FORMELBLATT

REIHEN UND GRENZWERTE

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$ (Exponentialfunktion)

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$ (Sinus)

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$ (Cosinus)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$ (geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots,$ Konvergent $\Longleftrightarrow x > 1$ (harmonische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Leibniz-Kriterium)

$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (Dreiecksungleichung)

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to 0} \frac{n^n}{n!} = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

DIFFERENTIALE UND INTEGRALE

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel)

$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ (Produktregel)

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (Kettenregel)

$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (Kettenregel)

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$ (Umkehrfunktionsregel)

$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$ (Partielle Integration)

$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt, \quad x = g(t), \quad dx = g'(t)\, dt$ (Substitutionsregel)

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)|$

$\int_a^b f(x) \cdot f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} x\, dx$ (Spezialfall Substitutionsregel)

$g'(x) = \int_a^b \partial_x f(x, y)\, dy$ für $g(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$ (Differenzieren von Parameter-Integral)

Funktion	Ableitung
x^n	$n\, x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Funktion	Ableitung
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ◂
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Funktion	Ableitung
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$ ◂
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
a^x	$a^x \ln(a)$
x^x	$x^x(1+\ln(x))$

Bemerkung:

Alternativ gelten auch
- $\tan' = 1 + \tan^2$
- $\tanh' = 1 - \tanh^2$

Funktion	Stammfunktion
$k \in \mathbb{R}$	kx
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \cdot (\sqrt[n]{x})^{n+1}$

Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln(x) - 1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Funktion	Stammfunktion
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

TRIGNOMETRISCHE FUNKTIONEN

ⓘ $e^{iz} = \cos(z) + \sin(z)\, i, \quad z \in \mathbb{C}$ (Eulersche Formel)

ⓘ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$ (Trignometrischer Pythagoras)

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ (Additionstheorem-Sinus)

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ (Additionstheorem-Cosinus)

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (Doppelter-Winkel-Sinus)

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ (Doppelter-Winkel-Cosinus)

$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

V.1.2

18.07.24