Aufgabe 1

Mathe 1 SoSe 2018

Wir benutzen die Modulo-Rechnung und zeigen

$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3$. Es gilt

$$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i\right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \underbrace{(10 \bmod 3)^i}_{=1}\right) \bmod 3$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3.$$

Also gilt $3 \mid n \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3 = n \bmod 3 = 0 \Leftrightarrow n \mid \sum_{i=0}^{k} a_i$.

Aufgabe 2

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für $n=0$ ist die Aussage trivial, da $M \neq \emptyset$ und $N = \emptyset$

Induktionsanfang

Sei $n=1$. Dann hat M mindestens zwei Element $m_1 \neq m_2$. Es gilt $f(m_1) = f(m_2)$, da N nur ein Element hat. Also ist f nicht injektiv.

Induktionsvorraussetung (IV)

Für ein beliebiges, fixes n gilt die Aussage bereits.

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage nun für $n+1$. Dann gilt $N = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

1. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| = 0$

Dann ist $f: M \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Funktion und nach (IV) nicht injektiv

2. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| \geq 2$

Dann gilt es zwei verschiedene $m_1, m_2 \in f^{-1}(a_{n+1}) \subset M$, sodass $f(m_1) = a_{n+1} = f(m_2)$. Also ist f nicht injektiv.

3. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| = 1$

Dann ist $f: M \setminus f^{-1}(a_{n+1}) \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Funktion und nach (IV) nicht injektiv.

also $f: M \to N$ auch nicht.

Aufgabe 3

a) $P_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)\left[(1-t)^2 - 1\right]$

$= (1-t)(t^2 - 2t) = t(1-t)(t-2)$

Also sind $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ die EW von A.

$E_0(A) = \{x : (Ax|0)$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sei $x_3 = s$. Dann folgt $x_2 = -s$ und $x_1 = 0$. Daher ist $E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

$E_1(A) = \{x : ((A-I)x|0)\}$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Sei $x_3 = s$. Dann folgt $x_2 = 0, x_1 = -s$

Daher ist $E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$.

$E_2(A) = \{x : ((A-2I)x|0)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} -\mathrm{I} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Sei $x_3 = s$. Dann folgt

$x_2 = s$ und $x_1 = 0$. Also ist $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$.

b.) $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ nach a).

$\mathrm{Bild}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, also.

$\mathrm{rg}(A) = 2$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ offensichtlich linear unabhängig sind

c.) nein, da 0 ein EW ist, gilt $\det(A) = 0$.

d.) Ja, da es drei verschiedene EW gibt gilt $\cancel{A}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = S^{-1} A S$ mit

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $0, 1, 4$, da für λ EW von A und zug. EV v gilt $A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$

f.) Wir wollen alle $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Es gilt

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2.$

Also liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ nur für $\alpha = 2$ im Bild. Also ist $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ nur für

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, also

$\alpha = 2$ lösbar. Es gilt $\left\{ x : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \ker A + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also hat $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{unendlich viele Lösungen} \\ \text{keine Lösung} \end{matrix} \right\}$ für $\left\{ \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \alpha \neq 2 \end{matrix} \right\}$.

4. Aufgabe

Zu zeigen:

1.) $\ker(h)$ definiert Äquivalenzrelation auf A_s für alle $s \in S$.

2.) $\forall f^A \in A_f$, $ar(f) = (s_1, \dots s_n, s)$ gilt $\forall\, x_1, y_1 \in A_{s_1}, \dots, x_n, y_n \in A_{s_n}$:

$$x_1 \ker(h) y_1, \dots, x_n \ker(h) y_n \Rightarrow f^A(x_1, \dots, x_n) \ker(h) f^A(y_1, \dots, y_n)$$

Zu 1) Refl. Offensichtlich gilt $h(x) = h(x)$ $\forall x \in A_s$ $\forall s \in S$

Sym — " — $h(x) = h(y) \Rightarrow h(y) = h(x)$ $\forall x, y \in A_s$ $\forall s \in S$

Trans — " — $h(x) = h(y) \wedge h(y) = h(z) \Rightarrow h(x) = h(z)$ $\forall x, y, z \in A_s$ $\forall s \in S$ ✓

Zu 2) Sei $f^A \in A_f$ mit $ar(f) = (s_1 \dots s_n, s)$ und $x_1, y_1 \in A_{s_1}, \dots, x_n, y_n \in A_{s_n}$ mit $h(x_1) = h(y_1), \dots, h(x_n) = h(y_n)$. $(*)$

Wir wollen zeigen $h(f^A(x_1, \dots, x_n)) = h(f^A(y_1, \dots, y_n))$.

Es gilt
$$h(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f^B(h(x_1), \dots, h(x_n)) \overset{(*)}{=} f^B(h(y_1), \dots, h(y_n))$$
$$= h(f^A(y_1, \dots, y_n)).$$

5. Aufgabe

a) Falsch: Bsp.: $A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist offensichtlich orthogonal, aber $\det(A) = 1$

b). Falsch. $\varphi: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $\varphi(x) = 0$ ist offensichtlich Gruppenhom. außerdem gilt $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0 = \varphi(x \cdot y)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}_2$. Aber φ ist offensichtlich nicht injektiv

c) Richtig. Def.: $\|x\| = 0 \Rightarrow \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots n\}\} = 0$

$\Rightarrow |x_i| = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x = 0$

außerdem gilt $\|0\| = \max\{0\} = 0$

Hom. $\|\lambda x\| = \max\{|\lambda x_i| \ i \in \{1, \dots, n\}\} = |\lambda| \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\} = |\lambda| \|x\|$

Δ-Ungl.: $\|x+y\| = \max\{|x_i + y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\} \leq \max\{|x_i| + |y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$

$\leq \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\} + \max\{|y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$.

$= \|x\| + \|y\|$

d.) Falsch. Sei $b_n = 2$ und $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Dann sind $(a_n), (b_n) \in F_+$ und es gilt $|a_n| \leq 1 \cdot |b_n|$ also auch $a_n \in O(b_n)$ aber

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ divergiert offensichtlich.

6. Aufgabe

a.) Richtig

A	B	$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$	$A\Leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Da die letzten beiden Spalten übereinstimmen sind die Ausdrücke äquivalent.

b.) Falsch. $A=B=\emptyset$

c.) Falsch. $a=2, n=4$ liefert $a^n=16\equiv 0 \bmod 4 \neq 2 \bmod 4$

d.) Falsch. Für $x=7$ und $y=13$ gilt $x\cdot y=0$ in $\mathbb{Z}_{91}$

e.) Richtig. Abg.: $|s_1\cdot s_2|=|s_1|\cdot|s_2|=1\cdot 1=1$. Also $s_1\cdot s_2\in S$, für $s_1,s_2\in S$.
Assoz: ✓, da mult. assoz ist
neutr. Elt: $1\in S$, da $|1|=1$
inv. Elem.: $\left|\frac{1}{s}\right|=\frac{1}{|s|}=\frac{1}{1}=1$ Also $\frac{1}{s}\in S$ für $s\in S$

f.) Richtig. $v, w, v\times w$ sind linear unabhängig

g.) Falsch. Für $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ gilt $AA=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

h.) Falsch: $\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0$

i) Falsch: Wenn $\operatorname{rg}(A)<n$ gibt es $b\in\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bild}(A)$. Das Gleichungssystem $Ax=b$ hat dann keine Lösung.

j) Richtig. Sind w und v linear abhängig, dann gibt es ein $\lambda\in\mathbb{R}$, sodass $w=\lambda v$. Es gilt

$$|\langle v,w\rangle|=|\langle v,\lambda v\rangle|=|\lambda\|v\|^2|=\|v\|\cdot\|\lambda v\|=\|v\|\cdot\|w\|$$