# Klausur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Thomas Streicher**
Davorin Lešnik, Daniel Körnlein

**WS 2014/2015**
**12.03.2015**

Nachname: ..................................... | Matrikelnummer: ................................

Vorname: ...................................... | Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen ☐

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 60 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | |

## Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Klausurdauer: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **12 Seiten** (5 Aufgaben). Bitte überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit.
- Erlaubte Hilfsmittel sind beliebige schriftliche Unterlagen.
- Sie dürfen zusätzliche Blätter als Schmierpapier verwenden, aber schreiben Sie die Lösungen **direkt auf die Klausur**. Falls Sie mehr Platz brauchen, schreiben sie auf dem letzten Blatt weiter. Wenn Sie dennoch mehr Platz brauchen, verwenden Sie eigene Blätter und lassen Sie diese von einer Aufsicht an die Klausur **tackern**.
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgabe, geben Sie **nicht nur** Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.
- Es gibt Teilpunkte für teilweise korrekte Lösungen.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.

## 1. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $a := 245$ und $b := 28$, sowie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(a, b) = ka + \ell b$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie: es gibt keine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$, für die $3x \equiv 1 \pmod 6$ gilt.

| Name: | Matrikelnummer: |
|---|---|

## 2. Aufgabe (22 Punkte)

Es seien $a := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Matrix $A := a \cdot a^T$.

(b) Bestimmen Sie $\ker(A)$ und seine Dimension.

(c) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\mathrm{Rang}(A)$.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = a$ und die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$.

(e) Ist $A$

(i) orthogonal,

(ii) symmetrisch,

(iii) positiv semidefinit?

Begründen Sie Ihre Antworte.

| Name: | Matrikelnummer: |
| --- | --- |

## 3. Aufgabe (12 Punkte)

Es sei $g$ die Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung und den Punkt $(1, 0, -3)$ enthält. Es sei $E$ die Ebene, die orthogonal zu $g$ ist und den Ursprung enthält.

(a) Geben Sie die Parameterdarstellung von $g$ und die Parameterdarstellung und die Hesse-Normalform von $E$ an.

(b) Berechnen Sie den Abstand des Punkts $(0, 0, 1)$ zur Ebene $E$.

(c) Es sei $\Phi$ die Spiegelung bezüglich $g$. Berechnen Sie die Matrix $A$, die $\Phi$ in der Standardbasis darstellt.

| Name: | Matrikelnummer: |
| --- | --- |

## 4. Aufgabe (10 Punkte)

Welche der folgenden Folgen sind konvergent, welche divergent? Beweisen Sie Ihre Antwort und im Falle der Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n := \dfrac{n^3 + n^2\sqrt{n} + 1}{5n^3 - 2n^2 - 2n - 1}$

(b) $b_n := (1 - i)^n$

(c) $c_0 := \frac{2}{3}, \quad c_{n+1} := 1 + \frac{2}{3} \cdot c_n$

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $(c_n)$ von oben durch 3 beschränkt ist und dass $(c_n)$ monoton wächst.

| Name: | Matrikelnummer: |
|---|---|

## 5. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden 12 Aussagen wahr bzw. falsch sind. Für jede richtige Antwort wird 1 Punkt vergeben.

Eine Begründung wird in dieser Aufgabe **nicht** verlangt.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichen Sie **deutlich**, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(a) Die Implikation ist kommutativ und assoziativ. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Die Menge $\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x \leq x^2 \leq 3\right\}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{Q}$. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Die Verkettung von zwei bijektiven Funktionen ist wieder bijektiv. ☐ wahr ☐ falsch

(d) $\mathbb{Z}_{41}$ ist ein Körper. ☐ wahr ☐ falsch

(e) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen normierten Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

(f) Der Vektorraum $\mathbb{R}^1$ besitzt ein Skalarprodukt. ☐ wahr ☐ falsch

(g) Für je zwei $K$-Vektoräume $V$ und $V'$ existieren Unterräume $U \subseteq V$ und $U' \subseteq V'$, sodass die Faktorräume $V/U$ und $V'/U'$ isomorph sind. ☐ wahr ☐ falsch

(h) Für je zwei invertierbare Matrizen $A$, $B$ gleicher Dimension gilt $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$. ☐ wahr ☐ falsch

(i) Für jede orthogonale Matrix $A$ gilt $\det(A) \neq 0$. ☐ wahr ☐ falsch

(j) Für jede Algebra $A$ über einer Signatur $\Sigma$ existiert genau ein $\Sigma$-Homomorphismus $T(\Sigma) \to A$. ☐ wahr ☐ falsch

(k) Jede divergente Folge ist unbeschränkt. ☐ wahr ☐ falsch

(l) Wenn $(a_n) \in O(b_n)$, dann auch $(b_n) \in O(a_n)$. ☐ wahr ☐ falsch

| Name: | Matrikelnummer: |
|---|---|

*(Leere Seite für etwaige weitere Lösungsnotizen — kennzeichnen Sie, zu welcher Aufgabe sie gehören!)*

*(Leere Seite für etwaige weitere Lösungsnotizen — kennzeichnen Sie, zu welcher Aufgabe sie gehören!)*