Mathe 1: Klausur #5

1. Aufgabe

(a) Charakteristisches Polynom:

$$p_A(t) = \det(A - t\cdot I_3) = \det\begin{pmatrix} -5-t & 6 & 2 \\ -2 & 4-t & 0 \\ -7 & 6 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{nach 3. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 4-t \\ -7 & 6 \end{pmatrix} + (4-t)\cdot\det\begin{pmatrix} -5-t & 6 \\ -2 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(-12 + 28 - 7t) + (4-t)\cdot((-5-t)(4-t)+12)$$

$$= -14t + 32 + (4-t)\cdot(t^2 + t - 8)$$

$$= -t^3 - t^2 + 8t + 4t^2 + 4t - 32 - 14t + 32$$

$$= -t^3 + 3t^2 - 2t = (-t)\cdot(+t^2 - 3t + 2)$$

Also ist $\lambda_1 = 0$ ein EW von A. Weiter

ist $\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$,

d.h. $\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ und $\lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ sind

die weiteren EW von A.

(b) A ist nicht invertierbar, weil 0 EW von A ist.
A ist diagonalisierbar, weil A drei verschiedene EW besitzt.

A ist nicht positiv definit, weil ein EW 0 ist. A ist nicht orthogonal, weil z.B. $\det(A)=0$ (orthogonale Matrizen haben $\det(A)\neq 0$). (2)

(c) Für kein $b \in \mathbb{R}^3$, denn nach Satz 3.8.4. (b) ist $Ax=b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ lösbar und $\ker(A)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Wegen $\det(A)=0$ ist $\ker(A)\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

(d) Es gilt $\det(A-I)=0$, weil 1 EW von A ist.

Also ist $\det\left((A-I)^{2014}\right) \underset{\text{Satz}}{\overset{\text{Produkt-}}{=}} \left(\det(A-I)\right)^{2014}$
$$= 0^{2014} = 0$$

2. Aufgabe

(a) Anfang $n=2$: $a_2 = \sum_{k=2}^{2} \frac{k-1}{k!} = \frac{2-1}{2!} = \frac{2!-1}{2!}$

ist wahr;

Annahme: Für ein $n\geq 2$ gilt $a_n = \frac{n!-1}{n!}$.

Schritt $n \to n+1$: Es gilt

$$a_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$$
$$= \frac{n}{(n+1)!} + a_n$$

$$\overset{\text{Annahme}}{=} \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n!-1}{n!}$$

$$= \frac{n}{(n+1)!} + \frac{(n+1)\cdot(n!-1)}{(n+1)\cdot n!}$$

$$\overset{(n+1)\cdot n! = (n+1)!}{=} \frac{n + (n+1)\cdot n! - n - 1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!},$$

was zu zeigen war.

(b) und (c) nicht in dieser Mathe 1.

3. Aufgabe

(a) Es gilt $\phi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$,

$\phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ und

$\phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Also ist $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

(b) Sei $A := M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(\phi)$. Dann ist $\ker(\phi) = \ker(A)$.

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\0 & -8 & 4 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow x_3 = s \Rightarrow 8x_2 = 4x_3 = 4s \Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{2}s$$

$\Rightarrow \quad 3x_1 = 2x_2 - x_3 = s - s = 0$

$\Rightarrow \ker(\phi) = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Also ist $\dim(\ker(\phi)) = 1$. Nach Dimensionsformel ist $3 = 1 + \dim(\mathrm{Bild}(\phi))$, d.h.

$\dim(\mathrm{Bild}(\phi)) = 2$. Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(\phi)$ nach (a) und $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0$ zeigt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathrm{Bild}(\phi)$ ist.

Wegen $\ker(\phi) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ϕ nicht injektiv.

Offenbar ist ϕ surjektiv wegen $\dim(\mathrm{Bild}(\phi)) = 2$.

(c) $\phi(b_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\phi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind offenbar linear unabhängig, denn $\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 32 \neq 0$.

Also ist $\{\phi(b_2), \phi(b_3)\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$.

(d) Klar ist $\phi(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (siehe (b)). Sei $c_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c_2 := \phi(b_3)$. Dann ist

$M^{\mathcal{B}}_{e}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nach Rechnung in (c).

4. Aufgabe

(a) Sei $g \in U_1 \setminus U_2$, aber $g^\# \in U_2$. Dann ist

$g = (g^\#)^\# \in U_2$, weil U_2 Untergruppe ist, Widerspruch zu $g \in U_1 \setminus U_2$.

(b) $U_1 \cup U_2$ Untergruppe $\Leftrightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$

„$\Leftarrow$": Ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$, so ist $U_1 \cup U_2 = U_2$ oder $U_1 \cup U_2 = U_1$. Dies sind jeweils Untergruppen.

„$\Rightarrow$": Sei $U_1 \cup U_2$ Untergruppe und nehme an, dass $U_1 \not\subseteq U_2$ und $U_2 \not\subseteq U_1$. Dann gibt es $g \in U_1 \setminus U_2$ und $h \in U_2 \setminus U_1$. Da $U_1 \cup U_2$ UG ist, folgt $g * h \in U_1 \cup U_2$, d.h. $g * h \in U_1$ oder $g * h \in U_2$. Nach (a) ist $g^\# \in U_1 \setminus U_2$ und $h^\# \in U_2 \setminus U_1$, d.h.

$h = g^\# * g * h \in U_1$ oder $g = g * h * h^\# \in U_2$,

im Widerspruch zur Wahl von g und h. Also muss $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gelten.

5. Aufgabe

(a) Wahr: Es gilt $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$,

d.h. $A^T \cdot A$ ist symmetrisch. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
(x \mid A^T \cdot A \cdot x) &= x^T \cdot (A^T \cdot A \cdot x) \\
&= (x^T \cdot A^T) \cdot (A \cdot x) \\
&= (A \cdot x)^T \cdot (A \cdot x) \\
&= (A \cdot x \mid Ax) \geq 0
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. $A^T A$ ist pos. semidefinit.

(b) Falsch: Sei $x \in V \setminus \{0\}$. Dann ist

$\langle x \mid x \rangle = (2 \cdot x \mid 0) = 0$, im Widerspruch zu (SP1).

(c) Wahr: p, q verschiedene Primzahlen impliziert, dass $ggT(p,q) = 1$. Nach Euklid gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot p + b \cdot q = 1$.

(d) Falsch: Sei $A = \{1,2\}$, $B = \{1\} = C$,

$f(1) := 1 =: f(2)$ und $g(1) := 1$. Dann ist f surjektiv, g injektiv, aber $g \circ f$ nicht injektiv, weil $(g \circ f)(1) = 1 = (g \circ f)(2)$.

6. Aufgabe

(a) Wahr: $b = a \cdot x,\ c = a \cdot y \Rightarrow b \cdot c = a \cdot (a \cdot x \cdot y)$

(b) Falsch: $a = 0,\ b \neq 0$

(c) Falsch: $V = \mathbb{R}^5 = U_1,\ U_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$

dann $U_1 \cap U_2 = U_2$

(d) Wahr: Definition

(e) Wahr: $\Phi(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T$ und

$\Phi(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

(f) Wahr: $$\frac{\overline{z}\,(z+\overline{z})}{z^2 \cdot \overline{z}} = \frac{\cancel{z} \cdot (z+\overline{z})}{\cancel{z} \cdot z \cdot \overline{z}} = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} \in \mathbb{R}$$

(g) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(h) Falsch: $a = b + u \Rightarrow a - b = u \in U \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{b}$.

(i) Falsch: $\binom{2}{1} = 2 \neq 6 = \binom{4}{2}$

(j) Falsch: $(-1)^n$