Klausur zur "Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

Wintersemester 2020/21
11.03.2021

Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Bearbeitungszeit: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
- Die vorwiegend kurzen Aufgaben enthalten klare Anweisungen, was jeweils verlangt ist.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und ggf. verlangte Begründung besonderer Wert gelegt.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie **alle schriftlichen Unterlagen** verwenden.
- **Selbständigkeitserklärung** beachten (s.u.).
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.
- **Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.
- **Viel Erfolg!**

Selbständigkeitserklärung

Mit der Teilnahme verpflichte ich mich zur eigenständigen Bearbeitung ohne fremde Hilfe und zu strikter Fairness. Mir ist bekannt dass Hinweise auf regelwidriges Verhalten ebenso wie Nichtbeachten der technischen Vorgaben dazu führen können, dass die Prüfungsleistung als nicht bestanden und ggf. als Betrugsversuch gewertet wird.

Ich habe mich vergewissert, dass ich zur Teilnahme an der Klausur zugelassen bin. Hiermit bestätige ich, darüber belehrt worden zu sein, dass meine Teilnahme an der Online-Prüfung in Mathe II für Inf WiSe 20/21 nur unter dem Vorbehalt der nachträglichen Bestätigung meiner Zulassung zu dieser Prüfung erfolgt.

Ich bestätige meine Zustimmung zu den allgemeinen Bestimmungen sowie zu diesen speziellen Hinweisen zur eigenständigen Bearbeitung sowie die Richtigkeit der gemachten Angaben zur Person.

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\frac{1}{2}(y-2)(x-1)^2+y^2-4,5y+1$.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f. Begründen Sie, welche davon lokale Minimalstellen, Maximalstellen oder Sattelpunkte sind.

(c) (2 Punkte) Hat f ein globales Maximum? Begründen Sie.

(d) (3 Punkte) Sei $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\leq 5\}$. Hat die Funktion $g:M\to\mathbb{R}, g:(x,y)\mapsto f(x,y)$ ein globales Maximum? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

(a) (3 Punkte) Sei $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ eine stetige und gerade Funktion. Zeigen Sie, dass für die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

von f gilt, dass $b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$.

(b) (3 Punkte) Wir bezeichnen mit $C([-\pi,\pi])$ den Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[-\pi,\pi]$. Zeigen Sie: Die Menge

$$U=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\in C([-\pi,\pi]) : b_{2021}=0\}$$

ist ein Untervektorraum von $C([-\pi,\pi])$.

(c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, x\mapsto|x|$.

(d) (3 Punkte) Bestimmen Sie, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Reihe aus Teil (c) konvergiert und geben Sie die Grenzwerte an.

Tipp: Sie müssen Teil (c) nicht gelöst haben, um Teil (d) bearbeiten zu können.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

(a) (5 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)}{x+3}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)+7x}{x^2-2x+5}.$$

(b) (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n}x^n.$$

(d) (4 Punkte) Seien $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ und sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie die folgende Aussage: Existiert eine Konstante $C\geq 0$ mit $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^2$ für alle $x,y\in(a,b)$, so ist f auf (a,b) konstant.
Tipp: Zeigen Sie, dass ein solches f differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung.

Aufgabe 4 (13 Punkte)

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}\,\mathrm{e}^{2t}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y^{(3)}(t) - 3y'(t) - 2y(t) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}$.

(c) (4 Punkte) Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - 3y'(t) - 2y(t) = -2\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}t}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = \sqrt{3}, \\ y''(0) = 3. \end{cases}$$

Hat das AWP eine globale Lösung? Wenn ja, ist sie eindeutig? Begründen Sie.
Tipp: Sie können in Teil (c) ohne Rechnung argumentieren.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Pro Aussage erhalten Sie jeweils einen Punkt für die richtige Antwort und einen Punkt für eine richtige Begründung.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Konvergiert die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Gilt $\partial_x f(x,y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : t \mapsto f(t,0)$ konstant.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ größer oder gleich 1.

(d) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist g in x_0 unstetig, so ist auch $f + g$ in x_0 unstetig.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann ist die Folge $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a_n})$ beschränkt.