代数模型

> 用相应的向量、矩阵、线性方程等代数模型和手段来刻画分析实际问题。

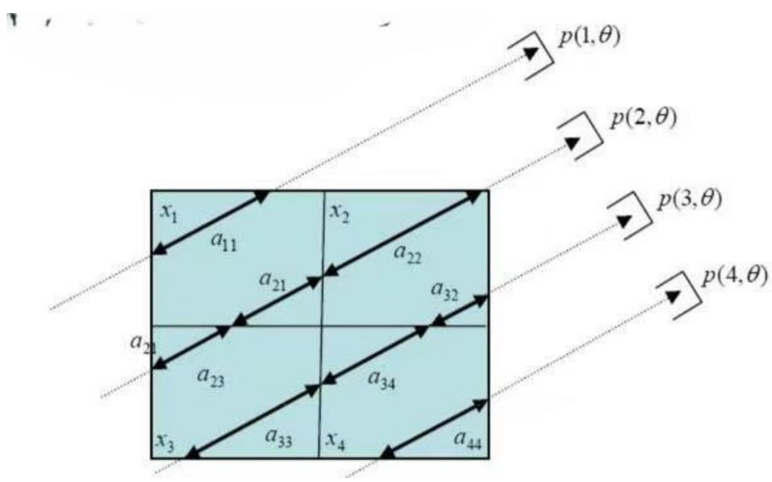
图像重建问题

把原物体抽象成矩阵，矩阵每一行（列）的求和过程：**图像的射线和（线积分）及投影数据。**

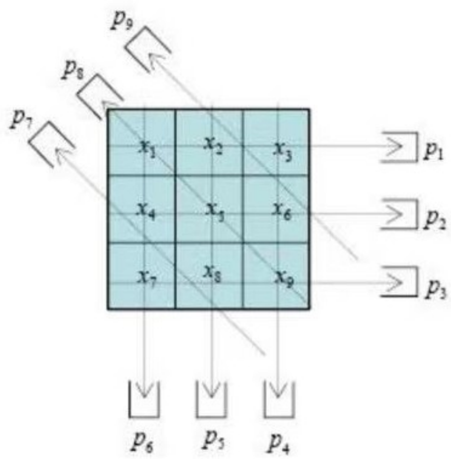
“多角度采集数据+矩阵求和+数学处理手段”

- 探测器：以四个探测元为例
- 矩阵：连续图像，每个矩阵元素代表一个均匀像素
- $x_i(i=1,2,3,4)$：第i个像素的线密度数值
- 矩阵投影数据：图像线积分数值$p(s,\theta)$
- 线积分在每个像素内的线段长度a_{ij}（i是探测元编号，j是像素编号）

$$p(i,\theta)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4$$



当两个方向的约束不足时，可以增加其他角度的约束，列线性方程组求解。



$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3=p_1\\
x_4+x_5+x_6=p_2\\
x_7+x_8+x_9=p_3\\
x_3+x_6+x_9=p_4\\
x_2+x_5+x_8=p_5\\
x_1+x_4+x_7=p_6\\
2(\sqrt{2}-1)x_4+2(\sqrt{2}-1)x_7+2(\sqrt{2}-1)x_8=p_7\\
\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}x_5+\sqrt{2}x_9=p_8\\
2(\sqrt{2}-1)x_2+(2-\sqrt{2})x_3+2(\sqrt{2}-1)x_6=p_9
\end{cases}
$$

图像重建问题：解线性方程组，求解X

植物基因的分布

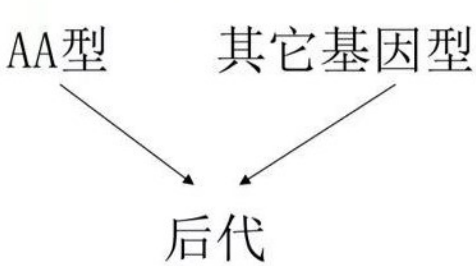
问题重现

设一农业研究所植物园中某种植物的基因型为AA、 Aa和aa。 研究所计划采用AA型的植物与每一种基因型植物相结合的方案培育植物后代。 问经过若干年后， 这种植物的任意一代的三种基因型分布如何?

符号说明

- $x_1(n)$—第n代中基因型AA的植物占植物总数的百分比
- $x_2(n)$—第n代中基因型Aa的植物占植物总数的百分比
- $x_3(n)$—第n代中基因型aa的植物占植物总数的百分比
  显然，$x_1(n)+x_2(n)+x_3(n)=1$

育种方式:



相邻两代间基因转移关系：

	概率	父体-母体的基因对		
		AA-AA	AA-Aa	AA-aa
后代基因对	AA	1	1/2	0
	Aa	0	1/2	1
	aa	0	0	0

得到迭代的基因型分布关系:

$$x_1(n)=x_1(n-1)+\frac{1}{2}x_2(n-1)$$

$$x_2(n)=\frac{1}{2}x_2(n-1)+x_3(n-1)$$

$$x_3(n) = 0$$

用向量形式表示：

$$\vec{x}(n) = L\vec{x}(n-1), n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\vec{x}(n) = L^n\vec{x}(0), n = 1, 2, 3, \ldots$$

用对角化方法求L^n，即求出可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$L = PDP^{-1}$，从而：

$$L^n = PD^nP^{-1}$$

利用特征值和特征向量的方式求解L^n，代入即可得到$x_1(n)$，$x_2(n)$，$x_3(n)$的关系式。取$x \to \infty$，即可得出$x_1(n) \to 1$，$x_2(n) \to 0$，$x_3(n) \to 0$。
结论：培育得到的AA型植物所占比例不断增加，在极限状态下所有植物的基因型都会为AA型。

希尔密码

问题背景（移位密码）

移位密码明文字符和密文字符有相同的使用频率，破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。 要克服这一缺陷就必须**改变字符间的一一对应。**

希尔密码的加密与解密

- **加密**：

1. 将明文分成n个一组， 用对应的数字代替，就变成了一个n维向量；
2. 取定一个n阶的非奇异矩阵A（即密钥矩阵），用A去乘（左乘或右乘）每一向量；
3. 将新向量的每一个分量关于模m取余运算；
4. 将新向量的每一个数字按照原规律对应回相应字符，即可加密。

- **解密**：

1. 将密文先用数字表示，并分成n个一组，变换成n维向量；
2. 只需用密钥矩阵的逆矩阵A^{-1}乘（左乘或右乘）这些向量；
3. 将所得向量的每一个分量关于模m（通常为26）取余运算；
4. 将所得向量的每一个数字按照规律对应回相应字符，即可解密。

- **求解逆矩阵A^{-1}**：

1. 求出行列式$|A|$，并对其进行取模运算；
2. 求出$|A|^{-1}$， 注意在模运算中逆元的求解为相乘模26余1；
3. 求出A^*，$A^{-1} = |A|^{-1} * A^*$，再对矩阵的每一个元素进行模运算。

> 注意：
>
> 1. 从普通的逆元的定义拓展到同余意义上的逆元，以保证加密矩阵和解密矩阵操作后的结果为规定范围内的整数。
> 2. 希尔密码是以矩阵法为基础的，明文与密文的对应由n阶矩阵A确定。矩阵A的阶数是事先约定的，与明文分组时每组字母的字母数量相同。如果明文所含字数与n不匹配，则最后几个分量可任意补足。

森林管理问题

问题重现

森林中的树木每年都要有一批被砍伐出售，为了使这片森林不被耗尽且每年都有所收获，每当砍伐一棵树时，应该就地补种一棵幼苗，使森林树木的总数保持不变。被出售的树木，其价值取决于树木的高度。开始时森林中的树木有着不同的高度。我们希望能找到一个方案，在维持收获的前提下，如何砍伐树木，才能使被砍伐的树木获得最大的经济价值？

问题分析

- 先看需求，确定问题的类型
- “最大的经济价值”：优化问题
- “其价值取决于树木的高度”：使用区间来分割不同的价值和对应的高度

问题假设与符号说明

把森林中的树木按照高度分为n类：
第k类$(1 \le k < n)$：高度为$[h_{k-1}, h_k]$，其中每棵的经济价值为 p_k
其中，
第1类：幼苗，高度为$[0, h_1]$，$p_1 = 0$
第n类：高度为$[h_{n-1}, \infty)$

> 先从简单的模型开始研究，然后不断做出更符合实际情况的假设。
> 既有明显的假设，也有隐藏的假设。 *(如变量设为常量，代表不随时间变化)*

1. 每年对森林中树木砍伐一次，留下的树木和补种的幼苗；经过一年的生长期后，与上一次砍伐前的高度状态相同（ 根据保持持续收获的要求）；
2. 在一年的生长期内树木最多只能生长一个高度级，即第k类的树木可能进入$k+1$类，也可能停留在k类中；
3. 树木不存在死亡情况。

其他符号说明：

$x_k(t)$ ， $k=1,2,...,n$ 是第t年第k类树木的数量；

y_k ， $k=1,2,...,n$ 是第k类树木被砍伐的数量。