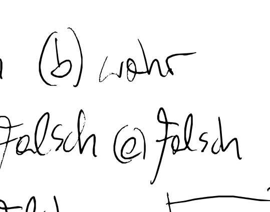
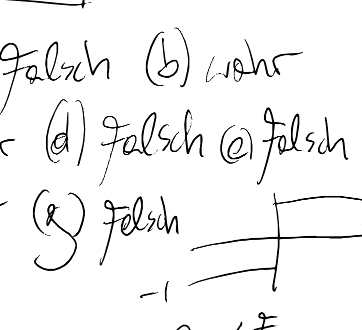
Mathe 2 Prof. Strecker
SoSe 23

[1] (a) falsch (b) wahr
(c) wahr (d) falsch (e) falsch
(f) wahr (g) falsch



(h) falsch



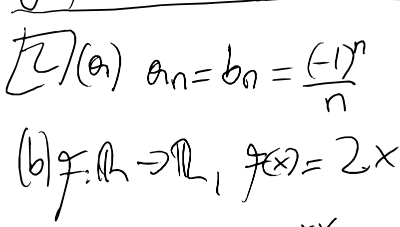
(i) wahr
(j) falsch $\leadsto$ Ansatz: $y(t) = a t^b$

[2] (a) $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

(c) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} \\ \cos(y)\cos(x\cos(y)) & -x\sin y \cdot \cos(x\cos y) \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y) = x^2 y$ (0,0) Sattelpunkt



(e) $f(x) = \sin(2x)$ $f''(x) = -4\sin(2x)$
$f'(x) = 2\cos(2x)$ $f'''(x) = -8\cos(2x)$

$\leadsto T_f^3(x; x_0 = 2) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}$

$= \sin(4) + 2\cos(4)(x-2) - 2\sin(4)(x-2)^2 - \frac{4}{3}\cos(4)(x-2)^3$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\leadsto$ s. Skript Bsp 6.4.12

[3] (a) $\frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx$ $g(x) = x^2$, $f(x) = 7^x$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 7^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp(x \ln 7)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\exp(x\ln 7)}{\ln 7}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7}\right) = \frac{3}{\ln 7}$

(b) $\int_0^{2\pi} \underset{u}{e^{-x}} \underset{v'}{\sin(x)} dx$ $\int uv' = [uv] - \int u'v$

$= \left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underset{u}{e^{-x}} \underset{v'}{\cos x} dx$

$= \left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^{2\pi} - \cancel{\left[e^{-x}\sin(x)\right]_0^{2\pi}} - \int_0^{2\pi} e^{-x}\sin x \, dx$

$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(x)dx = \frac{1}{2}(-e^{-2\pi} + 1)$
$= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$

[4] $f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - y + yx^2$

(a) $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2 + y^2 - 1)^T$

$\nabla f(x,y) = (0,0)^T$
$\Leftrightarrow xy = 0 \wedge x^2 + y^2 = 1$
$\Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0) \wedge x^2 + y^2 = 1$

(b) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$

(c)
$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ EW $2, -2$ $\Rightarrow$ indefinit, i.e. kein Extremum

$H_f(-1,0) = -H_f(1,0)$
$\Rightarrow$ indefinit, i.e. kein Extremum

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ EW $2, 2$ $\Rightarrow$ pos. def., i.e. lok. Minimum

$H_f(0,-1) = -H_f(0,1)$

$\leadsto$ EW $-2, -2$ $\Rightarrow$ neg. def., i.e. lok. Maximum

Allg. zu Definitheit: siehe Satz im Skript 3.11.22

[5] $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(x^n - 1)\left(2 + \frac{1}{x}\right)^n}_{a_n(x)}$

Konvergenzbereich ermitteln

$x = 1$: konv. $x = -1$: $a_n(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
$\Rightarrow$ nicht konv.

$0 < x < 1$: $a_n(x)$ keine NF $\Rightarrow$ nicht konv.
$x > 1$: " " " $\Rightarrow$ nicht konv.

$\leadsto$ Quotientenkriterium liefert:

$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \left|\frac{(x^{n+1}-1)(2+\frac{1}{x})^{n+1}}{(x^n - 1)(2+\frac{1}{x})^n}\right|$

$= \left|\left(2 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^{n+1}-1}{x^n - 1}\right|$

$= \left|\left(2 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^n}{x^n}\frac{x - \frac{1}{x^n}}{1 - \frac{1}{x^n}}\right|$

$\xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \left|2 + \frac{1}{x}\right|, & -1 < x < 0 \\ |2x + 1|, & x < -1 \end{cases}$

[6] $y^{(4)}(t) - 2y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) = 0$

(a) $\overset{\text{char.}}{\underset{\text{Pol.}}{\leadsto}}$ $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$
$= \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$
$= \lambda^2(\lambda - 1)^2$

$\lambda_{1/2} = 0$, $\lambda_{3/4} = 1$

$\Rightarrow \{1, t, e^t, te^t\}$ ist Fundamentalsystem, d.h.
$y(t) = A + Bt + Ce^t + Dte^t$
ist allg. Lsg.

(b) $y'(t) = B + Ce^t + De^t + Dte^t$
$y''(t) = (C + 2D)e^t + Dte^t$

$\leadsto y(0) = A + C \overset{!}{=} 1$ $A = 1$
$y'(0) = B + C + D \overset{!}{=} 3$ $B = 1$
$y''(0) = C + 2D \overset{!}{=} 4$ $D = 2$
$y''(-2) = C \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ Lösung zu gegeben Daten ist
$y(t) = 1 + t + 2te^t$

[7] (a) falsch, $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
ist integrierbar aber nicht diffbar in 0.

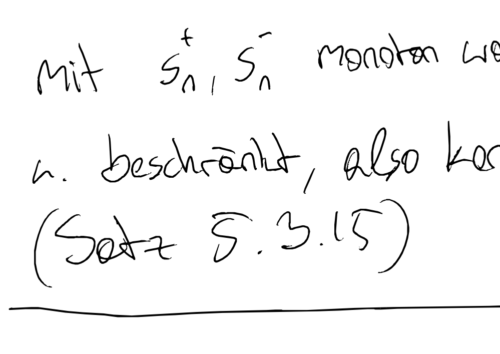
(b) falsch, es gilt
$F(x) = \frac{\lim_{x' \to 0^-} f(x') + \lim_{x' \to 0^+} f(x')}{2}$,

also $F(x) \neq f(x)$ an Unstetigkeitsstellen von f.

(c) wahr, denn

$\sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k^+}_{s_n^+} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k^-}_{s_n^-}$

Mit s_n^+, s_n^- monoton wachsend u. beschränkt, also konvergent. (Satz 5.3.15)



Nachtrag: Aufgabe 5

Konvergenzbereich von

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(x^n - 1)\left(2 + \frac{1}{x}\right)^n}_{a_n(x)}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

bestimmen.

Fallunterscheidung:

$x = 1$: konv. $x = -1$: $a_n(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
$x = -\frac{1}{2}$: konv. $\Rightarrow$ nicht konv.

$|x| > 1$: $a_n(x)$ keine NF $\Rightarrow$ nicht konv.

$0 < x < 1$: $a_n(x)$ keine NF $\Rightarrow$ nicht konv.

Bleibt $-1 < x < 0$ zu untersuchen:

$\xrightarrow[\text{anwenden}]{\text{Quot.-krit}} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \left|\frac{(x^{n+1}-1)(2+\frac{1}{x})^{n+1}}{(x^n - 1)(2+\frac{1}{x})^n}\right|$

$= \left|\left(2 + \frac{1}{x}\right)\underbrace{\frac{x^{n+1}-1}{x^n - 1}}_{\to 1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \left|2 + \frac{1}{x}\right|$.

da $-1 < x < 0$

Nun gilt $\left|2 + \frac{1}{x}\right| = \begin{cases} -2 - \frac{1}{x}, & 0 > x > -\frac{1}{2} \\ 2 + \frac{1}{x}, & -\frac{1}{2} > x > -1 \end{cases}$

Also nochmal eine letzte Fallunters. im Rahmen des Quot.krit.:

$0 > x > -\frac{1}{2}$: $\left|2 + \frac{1}{x}\right| = -2 - \frac{1}{x} \overset{!}{<} 1$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} < 3 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x < -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Konvergenz für $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2} > x > -1$: $\left|2 + \frac{1}{x}\right| = 2 + \frac{1}{x} \overset{!}{<} 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} -1 < x$

$\Rightarrow$ Konvergenz für $-\frac{1}{2} > x > -1$

Insgesamt konvergiert die Reihe also für $x \in (-1, -\frac{1}{3}) \cup \{1\}$