Klausur Mathe II SoSe 2019

1) a) Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

b+c)

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{1+a^k}$ $\quad a \geq 1$

$$s_k = \frac{a^k}{1+a^k} = \frac{a^k}{a^k}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a^k}+1\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{a^k}}$$

Fall $a=1$ $\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Fall $a > 1$ $\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{1+0} = 1$

$\Longrightarrow$ s_k ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum s_k$ divergent

ii) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k$

$$s_k = \left(\frac{-1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{\frac{1}{2k}\cdot k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}(-1)^k$$

Leibniz-Kriterium: $\operatorname{sgn}(s_k) = (-1)^k$ ✓ $\quad |s_k| = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to 0$, monoton fallend

$\Longrightarrow$ Konvergent!

2a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $a_n \to a$. Zeige Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot a$$

b) $I = [a,b]$, J Intervalle mit $0 \notin J$. $f: I \to J$ stetig diffbar. Zeige Sie

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(b)| - \ln|f(a)|.$$

---

a) $\lambda = 0$: $\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} 0 \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 0 \cdot a$ ✓

$\lambda \neq 0$: $b_n \to b \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: \|b_n - b\| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$: $\forall \varepsilon': \exists N: \|a_n - a\| < \varepsilon'\ \forall n > N$.

Sei $\varepsilon' = \varepsilon/|\lambda|$. Dann gilt für $n > N$:

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \cdot \varepsilon' = \varepsilon$$ ✓

b) Transformationssatz: $\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt$

Mit $g(t) = \frac{1}{t}$. Dann Trafosatz

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \underset{*}{=} \int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx \overset{\text{Trafosatz}}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \Big[\ln(|t|)\Big]_{f(a)}^{f(b)} = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$$

$*$ $g(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

Substitution: $\frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \cos(\underbrace{x^2}_{f(x)})$

3) $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{N};\quad g(x) = e^x$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

L'Hospital:

$$f'(x) = k \cdot x^{(k-1)}$$
$$f''(x) = k \cdot (k-1)\, x^{(k-2)}$$
$$f^{(l)}(x) = \frac{k!}{(k-l)!} \cdot x^{k-l} \qquad l = 0, 1, \dots, k$$
$$f^{(l)}(x) = 0 \qquad l > k$$
$$g^{(l)} = g(x) = e^x \qquad l \in \mathbb{N}_0$$

$g^{(l)}(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$g^{(l)}(x) \neq 0$ für alle x

$\Rightarrow f^{(l)}(x) = \frac{k!}{(k-l)!} \cdot x^{k-l} \to \infty$ für $x \to \infty$ und $l < k$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$= \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} k!}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x}$$

$$= \frac{k!}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x} = 0$$

4) $M=[1,2]$. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

Zeigen Sie: Es gibt genau ein $\xi \in M$ mit $f(\xi)=\xi$.

Banachscher Fixpunktsatz:

1. M ist abgeschlossene Menge in Banachraum.
   $M=[1,2]$ abgeschlossen ✓

2. f ist eine Selbstabbildung: $f(M) \subseteq M$.

   Sei $x \in [1,2]$. Zeige $f(x) \in [1,2]$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 2 \\ f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) \in M.$$

3. f ist Kontraktion auf M: $\exists\, q<1\ \forall\, x,y \in M: |f(x)-f(y)| \leq q \cdot |x-y|$

   Sei $(x,y) \in M$.

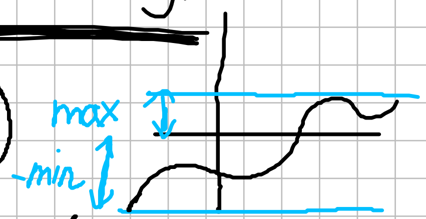
$$f(x) - f(y) \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} f'(\xi) \cdot (x-y) \quad \text{für } \xi \in (\min(x,y), \max(x,y))$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| = (*)$$

N.R.
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = 2\,\frac{1}{x^3} > 0 \rightarrow f' \text{ ist monoton steigend in } M$$

$$(*) \leq \sup_{\xi \in [1,2]} |f'(\xi)| \cdot |x-y| \overset{(**)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot |x-y|}}$$

$$\sup |f'(\xi)| = \max\left((\max f'(\xi)), -(\min f'(\xi))\right)$$



$$f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} \qquad f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (**) \sup_{\xi \in [1,2]} |f'(\xi)| = \max\left(f'(2), -f'(1)\right) = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ Kontraktion $\Rightarrow f$ besitzt einen Fixpunkt in M.

5) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

a) Zeig Sie mit vollst. Induktion $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) Bestimmen Sie $T_{3,f}(x, x_0)$ für $x_0 = -1$.

---

a) Induktionsanfang: $n=0$: $f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ✓

Induktionsannahme: $(*)$: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Induktionsschritt: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{(*)}{=} \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)'$

$= n!\left((1-x)^{-(n+1)}\right)' = n!(-n-1)(1-x)^{-(n+1)-1} \cdot (-1)$

$= n!(n+1)(1-x)^{-(n+2)} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$ ✓

b) $T_{3,f}(x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$

$x_0 = -1$.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad f(x_0) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f'(x_0) = \frac{1}{4}$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad f''(x_0) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ $\quad f'''(x_0) = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$

$T_{3,f}(x,-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3.$

6) Untersuche Sie auf Extrema:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

$$f_x(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot(2x) \quad -4x \quad = 4x\,(x^2+y^2-1)$$

$$f_y(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot(2y) \quad +4y \quad = 4y\,(x^2+y^2+1)$$

$$\nabla f = (4x(x^2+y^2-1) \;,\; 4y\,(x^2+y^2+1))$$

$$f_{xx}(x,y) = 4\,(x^2+y^2-1) + 8x^2 \quad = 12x^2+4y^2-4$$

$$f_{yy}(x,y) = 4(x^2+y^2+1) + 4y\cdot(2y) = 4x^2+12y^2+4$$

$$f_{xy}(x,y) = 8x\cdot y$$

Kritische Punkte:
$$\begin{pmatrix} 0 = 4x(x^2+y^2-1) \\ 0 = 4y\underbrace{(x^2+y^2+1)}_{\geq 1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

$\mathrm{II} \Rightarrow \; y=0$

$\Rightarrow \mathrm{I}: \; 0 = 4x\,(x^2-1) \quad \Rightarrow x=0$ oder $x=\pm 1$

$\Rightarrow$ 3 Kritische Punkte: $(1,0)$; $(0,0)$; $(-1,0)$

$(x,y) = (1,0)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW: } \lambda_{1,2} = 8 \Rightarrow H_f \text{ positiv definit}$$

$\Rightarrow$ lok. Minimum

$(x,y) = (0,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW } \lambda_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow H_f \text{ indefinit}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$(x,y) = (-1,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW } \lambda_{1,2} = 8 \Rightarrow H_f \text{ positiv definit}$$

$\Rightarrow$ lok. Minimum.

7) $\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t) \end{cases}$

a) Bestimme Sie ein Fundamentalsystem.

b) Geben Sie die allg. Lösung an.

a) $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = A \cdot \vec{y}(t) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$g_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - (-1)(-2)$

$= \lambda^2 - \lambda - 2$

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

Bestimme v_1: $\ker(A - 2E) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$

Bestimme v_2: $\ker(A + E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Fundamentalsystem $\left\{ e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $y(t) = c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exkurs: EV bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$

$$\ker(A - \lambda_1 E) = \ker\begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ -1 & 0-2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = \alpha$ beliebig

$$-x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 = -2\alpha$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$