1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные понятия теории множеств. Способы задания множеств

Понятие «множество» принадлежит к числу основных, неопределяемых понятий математики. Оно не сводится к другим, более простым понятиям, поэтому его нельзя определить, а можно лишь пояснить, указывая синонимы слова «множество» и приводя примеры множеств.

Под *множеством* следует понимать совокупность некоторых объектов, которые назовем *элементами множества*. В дальнейшем будем обозначать множества прописными (большими) латинскими буквами A, B, C, а элементы множества – строчными (малыми) латинскими буквами a, b, c.

Чтобы указать, что некоторый объект a является элементом множества A, используют запись $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A.

Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Например, A – множество студентов ДВГУПС; B – множество улиц города Хабаровска; C – множество страниц данного пособия; R – множество действительных чисел. Так, число 5 – действительное число, поэтому $5 \in R$.

Определение 1. Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным*, в противном случае – *бесконечным*.

Рассматриваемые в математике числовые множества имеют следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Z_+ – множество целых неотрицательных чисел;

Z_- – множество целых неположительных чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

$R_{\geq 0}$ – множество неотрицательных действительных чисел;

$R_{>0}$ – множество положительных действительных чисел;

$R_{\leq 0}$ – множество неположительных действительных чисел;

$R_{<0}$ – множество отрицательных действительных чисел.

Все перечисленные множества являются бесконечными.

Чтобы задать (описать) множество, надо или перечислить его элементы, или указать некоторые характерные свойства элементов данного множества.

Способы задания множеств

1. *Перечисление* – задание списка элементов (возможно только для конечных множеств).

Например, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множество, содержащее n элементов. $A = \{1, 3, 5\}$ – множество, содержащее три элемента.

2. *Порождающая процедура* описывает способ получения элементов множества на основе уже ранее описанных множеств.

3. *Описание характеристических свойств* – словесное, аналитическое или процедурное описание элементов множества:

$A = \{x \mid P(x)\}$ – множество, состоящее из таких элементов x, которые обладают свойством P.

Например, $A = \{x \mid x \le 15, x \in N\}$ – множество, состоящее из натуральных чисел, не больших 15;
$B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in Z\}$ – множество нечетных чисел;
$C = \{x \mid x - \textit{студент группы } 412, \textit{ рост которого выше } 180 \textit{ см}\}$.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством. Обозначение: $\varnothing$.

Пустое множество встречается в реальных задачах и не является «изобретением» математиков. Так, например, может оказаться, что множество студентов, получивших две неудовлетворительные оценки, пусто (таких студентов просто нет).

Определение 3. Число элементов в конечном множестве называется его мощностью. Обозначение: $m(A)$, или $|A|$.

Например, мощность множества $A = \{1, 3, 5\}$ равна трем ($m(A) = 3$).

Замечание 1. Мощность нулевого множества равна нулю: $m(\varnothing) = 0$.

Определение 4. Если $|A| = |B|$, то множества называются *равномощными*.

Определение 5. Множество A называется *подмножеством* B (говорят A включено в B, или A содержится в B), если все элементы множества A принадлежат B. Обозначение: $A \subseteq B$.

Замечание 2. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Определение 6. Множество A называется *собственным (строгим) подмножеством* множества B, если $A \subseteq B$ и $A \ne B$, т. е. в B есть элементы, не содержащиеся в A. Обозначение: $A \subset B$.

Например, A – множество всех четырехугольников, B – множество всех трапеций, C – множество всех параллелограммов, тогда $C \subset B \subset A$.

Если B – множество студентов Института транспортного строительства, A – множество студентов 412-й группы ДВГУПС, тогда $A \subset B$.

Для перечисленных ранее числовых множеств верно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Определение 7. Множества A и B *равны* ($A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, другими словами, все их элементы совпадают.

Определение 8. Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном, или множеством-степенью*. Обозначение: $\hat{B}(A)$, или 2^A.

Например, для множества $A = \{1, 2, 3\}$ совокупность всех его подмножеств (булеан) имеет следующий вид:

$\hat{B}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Определение 9. Если для множества указан порядок расположения элементов, то множество называется *упорядоченным*: поменяв местами хотя бы два элемента, мы получим, вообще говоря, другое множество.

Например, множества $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, b, a, d\}$ состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A = B$. Но как упорядоченные эти множества различаются.

Определение 10. *Универсальным множеством* называется такое множество, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами. Обозначение: U.

В теории множеств вводится понятие *меры множества* (обозначение: $\mu(A)$) как обобщение понятия длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственной фигуры, приращения неубывающей функции, интеграла от неотрицательной функции. Понятие меры возникло в теории функций действительного переменного, а оттуда перешло в теорию вероятностей, теорию динамических систем, функциональный анализ и многие другие области математики.

Пример 1. Найдите меру отрезка $[0; 1]$, лежащего на оси OX.

Решение

Мера отрезка – это его длина. Следовательно, $\mu(A) = 1$.

Пример 2. Найдите меру множества A, изображенного на рис. 1.

Решение

Мера множества A – это площадь фигуры. Для данного примера – это площадь треугольника: $S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow \mu(A) = S_\Delta = \dfrac{1}{2} 2 \cdot 1 = 1$ ед^2.

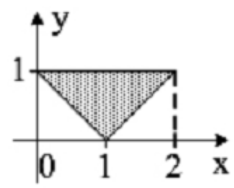

Рис. 1

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какие из приведенных заданий множеств A, B, C, D являются правильными: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 6, 7\}$, $C = \{x \mid x \in A\}$, $D = \{A, C\}$?

2. Является ли множество, состоящее из числа 0, пустым множеством?

3. Что такое подмножество и собственное подмножество?

4. Запишите, используя символику теории множеств:

а) элемент x принадлежит множеству M;

б) элемент y не является элементом множества M;

в) множество, состоящее из букв a, b, c, d.

5. Для заданных конечных множеств выпишите все их подмножества и найдите их мощности: а) $M = \{0, 1\}$; б) $C = \{a, b, c\}$.

6. Перечислите элементы множества
$B = \{x \mid x - \textit{гласные буквы русского алфавита}\}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений справедливы: а) $0 \in \varnothing$; б) $\varnothing = 0$; в) $|\varnothing| = 0$; г) $|\{\varnothing\}| = 0$.

8. Укажите способы задания множеств.

9. Задайте различными способами множество натуральных чисел, кратных 5 и не превышающих 300.

10. Укажите, сколько элементов содержится в каждом множестве:

а) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; в) $\varnothing$;

б) $\{1, \{1\}, 2, \{1, \{2, 3\}\}, \varnothing\}$; г) $\{\varnothing\}$?

11. Найдите меру следующих множеств:

а) отрезка [0; 5], лежащего на оси OY;

б) $A = \{ (x; y) \in R^2 \mid 1/x < y < 2{,}5 - x \}$;

в) $B = \{ (x; y) \in R^2 \mid y = \sqrt{x}, 1 < x < 9 \}$;

г) $C = \{ (x; y) \in R^2 \mid y^2 + x^2 = 1 \}$;

д) меру множества, указанного на рис. 2

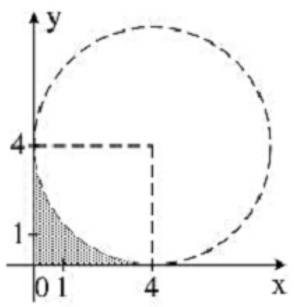

Рис. 2

1.2. Операции над множествами

Пусть A, B, C – произвольные множества. Определим операции над ними.

Определение 1. *Объединением* двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Определение 2. *Пересечением* двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам. Обозначение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \, и \, x \in B\}$.

Определение 3. *Разностью* множества A и B (*дополнением* множества B до множества A или, иначе говоря, A без B) называется множество всех элементов A, не принадлежащих B. Обозначение: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \, и \, x \notin B\}$.

Определение 4. *Дополнением* (*до универсального множества* U) множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A. Обозначение: $\overline{A} = U \setminus A$. В некоторых случаях запись $\overline{A}$ означает разность не с универсальным множеством, а с множеством, определенным в условии задачи как множество, содержащее A.

Определение 5. *Симметрической разностью* (*или кольцевой суммой*) A и B называется множество $A \Delta B$ (или $A \oplus B$), куда входят все те элементы множества A, которые не входят в множество B, а также элементы B, которые не входят в A, т. е. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Замечание. Симметрическую разность можно записать в виде $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Перечисленные операции позволяют выражать одни множества через другие. При этом используется следующий порядок выполнения операций: операция дополнения, пересечения, объединения и разности. Если есть скобки, то сначала выполняются операции в скобках.

Пример 1. Пусть заданы множества: $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, $B = \{x \mid x \in Z, |x| \leq 3\}$ и $C = \{\textit{неположительные четные числа}\}$. Найдите:

а) $A \cup B$;　　в) $A \cap \overline{B}$;　　д) $A \cup B \cap C$;

б) $A \cap B$;　　г) $A \setminus B$;　　е) $(B \setminus A) \cap C$.

Решение

а) множество B состоит из элементов: $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Так как объединению множеств A и B принадлежат элементы, входящие или во множество A или во множество B, причем одинаковые элементы включаются только один раз, то $A \cup B = \{-6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$;

б) так как пересечению множеств A и B принадлежат элементы, входящие одновременно в оба множества A и B, то $A \cap B = \{-2, 0, 2\}$;

в) множество $\overline{B}$ следует понимать как $Z \setminus B$, т. е. как множество целых чисел x, удовлетворяющих соотношению $|x| > 3 : Z \setminus B = \{\ldots, -6, -5, -4, 4, 5, 6, \ldots\}$. Общими элементами указанного множества и множества A являются четыре целых числа $A \cap \overline{B} = \{-6, -4, 4, 6\}$;

г) разность множеств содержит те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, поэтому $A \setminus B = \{-6, -4, 4, 6\}$;

д) при нахождении значения выражений, содержащих несколько операций, следует соблюдать порядок выполнения операций, если он не указан с помощью скобок. Операция пересечения имеет больший приоритет, чем объединение. Поэтому первоначально найдем пересечение множеств B и C: $B \cap C = \{-2, 0\}$.

Окончательно $A \cup B \cap C = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$;

е) найдем сначала разность множеств B и A: $B \setminus A = \{-3, -1, 1, 3\}$. Окончательно $(B \setminus A) \cap C = \varnothing$.

Пример 2. Даны два множества $A = \{7k - 1 : k = 1, 2, 3\}$ и $B = \{2m : m = 2, 3, 4, 5\}$. Найдите количество элементов, принадлежащих симметрической разности $A \Delta B$.

Решение

Выпишем элементы, из которых состоят множества $A = \{6, 13, 20\}$ и $B = \{4, 6, 8, 10\}$. Тогда $A \Delta B = \{4, 8, 10, 13, 20\}$, т. е. симметрическая разность состоит из пяти элементов.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дайте определения объединения, пересечения, разности и дополнения множеств.

2. Укажите порядок выполнения операций над множествами.

3. Запишите, используя символику теории множеств:

а) множество C – дополнение к пересечению множеств A и B;

б) множество, состоящее из всех элементов множеств A и B;

в) множество, состоящее из элементов множества A, но не включающее элементы множеств C.

4. Дано множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и его подмножества $A = \{x \mid x \in U, 2 < x \le 6\}$, $C = \{x \mid x \in A, x \ge 4\}$ и $D = \{1, 2, 4\}$. Найдите множества:

а) $A \cup C$; в) $A \Delta D$;

б) $\overline{A \cap D}$; г) $(C \setminus D) \cup \overline{A}$.

5. Даны множества $A = \{x \mid \sin x = 0\}$ и $B = \{x \mid 0 < x < 10\}$. Найдите мощность множества $A \cap B$.

6. Пусть $U = \{a, b, c, d\}$, $X = \{a, c\}$, $Y = \{a, b, d\}$ и $Z = \{b, c\}$. Найдите мощности следующих множеств:

а) $X \cap \overline{Y}$; г) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$;

б) $\overline{X \cap Y}$; д) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;

в) $X \setminus \overline{Z}$; е) $X \cup (Y \cap Z)$.

7. Даны два множества: $A = \{2^k : k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{2m : m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите количество элементов, принадлежащих множеству $A \setminus B$.

8. Даны множества: $\{\ A = x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\ \}$, $B = \{\ x \mid 2x - 4 = 0\ \}$ и $C = \{x \mid x + \ 5 = 0\}$. Найдите мощность множества $D = A \cup B \cup C$.

9. Пусть M_1, M_2, M_3 – множества, состоящие из всех чисел, кратных 2, 3, 5 соответственно. С помощью операций над множествами выразите через них множества чисел: а) делящихся на 6; б) делящихся на 30; в) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

1.3. Диаграммы Эйлера – Венна

Для наглядного представления множеств используют диаграммы Эйлера – Венна (названных по имени математиков Леонарда Эйлера (1707–1783) и Джона Венна (1834–1923)). Множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества. Часто все множества на диаграмме размещают внутри прямоугольника, который представляет собой универсальное множество U. Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях. Выбор формы областей, изображающих множества на диаграммах, может быть произвольным (круги, многоугольники и т. п.).

Например, с помощью диаграмм Эйлера – Венна можно показать, что множество A является подмножеством множества B (рис. 3).

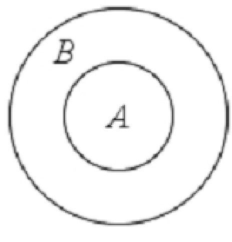

Рис. 3

Проиллюстрируем введенные выше операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера – Венна: а) объединение множеств A и B; б) пересечение множеств A и B; в) разность множеств A и B (A без B); г) дополнение множества A до универсального множества U (рис. 4, *а*, *б*, *в*, *г*).

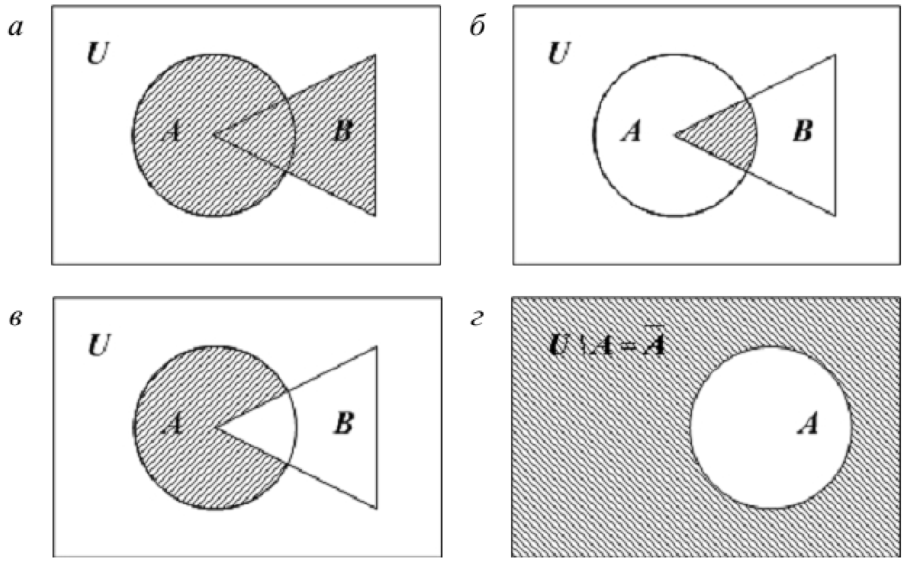

Рис. 4

Пример 1. Докажите с помощью диаграмм Эйлера – Венна тождество $\overline{\overline{A}} = A$.

Решение

Построим дополнение множества A до универсального множества U (рис. 5, *а*). Множеству $\overline{\overline{A}}$ соответствует закрашенная область (рис. 5, *б*). Таким образом, видно, что на диаграммах Эйлера – Венна множества A и $\overline{\overline{A}}$ изображаются одинаково, поэтому $\overline{\overline{A}} = A$.

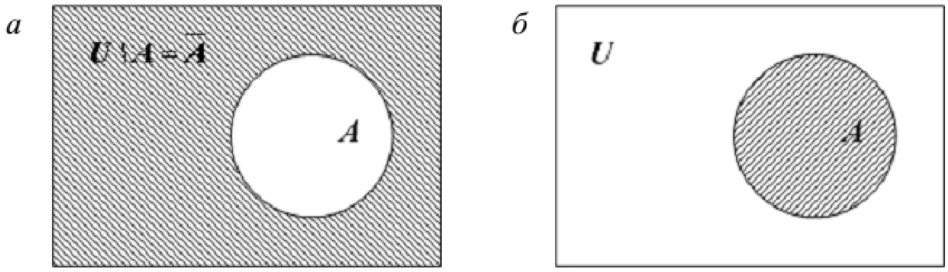

Рис. 5

Пример 2. Покажите, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Решение

Построим множество, соответствующее левой части заданного тождества. Множество A представлено закрашенной областью на рис. 6, *а*. Множеству $B \cup C$ соответствует закрашенная область на рис. 6, *б*.

Множество $A\bigcap(B\bigcup C)$ изображает область, закрашенная на обеих предыдущих диаграммах, поэтому оно представлено на рис. 6, *в* более темной областью.

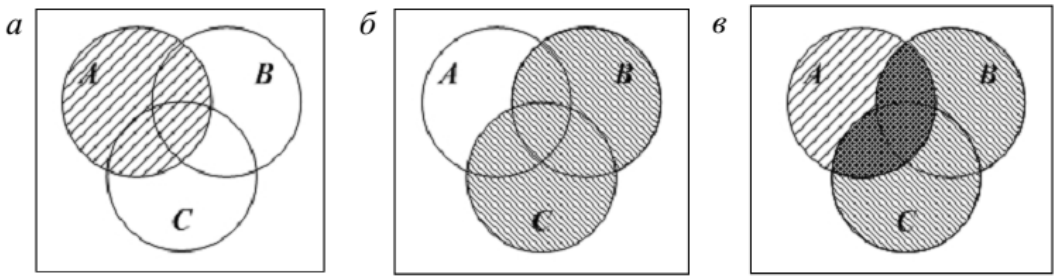

Рис. 6

Построим множество, соответствующее правой части заданного тождества.

Множества $A\bigcap B$ и $A\bigcap C$ представлены закрашенной областью на рис. 7, *а* и 7, *б* соответственно.

Множество $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ изображено закрашенной областью на рис. 7, *в*.

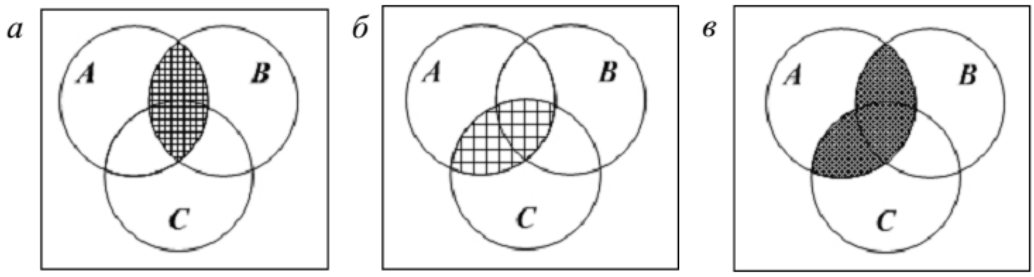

Рис. 7

Сравнивая рис. 6, *в* и рис. 7, *в*, видим, что $A\bigcap(B\bigcup C)$ и $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ на диаграммах Эйлера – Венна изображаются одинаково, поэтому $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Изобразите множества, используя диаграммы Эйлера – Венна:

а) $\overline{A\bigcup B}$; б) $A\setminus\overline{B}$.

2. Опишите множества, соответствующие закрашенным частям на рис. 8, *а*, *б*, *в*, *г*, с помощью диаграмм Эйлера – Венна:

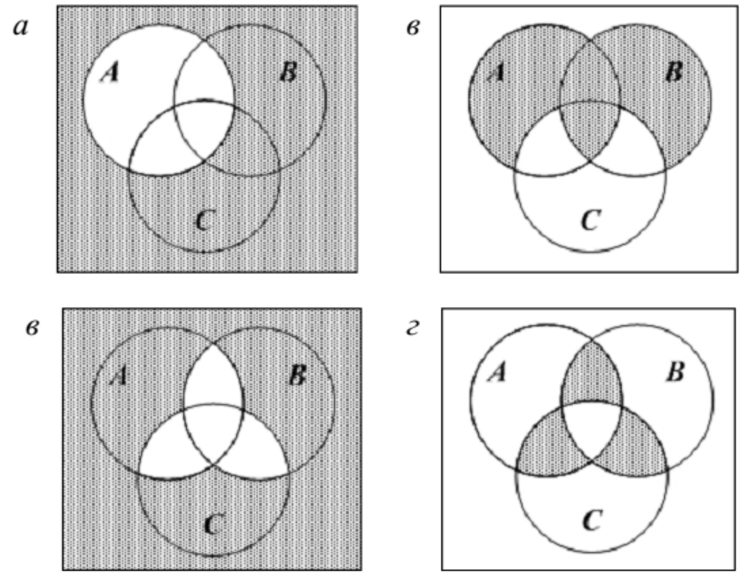

Рис. 8

3. С помощью диаграмм Эйлера – Венна покажите, что:

а) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$;

б) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

1.4. Свойства операций над множествами

Операции над множествами, введенные выше, обладают следующими свойствами.

1. $\left.\begin{matrix} B \bigcup A = A \bigcup B \\ B \bigcap A = A \bigcap B \end{matrix}\right\}$ – коммутативность.

2. $\left.\begin{matrix} (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) \\ (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) \end{matrix}\right\}$ – ассоциативность.

3. $\left.\begin{matrix} (A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) \\ (A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) \end{matrix}\right\}$ – дистрибутивность.

4. $\left.\begin{matrix} A \bigcup A = A \\ A \bigcap A = A \end{matrix}\right\}$ – идемпотентность.

5. $\left.\begin{matrix} A \bigcup \varnothing = A, & A \bigcap U = A \\ A \bigcup U = U, & A \bigcap \varnothing = \varnothing \end{matrix}\right\}$ – законы тождества.

6. $A \bigcup \overline{A} = U$, $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$ – законы дополнения.

7. $\left.\begin{array}{l}\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}\\ \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}\end{array}\right\}$ – законы де Моргана.

8. $\left.\begin{array}{l}A\bigcup(A\bigcap B)=A\\ A\bigcap(A\bigcup B)=A\end{array}\right\}$ – законы поглощения.

9. $\left.\begin{array}{l}(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\overline{B})=A\\ (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup\overline{B})=A\end{array}\right\}$ – законы склеивания.

10. $\left.\begin{array}{l}A\bigcup(\overline{A}\bigcap B)=A\bigcup B\\ A\bigcap(\overline{A}\bigcup B)=A\bigcap B\end{array}\right\}$ – законы Порецкого.

Пример 1. Опираясь на свойства операций над множествами, упростите выражение $(A\bigcup B)\bigcap\overline{A\bigcap B}$.

Решение

$(A\bigcup B)\bigcap\overline{A\bigcap B}$ = /закон де Моргана/ =

= $(A\bigcup B)\bigcap(\overline{A}\bigcup\overline{B})$ = /закон дистрибутивности/ =

= $((A\bigcup B)\bigcap\overline{A})\bigcup((A\bigcup B)\bigcap\overline{B})$ = /закон коммутативности/ =

= $(\overline{A}\bigcap(A\bigcup B))\bigcup(\overline{B}\bigcap(A\bigcup B))$ = /закон дистрибутивности/ =

= $((\overline{A}\bigcap A)\bigcup(\overline{A}\bigcap B))\bigcup((\overline{B}\bigcap A)\bigcup(\overline{B}\bigcap B))$ =

/закон коммутативности/ =

= $((A\bigcap\overline{A})\bigcup(B\bigcap\overline{A}))\bigcup((A\bigcap\overline{B})\bigcup(B\bigcap\overline{B}))$ =

/законы дополнения/ =

= $(\varnothing\bigcup(B\bigcap\overline{A}))\bigcup((A\bigcap\overline{B})\bigcup\varnothing)$ =

= /законы коммутативности и тождества/ =

= $(A\bigcap\overline{B})\bigcup(B\bigcap\overline{A})$ = /определение симметрической разности/ = $A\,\Delta\,B$.

Как уже было сказано, мощность конечного множества – это число его элементов. Следующая теорема дает простое правило вычисления мощности объединения двух множеств.

Теорема включений и исключений. Мощность объединения двух множеств равна разности между суммой мощностей этих множеств и мощностью их пересечения, т. е. $m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B)$.

Доказательство

Доказательство утверждения удобнее всего проиллюстрировать графически. Как показано на рис. 9, множество $A\bigcup B$ состоит из подмножеств: $A\setminus B$, $A\bigcap B$ и $B\setminus A$, которые не имеют общих элементов. Следовательно, $A=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap B)$ и $B=(B\setminus A)\bigcup(A\bigcap B)$.

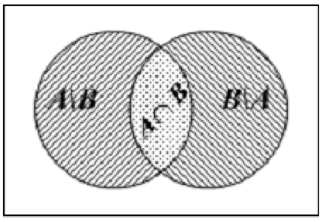

Рис. 9

Введем обозначения:

$m(A \setminus B) = k$, $m(A \bigcap B) = n$, $m(B \setminus A) = p$.

Тогда $m(A) = k + n$, $m(B) = n + p$,

$m(A \bigcup B) = k + n + p = (k + n) + (n + p) - n = m(A) + m(B) + m(A \bigcap B)$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

Решение

Введем обозначения:

$A = \{\text{студенты, слушающие курс бухгалтерии}\}$;

$B = \{\text{студенты, слушающие курс коммерческой деятельности}\}$.

Тогда $m(A) = 16$, $m(B) = 37$, $m(A \bigcap B) = 5$, $m(A \bigcup B) = 16 + 37 - 5 = 48$.

Следовательно, $63 - 48 = 15$ – количество студентов, не посещающих дополнительных курсов.

Замечание 1. Теорему включений и исключений можно сформулировать для случая трех множеств:

$$m(A \bigcup B \bigcup C) = m(A) + m(B) + m(C) -$$
$$- m(A \bigcap B) - m(B \bigcap C) - m(A \bigcap C) + m(A \bigcap B \bigcap C).$$

Пример 3. На курсе обучаются 42 студента. Из них 16 занимаются в секции по легкой атлетике, 24 – в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции по легкой атлетике, и в футбольной; 8 – и в легкоатлетической, и в шахматной; 12 – и в футбольной, и в шахматной; а 6 – во всех трех секциях. Остальные студенты увлекаются туризмом. Сколько студентов являются туристами?

Решение

Введем обозначения:

$A = \{\text{студенты, занимающиеся легкой атлетикой}\}$;

$F = \{\text{студенты, занимающиеся футболом}\}$;

$S = \{\text{студенты, занимающиеся шахматами}\}$;

$T = \{\text{студенты, занимающиеся туризмом}\}$.

Из условия задачи: $m(A) = 16$, $m(F) = 24$, $m(S) = 15$, $m(A \bigcap F) = 11$, $m(S \bigcap F) = 12$, $m(A \bigcap S) = 8$, $m(A \bigcap F \bigcap S) = 6$ и $m(A \bigcup B \bigcup S \bigcup T) = 42$.

Тогда $m(A \bigcup F \bigcup S) = 16 + 24 + 15 - 11 - 12 - 8 + 6 = 30$.

Откуда $m(T) = m(A \bigcup B \bigcup S \bigcup T) - m(A \bigcup F \bigcup S)$, т. е. $m(T) = 42 - 30 = 12$ – количество студентов, занимающихся туризмом.

Замечание 2. При решении вышеуказанных задач удобно пользоваться диаграммами Эйлера – Венна.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите тождества с помощью свойств операций множеств:

а) $(\overline{A \bigcap \overline{B}}) \bigcup B = \overline{A} \bigcup B$; б) $(\overline{\overline{A} \bigcap (\overline{B \bigcup C})}) = A \bigcup B \bigcup C$.

2. В столовую на обед пришли 33 человека. 10 человек заказали себе суп, 16 – плов, 30 – компот, все три блюда заказали 7 человек, суп и плов – 8 человек, суп и компот – 14 человек. Сколько человек заказали плов и компот?

3. В студенческой группе 12 человек изучают английский язык, 13 – немецкий язык, 16 – французский язык, 4 – только английский и немецкий, 3 – только английский и французский, 5 – все три языка. В группе нет студентов, изучающих только английский язык. Два человека изучают только немецкий язык, шесть человек изучают только французский язык. Один студент в группе не изучает ни один из перечисленных языков. Сколько всего студентов в группе?

1.5. Декартово произведение множеств

Пусть даны два произвольных непустых множества X и Y, элементы которых мы будем обозначать $x \in X$, $y \in Y$.

Определение. *Прямым произведением* (или *декартовым произведением*) двух непустых множеств $X \times Y$ называется множество упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Упорядоченность пары означает, что если мы будет рассматривать декартово произведение $Y \times X$, то соответствующая пара будет иметь вид $(y; x)$, где $y \in Y$, $x \in X$.

В частности, декартово произведение множества действительных чисел на себя $R \times R = R^2$ представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел.

Пример 1. Даны множества $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{a, b\}$. Найдите множества $A \times B$ и $B \times A$, A^2 и соответствующие мощности.

Решение

$A \times B = \{(0; a), (0; b), (1; a)\ (1; b), (2; a), (2; b)\}$;

$B \times A = \{(a; 0), (b; 0), (a; 1)\ (b; 1), (a; 2), (b; 2)\}$.

Найдем мощность: $m(A \times B) = m(B \times A) = m(A) \times m(B) = 2 \cdot 3 = 6$.

Таблица 1.1. Законы алгебры множеств

$*A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$	1
$*A+(B+C)=(A+B)+C$	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	2
$A+A=A$	$A\cdot A=A$	3
$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$	4
$A+\emptyset=A$	$A\cdot U=A$	5
$A+U=U$	$A\cdot\emptyset=\emptyset$	6
$A+A'=U$	$A\cdot A'=\emptyset$	7
$A''=A$	$\emptyset''=\emptyset$	9
$\emptyset'=U$	$U'=\emptyset$	10
$(A+B)'=A'\cdot B'$	$(A\cdot B)'=A'+B'$	11
$*(A'+B')'+(A'+B)'=A$	$(A'\cdot B')'\cdot(A'\cdot B)'=A$	12
$A\subseteq A$	$(A\subseteq B)\&(B\subseteq A)\equiv A=B$	13
$(A\subseteq B)\&(B\subseteq C)\models A\subseteq C$	$(A\subset B)\&(B\subset C)\models A\subset C$	14
$(A=B)\equiv(A'+B)\cdot(A+B')=U$	$A\cdot(B\cdot C')=(A\cdot B)\cdot(AC)'$	15
$A\subseteq B\equiv B=A+B$	$A\subseteq B\equiv A=A\cdot B$	16
$A\subseteq B\equiv A'+B=U$	$A\subset B\equiv A'+B=U$	17
$A\subseteq B\equiv A'+A\cdot B=U$	$A\subset B\equiv +A\cdot B=U$	18
$A\subset B\equiv(A=A\cdot B)\&(A\cdot B'=\emptyset)$	$A\subset B\equiv(A=A\cdot B)\&(A\cdot B'=\emptyset)$	19
$(A\subseteq B)\&(B\subset C)\models A\subset C$	$(A\subset B)\&(B\subseteq C)\models A\subset C$	20
$A\oplus B=B\oplus A$	$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$	21
$(A\cdot B)\oplus C=(A\oplus B)\cdot(A\oplus C)$	$A\cdot B+A\cdot B'=A$	22
$(A+B)\cdot(A+B')=A$	$A\cdot(A+B)=A$	23
$(A+A')\cdot B=A+B$	$A\cdot(A'+B)=A\cdot B$	24

--ё+

$A^2 = A \times A$.

$A \times A = \{(0;\,0),\,(0;\,1),\,(0;\,2)\,(1;\,0),\,(1;\,1),\,(1;\,2),\,(2;\,0),\,(2;\,1),\,(2;\,2)\}$.

Найдем мощность: $m(A \times A) = m(A) \times m(A) = (m(A))^2 = 3^2 = 9$.

Пример 2. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d, f\}$, $C = \{a, b, f, e\}$. Найдите число элементов декартова произведения множеств $A \times (B \cap C)$ и укажите эти элементы.

Решение

Найдем пересечение множеств $B \cap C$, содержащее общие элементы обоих множеств: $B \cap C = \{a, f\}$. Так как множество A содержит четыре элемента, а множество $B \cap C$ – два элемента, то количество соответствующих пар декартова произведения будет $4 \times 2 = 8$. Перечислим всевозможные пары: $(a;\,a)$, $(a;\,f)$, $(b;\,a)$, $(b;\,f)$, $(c;\,a)$, $(c;\,f)$, $(d;\,a)$, $(d;\,f)$.

Пример 3. Даны множества $M_1 = \{x : 2 \le x \le 5\}$ и $M_2 = \{y : 1 \le y \le 4\}$. Найдите и изобразите на координатной плоскости $M_1 \times M_2$.

Решение

В соответствии с определением декартова произведения $M_1 \times M_2 = \{(x;\,y) \mid 2 \le x \le 5, 1 \le y \le 4\}$ – множество точек, расположенных в квадрате с вершинами $A(2;\,1)$, $B(2;\,4)$, $C(5;\,4)$ и $D(5;\,1)$ (рис. 10).

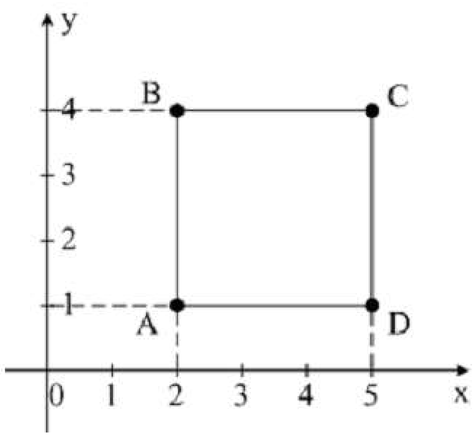

Рис. 10

Понятие декартова произведения можно обобщить на случай n множеств. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – произвольные непустые множества, то их декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_n \in X_n$.

Замечание. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – конечные множества, то

$$m(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) =$$
$$= m(X_1) \times m(X_2) \times ... \times m(X_n).$$

Декартово произведение множеств само является множеством, и поэтому к нему применимы все изученные ранее способы задания и операции.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дайте определение декартова произведения множеств.

2. Пусть $X=\{a,c\}$ и $Y=\{a,d,f\}$. Найдите множества $X\times Y$, Y^2, $X\times Y\times X$ и соответствующие мощности.

3. Декартово произведение имеет вид
$A\times B=\{(2;\,\textit{д}),(4;\,\textit{д}),(2;\,p),(4;\,p),(2;\,y),(4;\,y),(2;\,\textit{г}),(4;\,\textit{г})\}$. Тогда чему равны множества A и B?

1.6. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений

Определение 1. *Бинарным отношением* $\widehat{R}$ на множествах A и B называется любое подмножество декартова произведения множеств A и B: $\widehat{R}\subseteq A\times B$. При этом множество A называют *областью определения* отношения $\widehat{R}$, а множество B – *областью значений*.

Если элементы x и y множеств A и B находятся в отношении $\widehat{R}$, то пишут $(x;\,y)\in\widehat{R}$, или $x\widehat{R}y$. Если $A=B$, то $\widehat{R}$ называется бинарным отношением на A.

Например:

а) если $\widehat{R}=\{(x;\,y)\,|\,x,\,y\in N,\,x\le y\}$, тогда запись $x\widehat{R}y$ означает, что $x\le y$, и в качестве обозначения этого отношения можно взять сам символ «≤». Множество определения и множество значений совпадают с множеством натуральных чисел;

б) если A – множество товаров в магазине, а B – множество целых положительных чисел из некоторого диапазона, то $\widehat{R}=\{(x;\,y)\,|\,x,\,y\in A\times B: y-\textit{цена}\ x\}$ – отношение множеств A и B. Множество определения – товары в магазине, а множество значений – действительные числа, каждое из которых совпадает с ценой некоторого товара;

с) если R – множество действительных чисел, то $\widehat{R}=\{\,(x;\,y)\,|\,x,\,y\in R,\,y^2+x^2\le 4\,\}$ есть бинарное отношение – точки плоскости, лежащие внутри или на границе круга радиуса 2 с центром в начале координат. Множество определения $\{-2\le x\le 2\}$ и множество значений $\{-2\le\ y\le 2\}$.

Свойства бинарных отношений

1. Бинарное отношение $\widehat{R}$ на множестве A *рефлексивное*, если для всякого $x\in A$ выполняется $x\widehat{R}x$.

2. Бинарное отношение $\widehat{R}$ на множестве A *антирефлексивное*, если для любых x и y, для которых выполнено $x\widehat{R}y$, следует, что $x \neq y$.

3. Бинарное отношение $\widehat{R}$ на множестве A *симметричное*, если из выполнения $x\widehat{R}y$ следует, что $y\widehat{R}x$, т. е. из принадлежности отношению пары $(x; y)$ следует принадлежность этому отношению также пары $(y; x)$.

4. Бинарное отношение $\widehat{R}$ на множестве A *антисимметричное*, если из выполнения $x\widehat{R}y$ и $y\widehat{R}x$ следует, что $x = y$.

5. Бинарное отношение $\widehat{R}$ на множестве A *транзитивное*, если из выполнения $x\widehat{R}y$ и $y\widehat{R}z$ следует выполнение $x\widehat{R}z$.

Определение 2. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение $\widehat{R}$ на множестве A называется *отношением эквивалентности*.

Определение 3. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение $\widehat{R}$ на множестве A называется *отношением нестрогого порядка*.

Определение 4. Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение $\widehat{R}$ на множестве A называется *отношением строгого порядка*.

Пример. Проверьте, какими свойствами обладает отношение
$\{(a; b) \mid a, b \in N, (a + 2b) \,\vdots\, 3\}$ (т.е. $(a+2b)$ кратно трем).

Решение:

а) рефлексивность: для $\forall\, a \in N$ и $(a + 2b) \,\vdots\, 3$ необходимо показать, что $(a + 2a) \,\vdots\, 3$.

Действительно, $(a + 2a) \,\vdots\, 3 \Rightarrow 3a \,\vdots\, 3 \Rightarrow$ отношение рефлексивно;

б) симметричность: для $\forall\, a, b \in N$ и $(a + 2b) \,\vdots\, 3$ необходимо показать, что $(b + 2a) \,\vdots\, 3$.

Обозначим $a + 2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b$, подставим:
$b + 2a = b + 2(3n - 2b) = 6n - 3b = 3(2n - b) \Rightarrow \quad 3(2n - b) \,\vdots\, 3 \quad \Rightarrow$ отношение симметрично;

в) транзитивность: для $\forall\, a, b, c \in N$ и $(a + 2b) \,\vdots\, 3$, $(b + 2c) \,\vdots\, 3$ необходимо показать, что $(a + 2c) \,\vdots\, 3$.

Обозначим $a + 2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b$, и $b + 2c = 3m \Rightarrow 2c = 3m - b$, подставим: $a + 2c = 3n - 2b + 3m - b = 3n + 3m - 3b = 3(n + m - b) \Rightarrow$
$3(n + m - b) \,\vdots\, 3 \Rightarrow$ отношение транзитивно.

Так как отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, следовательно, оно является отношением эквивалентности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какие отношения называют отношением эквивалентности, отношением нестрогого порядка, отношением строгого порядка?

2. Найдите область определения и множество значений отношений:

а) $\{(a;1),(a;2),(a;3),(a;4)\}$;

б) $\{\ (x;\ y)\,|\,x,\ y \in R\ и\ x = y^2\ \}$.

3. Даны множества $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$. Найдите количество пар, удовлетворяющих бинарному отношению $U = \{(x;\ y)\,|\ \ x + y = 9\}$.

1.7. Функция

Отношения эффективно применяются для описания связей между парами элементов, выбранных из двух множеств X и Y. Функции – частный случай бинарных отношений, на которые наложены дополнительные ограничения.

Рассмотрим два произвольных множества X и Y, элементы которых будем обозначать $x \in X$, $y \in Y$.

Определение 1. Поставим каждому элементу $x \in X$ в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ по определенному правилу f. Тем самым зададим *отображение* множества X в множество Y. Обозначение: $f : X \to Y$.

Часто вместо термина «*отображение*» используют термин «*функция*».

Пусть f – функция из множества X в множество Y. Поскольку для каждого $x \in X$ существует единственным образом определенный $y \in Y$, такой, что $(x;\ y) \in f$, то будем писать $y = f(x)$ и говорить, что функция f отображает множество X в множество Y. При этом элементы $y \in Y$ называются *образом* x при отображении f, а совокупность элементов $x \in X$ называется *прообразом* элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Множество X принято называть *областью определения* функции. Обозначение: $D(f)$. Множество Y – *областью значений* функции f. Обозначение: $E(f)$.

Способы задания функций:

1) аналитический (одной или совокупностью формул);
2) табличный;
3) описательный;
4) графический.

Определение 2. *Графиком функции* $y = f(x)$ является изображение в декартовой системе координат множества точек $(x;\ y)$, где $x \in D(f)$, а

$y = f(x)$, т. е. изображение декартова произведения области определения функции и области ее значений.

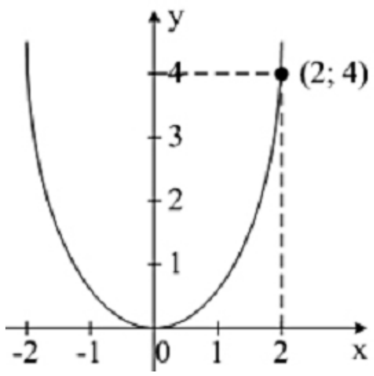

Рис. 11

Например, график функции $f : R \to R$, заданный формулой $f(x) = x^2$, изображен на рис. 11.

Множество определения – ось OX – множество действительных чисел, множество значений – ось OY – множество неотрицательных действительных чисел.

График функции состоит из точек $(x; y)$ прямого произведения $R \times R$, для которых $f(x) = x^2$.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x-2}$.

Решение

Функция содержит корень четной степени, следовательно, она определена только в случае неотрицательного подкоренного выражения, т. е. $x - 2 \geq 0$, откуда $x \geq 2$; $D(f) = \{x \mid x \in [2; +\infty)\}$.

Пример 2. Найдите прообраз множества $[1; \sqrt{2}]$ при отображении $y = \sqrt{x^2+1}$.

Решение

$y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2-1}$.

Подставим $y_1 = 1$, получим $x = 0$; $y_1 = \sqrt{2}$, получим $x = \pm 1$.

Прообразом отображения (в силу непрерывности функции) являются те x, которые попадают в отрезок $[1; \sqrt{2}]$, тогда $f^{-1}(y) = [-1; 1]$.

Пример 3. Отображение $f : R \to R$ действует по правилу

$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 1, \\ x-2, & x \leq 1 \end{cases}$. Найдите образ $f[0; 2]$.

Решение

Отрезок $[0,2]$ можно представить как объединение двух множеств: $[0,2] = [0,1] \cup (1,2]$. Отрезок $[0,1]$ отображается аналитическим выражением $f(x) = x - 2$, поэтому $f([0,1]) = [-2,-1]$. Полуинтервал $(1,2]$ отображается аналитическим выражением $f(x) = x^2 + 1$, поэтому $f((1,2]) = (2,5]$. Окончательно образ имеет следующий вид $f[0; 2] = [-2; -1] \cup (2; 5]$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дайте определения образа, прообраза функции.
2. Найдите прообраз множества $[1;\,2]$ при отображении $y = 2x - 1$.
3. Отображение $f : R \to R$ действует по правилу

$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x > 2, \\ 3x - 2, & x \le 2 \end{cases}$. Найдите образ $f[-2;\,3]$.

4. Найдите области определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$; б) $y = \log(x^2 - 6)$.

2.4. Булевы функции. Свойства элементарных булевых функций

Операции над множествами и основные логические операции, такие как отрицание, конъюнкция (умножение, пересечение), дизъюнкция (сложение, объединение) обладают свойством коммутативности относительно конъюнкции и дизъюнкции, и дистрибутивным законом конъюнкции относительно дизъюнкции.

Рассмотрим непустое множество M: $A, B, C, \ldots$ – элементы этого множества. На множестве определено отношение равенства, отрицание, операции сложения и умножения. Отношение равенства будем записывать как $A = B$, отрицание как $\overline{A}$, умножение как $A \cap B$, или $A \wedge B$; сложение как $A \cup B$, или $A \vee B$.

Перечисленные операции подчиняются следующим законам.

Коммутативные законы: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

Ассоциативные законы:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Дистрибутивные законы:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

Законы идемпотентности: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} \equiv A$.

Законы де Моргана: $\overline{A \cap B} = (\overline{A} \cup \overline{B})$, $\overline{A \cup B} \equiv (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.

Множество M с определенными на нем операциями, подчиняющимися указанным законам, называется *булевой алгеброй*.

Алгебра логики и алгебра множеств – булевы алгебры.

Булева функция, или функция алгебры логики, является одним из основных объектов дискретной математики.

Булевы функции названы в честь Джорджа Буля, положившего начало применению математики в логике.

Определение 1. *Булевой функцией* (или *функцией алгебры логики*) от n переменных называется любая функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений 0 или 1.

Определение 2. Две булевы функции называются *равными*, если для любых одинаковых наборов значений переменных обе функции принимают одинаковые значения. Булевых функций одной переменной четыре, а двух переменных – шестнадцать и т. д. Число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Определим функции одной и двух переменных, которые называются элементарными функциями и с помощью которых можно определить функции большего количества переменных.

Составим таблицы истинности таких функций.

Таблица истинности булевой функции одной переменной:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции $f_1(x)$ и $f_4(x)$ называются константами – соответственно 0 и 1. Функция $f_2(x)$ совпадает с переменной x и называется тождественной $f_2(x) = x$. Функция $f_3(x)$ принимает значения, противоположные значениям аргумента x и называется отрицанием x, обозначается $\overline{x}$: $f_3(x) = \overline{x}$.

Таблица истинности булевой функции двух переменных:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		Константа 0	$\wedge$	$+>$	x_1	$<+$	x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$ Стрелка Пирса	$\leftrightarrow$	$\overline{x_2}$	$\leftarrow$	$\overline{x_1}$	$\rightarrow$ Импликация	| Штрих Шеффера	Константа 1

Следует отметить, что здесь к функциям двух переменных относятся и такие, которые в действительности зависят от одной переменной.

1. Функции f_1 и f_{16} представляют собой константы 0 и 1.

2. Функции f_4, f_6, f_{11}, f_{13} существенно зависят только от одной переменной: $f_4 = x_1$, $f_6 = x_2$, $f_{11} = \overline{x_2}$, $f_{13} = \overline{x_1}$.

3. Остальные функции существенно зависят от двух переменных, и для них есть названия и обозначения:

а) функция $f_2 = x_1 \wedge x_2$ называется конъюнкцией;

б) функция $f_8 = x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией;

в) функция $f_{10} = x_1 \leftrightarrow x_2$ называется эквивалентностью;

г) функция $f_7 = x_1 \oplus x_2$ называется суммой по модулю два, или суммой Жегалкина;

д) функция $f_{12} = x_2 \to x_1$ называется конверсией;

е) функция $f_{14} = x_1 \to x_2$ называется импликацией;

ж) функция $f_{15} = x_1 \mid x_2$ называется штрихом Шеффера;

и) функция $f_9 = x_1 \downarrow x_2$ называется стрелкой Пирса;

к) функции f_3 и f_5 логически несовместимы с импликацией и конверсией и называются функциями запрета.

Для булевых функций справедливы равенства, аналогичные формулам, указанным для высказываний.

1. Функции: конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю два, стрелка Пирса, штрих Шеффера обладают свойством коммутативности.
2. Функции: конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю два обладают свойством ассоциативности и свойством дистрибутивности.
3. Закон де Моргана: $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$; $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$.
4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.
5. Выражение дизъюнкции через конъюнкцию и суммы по модулю два: $x_1 \vee x_2 = x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \oplus x_1$.
6. Выражение дизъюнкции через импликацию: $(x_1 \to x_2) \to x_2 = x_1 \vee x_2$.
7. Выражение отрицания через штрих Шеффера, стрелку Пирса, сумму по модулю два и эквивалентность: $x \mid x = x \downarrow x = \overline{x} = x \oplus 1 = x \leftrightarrow 0$.
8. Выражение конъюнкции через штрих Шеффера:
$$(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2) = x_1 \wedge x_2.$$
9. Выражение дизъюнкции через стрелку Пирса:
$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) = x_1 \vee x_2.$$
10. Закон поглощения: $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 = x_1$; $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$.

11. Закон склеивания: $\bar{x} \vee x = \bar{x} \oplus x = 1$.

12. Для функций конъюнкции, дизъюнкции и сумме по модулю два справедливы следующие тождества:

$$
\begin{array}{lll}
x \wedge x = x; & x \vee x = x; & x \oplus x = 0; \\
\bar{x} \wedge x = 0; & \bar{x} \vee x = 1; & x \oplus \bar{x} = 1; \\
x \wedge 0 = 0; & x \vee 0 = x; & x \oplus 0 = x; \\
x \wedge 1 = x; & x \vee 1 = 1; & x \oplus 1 = \bar{x}.
\end{array}
$$

13. Для функций конъюнкции и дизъюнкции справедливы тождества: $x_1 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 = x_1 \vee x_2$; $x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_1) = x_1 \wedge x_2$.

Для доказательства справедливости любых из приведенных тождеств нужно составить таблицы истинности для булевых функций.

Булеву функцию любого числа переменных можно задать формулой, содержащей функции одной и двух переменных посредством подстановки одних булевых функций вместо переменных в другие булевы функции, т. е. посредством суперпозиции булевых функций.

Теорема 1. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т. е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

2.5. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы булевых функций

Определение 1. *Конъюнктивным одночленом (элементарной конъюнкцией)* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Например, $A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D}$ – элементарная конъюнкция.

Определение 2. *Дизъюнктивным одночленом (элементарной дизъюнкцией)* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Например, $A \vee B \vee \overline{C}$ – элементарная дизъюнкция.

Определение 3. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнктивных одночленов, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) данной формулы.

Например, $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_3 \wedge x_2) \vee \overline{x_3}$ – ДНФ.

Определение 4. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией элементарных дизъюнктивных одночленов, называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) данной формулы.

Например, $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge x_2$ – КНФ.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

Алгоритм построения нормальных форм

1. С помощью равносильностей алгебры логики заменить все имеющиеся в формуле операции основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием:

$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$;

$x_1 \leftrightarrow x_2 = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2})$;

$x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$.

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям типа $\overline{x_1 \wedge x_2}$ или $\overline{x_1 \vee x_2}$, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$; $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

3. Избавиться от знаков двойного отрицания.

4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

2.6. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

Определение 1. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* (СДНФ) – это ДНФ, в которой в каждый конъюнктивный одночлен каждая переменная x_i из набора $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$.

Конструктивно СДНФ для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к ДНФ, можно определить следующим образом:

Определение 2. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) формулы алгебры высказываний называется ее ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1) ДНФ не содержит двух одинаковых конъюнкций;

2) ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных;

3) ни одна конъюнкция не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание;

4) каждая конъюнкция содержит либо переменную x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$ для всех переменных, входящих в формулу.

Определение 3. *Совершенная конъюнктивная нормальная форма* (СКНФ) – это КНФ, в которой в каждый дизъюнктивный одночлен каждая переменная x_i из набора $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$.

Конструктивно СКНФ для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к КНФ, можно определить следующим образом.

Определение 4. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) данной формулы алгебры высказываний называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам.

1. КНФ не содержит двух одинаковых дизъюнкций.
2. Ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных.
3. Ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание.
4. Каждая дизъюнкция СКНФ содержит либо переменную x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$ для всех переменных, входящих в формулу.

Теорема 1. Каждая булева функция от n переменных, не являющаяся тождественно ложной, может быть представлена в СДНФ, и притом единственным образом.

Способы нахождения СДНФ

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из ДНФ;
- если в полученной ДНФ входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x, то используем равносильность $B = B \wedge (x \vee \overline{x}) = (B \wedge x) \vee (B \wedge \overline{x})$ и получаем две элементарных конъюнкции;
- если в ДНФ входят две элементарные конъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

2-й способ – с помощью таблиц истинности:

- выделяем строки, где формула принимает значение 1;
- составляем дизъюнкцию конъюнкций при условии, что если переменная входит в конъюнкцию со значением 1, то записываем эту переменную, если со значением 0, то ее отрицание. Получаем СДНФ.

Теорема 2. Каждая булева функция от n переменных, не являющаяся тождественно истинной, может быть представлена в СКНФ, и притом единственным образом.

Способы нахождения СКНФ

1-й способ – с помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из КНФ;
- если в полученной КНФ входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x, то используем равносильность $B = B \vee (x \wedge \overline{x}) = (B \vee x) \wedge (B \vee \overline{x})$ и получаем две элементарных дизъюнкции;
- если в КНФ входят две элементарные дизъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

2-й способ – с помощью таблиц истинности:

- выделяем строки, где формула принимает значение 0;
- составляем конъюнкцию дизъюнкций при условии, что если переменная входит в дизъюнкцию со значением 0, то записываем эту переменную, если со значением 1, то ее отрицание. Получаем СКНФ.

Пример 1. Постройте КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_3$.

Решение

Исключим связку «$\to$» с помощью законов преобразования переменных:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_3 = \overline{(x_1 \vee \overline{x_2})} \vee x_3 =$

= /законы де Моргана и двойного отрицания/ =

$= (\overline{x_1} \wedge \overline{\overline{x_2}}) \vee x_3 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee x_3 =$ /дистрибутивные законы/ =

$= (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) - КНФ$.

Пример 2. Приведите к ДНФ формулу $f = ((x \to y) \downarrow \overline{(y \to z)})$.

Решение

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge$, $\vee$ и $^{-}$:

$f = ((x \to y) \downarrow \overline{(y \to z)}) = ((\overline{x} \vee y) \downarrow \overline{(\overline{y} \vee z)}) = \overline{(\overline{x} \vee y) \vee \overline{(\overline{y} \vee z)}} =$

= /отнесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания/ =

$= (\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) = (x \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) =$

= /закон дистрибутивности/ $= (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) - ДНФ$.

Пример 3. Запишите формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ в ДНФ и СДНФ.

Решение

Используя законы логики, приведем данную формулу к виду, содержащему только дизъюнкции элементарных конъюнкций. Полученная формула и будет искомой ДНФ:

$\overline{(A \wedge B) \vee C} = (\overline{A \wedge B}) \wedge \overline{C} = (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C} = (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C}) - ДНФ.$

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$\overline{(A \wedge B) \vee C}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение 1. Для каждой такой строки выпишем формулу, истинную на наборе переменных A, B, C данной строки:

строка 1: $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$;

строка 3: $\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$;

строка 5: $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$.

Дизъюнкция этих трех формул будет принимать значение 1 только на наборах переменных в строках 1, 3, 5, а следовательно, и будет искомой совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ):

$(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$.

Пример 4. Приведите формулу $A = (x \vee \overline{z}) \to (y \to z)$ к СКНФ двумя способами:

а) с помощью равносильных преобразований;

б) с помощью таблицы истинности.

Решение:

а) $A = (x \vee \overline{z}) \to (y \to z) = \overline{x \vee \overline{z}} \vee (\overline{y} \vee z) = (\overline{x} \wedge z) \vee (\overline{y} \vee z) =$

$= (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (z \vee \overline{y} \vee z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{y} \vee z) - КНФ.$

Преобразуем вторую элементарную дизъюнкцию:

$(\overline{y} \vee z) = (y \vee z) \vee (x \wedge \overline{x}) = (\overline{y} \vee z \vee x) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{x})$.

Формула A имеет вид:

$A = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{y} \vee z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) =$

$= (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) - СКНФ;$

б) составим таблицу истинности для данной формулы:

x	y	z	$\overline{z}$	$x \vee \overline{z}$	$y \to z$	$(x \vee \overline{z}) \to (y \to z)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение 0. Для каждой такой строки выпишем формулу, истинную на наборе переменных x, y, z данной строки:

строка 2: $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$;

строка 6: $x \vee \overline{y} \vee z$.

Конъюнкция этих двух формул будет принимать значение 0 только на наборах переменных в строках 2 и 6, а следовательно, и будет искомой совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ):
$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. С помощью равносильных преобразований приведите к ДНФ формулы:

а) $(x \vee y \wedge z) \wedge (x \vee z)$;

б) $(x \vee (\overline{x} \leftrightarrow y)) \to \overline{x \vee y}$;

в) $(x \downarrow z) \leftrightarrow (y \to z) \vee \overline{x} \wedge y$.

2. С помощью равносильных преобразований приведите к КНФ формулы:

а) $x \to \overline{y} \wedge z$;

б) $((x \wedge y \wedge z \leftrightarrow (\overline{y} \vee z)) \wedge y) \downarrow \overline{x}$;

в) $(\overline{x \leftrightarrow \overline{y} \wedge z}) \to (\overline{x} \oplus (y \to z))$.

3. С помощью второго дистрибутивного закона преобразуйте ДНФ в КНФ:

а) $x \wedge \overline{y} \vee y \wedge z \vee (\overline{x \wedge z})$;

б) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z$.

4. Преобразуйте заданные ДНФ в СДНФ:

а) $x \wedge y \vee y \wedge \overline{z} \vee \overline{x \wedge y}$;

б) $x \vee \overline{x \wedge y \wedge z} \vee x \wedge y$;

в) $x \wedge y \vee x \wedge y \wedge z \vee y \vee \overline{x} \wedge y$.

5. Преобразуйте заданные КНФ в СКНФ:

а) $(\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z) \wedge y$;

б) $(\overline{x} \vee y) \wedge (z \vee y) \wedge z$;

в) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y)$.

6. Для заданных логических формул постройте СДНФ и СКНФ двумя способами: с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности.

а) $((x \to y) \vee \overline{z}) \leftrightarrow (x \vee (y \to \overline{z}))$;

б) $(\overline{x_1} \mid (\overline{\overline{x_2}} \vee x_1)) \vee \overline{\overline{x_3} \wedge \overline{\overline{x_1}}}$;

в) $(x \mid \overline{y}) \oplus (\overline{z} \to x)$.