# Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Thomas Streicher**

**WS 2019/2020**
**12.03.2020**

Name: ............................................

Vorname: ............................................

Matrikelnummer: ....................................

Studiengang: ............................................

Semester: ............................................

Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen. ☐

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 20 | 10 | 6 | 7 | 7 | 15 | 10 | 75 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | | |

Zweitprüfer bei Drittversuch: ..........................

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.** Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte, wie beispielsweise Kugelschreiber**. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

**Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

## Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

## 1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

| | Wahr | Falsch |
|---|---|---|
| (1) Für beliebige Mengen $A, B$ und $C$ in einer Grundmenge $G$ gilt $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. | ○ | ○ |
| (2) Die Menge $\left\{ \frac{n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Minimum aber kein Maximum. | ○ | ○ |
| (3) Für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k$. | ○ | ○ |
| (4) Für alle $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: Ist $m \equiv 1 \pmod{n}$, so ist $m$ durch $n$ teilbar. | ○ | ○ |
| (5) Für alle $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + l \cdot b$. | ○ | ○ |
| (6) Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Division als Verknüpfung ist eine Gruppe. | ○ | ○ |
| (7) Ist $(\cdot \vert \cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so ist durch $\Vert v \Vert := (v \vert v)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert. | ○ | ○ |
| (8) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \lvert x \rvert \\ \lvert y \rvert \end{pmatrix}$ ist linear. | ○ | ○ |

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Es gilt $\boxed{\phantom{xxxx}} = 9^{2020} \mod 10$.

(2) Für das Supremum der Menge $M := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup(M) = \boxed{\phantom{xxxx}}$.

(3) Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ hat Euklidische Norm $\Vert x \Vert_2 = \boxed{\phantom{xxxx}}$

und Maximumsnorm $\Vert x \Vert_\infty = \boxed{\phantom{xxxx}}$.

(4) Für die komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 5i$ und $z_2 = 2 - i$ gilt $z_1 + z_2 = \boxed{\phantom{xxxx}}$ und $\frac{z_1}{z_2} = \boxed{\phantom{xxxx}}$.
*Hinweis:* Geben Sie die Lösungen in Teilaufgabe (4) in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

## 2. Aufgabe (Äquivalenzrelationen) (10 Punkte)

Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir definieren eine zweistellige Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(\widetilde{(m,n)}) := m - n$ eine Funktion $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ gegeben ist.
*Hinweis:* Es genügt, wenn Sie die Wohldefiniertheit nachweisen. Zeigen Sie dazu, dass die angegebene Definition von $\varphi(\widetilde{(m,n)})$ nicht von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\widetilde{(m,n)}$ abhängt.

(c) (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ die in Teilaufgabe (b) definierte Funktion. Zeigen Sie, dass $\varphi$ bijektiv ist.

*Hinweis zur Notation:* Wir schreiben

$$\widetilde{(m,n)} = \{(m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (m,n) \sim (m_2, n_2)\}$$

für die Äquivalenzklasse von $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Weiter schreiben wir

$$\mathbb{N}^2/_\sim = \{\widetilde{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen. Wie üblich bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

## 3. Aufgabe (Untervektorräume) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Teilmengen

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y = 1 \right\}$$

des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$.

(a) (4 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge $V$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge $W$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

*Hinweis:* Um zu zeigen, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum ist, müssen Sie insbesondere auch $U \neq \emptyset$ nachweisen.

## 4. Aufgabe (Lineare Unabhängigkeit) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ und $v_4$ linear unabhängig sind.

## 5. Aufgabe (Orthogonalität) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Euklidischen Norm. Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrix $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot A$ orthogonal ist.
*Tipp:* Vergessen Sie nicht, dass die Spalten dafür auch normiert sein müssen.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die inverse Matrix $A^{-1}$.

## 6. Aufgabe (Diagonalisierung) (15 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A$.
*Tipp:* Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie das charakteristische Polynom *nicht* vollständig ausmultiplizieren. Versuchen Sie stattdessen, den Faktor $(3-\lambda)$ auszuklammern.

(b) (9 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von $A$ einen Eigenvektor.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt. *Hinweis:* Sie brauchen die inverse Matrix $S^{-1}$ nicht zu berechnen.

## 7. Aufgabe (Induktion und Grenzwerte) (10 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen $f_n$ sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

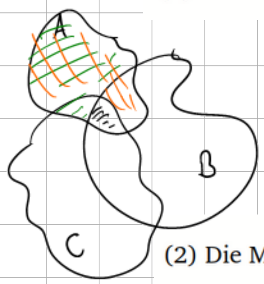
(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n$, dass $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
*Hinweis:* Es gilt $2^0 = 1$.

(b) (4 Punkte) Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n^n} = 0$ gilt.

## 1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

| | Wahr | Falsch |
|---|---|---|
| (1) Für beliebige Mengen $A, B$ und $C$ in einer Grundmenge $G$ gilt $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. | ☒ | ○ |




$$A\setminus(B\cap C) = A\cap(B\cap C)^c = A\cap(B^c\cup C^c) = (A\cap B^c)\cup(A\cap C^c) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

| | | |
|---|---|---|
| (2) Die Menge $\left\{ \frac{n-1}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Minimum aber kein Maximum. | ☒ | ○ |

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \notin \left\{ \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

| | | |
|---|---|---|
| (3) Für alle $n\in\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2\cdot\sum_{k=0}^{n} 2^k$. | ☒ | ○ |

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k \overset{\tilde{k}=k-1}{=} \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \underbrace{2^{\tilde{k}+1}}_{2\cdot 2^{\tilde{k}}} \overset{k=\tilde{k}}{=} 2\cdot\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

| | | |
|---|---|---|
| (4) Für alle $m, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt: Ist $\underbrace{m\equiv 1 \pmod n}$, so ist $m$ durch $n$ teilbar. | ○ | ☒ |

$\exists k\in\mathbb{Z}: \quad m = 1 + k\cdot n$

| | | |
|---|---|---|
| (5) Für alle $a, b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gibt es $k, l\in\mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = k\cdot a + l\cdot b$. | ☒ | ○ |

Erweiterter Euklidischer Algorithmus.

(6) Die Menge $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ mit der Division als Verknüpfung ist eine Gruppe. ○ ⊗

z.B. $(6:3):2 = 1 \neq 4 = 6:(3:2)$ Assoziativität gilt nicht

(7) Ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so ist durch $\|v\| := (v|v)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert. ○ ⊗

$\|\alpha v\| = (\alpha v|\alpha v) = \alpha^2 (v|v) = \alpha^2 \|v\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2,$ also nicht linear

Anmerkung: $|||v||| := \sqrt{(v|v)}$ definiert immer eine Norm

(8) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$ ist linear. ○ ⊗

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Es gilt $\boxed{1} = 9^{2020} \mod 10$.

$9 \bmod 10 = -1 \bmod 10 \Rightarrow 9^{2020} \bmod 10 = \overline{(9 \bmod 10)^{2020} \bmod 10} = (-1 \bmod 10)^{2020} \bmod 10$

$9^{2020} = (9^2)^{1010}$ $\qquad = (-1)^{2020} \bmod 10 = 1 \bmod 10$

(2) Für das Supremum der Menge $M := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup(M) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right\}$

Supremum / Maximum

(3) Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ hat Euklidische Norm $\|x\|_2 = \boxed{3}$

und Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \boxed{2}$.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |-2|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

(4) Für die komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 5i$ und $z_2 = 2 - i$ gilt $z_1 + z_2 = \boxed{7+4\cdot i}$ und $\frac{z_1}{z_2} = \boxed{1+3i}$.
*Hinweis:* Geben Sie die Lösungen in Teilaufgabe (4) in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 + z_2 = (5+2) + (5-1)i = 7 + 4i$$

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(5+5i)\cdot(2+i)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{10 + 5i + 10i - 5}{5} = \frac{5 + 15i}{5} = 1+3i$$

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2$$

$$z_2 = 2 - i = 2 + (-1)i$$

## 2. Aufgabe (Äquivalenzrelationen) (10 Punkte)

Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir definieren eine zweistellige Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(\widetilde{(m,n)}) := m - n$ eine Funktion $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ gegeben ist.
*Hinweis:* Es genügt, wenn Sie die Wohldefiniertheit nachweisen. Zeigen Sie dazu, dass die angegebene Definition von $\varphi(\widetilde{(m,n)})$ nicht von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\widetilde{(m,n)}$ abhängt.

(c) (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ die in Teilaufgabe (b) definierte Funktion. Zeigen Sie, dass $\varphi$ bijektiv ist.

*Hinweis zur Notation:* Wir schreiben

$$\widetilde{(m,n)} = \{(m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (m,n) \sim (m_2, n_2)\}$$

für die Äquivalenzklasse von $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Weiter schreiben wir

$$\mathbb{N}^2/_\sim = \{\widetilde{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen. Wie üblich bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

(a) Def.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$
$$\Longleftrightarrow \quad m_1 - n_1 = m_2 - n_2$$

Reflexivität: $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$: $\quad m + n = m + n$, also $(m,n) \sim (m,n)$.

Symmetrie: $\forall (m_1,n_1), (m_2,n_2) \in \mathbb{N}^2$: $\quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \Longleftrightarrow m_2 + n_1 = m_1 + n_2$,

also gilt $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ genau, wenn $(m_2,n_2) \sim (m_1,n_1)$

Transitivität: $\forall (m_1,n_1), (m_2,n_2), (m_3,n_3) \in \mathbb{N}^2$:

$m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ und $m_2 + n_3 = m_3 + n_2$

$\Longrightarrow$ $m_1 - n_1 = m_2 - n_2 = m_3 - n_3$, also $m_1 + n_3 = m_3 + n_1$.

Also: $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ und $(m_2,n_2) \sim (m_3,n_3) \rightarrow (m_1,n_1) \sim (m_3,n_3)$

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$.

(b) Seien $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$. Dann gilt $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$.

Damit ist die Definition $\varphi\left(\widetilde{(m,n)}\right) := m-n$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $(m,n) \in \widetilde{(m,n)}$.

(c) <u>$\varphi$ injektiv:</u> Seien $\widetilde{(m_1,n_1)}, \widetilde{(m_2,n_2)}$ mit $\varphi\left(\widetilde{(m_1,n_1)}\right) = \varphi\left(\widetilde{(m_2,n_2)}\right)$.

Dann gilt (nach Def. von $\varphi$) $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$, also $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$,

also ist $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$, d.h. $\widetilde{(m_1,n_1)} = \widetilde{(m_2,n_2)}$.

<u>$\varphi$ surjektiv:</u> Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann

<u>1. Fall:</u> $k \geq 0$: Dann ist $(k,0) \in \mathbb{N}^2$ mit $\varphi\left(\widetilde{(k,0)}\right) = k$

<u>2. Fall:</u> $k < 0$: Dann ist $(0,\underbrace{-k}_{>0}) \in \mathbb{N}^2$ mit $\varphi\left(\widetilde{(0,-k)}\right) = 0-(-k) = k$

Also ist $\varphi$ bijektiv.

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{N}^2/\sim & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \varphi\left(\widetilde{(m,n)}\right) & \longmapsto & k \end{array}$$

## 3. Aufgabe (Untervektorräume) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Teilmengen

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y = 1 \right\}$$

des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$.

(a) (4 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge $V$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge $W$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

*Hinweis:* Um zu zeigen, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum ist, müssen Sie insbesondere auch $U \neq \emptyset$ nachweisen.

(a) $x + y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, also ist $V = \ker(\varphi)$ der linearen Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

also ein Untervektorraum.

Alternativ: UVR-Kriterien: 1.) $V \neq \emptyset$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V\right)$

2.) $v, w \in V \Rightarrow v + w \in V, \alpha v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x_1 + y_1 = 0$, $x_2 + y_2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) = \alpha \underbrace{(x_1 + y_1)}_{=0} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{=0} = 0$,

d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$

(b) $W$ ist kein Untervektorraum,

so ist etwa

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1 \cdot 1 = 1 \checkmark} \in W$, jedoch $2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{2 \cdot 2 = 4 \neq 1} \notin W$.

Warum ist $0 \in V$ für jeden UVR?

Sei $v \in V \neq \emptyset$ beliebig, $0 \in K$ $\overset{\text{UVR-Krit.}}{\Longrightarrow}$ $0 \cdot v = 0 \in V$

## 4. Aufgabe (Lineare Unabhängigkeit) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ und $v_4$ linear unabhängig sind.

(a) $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig $\iff$ $\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ -2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ - \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \neq 0$$

(b) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < 4 \implies$ vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ können nicht linear unabhängig sein

$\implies v_1, v_2, v_3, v_4$ sind linear abhängig.

## 5. Aufgabe (Orthogonalität) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Euklidischen Norm. Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrix $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot A$ orthogonal ist.
*Tipp:* Vergessen Sie nicht, dass die Spalten dafür auch normiert sein müssen.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die inverse Matrix $A^{-1}$.

(a) Zu zeigen: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}A\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}A\right)^T = \frac{1}{6} A A^T = I_3$

Alternativ: Spalten sind normiert, d.h. haben Eukl. Norm 1, und stehen orthogonal zueinander.

...

(b) $A^{-1} = \left(\sqrt{6}I \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} I^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^T = \frac{1}{6} A^T$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & \frac{-\sqrt{2}}{6} \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ \sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{6}} A$ orthogonal,
d.h. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^T$

## 6. Aufgabe (Diagonalisierung) (15 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A$.
*Tipp:* Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie das charakteristische Polynom *nicht* vollständig ausmultiplizieren. Versuchen Sie stattdessen, den Faktor $(3-\lambda)$ auszuklammern.

(b) (9 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von $A$ einen Eigenvektor.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt. *Hinweis:* Sie brauchen die inverse Matrix $S^{-1}$ nicht zu berechnen.

(a) charakteristisches Polynom:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ 4 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} \underset{\text{Entwicklung nach 2. Spalte}}{=} (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\Big[\underbrace{(\lambda-3)(\lambda+2)+4}_{\lambda^2-\lambda-2}\Big]$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-3)\Big(\big(\lambda-\tfrac{1}{2}\big)^2 \underbrace{-\tfrac{1}{4}-2}_{=-9/4}\Big)$$

$$= (\lambda-3)^1(\lambda+1)^1(\lambda-2)^1$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte sind $-1, 2, 3$ (jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1)

(b) $\underline{\lambda=-1}$: $\quad \mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Ker}(A+I)$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{=A+I} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\tfrac{1}{4}),\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :4 \\ :4 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 7/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$
2. Zeile: $x_2 + \frac{7}{16}s = 0$
1. Zeile: $x_1 + \frac{1}{4}s = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -7/16 \\ 1 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/16 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\underline{\lambda=3}$:

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)}^{A-3I} \begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \ \&\ \text{Reihenfolge} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\underline{\lambda = 2:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +4 \quad - \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $-1, 3$ bzw. $2$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ -16 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=S} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ -16 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=S^{-1}}$$

## 7. Aufgabe (Induktion und Grenzwerte) (10 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen $f_n$ sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n$, dass $0 \le f_n \le f_{n+1} \le 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
*Hinweis:* Es gilt $2^0 = 1$.

(b) (4 Punkte) Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n^n} = 0$ gilt.

(a) Aussageform: $A(n)$: $0 \le f_n \le f_{n+1} \le 2^n$

Induktionsanfang ($n=0$): $A(0)$: $0 \le f_0 = 1 \le f_1 = 1 \le 2^0 = 1$ ist wahr.

Induktionshypothese (I.H.): Sei $A(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Dann gilt

$$0 \overset{\text{I.H.}}{\le} f_n \overset{\text{I.H.}}{\le} f_{n+1} \overset{\text{I.H.}}{\le} f_n + f_{n+1} \overset{\text{Def}}{=} f_{n+2} = f_{(n+1)+1}$$

sowie

$$f_{(n+1)+1} = f_{n+2} \overset{\text{Def}}{=} f_n + f_{n+1} \overset{\text{I.H.}}{\le} 2 f_{n+1} \overset{\text{I.H.}}{\le} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Damit ist auch $A(n+1)$ wahr.

Vollständige Induktion liefert also, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(b)
$$0 \le \frac{f_n}{n^n} \overset{(a)}{\le} \frac{2^n}{n^n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für } n \ge 3$$

Also gilt mit dem Sandwichprinzip, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{n^n} = 0$.