Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **WS 2018/2019**
Prof. Dr. Thomas Streicher **14.03.2019**

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	20	4	10	7	6	10	23	80		
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Bitte kennzeichnen Sie jeweils, welche Aufgabe Sie bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie Ihre Zusatzblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**.
Einzelne Zettel, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden.
Sollten Sie Zusatzblätter verwendet haben, falten Sie am Ende Ihre Klausur einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre zusätzlichen Blätter hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei eigenhandschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen und lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch!

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (8 + 12 Punkte) (20 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede leere Zeile erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	Wahr	Falsch
1.) Seien M und N Mengen, dann gilt: $M \setminus N = (M \cap N)^C \cap M$.	○	○
2.) $(\mathbb{Z}, -)$ ist eine Gruppe.	○	○
3.) Seien $(R, +_R)$ und $(S, +_S)$ Ringe und $f : (R, +_R) \to (S, +_S)$ ein Ringisomorphismus. Dann ist f^{-1} ein Ringhomomorphismus.	○	○
4.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Dann ist jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.	○	○
5.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei B_V eine Basis von V. Für jede Basis B_U eines Untervektorraums $U \subseteq V$ gilt $B_U \subseteq B_V$.	○	○
6.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.	○	○
7.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.	○	○
8.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lvert a_n\rvert} = 1$.	○	○

(b) Füllen Sie die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet. Für jeden richtig ausgefüllten Kasten gibt es 2 Punkte. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, für jeden leeren Kasten erhalten Sie einen Punkt und jeder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

1.) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch $\boxed{}$.

2.) Für Supremum und Infimum der Menge $M := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ gilt:

$\sup M = \boxed{}$ und $\inf M = \boxed{}$.

3.) Seien $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ und $(K, *_K)$ Gruppen mit neutralen Elementen n_G, n_H und n_K. Weiterhin sei $f : (K, *_K) \to (H, *_H)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g : (G, *_G) \to (K, *_K)$ ein Gruppenisomorphismus.

Dann gilt: $f \circ g$ ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \boxed{}$.

4.) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben durch $z_1 := 1 + i$ und $z_2 := 1 - i$. Berechnen Sie

$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{}$ und $\frac{z_2}{z_1} = \boxed{}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(7^{2n} - 4^{2n}\right) \bmod 33 = 0$?

3. Aufgabe (6 + 4 Punkte) (10 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichung per vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie nun, dass für alle $x > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne

$$\mathcal{M} := \{U \subseteq V \,:\, U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$$

die Menge aller Untervektorräume von V, die M enthalten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Untervektorraum $\langle M \rangle$ durch $\{v \in V \,:\, v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$ gegeben ist. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U.$$

5. Aufgabe (3 + 3 Punkte) (6 Punkte)

Entscheiden Sie bei den beiden nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten je einen Punkt für die richtige Antwort und 2 Punkte für die Begründung.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Dann gilt $|\det(A)| = 1$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls $A \neq 0$ ist, so gilt $A^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierbei bezeichne 0 die Nullmatrix.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Es bezeichne $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $(x|By) = (B^T x|y)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

7. Aufgabe (2 + 5 + 6 + 4 + 3 + 3 Punkte) (23 Punkte)

Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D_α, zu der A_α ähnlich ist.

(c) Bestimmen Sie Matrizen S und S^{-1}, sodass gilt: $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S$.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1.) A_α ist positiv definit?

2.) A_α ist negativ definit?

3.) A_α ist indefinit?

(e) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Eigenwerte von B_α an. Es wird kein Rechenweg benötigt.

(f) Überlegen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$A_\alpha \text{ ist invertierbar.} \iff B_\alpha \text{ ist invertierbar.}$$

1. Aufgabe (8 + 12 Punkte) (20 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede leere Zeile erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	Wahr	Falsch
1.) Seien M und N Mengen, dann gilt: $M \setminus N = (M \cap N)^C \cap M$.	⊗	○

$$M \setminus N = (M \cap N^c) \cup (M \cap M^c) = M \cap (N^c \cup M^c) = M \cap (N \cap M)^c$$
$$= (M \cap N)^c \cap M$$

2.) $(\mathbb{Z}, -)$ ist eine Gruppe.	○	⊗

Assoziativität von „$-$" gilt nicht, so ist etwa $(3-1)-2 = 0$
$$\neq$$
$$3-(1-2) = 4$$

$x - 0 = x$, $0 - x = -x$ $\to$ 0 ist kein neutrales Element

3.) Seien $(R, +_R, \cdot_R)$ und $(S, +_S, \cdot_S)$ Ringe und $f : (R, +_R) \to (S, +_S)$ ein Ringisomorphismus. Dann ist f^{-1} ein Ringhomomorphismus.	⊗	○

$\Downarrow$
f Hom. + bijektiv

$$f^{-1} : (S, +_S, \cdot_S) \to (R, +_R, \cdot_R)$$

z.B. $f^{-1}(s_1 +_S s_2) \underset{\Uparrow}{=} f^{-1}(f(r_1) +_S f(r_2)) \overset{f \text{ Hom.}}{=} f^{-1}(f(r_1 +_R r_2)) = r_1 +_S r_2 = f^{-1}(s_1) +_S f^{-1}(s_2)$

$\exists!\, r_1, r_2 \in R:$ $f(r_1) = s_1 \iff r_1 = f^{-1}(s_1)$
$f(r_2) = s_2 \iff r_2 = f^{-1}(s_2)$

f bijektiv $\Rightarrow$ f^{-1} bijektiv

4.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Dann ist jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.	⊗	○

Definition eines $\mathbb{K}$-Vektorraums: u.a. (V1) $(V, +)$ abelsche Gruppe

Erinnerung: abelsche Gruppe G ist Gruppe G mit kommutativer Verknüpfung $*$, d.h. $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$

5.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei B_V eine Basis von V. Für jede Basis B_U eines Untervektorraums $U \subseteq V$ gilt $B_U \subseteq B_V$.	○	⊗

Falsch, z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $U = \langle B_U \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \subsetneq V = \mathbb{R}^2$,

aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin B_V$

$$\langle B_U \rangle = U \subseteq V = \langle B_V \rangle$$

6.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. ○ ⊗

Z.B. $a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1}$ $\quad a_n + b_n = (-1)^n \cdot (1+(-1)) = 0$

$$a = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$
$$b = (1, -1, 1, -1, \dots) \quad \Rightarrow \quad a+b = (0,0,0,\dots)$$

7.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0$. ○ ⊗

Z.B. $a_n = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty, \quad b_n = -n^2 \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n = n - n^2 = n\cdot(1-n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$

8.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $0 \neq a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|a_n|} = 1$. ○ ⊗

Z.B. $a_n = -1 \xrightarrow{n\to\infty} -1$, jedoch $\frac{a_n}{|a_n|} = -1 \xrightarrow{n\to\infty} -1 \neq 1$

(b) Füllen Sie die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet. Für jeden richtig ausgefüllten Kasten gibt es 2 Punkte. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, für jeden leeren Kasten erhalten Sie einen Punkt und jeder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

1.) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch $\boxed{1, 2, 3}$.

A Dreiecksmatrix $\longrightarrow$ Eigenwerte sind gerade die Diagonaleinträge

charakt. Polynom

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\det(-B) = (-1)^n \det(B)$

$\det(\lambda I - A) = (-1)^n \cdot \det(A - \lambda I)$

2.) Für Supremum und Infimum der Menge $M := \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ gilt:

$\sup M = \boxed{\frac{3}{2}}$ und $\inf M = \boxed{-1}$.

$\frac{3}{2} \in M$, also $\max M = \sup M = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\inf M = -1 \notin M$, also hat M kein Minimum

$$M = \left\{(-1)^1 + \frac{1}{1}, (-1)^2 + \frac{1}{2}, (-1)^3 + \frac{1}{3}, \dots\right\}$$
$$= \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right\}$$

n gerade: $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ monoton fallend in $n \in 2\mathbb{N}$, $\xrightarrow{n\to\infty} 1$

n ungerade: $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$ — " — in $n\in 2\mathbb{N}+1$, $\to -1$

3.) Seien $(G,*_G)$, $(H,*_H)$ und $(K,*_K)$ Gruppen mit neutralen Elementen n_G, n_H und n_K. Weiterhin sei $f:(K,*_K)\to(H,*_H)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g:(G,*_G)\to(K,*_K)$ ein Gruppenisomorphismus.

Dann gilt: $f\circ g$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ Ker (f) = $\boxed{\{n_K\}}$.

$f\circ g: G\to H$

$f: K\to H$

$\mathrm{Ker}(f)\subseteq K$

$\mathrm{Bild}(f)\subseteq H$

$f\circ g$ ist injektiv $\overset{g\text{ Isom.}}{\Longleftrightarrow}$ f injektiv $\overset{f\text{ Hom.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}(f)=\{n_K\}$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{k\in K: f(k)=0_H\}$

$(f\circ g)(x) := f(g(x))$, $x\in G$

Falls g nur Hom., $(f\circ g)$ injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(g)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{n_K\}$ und g ist injektiv

4.) Seien $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ gegeben durch $z_1 := 1+i$ und $z_2 := 1-i$. Berechnen Sie

$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{i}$ und $\frac{z_2}{z_1} = \boxed{-i}$.

$a+ib$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+2i+\underbrace{i^2}_{=-1}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(7^{2n} - 4^{2n}\right) \bmod 33 = 0$?

$49 \bmod 33 = 16 \bmod 33$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $7^{2n} \bmod 33 = (7^2)^n \bmod 33 = 49^n \bmod 33 = 16^n \bmod 33$

$4^{2n} \bmod 33 = (4^2)^n \bmod 33 = 16^n \bmod 33$

$\Rightarrow \left(7^{2n} - 4^{2n}\right) \bmod 33 = (16^n - 16^n) \bmod 33 = 0 \bmod 33.$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

$= \left(7^{2n} \bmod 33 \underset{\mathbb{Z}_{33}}{-} 4^{2n} \bmod 33\right) \bmod 33 = \left(16^n \bmod 33 \underset{\mathbb{Z}_{33}}{-} 16^n \bmod 33\right) \bmod 33 = \ldots$

$7^{2n} \bmod 33 = \left(7^2 \bmod 33\right)^n \bmod 33$

$1 \bmod 33 - 14 \bmod 33 = -13 \bmod 33 = 20 \bmod 33$

3. Aufgabe (6 + 4 Punkte) (10 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$1+x \geqslant 0$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichung per vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie nun, dass für alle $x > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$.

Sei $x \geqslant -1$ fest gewählt.

(a) $A(n)$: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

Induktionsanfang $(n=0)$ $\quad (1+x)^0 = 1 \geqq 1+0\cdot x$ ist wahr.

Induktionshypothese: $A(n)$ gilt für ein $n\in\mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Dann gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\substack{\geqslant 0, \\ \text{da } x \geqslant -1}} \overset{\text{I.H.}}{\geqslant} (1+nx)\cdot(1+x) =$$

$(1+n\cdot x)\cdot 1 = 1+nx$

$(1+nx)\cdot x = x+nx^2$

$$= \underbrace{1+nx+x}_{=(n+1)x} + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1+(n+1)x,$$

d.h. $A(n+1)$ gilt.

(b) Für $x>0$ $\quad 0 < \frac{1}{\underbrace{(1+x)^n}_{>0}} \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{\underbrace{1+nx}_{\to\infty}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$(1+x)^n \geqslant 1+nx$

$\frac{1}{(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{1+nx}$

Mit dem Sandwichprinzip folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0.$

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne

$$\mathcal{M} := \{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$$

die Menge aller Untervektorräume von V, die M enthalten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Untervektorraum $\langle M\rangle$ durch $\{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$ gegeben ist. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\langle M\rangle = \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U.$$

<u>Idee:</u> Zeige 1.) $\bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ ist ein UVR von V

2.) $M \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$

3.) $\langle M\rangle = \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$

Zu 1.) <u>$\bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ ist ein UVR:</u>

Klar: $\emptyset \subsetneq M \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ wird aus 2.) folgen. (Alternativ: $0 \in \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$)

(U1) Für alle $u,v \in \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ ist $u,v \in U$ für jedes $U\in\mathcal{M}$ $\overset{U\in\mathcal{M}}{\underset{\text{UVR}}{\Longrightarrow}}$ $u+v \in U$ für jedes $U\in\mathcal{M}$

$\Longrightarrow$ $u+v \in \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$

(U2) Für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ und $u\in \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ ist $u\in U$ für jedes $U\in\mathcal{M}$ $\overset{U\in\mathcal{M}}{\underset{\text{UVR}}{\Longrightarrow}}$ $\lambda u \in U$ für alle $U\in\mathcal{M}$

$\Longrightarrow$ $\lambda u \in \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$.

Zu 2.) Da $M\subseteq U$ für alle $U\in\mathcal{M}$ gilt $M \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$.

Zu 3.) Somit ist $\bigcap_{U\in\mathcal{M}} U \in \mathcal{M}$ und da $\bigcap_{U\in\mathcal{M}} U \subseteq U'$ für alle $U'\in\mathcal{M}$, folgt, dass

$\bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$ der kleinste UVR von V ist, der M enthält, also gilt nach Def. $\langle M\rangle = \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U$. $\square$

5. Aufgabe (3 + 3 Punkte) (6 Punkte)

Entscheiden Sie bei den beiden nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten je einen Punkt für die richtige Antwort und 2 Punkte für die Begründung.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Dann gilt $|\det(A)| = 1$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls $A \neq 0$ ist, so gilt $A^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierbei bezeichne 0 die Nullmatrix.

(a) Wahr, denn ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so gilt $AA^T = A^TA = I_n$, also

A orthogonal: A invertierbar mit $A^{-1} = A^T$.

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^T) = \det(A) \cdot \underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)} = \det(A)^2$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(A)| = \sqrt{\det(A)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Bsp: $n=1$: $A=-1$, $A^T = -1 = A^{-1}$, $\det(A) = -1$

(b) Falsch, denn betrachte etwa $n=2$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jedoch $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Es bezeichne $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $(x|By) = (B^T x|y)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

alle EW str. positiv

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$A = A^T$

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

(SP1) Positive Definitheit:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad (x|x)_A \overset{\text{Def}}{=} (x|Ax) \geq 0 \quad \text{und}$$

$$(x|x)_A = (x|Ax) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } x = 0.$$

(SP2) Symmetrie:

$$\overset{\text{Sym.}}{\underset{(\cdot|\cdot)}{=}} (Ay|x) \overset{\text{VL}}{=} (y|A^T x) \overset{\text{Sym.}}{\underset{von\,A}{=}} (y|Ax)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad (x|y)_A \overset{\text{Def}}{=} (x|Ay) \overset{\text{VL}}{=} (A^T x|y) \overset{A\text{ Sym.}}{\underset{A=A^T}{=}} (Ax|y)$$

$$\overset{\text{Sym.}}{\underset{\text{von }(\cdot|\cdot)}{=}} (y|Ax) \overset{\text{Def}}{=} (y|x)_A.$$

(SP3) Linearität im 2. Argument:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad (x|\lambda y)_A \overset{\text{Def}}{=} (x|A(\lambda y)) \overset{y\mapsto Ay}{\underset{\text{linear}}{=}} (x|\lambda(Ay))$$

„Ziel“

$$= \lambda (x|Ay) \overset{\text{Def}}{=} \lambda (x|y)_A.$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: \quad (x|y+z)_A \overset{\text{Def}}{=} (x|A(y+z)) \overset{y\mapsto Ay}{\underset{\text{linear}}{=}} (x|Ay + Az)$$

$$= (x|Ay) + (x|Az) \overset{\text{Def}}{=} (x|y)_A + (x|z)_A.$$

7. Aufgabe (2 + 5 + 6 + 4 + 3 + 3 Punkte) (23 Punkte)

Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D_α, zu der A_α ähnlich ist.

(c) Bestimmen Sie Matrizen S und S^{-1}, sodass gilt: $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S$.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1.) A_α ist positiv definit?

2.) A_α ist negativ definit?

3.) A_α ist indefinit?

(e) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}}}^{A_\alpha} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1-\alpha^2} \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Eigenwerte von B_α an. Es wird kein Rechenweg benötigt.

(f) Überlegen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$A_\alpha \text{ ist invertierbar.} \Leftrightarrow B_\alpha \text{ ist invertierbar.}$$

(a) A_α ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\det(A_\alpha) \neq 0$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} 1/2 & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) = \alpha\cdot(1-\alpha)$$

Also ist $\det(A_\alpha) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ gilt.

Damit ist A_α invertierbar, genau falls $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

(b) D_α ist Diagonalmatrix mit Eigenwerten von A_α als Diagonaleinträgen.

Charakteristisches Polynom: $\det(\lambda I - A_\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha \\ \frac{1}{2} - \alpha & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2$

$$= \left(\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\right)\cdot\left(\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)-\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\right) = (\lambda-\alpha)\left(\lambda-(1-\alpha)\right)$$

$\Longrightarrow$ Eigenwerte von A_α sind gegeben durch $\lambda=\alpha$ und $\lambda=1-\alpha$.

$\Rightarrow$ A_α ist diagonalähnlich zu Diagonalmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

(c) Gesucht: $S\in\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\quad A_\alpha = \underset{\substack{\uparrow\\ S^{-1}:\ \text{Matrix bestehend aus Eigenbasis von } \mathbb{R}^2.}}{S^{-1}} D_\alpha S \iff S A_\alpha S^{-1} = D_\alpha$

Bestimme Eigenräume $\underset{\substack{\shortparallel\\ \underline{\mathrm{Ker}(A_\alpha-\alpha I)}}}{\mathrm{Eig}(A_\alpha,\alpha)}$ und $\underset{\substack{\shortparallel\\ \mathrm{Ker}(A_\alpha-(1-\alpha)I)}}{\mathrm{Eig}(A_\alpha,1-\alpha)}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-\alpha & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\alpha & 0 \end{array}\right)}^{A_\alpha-\alpha I} \Big]+ \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-\alpha & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \frac{1-2\alpha}{2} \ \xleftarrow{\text{falls } \alpha\neq\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Falls $\underline{\alpha\neq\frac{1}{2}}$ gilt $\qquad \mathrm{Eig}(A_\alpha,\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-(1-\alpha) & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-(1-\alpha) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha-\frac{1}{2} & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha-\frac{1}{2} & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Big]- \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha-\frac{1}{2} & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Big| : \left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)$$

falls $\alpha\neq\frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Falls $\alpha \neq \frac{1}{2}$, gilt $\quad \mathrm{Eig}(A_\alpha, 1-\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ gilt: $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \\ & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{EV zu } \alpha & \text{EV zu } 1-\alpha \end{array}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot(-1) - 1\cdot 1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Im Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt $\quad A_{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d.h. wähle $S = S^{-1} = \underline{I}$, $D_{1/2} = A_{1/2}$.

(d)

1.) A_α ist positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von A_α sind strikt positiv

$\overset{(b)}{\iff}$ $\alpha > 0$ und $1-\alpha > 0$

$\iff$ $0 < \alpha < 1$

2.) A_α ist negativ definit $\iff$ alle Eigenwerte von A_α sind strikt negativ

$\overset{(b)}{\iff}$ $\alpha < 0$ und $1-\alpha < 0$

Dies ist nie der Fall.

3.) A_α ist indefinit $\iff$ A_α hat sowohl strikt positive als auch str. negativen Eigenwert

$\iff$ $[\alpha > 0$ und $1-\alpha < 0]$ oder $[\alpha < 0$ und $1-\alpha > 0]$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 \quad \text{oder} \quad \alpha < 0.$$

e) $$B_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{A_\alpha} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \boxed{1-\alpha^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ Eigenwerte von B_α sind Eigenwerte von A_α (d.h. $\alpha, 1-\alpha$) sowie $1-\alpha^2$.

$$\det(\lambda I_3 - B_\alpha) = \begin{vmatrix} \boxed{\lambda I_2 - A_\alpha} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \lambda-(1-\alpha^2) \end{vmatrix} = \left(\lambda - (1-\alpha^2)\right) \cdot \det(\lambda I_2 - A_\alpha)$$

Entw. nach 3. Spalte

f) A_α ist invertierbar $\overset{\text{Teil (c)}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

B_α ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von B_α

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \neq 0$ und $1-\alpha \neq 0$ und $1-\alpha^2 \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

$\Longrightarrow$ Für $\alpha = -1$ ist B_{-1} nicht invertierbar, jedoch A_{-1} ist invertierbar. Die Aussage ist falsch.

Für Matrix $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sind äquivalent

$\underbrace{C \text{ invertierbar}}_{\text{d.h. } C \text{ bijektiv}}$ $\Longleftrightarrow$ C surjektiv $\Longleftrightarrow$ C injektiv

$\Updownarrow$

$\ker(C) = \{0\}$

$\Updownarrow$

$\lambda = 0$ ist keine Nullstelle des charakt. Polyn. $p_C(\lambda)$ $\Longleftrightarrow$ 0 ist <u>kein</u> Eigenwert von C