# Mathe 2: Klausur # 3



## 1. Aufgabe

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+10}$ ~~konvergiert~~

$= \sum_{m=10}^{\infty} (-1)^{m-10} x^m$ konvergiert auf $(-1,1)$,

denn $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|(-1)^{m-10}|} = \lim_{m\to\infty} 1 = 1$.

Für $x = \pm 1$ ist $\left((-1)^{m-10} (\pm 1)^m\right)_{m\geq 10}$ keine Nullfolge, sodass nur auf $(-1,1)$ Konvergenz vorliegt.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{a_n} (x+1)^n$ hat nach Hadamard den Konv.radius $r = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}} = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{2}$.

Somit konvergiert die Reihe auf

$\left(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, weil $-1 = x_0$ der Entwicklungspunkt ist. Für $x = -\frac{1}{2}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die harm. Reihe (also divergent) und für $x = -\frac{3}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ als alternierende harmonische Reihe konvergent. Also:

Nur auf $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ konvergent.

(c) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)}_{=:c_n} \cdot x^n .$$

Offenbar gilt $c_n \xrightarrow{n\to\infty} e-1$, so dass

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!} + c_n}{c_n} = \frac{1}{(n+1)!\cdot c_n} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

weil $(c_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist. Also ist nach Satz 5.9.10. der Konv.radius $r=1$.

Für $x=\pm 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot(\pm 1)^n$ divergent,

weil $(c_n\cdot(\pm 1)^n)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge ist.

Also konvergiert die Reihe auf $(-1,1)$.

Alternativ setzt man

$$a_m := \frac{1}{m!} \text{ und } b_m := 1 \text{ und argumentiert}$$

wie im Nachtrag zu Mathe 2 Klausur #2 A1c.

## 2. Aufgabe

(a) $$a_n = \frac{n^3 + n^2\sqrt{n} + 1}{5n^3 - 2n^2 - 2n - 1} = \frac{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(5 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \xrightarrow[GWS]{n\to\infty} \frac{1}{5}, \text{ denn}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

(b) $$b_n = \frac{n!}{2^n} \overset{n\geq 4}{=} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\overset{n\geq 4}{=} \frac{n}{2} \cdot \underbrace{\frac{(n-1)}{2}}_{\geq 1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{n}{4}$$

für alle $n \geq 4$. Also ist $b_n$ unbeschränkt und divergiert.

Alternativ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. Also ist $\frac{n!}{2^n}$ unbeschränkt.

(c) $c_{n+1} = c_n^2 + \frac{1}{4}$, $c_0 = \frac{1}{4}$

Induktionsbeweis, dass $c_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Anfang $n=0$: $c_0 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ ✓

Annahme: $c_n \leq \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. (*)

Schritt $n \to n+1$:

$$c_{n+1} = c_n^2 + \frac{1}{4} \underset{\substack{x \mapsto x^2 \\ \text{monoton} \\ \text{auf } [0,\infty) \\ \text{und } (*)}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$\Rightarrow$ $c_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbeweis, dass $c_{n+1} \geq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Anfang $n=0$: $c_1 = c_0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + c_0 > c_0$. ✓

Annahme: $c_{n+1} \geq c_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Schritt $n \to n+1$:

$$c_{n+2} = c_{n+1}^2 + \frac{1}{4} \overset{c_{n+1} \geq c_n}{\geq} c_n^2 + \frac{1}{4} = c_{n+1} \checkmark$$

Als monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Sei $x$ der Grenzwert von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. $\lim_{n \to \infty} c_n = x$.

Dann gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} c_n^2 + \frac{1}{4} \overset{GWS}{=} x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $x = \frac{1}{2}$ der Grenzwert.

## 3. Aufgabe

(a1) Argumente wie in Klausur aus SS2015. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0$$

$$= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

(a2) $$\partial_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - y^2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin\left(\frac{1}{h}\right) \cancel{*} - \frac{y^2}{h}\right)$$

existiert nicht, weil $\lim\limits_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ nicht

existiert oder $\frac{-y^2}{h}$ für $h \to 0$ unbeschränkt

ist.

$$\partial_y f(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \text{ existiert.}$$

(b) Notwendig: $\nabla g(x,y) \overset{!}{=} (0 \quad 0)$

$\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad (2x \quad -2y)$

$\Rightarrow x = 0 = y$, d.h. $(0,0)$ ist einziger krit. Punkt.

Hinreichend: $Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit

für alle $(x,y)$, da EW $2 > 0$ und EW $-2 < 0$.

Also liegt kein Extremum in $(0,0)$ vor.

Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ist offen, sodass keine weiteren Extrema existieren können.

## 4. Aufgabe

(a) Auf D ist f als Summe 2-mal stetig partiell diff-barer Funktionen eine solche Funktion.

Notwendig: Es

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= \left( -\frac{1}{x^2}+1 \quad -\frac{1}{y^2}+1 \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \left( 0 \quad 0 \right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{x^2} \text{ und } 1 = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 \text{ und } y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1 \text{ und } y = \pm 1$$

$\stackrel{x>0,\, y>0}{\Rightarrow}$ $x=1$ und $y=1$, d.h. $p=(1,1)$ ist einziger krit. Punkt

Hinreichend: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$ und

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist wegen der EW $2>0$ positiv definit, so dass in $(1,1)=p$ ein lokales Minimum vorliegt.

Es ist $f(1,1) = 1+1+1+1 = 4$.

(b) Ja, $(1,1)=p$ ist sogar globales Minimum. Das liegt daran, dass $f(x,y) \to +\infty$ für $x\to 0$, $y \to 0$, $x \to +\infty$ oder $y \to +\infty$ gilt.

## 5. Aufgabe

Siehe Klausur #2.

## 6. Aufgabe

(a) Falsch: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2k}=0$ und $a_{2k+1}=2k+1$

hat die konvergente Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert 0, d.h. 0 ist Häufungswert. Dies ist der einzige Häufungswert, denn sobald eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Glieder der Form $a_{2k+1}$ umfasst, ist sie unbeschränkt. Jedoch konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht, da unbeschränkt.

(b) Falsch: $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n+1} > 0 = a_n$,

aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Wahr: Satz 5.3.5.

(d) Falsch: Wähle $a_n = b_n = n$, dann ist

$(a_n) \in O(b_n)$, weil $\frac{a_n}{b_n} = 1$ beschränkt ist.

Aber $(b_n) \notin o(a_n)$, weil $\frac{b_n}{a_n} = 1$ keine Nullfolge ist.

# 7. Aufgabe

(a) <u>Achtung:</u> Schreibt man $y'(t) = h(y(t)) \cdot g(t)$

mit $h(\eta) := \eta$ und $g(\tau) := \cos(\tau) \cdot \sin(\tau)$, so

liegt die DGL in getrennten Veränderlichen vor.

Jedoch gilt $h(y(0)) = h(0) = 0$, so dass man

den Satz 7.2.2. NICHT ~~zur~~ für Eindeutigkeit

der Lösung zitieren kann.

Also: Zeigen, dass $f(\tau, \eta) := \eta \cdot \cos(\tau) \cdot \sin(\tau)$

Lipschitz-stetig in $\eta$ ist. Sei $\tau \in I$ und seien

$\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|f(\tau, \eta_1) - f(\tau, \eta_2)|$$

$$= |\eta_1 \cdot \cos(\tau) \cdot \sin(\tau) - \eta_2 \cdot \cos(\tau) \cdot \sin(\tau)|$$

$$= |(\eta_1 - \eta_2) \cdot \cos(\tau) \cdot \sin(\tau)|$$

$$= |\eta_1 - \eta_2| \cdot \underbrace{|\cos(\tau)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin(\tau)|}_{\leq 1} \leq |\eta_1 - \eta_2| \cdot 1.$$

Also ist $f$ Lipschitz-stetig bzgl. $\eta$ mit $L = 1$.

Nach Picard-Lindelöf ist das AWP eindeutig

lösbar.

(b) Schmiermethode:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 \cdot y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\eta} d\eta = \tau^2 d\tau$$

$$\Rightarrow \int_{y(0)=1}^{y(t)} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_0^t \tau^2 d\tau = \left[\tau^3/3\right]_0^t = \frac{t^3}{3}$$

$$\shortparallel$$

$$\left[\ln(\eta)\right]_1^{y(t)}$$

$$\shortparallel$$

$$\ln(y(t)) - \ln(1) = \ln(y(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{t^3/3}}$$

Probe: $y(0) = e^0 = 1$ ✓

$$y'(t) = 3 \cdot \frac{t^2}{3} \cdot e^{t^3/3} = t^2 \cdot e^{t^3/3} = t^2 \cdot y(t) \checkmark$$

(c) Berechnen $e^{tA}$. Dazu brauchen wir $A^n$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^n \quad \text{für } n \geq 3 =: n_0.$$

Also ist

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

$$= \frac{t^0 A^0}{0!} + \frac{t^1 \cdot A^1}{1!} + \frac{t^2 \cdot A^2}{2!}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 7.3.11. ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+\frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A \cdot y(t)$.

## 8. Aufgabe

$$y'(t) - t \cdot y(t) = -e^{t^2/2}, \quad y(0) = 0$$

Sei $a(t) := -t$ und $b(t) := -e^{t^2/2}$

Weiter sei $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \left[-s^2/2\right]_0^t = -\frac{t^2}{2}$.

Nach Variation-der-Konstanten-Formel (Satz 7.2.8.) gilt:

$$y(t) = e^{-A(t)} \cdot \underbrace{y(0)}_{=0} + e^{-A(t)} \cdot \int_0^t b(s) e^{A(s)} \, ds$$

$$= e^{t^2/2} \cdot \int_0^t -e^{s^2/2} \cdot e^{-s^2/2} \, ds$$

$$= e^{t^2/2} \int_0^t -e^0 \, ds = -t \cdot e^{t^2/2}$$

Probe (für mich, nicht notwendig):

$$y'(t) = -e^{t^2/2} - t^2 e^{t^2/2}$$

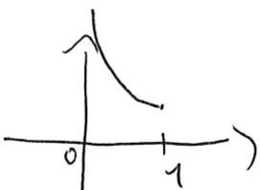
$$= -e^{t^2/2} + t \cdot y(t) \checkmark$$

9. Aufgabe

(a) Falsch: $A = [0,1]$ hat als Abschluss $[0,1]$ und als Inneres $(0,1)$

(b) Wahr: Satz 6.7.10.

(c) Falsch: $f(x) := \frac{1}{x}$




(d) Falsch: $f(x) := |x|$

(e) Wahr

(f) Falsch: $f(x) = x^3$

(g) Wahr: Sei $\Phi$ Stammfunktion von f, d.h.

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dann ist $\Phi$ diff.bar mit

$\Phi'(x) = f(x)$. Nach MWS existiert $c \in [a,b]$

mit $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(c) \cdot (b-a)$

Eigen-
$\overset{\text{Eigenschaften von } \Phi}{\Leftarrow}$ $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$
schaften
von $\Phi$

(h) Falsch: Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x=1$.

(i) Wahr: Bsp. 5.5.8.

(j) Wahr: $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ offen