Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2018/2019
14.03.2019

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	20	4	10	7	6	10	23	80		
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Bitte kennzeichnen Sie jeweils, welche Aufgabe Sie bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie Ihre Zusatzblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**.
Einzelne Zettel, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden.
Sollten Sie Zusatzblätter verwendet haben, falten Sie am Ende Ihre Klausur einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre zusätzlichen Blätter hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei eigenhandschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen und lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch!

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (8 + 12 Punkte) (20 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede leere Zeile erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	Wahr	Falsch
1.) Seien M und N Mengen, dann gilt: $M \setminus N = (M \cap N)^C \cap M$.	◯	◯
2.) $(\mathbb{Z}, -)$ ist eine Gruppe.	◯	◯
3.) Seien $(R, +_R)$ und $(S, +_S)$ Ringe und $f : (R, +_R) \to (S, +_S)$ ein Ringisomorphismus. Dann ist f^{-1} ein Ringhomomorphismus.	◯	◯
4.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Dann ist jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.	◯	◯
5.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei B_V eine Basis von V. Für jede Basis B_U eines Untervektorraums $U \subseteq V$ gilt $B_U \subseteq B_V$.	◯	◯
6.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.	◯	◯
7.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.	◯	◯
8.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lvert a_n \rvert} = 1$.	◯	◯

(b) Füllen Sie die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet. Für jeden richtig ausgefüllten Kasten gibt es 2 Punkte. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, für jeden leeren Kasten erhalten Sie einen Punkt und jeder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

1.) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch $\boxed{}$.

2.) Für Supremum und Infimum der Menge $M := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ gilt:

$\sup M = \boxed{}$ und $\inf M = \boxed{}$.

3.) Seien $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ und $(K, *_K)$ Gruppen mit neutralen Elementen n_G, n_H und n_K. Weiterhin sei $f : (K, *_K) \to (H, *_H)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g : (G, *_G) \to (K, *_K)$ ein Gruppenisomorphismus.

Dann gilt: $f \circ g$ ist injektiv $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \boxed{}$.

4.) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben durch $z_1 := 1 + i$ und $z_2 := 1 - i$. Berechnen Sie

$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{}$ und $\frac{z_2}{z_1} = \boxed{}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(7^{2n} - 4^{2n}\right) \bmod 33 = 0$?

3. Aufgabe (6 + 4 Punkte) (10 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichung per vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie nun, dass für alle $x > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne

$$\mathscr{M} := \{U \subseteq V \,:\, U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$$

die Menge aller Untervektorräume von V, die M enthalten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Untervektorraum $\langle M \rangle$ durch $\{v \in V \,:\, v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$ gegeben ist. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathscr{M}} U.$$

5. Aufgabe (3 + 3 Punkte) (6 Punkte)

Entscheiden Sie bei den beiden nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten je einen Punkt für die richtige Antwort und 2 Punkte für die Begründung.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Dann gilt $|\det(A)| = 1$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls $A \neq 0$ ist, so gilt $A^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierbei bezeichne 0 die Nullmatrix.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Es bezeichne $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $(x|By) = (B^T x|y)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

7. Aufgabe (2 + 5 + 6 + 4 + 3 + 3 Punkte) (23 Punkte)

Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D_α, zu der A_α ähnlich ist.

(c) Bestimmen Sie Matrizen S und S^{-1}, sodass gilt: $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S$.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1.) A_α ist positiv definit?

2.) A_α ist negativ definit?

3.) A_α ist indefinit?

(e) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Eigenwerte von B_α an. Es wird kein Rechenweg benötigt.

(f) Überlegen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$A_\alpha \text{ ist invertierbar.} \iff B_\alpha \text{ ist invertierbar.}$$