируется следующим образом:

- $u_1^* = 30$ руб. – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного вовлечения в производство 1 кг сырья к имеющимся 40 кг;

- $u_2^* = 10$ руб. – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного вовлечения в производство 1 ст.-ч оборудования к имеющимся 50 ст.-ч;

- $u_3^* = 0$ руб. – величина ожидаемого прироста максимума выручки (1 700 руб.) от дополнительного вовлечения в производство 1 чел.-ч труда к имеющимся 35 чел.-ч.

2.3. Расчет функции предельной эффективности ресурса, поступающего на данное предприятие

При сохранении лимитов по другим ресурсам исследуем зависимость максимума выручки от изменения лимита сырья в диапазоне от нуля до бесконечности. Это значит, что при графическом анализе изменения области допустимых решений на рис. 2.1, прямая СВ, связанная с оборудованием, и прямая ДС, связанная с трудом, останутся на тех же местах, что и на рис. 1.1 и

1.2, рассмотренных в разделе 1, в то время как прямая по сырью будет менять свое положение.

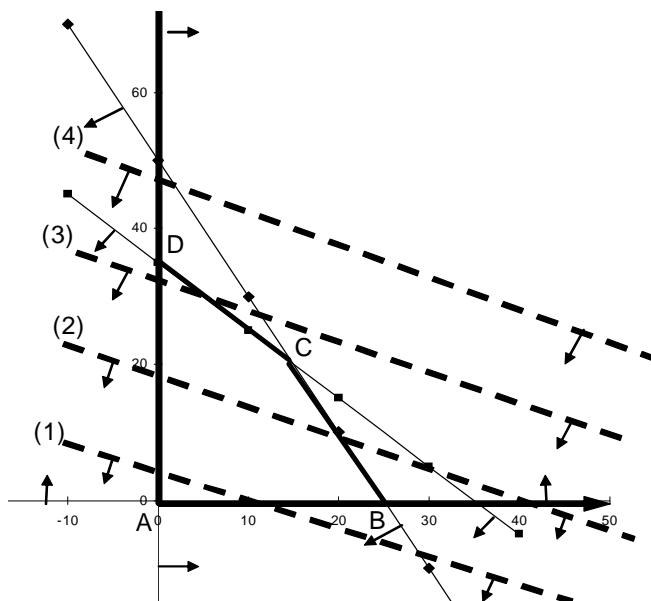


Рис. 2.1. Графический анализ изменения предельной эффективности дополнительно привлекаемой единицы сырья

Пунктирные прямые на рис. 2.1, рассмотренные в порядке (1), (2), (3), (4), отражают динамику роста лимитов потребления сырья для данного предприятия. Пунктирная прямая (2) соответствует первоначально заданному лимиту по сырью, равному 40 кг. Пунктирная прямая (4) соответствует избыточному объему сырья по отношению ко всем программам, допустимым по лимитам для оборудования и труда.

При лимите сырья, представленном пунктирной прямой (1), область допустимых решений задачи будет представлена треугольником, образованным этой прямой и осями координат. Для определения оптимального решения на таком треугольнике можно либо использовать градиент целевой функции, либо сравнить значения целевой функции в угловых точках треугольника. Такими точками можно взять, например, точки (10, 0) и (0, 5), расход сырья для которых одинаков и равен 10 кг. Выручку, соответствующую этим точкам, вычислим, как $z(10, 0) = 50 \cdot 10 + 70 \cdot 0 = 500$ и $z(0, 5) = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 5 = 350$. Отсюда видно, что оптимальным решением в данной ситуации будет точка $x_1^* = 10, x_2^* = 0$.

Решение двойственной задачи для данной ситуации найдем по составленным выше условиям «дополняющей нежесткости».

Из группы условий (2.8), так как $50 - 2x_1^* - x_2^* = 50 - 2 \cdot 10 - 0 = 30$ и $35 - x_1^* - x_2^* = 35 - 10 - 0 = 25$, следует, что оборудование и труд не лимитируют оптимальную программу, а значит $u_2^* = 0, u_3^* = 0$.

Из группы условий (2.9) следует, что, если первый продукт выпускается по оптимальной производственной программе, то есть $x_1^* = 10$, то должно выполняться равенство

$$u_1^* + 2u_2^* + u_3^* = 50.$$

Из последнего уравнения, с учетом $u_2^* = 0$, $u_3^* = 0$, получим $u_1^* = 50$.

При повышении лимита потребления сырья пунктирная прямая будет двигаться по направлению от начала координат, а треугольник, отражающий ОДР, будет увеличиваться. При этом соответствующие оптимальные программы будут находиться на оси абсцисс, а вышеприведенные расчеты предельной эффективности сырья будут приводить к результату $u_1^* = 50$. Такая ситуация будет качественно сохраняться до тех пор, пока оптимальная программа не совпадет с точкой В. Программу В, наряду с ограничением по сырью, начнет лимитировать ограничение по оборудованию. Поэтому расход сырья на программу В (25, 0) покажет правую границу диапазона устойчивости предельной эффективности $u_1^* = 50$. Каждый следующий за этой границей килограмм сырья будет расходоваться с меньшей предельной эффективностью.

Для расчета расхода сырья на программу В подставим ее координаты в левую часть ограничения по сырью $r(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, а именно:

$$r(25, 0) = 25 + 2 \cdot 0 = 25.$$

Результаты последних расчетов показали, что каждый дополнительный килограмм сырья в диапазоне от 1 до 25 будет давать прирост максимума выручки 50 руб.

Для ответа на вопрос, будет ли прирастать максимум выручки при $r > 25$, нужно сравнить значения выручки для программы В и программы С.

Прежде всего, найдем координаты точки С, решив систему уравнений прямых, соответствующих оборудованию и сырью,

$$2x_1 + x_2 = 50;$$

$$x_1 + x_2 = 35.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 50; \\ x_1 + x_2 = 35. \end{array} \right\} \text{Решением системы будет } x_1 = 15, x_2 = 20.$$

Значение выручки в точке С будет равно

$$z(C) = z(15, 20) = 50 \cdot 15 + 70 \cdot 20 = 2150.$$

Значение выручки в точке В будет равно

$$z(B) = z(25, 0) = 50 \cdot 25 + 70 \cdot 0 = 1250.$$

Очевидно, что $z(C) > z(B)$. Это означает дальнейший рост максимума выручки от 1250 до 2150 руб. при движении ограничения по сырью от точки В через промежуточное положение, показанное пунктирной прямой (2), к точке С. Области допустимых решений при этом будут представляться четырехугольниками, образованными пунктирной прямой меняющегося лимита сырья, прямой по оборудованию и осями координат.

Оптимальные программы будут находиться на отрезке ВС. Характеризует эти программы тот очевидный факт, что по ним выпускается два продукта

$x_1^* > 0, x_2^* > 0$. Ограничение по труду проходит выше оптимальных программ, т. е. труд не является лимитирующим ресурсом для этих программ.

Отсюда из первой группы условий (2.8) следует, что $u_3^* = 0$.

Из группы условий (2.9) следует, что, если оба продукта выпускаются, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + u_3 &= 50; \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &= 70. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений, с учетом $u_3^* = 0$, перейдем к решению следующей системы:

$$\left. \begin{aligned} u_1^* + 2 \cdot u_2^* &= 50; \\ 2 \cdot u_1^* + u_2^* &= 70. \end{aligned} \right\}$$

Эта система раньше уже решалась, поэтому известно, что $u_1^* = 30$. Для того, чтобы получить правую границу диапазона устойчивости вычисленной предельной эффективности $u_1^* = 30$, необходимо рассчитать расход сырья для программы С

$$r(C) = r(15, 20) = 15 + 2 \cdot 20 = 55.$$

Результаты текущих расчетов показали, что каждый дополнительный килограмм сырья в диапазоне от 26 до 55 будет давать прирост выручки на 30 руб.

Примечание 1. При решении других вариантов исходной задачи может возникнуть ситуация, при которой получится, что $z(C) < z(B)$. Это означает, что дальнейший рост максимума выручки свыше 1 250 руб. невозможен. Сырье становится избыточным относительно оптимальной программы В, а его предельная эффективность становится нулевой, $u_1^* = 0$ в диапазоне $(25, \infty)$. В этом случае исследование функции предельной эффективности сырья завершается и выписывается ответ.

В данном же варианте исследование надо продолжить. Для ответа на вопрос, будет ли расти максимум выручки при $r > 55$, нужно сравнить значения выручки для программы С и программы D.

Значение выручки в точке С известно:

$$z(C) = 2\,150.$$

Значение выручки в точке D будет:

$$z(D) = z(0, 35) = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 35 = 2\,450.$$

Очевидно, что $z(D) > z(C)$. Это означает дальнейший рост максимума выручки от 2 150 до 2 450 руб. при движении ограничения по сырью от точки С через промежуточное положение, показанное пунктирной прямой (3), к точке D. Области допустимых решений при этом будут представляться пятиугольниками, образованными пунктирной прямой меняющегося лимита сырья, прямой по труду, прямой по оборудованию и осями координат.

Оптимальные программы будут находиться на отрезке CD. Характеризует эти программы тот очевидный факт, что по ним выпускается два продукта $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$. Теперь прямая, соответствующая оборудованию, проходит выше оптимальных программ, т. е. оборудование не является лимитирующим ресурсом для этих программ.

Из группы условий (2.8) следует, что $u_2^* = 0$.

Из группы условий (2.9) следует, что, если оба продукта выпускаются, должны выполняться равенства

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 50;$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 = 70.$$

Из двух последних уравнений, с учетом $u_2^* = 0$, перейдем к решению следующей системы:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + u_3 = 50; \\ 2u_1 + u_3 = 70. \end{array} \right\}$$

Откуда получаем $u_1^* = 20$, $u_3^* = 30$. Для того, чтобы получить правую границу диапазона устойчивости вычисленной предельной эффективности $u_1^* = 20$, необходимо рассчитать расход сырья для программы D

$$r(D) = r(0, 35) = 0 + 2 \cdot 35 = 70.$$

Результаты проведенных на этом этапе расчетов показали, что каждый дополнительный килограмм сырья в диапазоне от 56 до 70 будет давать рост максимума выручки 20 руб.

Примечание 2. При решении других вариантов исходной задачи может возникнуть ситуация, при которой получится, что $z(D) < z(C)$. Это означает, что дальнейший рост максимума выручки свыше 2 150 руб. невозможен. Сырье становится избыточным относительно оптимальной программы C, и его предельная эффективность становится нулевой, $u_1^* = 0$ в диапазоне $(55, \infty)$. В этом случае исследование функции предельной эффективности сырья завершается и выписывается ответ.

Пусть, наконец, $r > 70$. Тогда оптимальная программа D окажется ниже уровня лимита по сырью. Эту ситуацию отражает положение пунктирной прямой (4). Сырье становится избыточным относительно оптимальной программы D, и его предельная эффективность становится нулевой, $u_1^* = 0$ в диапазоне $(70, \infty)$. На этом исследование функции предельной эффективности сырья для данного предприятия завершается.

Примечание 3. При решении других вариантов обсуждаемой задачи обход оптимальных программ при увеличении сырья может происходить не против часовой стрелки, как это случилось в данном варианте, а по часовой стрелке, если пунктирная прямая будет занимать положения (1), (2), (3), (4), как это изображено на рис. 2.2. При этом целевая функция должна быть такова, чтобы максимум выручки на первоначальном треугольнике достигался в точке

пересечения пунктирной прямой (1) с осью ординат. Дальнейшее исследование по часовой стрелке проводится по методике, аналогичной изложенной выше.

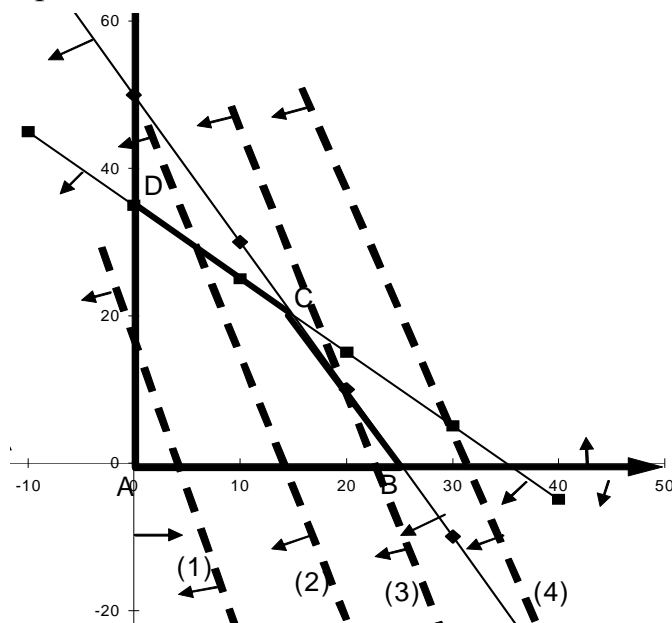


Рис. 2.2. Анализ изменения предельной эффективности дополнительно привлекаемой единицы сырья (вариант обхода по часовой стрелке)

На основе результатов выполненного анализа получим табличную запись функции предельной эффективности поступающего сырья для данного предприятия (табл. 2.1) и табличное предоставление функции зависимости максимума выручки от увеличения производственного потребления сырья (табл. 2.2). Используя информацию из этих таблиц, построим графики этих функций (рис. 2.3 и рис. 2.4).

Таблица 2.1. Функция предельной эффективности сырья

Предельная эффективность, u_I^* (руб./кг)	50	30	20	0
Сырье, r (кг)	$(0, 25]$	$(25, 55]$	$(55, 70]$	$(70, \infty)$

Таблица 2.2. Зависимость максимума выручки от сырья

Максимум выручки, z^* (руб.)	$50r$	$1250 + 30r$	$2150 + 20r$	2450
Сырье, r (кг)	$(0, 25]$	$(25, 55]$	$(55, 70]$	$(70, \infty)$

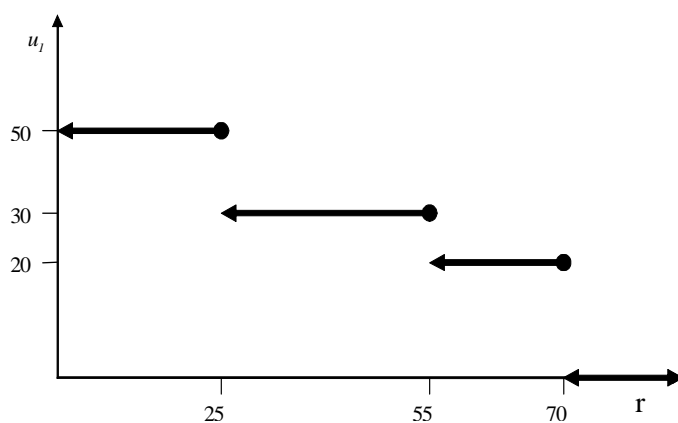


Рис. 2.3. График изменения предельной эффективности сырья на предприятии

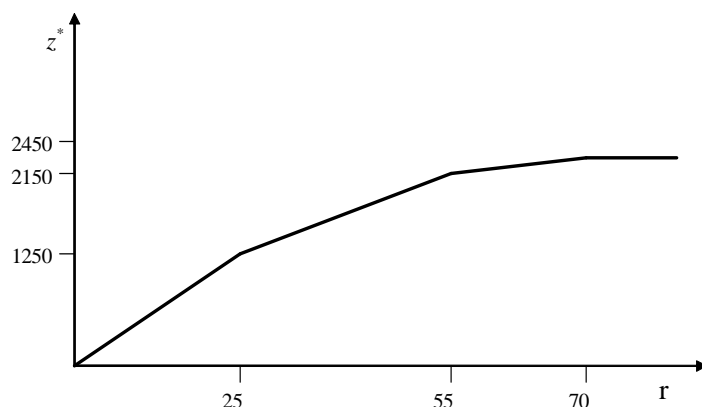


Рис. 2.4. График максимума выручки в зависимости от поступления сырья

Вид графика на рис. 2.3 еще раз демонстрирует известный закон убывания эффективности ресурса с ростом объемов его производственного потребления. Ступенчатость графика и наличие точек разрыва функции эффективности объясняется тем, что исследование проводилось на основе линейного моделирования, в общем-то, нелинейных экономических связей.

Для упражнений по разделу 2 рекомендуется использовать контрольные задания к разделу 1.