Nachschreibeklausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SoSe 2019
05.09.2019

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....
Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	20	7	10	10	6	6	16	75	
erreichte Punktzahl									

Zweitprüfer bei Drittversuch: ....

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.** Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte, wie beispielsweise Kugelschreiber**. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(1) Für beliebige Mengen A und B in einer Grundmenge G gilt $A\setminus(B^c) = A \cap B$. *Hinweis:* Hierbei bezeichnet B^c das Komplement von B in G.	○	○
(2) Die Menge $\left\{ \frac{1}{p} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\}$ hat ein Minimum.	○	○
(3) Für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$.	○	○
(4) Sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum mit Untervektorraum $V \subseteq W$. Dann gilt $\langle M \rangle \subseteq V$ für jede Teilmenge $M \subseteq V$.	○	○
(5) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat eine endliche Basis.	○	○
(6) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$ ist linear.	○	○
(7) Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: Ist A negativ definit, so gilt $\det(A) < 0$.	○	○
(8) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ divergente Folgen reeller Zahlen, so ist stets auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.	○	○

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Für $n = \boxed{}$ gilt $n = 10^{2019} \mod 11$ (es ist eine Antwort $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$ gefordert).

(2) Für $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|x\|_2 = \boxed{}$ und $\|x\|_\infty = \boxed{}$.

(3) Die Matrix $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq \boxed{}$ gilt.

Außerdem ist die Matrix A genau dann orthogonal, wenn $\alpha = \boxed{}$ gilt.

(4) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = \boxed{}$.

2. Aufgabe (Ordnungsrelationen) (7 Punkte)

Es seien $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $R := R_1 \cap R_2$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

Zur Erinnerung: Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

3. Aufgabe (Gruppen) (10 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir eine Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element e, sowie die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit neutralem Element 0 (hierbei ist $+$ die übliche Addition auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen). Weiter nehmen wir an, dass ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Für $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir g^n rekursiv durch $g^0 := e$ und $g^{n+1} := g^n * g$.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot n$ (hierbei bezieht sich $\varphi(g) \cdot n$ auf die übliche Multiplikation in $\mathbb{Z}$).

(b) (3 Punkte) Folgern Sie mithilfe von Teilaufgabe (a): Ist $\ker(\varphi) \neq G$, so ist G unendlich.
Tipp: Geben Sie unendlich viele Elemente von G an und zeigen Sie, dass diese paarweise verschieden sind.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist φ injektiv, so ist $(G, *)$ eine abelsche Gruppe (d. h. es gilt $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$).

4. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (10 Punkte)

Im Folgenden bezeichne $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$, wobei

$$z_1 = 6 + 7 \cdot i \quad \text{und} \quad z_2 = 1 + 2 \cdot i.$$

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = -2 \cdot i$. Geben Sie diese jeweils in der Form $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

5. Aufgabe (Orthogonalität) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie reelle Zahlen α_1, α_2 und α_3, sodass $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3$ gilt.

Tipp: Es kann hilfreich sein, wenn Sie sich überlegen, welchen Wert das Skalarprodukt $(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \mid v_i)$ für $i = 1, 2, 3$ annimmt.

6. Aufgabe (Gauß-Algorithmus) (6 Punkte)

Bestimmen Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, der das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Aufgabe (Eigenwerttheorie) (16 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = S^{-1}DS$ gilt (Sie brauchen S^{-1} nicht zu berechnen).

1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(1) Für beliebige Mengen A und B in einer Grundmenge G gilt $A\backslash(B^c) = A \cap B$. *Hinweis:* Hierbei bezeichnet B^c das Komplement von B in G.	☒	○

$$\underbrace{A \setminus (B^c)} = A \cap (B^c)^c \overset{\checkmark}{=} A \cap B$$

$$= \{a \in A : \underbrace{a \notin B^c}_{a \in (B^c)^c}\} = \{a \in G : a \in A, a \in (B^c)^c\} = A \cap (B^c)^c$$

$A \setminus D = A \cap D^c$

$A, D \subseteq G$

(2) Die Menge $\left\{ \frac{1}{p} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}$ hat ein Minimum.	☒	○

$$\left\{ \ldots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \underset{\frac{1}{-1}}{-1}, \underset{\frac{1}{1}}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$.	☒	○

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{\tilde{k} = k-1}{=} \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} (\tilde{k}+1)^2 \overset{k = \tilde{k}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$$

Indexverschiebung

(4) Sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum mit Untervektorraum $V \subseteq W$. Dann gilt $\langle M \rangle \subseteq V$ für jede Teilmenge $M \subseteq V$.	☒	○

$$\langle M \rangle = \{ \underbrace{\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n}_{\in V} : n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, \underset{m_i \in M}{,} i = 1, \ldots, n \} \subseteq V$$

$$\boxed{\forall M \subseteq W: \quad M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle \subseteq V}$$

(5) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat eine endliche Basis.	○	☒

$1, x, x^2, x^3, \ldots$ sind linear unabhängig

(6) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$ ist linear.	○	☒

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(7) Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: Ist A negativ definit, so gilt $\det(A) < 0$. ○ ⊗

z.B. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ negativ definit, $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\det(A) > 0$

pos. def. Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Stets $\det(A) > 0$

A diagonal: $A\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$, $\det(A) > 0$

>0

(8) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ divergente Folgen reeller Zahlen, so ist stets auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. ○ ⊗

Bsp.: $a_n = b_n = (-1)^n \Rightarrow a_n \cdot b_n = 1$

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Für $n = \boxed{10}$ gilt $n = 10^{2019} \mod 11$ (es ist eine Antwort $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ gefordert).

$10^{2019} \mod 11 = (-1)^{2019} \mod 11 = -1 \mod 11 = 10 \mod 11$

$10 \mod 11 = -1 \mod 11$

(2) Für $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|x\|_2 = \boxed{5}$ und $\|x\|_\infty = \boxed{4}$.

$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\|x\|_\infty = \max\{|3|, |0|, |-4|\} = \max\{3, 0, 4\} = 4$

$\frac{1}{2} \cdot (1+\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

A orthogonal $\Leftrightarrow AA^T = I$

$\Leftrightarrow \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ und

$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\|_2 = 1$, $\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1$

$\Leftrightarrow |\alpha| = 1$ und

(3) Die Matrix $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq \boxed{1}$ gilt.

orthogonal, wenn $\alpha = -1$ ist.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = 1 - \alpha$

A, $\lambda \in K\setminus\{0\}$: A invertierbar $\Leftrightarrow$ λA invertierbar, denn: $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(4) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = \boxed{0}$.

$0 \leq \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\overbrace{\frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}}^{n \text{ Faktoren}}}_{n \text{ Faktoren}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\frac{1}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

≤ 1

$\frac{n}{n+k} \leq 1$

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1$, jedoch nicht orthogonal

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

$(-1)^2 = 1$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{1\cdot 1 + \alpha \cdot 1} = \frac{1}{2}(1+\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$

$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{=1/2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{=1/2}} = 1$

$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

2. Aufgabe (Ordnungsrelationen) (7 Punkte)

Es seien $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $R := R_1 \cap R_2$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

Zur Erinnerung: Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Da R_1, R_2 Ordnungsrelationen sind gelten:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad (n,n) \in R_1 \text{ und } (n,n) \in R_2 \implies (n,n) \in R_1 \cap R_2 = R,$$

also ist R reflexiv.

Anti-Symmetrie: Da R_1, R_2 Ordnungsrelationen sind, gilt $\quad \forall m,n \in \mathbb{N}: [(m,n) \in R \wedge (n,m) \in R] \implies m = n$

$$\forall n,m \in \mathbb{N} \text{ mit } \underline{(m,n) \in R = R_1 \cap R_2 \text{ und } (n,m) \in R = R_1 \cap R_2}$$

$$\implies \underbrace{(m,n) \in R_1 \text{ und } (n,m) \in R_1}_{\implies m=n} \text{ und } \underbrace{(m,n) \in R_2 \text{ und } (n,m) \in R_2}_{\implies m=n}$$

$$\implies \underline{m = n},$$

also ist $R = R_1 \cap R_2$ antisymmetrisch.

Transitivität: Da R_1 und R_2 Ordnungsrelationen sind, gilt

$$\forall m,n,k \in \mathbb{N} \text{ mit } (m,n) \in R \text{ und } (n,k) \in R$$

$$\implies \underline{(m,n) \in R_1 \text{ und } (n,k) \in R_1} \text{ und } \underline{(m,n) \in R_2 \text{ und } (n,k) \in R_2}$$

$$\overset{R_1, R_2}{\underset{\text{transitiv}}{\implies}} (m,k) \in R_1 \text{ und } (m,k) \in R_2$$

$$\implies (m,k) \in R = R_1 \cap R_2,$$

d.h. R ist transitiv.

Damit ist R eine Ordnungsrelation.

Bemerkung: 1) Analoges Resultat gilt für allgemeine Mengen M (statt $\mathbb{N}$)

2) Gleiches Resultat gilt auch, falls R_1 Ordnungsrelation, R_2 reflexive und transitive Relation.

3. Aufgabe (Gruppen) (10 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir eine Gruppe $(G,*)$ mit neutralem Element e, sowie die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ mit neutralem Element 0 (hierbei ist $+$ die übliche Addition auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen). Weiter nehmen wir an, dass ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Für $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir g^n rekursiv durch $g^0 := e$ und $g^{n+1} := g^n * g$.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ gilt $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot n$ (hierbei bezieht sich $\varphi(g) \cdot n$ auf die übliche Multiplikation in $\mathbb{Z}$).

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad A(n): \quad \varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot n$

Induktionsanfang: $A(0): \quad \varphi(g^0) \overset{\text{Def}}{=} \varphi(e) \overset{\varphi \text{ Hom.}}{=} 0 = \varphi(g) \cdot 0$ ist wahr, da $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ als Gruppenhomomorphismus das neutrale Element $e \in G$ auf das neutrale Element $0 \in \mathbb{Z}$ abbildet.

Induktionshypothese: Sei $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Dann gilt, da φ Gruppenhomomorphismus ist, dass $\varphi(g^{n+1}) \overset{\text{Def}}{=} \varphi(g^n * g) \overset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(g^n) + \varphi(g) \overset{\text{I.H.}}{=} \varphi(g) \cdot n + \varphi(g) = \varphi(g) \cdot (n+1)$.

Mit vollst. Induktion folgt, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) (3 Punkte) Folgern Sie mithilfe von Teilaufgabe (a): Ist $\ker(\varphi) \neq G$, so ist G unendlich.
Tipp: Geben Sie unendlich viele Elemente von G an und zeigen Sie, dass diese paarweise verschieden sind.

Ist $\ker(\varphi) \neq G$, so gibt es $g \in G \setminus \{e\}$ mit $\varphi(g) \neq 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(g^n) \overset{(a)}{=} \underbrace{\varphi(g)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{n}_{\neq 0} \neq 0, \text{ also gilt } g^n \notin \ker(\varphi) \subseteq G \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

*) Angenommen, es gäbe $m, n \in \mathbb{N}^*$ so, dass $g^n = g^m$, etwa mit $m > n$. Dann gilt $e = (g^{-1})^n * g^n = (g^{-1})^n * g^m = g^{m-n}$, insb. $\varphi(g^{m-n}) = \varphi(e) = 0$ ↯

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist φ injektiv, so ist $(G,*)$ eine abelsche Gruppe (d. h. es gilt $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$).

Zu (b): Also gilt $g^n \neq g^m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m \neq n$ und

$$\{g, g^1, g^2, g^3, \dots\} \subseteq G \text{ ist unendlich und damit } G \text{ unendlich.}$$

Als *), alternativer Lösungsweg: Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m \neq n$. Dann gilt

$$\varphi(g^m) = \varphi(g) \cdot m, \quad \varphi(g^n) = \underbrace{\varphi(g)}_{\neq 0} \cdot n \neq \underbrace{\varphi(g)}_{\neq 0} \cdot m = \varphi(g^m)$$

$$\Longrightarrow \quad g^m \neq g^n.$$

(c) Sei $\varphi: G \to \mathbb{Z}$ injektiv. Dann gilt für alle $g, h \in G$, da $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppe ist, dass

$$\varphi(g * h) \overset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(g) + \varphi(h) \underset{\text{abelsch}}{\overset{(\mathbb{Z},+)}{=}} \varphi(h) + \varphi(g) \overset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(h * g).$$

Da $\varphi: G \to \mathbb{Z}$ injektiv, gilt $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$, d.h. $(G, *)$ ist abelsche Gruppe.

4. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (10 Punkte)

Im Folgenden bezeichne $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$, wobei

$$z_1 = 6 + 7 \cdot i \quad \text{und} \quad z_2 = 1 + 2 \cdot i.$$

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = -2 \cdot i$. Geben Sie diese jeweils in der Form $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) $z_1 + z_2 = (6+1) + (7+2)i = 7 + 9i$

beides reelle Zahlen!

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1+z_2) = 7, \quad \operatorname{Im}(z_1+z_2) = 9$

$z_1 \cdot z_2 = (6+7i)\cdot(1+2i) = 6 + 12i + 7i - 14 = -8 + 19i$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)}_{\operatorname{Re}(z_1)\cdot\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\cdot\operatorname{Im}(z_2)} = -8, \quad \underbrace{\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2)}_{=\operatorname{Re}(z_1)\cdot\operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1)\cdot\operatorname{Re}(z_2)} = 19$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(6+7i)\cdot(1-2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{6 - 12i + 7i + 14}{5} = \frac{20 - 5i}{5}$$

$$= 4 - i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 4, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -1$$

(b) Gesucht: Alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = -2i$

Lösung: Schreibe $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z \cdot z)$
$= \operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z)\cdot\operatorname{Re}(z)$
$= 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 2xy$

Dann gilt $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 0 - 2i$

Koeffizienten-vergleich

$$\Longleftrightarrow \underbrace{x^2 - y^2 = 0}_{\Longleftrightarrow |x| = |y|} \quad \text{und} \quad \underbrace{2xy = -2}_{\Longleftrightarrow xy = -1}$$

$\Longleftrightarrow |x| = |y| \quad \text{und} \quad xy = -1$

$\Longleftrightarrow |x| = 1, \quad x = -y \quad \Longleftrightarrow \quad z = 1 - i \quad \text{oder} \quad z = -1 + i$

5. Aufgabe (Orthogonalität) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie reelle Zahlen α_1, α_2 und α_3, sodass $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3$ gilt.

Tipp: Es kann hilfreich sein, wenn Sie sich überlegen, welchen Wert das Skalarprodukt $(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \mid v_i)$ für $i = 1, 2, 3$ annimmt.

(a) $\|v_1\|_2^2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot (1+1+1) = 1$

$\|v_2\|_2^2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{6} \cdot (4+1+1) = 1$

$\|v_3\|_2^2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} (0+1+1) = 1$

$\langle v_1 | v_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (2-1-1) = 0$

$\langle v_1 | v_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (0+1-1) = 0$

$\langle v_2 | v_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} (0-1+1) = 0$

$\Rightarrow \langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, d.h. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bilden Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$, spannen Vektorraum der Dimension 3 auf. Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, folgt, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ ONB ist.

(b) Da $\{v_1, v_2, v_3\}$ ONB ist, ist

$$\alpha_i = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| v_i \right\rangle$$

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\, 8 = \underline{\underline{\frac{8}{3}\sqrt{3}}}$$

$$\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\, 7 = \underline{\underline{\frac{7}{6}\sqrt{6}}}$$

$$\alpha_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

6. Aufgabe (Gauß-Algorithmus) (6 Punkte)

Bestimmen Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, der das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3 \\ -2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & -3 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:(-8) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2 \\ -5 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:(-1) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Das lineare Gleichungssystem $Ax=b$ hat die eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

---

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \leftarrow \text{Widerspruch},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \leftarrow \text{„immer wahr"}$$

Lösungen: $x_s = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ -2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

Lösungen $x_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ beliebig

7. Aufgabe (Eigenwerttheorie) (16 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = S^{-1}DS$ gilt (Sie brauchen S^{-1} nicht zu berechnen).

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad (-1)^{m+n}, \text{ hier } m=n=2$$

(a) Charakteristisches Polynom

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xleftarrow{\text{Entw. n. 2. Zeile}} = +(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = (2-\lambda)^{2}(-1-\lambda)^{1}$$

$\Longrightarrow$ A hat die Eigenwerte 2 (algebraische Vielfachheit 2) und -1 (algebraische Vielfachheit 1)

(b) $\mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Ker}(2I-A)$, $\quad \mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Ker}(A+1I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:3 \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{mit Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$x_1 = s$, $x_3 = t$, 2. Zeile: $x_2 + t = 0 \iff x_2 = -t$

$$\Longrightarrow \quad x = \underbrace{(s,-t,t)^T}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$= s\cdot \underline{(1,0,0)^T} + t\cdot \underline{(0,-1,1)^T}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:3 \\ |:3 \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{mit Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Setze $x_3 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 1. Zeile: $x_1 + s = 0$, 2. Zeile: $x_2 = 0$ $\Big\} \Rightarrow x = s \cdot (-1,0,1)^T,\ s \in \mathbb{R}$

(c) Da $\dim(\mathrm{Eig}(A,2)) + \dim(\mathrm{Eig}(A,-1)) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ gilt, ist A diagonalisierbar.

EV zum EW 2 — EV zum EW −1 — EV zum EW 2

$$A = \tilde{S} D \tilde{S}^{-1} \quad \text{für} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = S^{-1} D S$$

$$S = (\tilde{S})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:(-1) \end{array}$$

$$\left(\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$= \tilde{S}^{-1} = S$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$