Klausur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2017**
Prof. Dr. Thomas Streicher **07.09.2017**

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
mögliche Punkte	8	10	25	6	16	20	85	
erreichte Punkte								

Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Druckschrift** aus. Versehen Sie **alle Blätter** mit **Ihrem Namen** und **Ihrer Matrikelnummer**.

Sie benötigen kein eigenes Papier. Sollte der Platz unter den Aufgaben Ihnen nicht genügen, können Sie die Seiten am Ende der Klausur verwenden. Kennzeichnen Sie deutlich, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Als Hilfsmittel ist lediglich **ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** bzw. **zwei DIN A4 Seiten** zugelassen.

Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Ein Verstoß hiergegen wird als Täuschungsversuch gewertet.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Bedenken Sie: Wo nicht anders explizit angegeben, sind **alle Ergebnisse zu begründen**, etwa durch eine Rechnung. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (Teilbarkeit) (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $14^{22} - 2^{44}$ von 10 geteilt wird. (4 P.)

(b) Bestimmen Sie zwei ganze Zahlen $k, m \in \mathbb{Z}$, sodass $61k + 16m = 1$ gilt. (4 P.)

Es gilt

a.) $14^{22} - 2^{44} = 2^{22} \cdot (7^{22} - 2^{22})$. Wir zeigen das $7^{22} - 2^{22}$ durch 5 teilbar mittels Modulorechnung. Es gilt

$7^{22} \bmod 5 = (7 \bmod 5)^{22} \bmod 5 = 2^{22} \bmod 5$

Also gilt $7^{22} - 2^{22} = 5 \cdot k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Also gilt $(14^{22} - 2^{44} = 2^{22}(7^{22} - 2^{22}) = 2 \cdot 5k\, 2^{21}$ 4

$= 10 \cdot (k \cdot 2^{21})$.

b.)

m	a_m	b_m	q_m	k_m	l_m
0	61	16	3	5	$-4-5\cdot 3 = -19$
1	16	13	1	-4	$1-(-4)1 = 5$
2	13	3	4	1	$0-1\cdot 4 = -4$
3	3	1	3	0	1
4	1	0		1	0

3

Also gilt $61 \cdot 5 + 16 \cdot (-19) = ggT(16, 61) = 1$ 1

$\Rightarrow k = 5,\ m = -19$

2. Aufgabe (Vollständige Induktion) (10 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Hinweis: Halten Sie den Formalismus der vollständigen Induktion ein.

Induktionsanfag

Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$ 2

Also gilt die Aussage für $n=1$

Induktionsvoraussetzung (IV)

1

Für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage für $n+1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{1}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{(IV)\ 1}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1}$$ 1

1

$$= \frac{1 + n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

3

3. Aufgabe (Lineare Algebra) (25 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix. (13 P.)

(b) Geben Sie den Kern, eine Basis des Bilds und den Rang der Matrix an. (3 P.)

(c) Ist die Matrix invertierbar? (1 P.)

(d) Ist die Matrix diagonalähnlich? (2 P.)
Wenn ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D an, zu der die Matrix A ähnlich ist.

(e) Untersuchen Sie die Matrix auf Definitheit. (2 P.)

(f) Geben Sie die Eigenwerte von A^2 an. (1 P.)

(g) Bestimmen Sie die **Anzahl** der Lösungen des linearen Gleichungssystems (3 P.)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

a.) Bestimme das charakteristische Polynom.

$$P_A(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 2 & -t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)(-t)(1-t) + 4 + 4 - (-t) - 4(1-t) - 4(1-t)$$

Bestimme die Nullstellen des char. Polynoms.

$$0 = P_A(\lambda) = -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + \lambda - 8 + 8\lambda.$$

1

$$= \lambda(-1 + 2\lambda - \lambda^2 + 1 + 8)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

2

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2. \qquad 3$$

$$E_\lambda(A) = \{ x : (A - \lambda I)x = 0 \} \qquad 1$$

$\lambda_0 = 0$

$$(A \mid 0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{II-2I \\ III-I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{I+\frac{1}{2}II \\ -\frac{1}{4}II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1 Nullzeile $\hat{=}$ 1 Freiheitsgrad

Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = 0$, $x_1 = -s$. Also

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \qquad 2$$

$$(A - 4I \mid 0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ II-2III \\ I+III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} I+\frac{1}{4}II \\ -\frac{1}{8}II \\ II+III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1 Nullzeile $\hat{=}$ 1. Freiheitsgrad

Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = s$, $x_1 = s$. Also

$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \qquad 2$$

$$\left(A + 2I \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} \\ II-2III \\ I-3III\end{matrix}\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & -4 & -8\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} I+II \\ -\frac{1}{2}II \\ 2II-III\end{matrix}\left(\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right).$$ 1 Nullzeile $\hat{=}$ 1 Freiheitsgrad.

Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = -2s$, $x_1 = s$. Also

$E_{-2}(A) = \left\{\begin{pmatrix}s\\-2s\\s\end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$. 2

b.) Den Kern haben wir bereits in a.) berechnet.
Es gilt $\ker(A) = E_0(A) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$. 1

Weiter gilt $\text{Bild}(A) = \langle\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}\rangle$

$= \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle = \left\langle\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\}}_{=:\,\mathcal{B}}\right\rangle$.

$\mathcal{B}$ bildet eine Basis von Bild(A), da $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ offensichtlich linear unabhängig sind. Es gilt also $\text{rang}(A) = 2$. 2

c.) Nein, da 0 EW gilt $\det(A) = 0$. 1

d.) Ja, da A drei verschiedene EW ist A diagonalisierbar 1 und ist ähnlich zu

$D = \begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. 1

e.) A ist indefinit, da es positive <u>und</u> negative EW hat. 2

f.) Die EW von A^2 sind $\lambda_0^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2$ also $0, 16, 4$. 1

g.) Damit $Ax = \begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ lösbar ist muss $\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ im Bild von A liegen. Es gilt

$\mu_1 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ liefert $\mu_1 = \frac{1}{2}$ und somit $\mu_2 = \frac{1}{4}$. Dann gilt $\alpha = \mu_1 + 2\mu_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Also ist das LGS nur für $\alpha = 1$ lösbar und es gilt

$A \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Weiter gilt $\left\{x : Ax = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\0\end{pmatrix} + \ker(A)$

Also hat $Ax = \begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich}\\\text{keine}\end{matrix}\right\}$ Lösungen für $\left\{\begin{matrix}\alpha = 1\\\alpha \neq 1\end{matrix}\right\}$. 3

4. Aufgabe (Äquivalenzklassen) (6 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n. Wir betrachten zwei Elemente $v_0, v_1 \in V$ mit $v_0 \neq v_1$.

Bestimmen Sie den kleinsten Untervektorraum $U \subset V$, sodass

$$v_0 \sim_U v_1.$$

Hierbei ist insbesondere zu begründen,

(i) dass es sich bei Ihrer Wahl von U um einen Untervektorraum von V handelt,

(ii) dass mit diesem U tatsächlich $v_0 \sim_U v_1$ gilt und

(iii) warum es sich bei diesem U um den *kleinstmöglichen* Untervektorraum handelt.

Geben Sie außerdem die Dimension von V/U an.

Erinnerung: Nach Definition gilt $a \sim_U b$, falls $a - b \in U$.

Wähle $U = \langle\{v_0 - v_1\}\rangle$ 2

(i) Der Spann von Vektoren ist immer ein Untervektorraum. 1

(ii) Offensichtlich gilt $v_0 - v_1 \in U$. Also $v_0 \sim_U v_1$ 1

(iii) Sei U' ein UVR von V, sodass $v_0 \sim_{U'} v_1$. Dann gilt $v_0 - v_1 \in U'$. Also auch

$U = \langle\{v_0 - v_1\}\rangle \subseteq \langle U' \rangle = U'$. Damit ist U der kleinstmögliche UVR.

Nach der Dimensionsformel gilt für die Projektion $\pi_U : V \to U$, dass $n = rg(\pi_U) + \dim(\ker(\pi_U)) = 1 + \dim(\ker(\pi_U))$.

Also $\dim(V/U) = \dim(\ker(\pi_U)) = n-1$ 1

5. Aufgabe (Beweisen und Widerlegen) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Seien $\phi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X, Y und Z. Sind die Abbildungen ψ surjektiv und ϕ injektiv, dann ist $\psi \circ \phi$ bijektiv.

(b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Ist $f : G \to G$ mit $f(g) = g * g$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist die Gruppe $(G, *)$ abelsch.

(c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ und davon induzierter Norm $||\cdot||$. Sind zwei Elemente $v, w \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig, so gilt stets

$$|(v|w)| = ||v|| \cdot ||w||.$$

(d) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen, so gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit I bezeichnen wir wie üblich die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a.) falsch. 1 $X = \{0\}$, $Y = Z = \{0, 1\}$, $\phi(0) = 0$.
$\psi(x) = x$. Dann ist $\psi \circ \phi(0) = 0 \neq 1$, also 3
ist $\psi \circ \phi$ nicht surjektiv also auch nicht bijektiv.

b.) wahr 1 Seien $a, b \in G$. Es

$$a * b = a^{-1} * a * a * b * b * b^{-1} \overset{\text{Def } f}{=} a^{-1} * f(a) * f(b) * b^{-1}$$

3

$$\overset{f \text{ Gr-Hom.}}{=} a^{-1} * f(a*b) * b^{-1} \underset{\text{Def } f}{=} a^{-1} * (a*b) * (a*b) * b^{-1} = b * a$$

c.) wahr. 1 Da v und w linear abhängig sind gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda v$. Dann

$$|(v|w)| = |(v|\lambda v)| = |\lambda|\,|(v|v)| = |\lambda| \cdot \|v\| \cdot \|v\|$$
$$= \|v\|\,\|\lambda v\| = \|v\|\,\|w\|.$$ 3

d.) wahr. 1 Da A und B ähnlich sind existiert $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $A = S^{-1}BS$. Dann

$$\det(A - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda S^{-1}S)$$
$$= \det(S^{-1}(B - \lambda I)S)$$
$$= \det(S^{-1})\det(B - \lambda I)\det(S)$$
$$= \det(S^{-1})\det(S)\det(B - \lambda I)$$
$$= \det(S^{-1}S)\det(B - \lambda I)$$
$$= \det(I)\det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$ 3

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.

Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

		wahr	falsch
(a)	Die Aussagen $(\neg(p \implies q))$ und $(p \wedge \neg q)$ sind äquivalent.	☒	☐
(b)	Für zwei beliebige Mengen A und B gilt: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \setminus (A \cup B)$. $A = \{1\}$, $B = \{0\}$	☐	☒
(c)	Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist der Realteil von $\frac{(z-\overline{z})\overline{z}}{\overline{z}^2 \cdot z}$ gleich Null.	☒	☐
(d)	In $\mathbb{R}^6$ existiert ein vier-dimensionaler linearer Teilraum $U \subset \mathbb{R}^6$, sodass die Dimension des Faktorraums $\mathbb{R}^6/U$ zwei ist.	☒	☐
(e)	Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist lösbar.	☒	☐
(f)	Der Abstand der Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ zum Koordinatenursprung beträgt 1.	☐	☒
(g)	Sind V und W K-Vektorräume, so ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein K-Vektorraum.	☒	☐
(h)	Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det(A)$.	☐	☒
(i)	Es existiert eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Eigenwerten $0, 1$ und i.	☐	☒
(j)	Gilt $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 0$, so ist λ kein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	☒	☐

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λ EW von $A \Rightarrow \overline{\lambda}$ EW von A

j.) $\Rightarrow \ker(A - \lambda I) = \{0\}$ und damit $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \neq 0$

$1 = ($

$$\ker(B) \neq 0 \Leftrightarrow B \text{ inv}$$

$$= 0 \Leftrightarrow B \text{ nicht inv.}$$

$$g = \overline{a}$$

$$h = \overline{b}$$