Mathe 2: Klausur #5

1. Aufgabe

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1) \overset{e \text{ stetig}}{=} 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^2 \overset{GWS}{=} 1 \neq 0$.

Also gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{(x+1)^2} \overset{GWS}{=} \frac{0}{1} = 0$.

(b) Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4\cdot n!} = \frac{1}{4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \frac{1}{4} E(x^2)$.

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass auch diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Der Konvergenzradius ist somit $r = +\infty$.

Alternative: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{x^{2n}}{4\cdot n!}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{4\cdot(n+1)!} \cdot \frac{4\, n!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(n+1)}, \text{ d.h.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$. Nach dem Quotienten-kriterium konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4\cdot n!}$. Nun war x beliebig, d.h. der Konv.radius ist $r = +\infty$.

(c) Siehe (b): $f(x) = \frac{1}{4} E(x^2)$

(d) Es gilt $T_{4,f}(x;0) = \sum\limits_{n=0}^{2} \frac{x^{2n}}{4\cdot n!} = \frac{x^0}{4\cdot 0!} + \frac{x^2}{4\cdot 1!} + \frac{x^4}{4\cdot 2!}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}.$$

2. Aufgabe

Als Summe 2-mal stetig partiell diff.barer Funktionen ist f selbst 2-mal stetig partiell diff.bar. Es gilt:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2-3 & 3-3z^2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix}.$$

Notwendig: $\nabla f(x,y,z) \overset{!}{=} (0 \quad 0 \quad 0)$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 0$ und $3y^2 = 3$ und $3 = 3z^2$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ und $y^2 = 1 = z^2$

$\Leftrightarrow \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

sind die kritischen Punkte.

Hinreichend: Sei $A_j := H_f(p_j)$ für $j \in \{1,2,3,4\}$.

Dann gilt:

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, 6, -6$ $\rightsquigarrow$ verschiedene Vorzeichen

$\rightsquigarrow$ indefinite Matrix

$\rightsquigarrow$ kein Extremum

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, 6, 6$ $\rightsquigarrow$ alle positiv

$\rightsquigarrow$ Matrix positiv definit

$\rightsquigarrow$ lokales Minimum mit $f(p_2) = -4$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$ hat EW $2, -6, -6 \leadsto$ verschiedene Vorzeichen

$\leadsto$ indefinite Matrix

$\leadsto$ kein Extremum

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & +6 \end{pmatrix}$$ hat EW $2, -6, 6 \leadsto$ verschiedene Vorzeichen

$\leadsto$ indefinite Matrix

$\leadsto$ kein Extremum

Also: f hat nur in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein lokales Extremum und zwar ein Minimum.

3. Aufgabe

Wir lösen diese homogene lineare DGL 3. Ordnung durch Angabe eines Fundamentalsystems. Sei dazu

$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ das charakteristische Polynom

der DGL. Offenbar ist $p(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$, d.h. $\lambda_1 = 1$ ist eine Nullstelle von p. Wir können also den Linearfaktor $(\lambda - 1)$ ~~faktorisieren~~ herausteilen

$$(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 1 \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{3. bin.}}{=}} (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)$$
$$-(\lambda^3 - \lambda^2)$$
$$-\lambda + 1$$
$$-(-\lambda + 1)$$
$$0$$

Somit ist $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)$ mit den Nullstellen

$\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die Nullstelle λ_1 hat die Vielfachheit $m_1 = 2$ und λ_2 hat Vielfachheit $m_2 = 1$.

Also ~~ist~~ ist

$$\{e^{\lambda_1 t}, t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t}\} \cup \{e^{\lambda_2 t}\}$$

$$= \{e^t, t \cdot e^t, e^{-t}\}$$ ein Fundamentalsystem

der DGL. Alle Lösungen werden davon aufgespannt.

4. Aufgabe

(a) f ist stetig diff.bar, weil $\sin(x)$ und $\arctan(x)$ es sind. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\right), \text{ d.h.}$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{4}\left|\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\leq 1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1+1) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

(b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ ist offen und konvex und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diff.bar mit $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Schrankensatz (Satz 6.5.18.) gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x-y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}, \text{ d.h.}$$

f ist eine strikte Kontraktion mit $q = \frac{1}{2} < 1$. (5)

Weiter ist $\mathbb{R}$ abgeschlossen und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau ein x_* mit $f(x_*) = x_*$.

(c) Nach Satz 5.6.22. ist $x_{n+1} := f(x_n)$, $x_0 = 0$, eine solche Folge.

5. Aufgabe

(a) Wahr: Für $z \neq 0$ ist $z \cdot \bar{z} = |z|^2 > 0$ eine positive reelle Zahl, d.h. $\arg(z \cdot \bar{z}) = 0$.

(b) Falsch: Gäbe es solch eine Funktion, so müsste nach Satz von Schwarz

$$x = \partial_{21} f(x,y) = \partial_{12} f(x,y) = 0 \quad \text{gelten,}$$

ein Widerspruch für $x \neq 0$.

(c) Wahr: f ist gerade, denn

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x).$$

Nach Satz 6.9.9. ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Falsch: Sei $f = g = 1$, $b = d = 2$ und $a = c = 1$.

Dann gilt
$$1 = \frac{b-a}{d-c} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_c^d g(x)\,dx} = \int_{a/c}^{b/d} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{b}{d} - \frac{a}{c} = 1 - 1 = 0,$$

ein Widerspruch.

6. Aufgabe

(a) Falsch: $a_n = \frac{1}{n+1} \rightsquigarrow$ hormonische Reihe

(b) Wahr: Folgt aus Zwischenwertsatz

(c) Falsch: $f(x) := x^3$

(d) Falsch: $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(e) Falsch: $f(x) := x$, $g(x) := -1$ (es geht um monoton wachsend und nicht um streng monoton wachsend)

(f) Wahr: f diff.bar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f beschränkt auf Kompaktum $[0,1]$

(g) Falsch: $f(x) := x^3$

(h) Wahr: Folgt aus Hauptsatz

(i) Wahr: $\frac{\sin^2(x)}{1+e^x} \geq 0$ auf $[0,1]$ und

$$\frac{\sin^2(x)}{1+e^x} \geq C > 0 \text{ auf } [\tfrac{1}{2}, 1].$$

(j) Falsch: Anfangswerte sind nicht angegeben, also keine eindeutige Lsg.