# Mathe 2: Klausur #5

## 1. Aufgabe

(a) $$\partial_1 f(x,y) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} y \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} = \frac{y}{1+x^2y^2}$$

$$\partial_2 f(x,y) = x \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$\partial_{11} f(x,y) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Quot.}}{=}} \frac{0\cdot(1+x^2y^2) - 2xy^2\cdot y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\partial_{12} f(x,y) = \frac{1\cdot(1+x^2y^2) - 2xy^2\cdot x}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1+\overset{-x^2y^2}{\cancel{xy^2(x-2x)}}}{\cancel{(1+x^2y^2)^2}}$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{=} \partial_{21} f(x,y) \qquad = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\partial_{22} f(x,y) = \frac{0\cdot(1+x^2y^2) - 2x^2y\cdot x}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $f$ 2-mal stetig partiell diff.bar ist.

(b) Kritische Punkte: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$x \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Also ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt.

Weiter ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(0,0) & \partial_{12} f(0,0) \\ \partial_{21} f(0,0) & \partial_{22} f(0,0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$\det(H_f(0,0)) = -1 < 0$. Daher ist ein EW positiv und ein weiterer negativ, so dass $H_f(0,0)$ indefinit ist. Es liegt somit ein Sattelpunkt vor.

(c) $f(1,1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

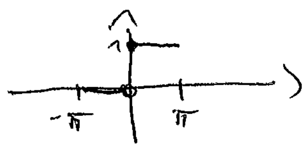
$$\nabla f(1,1) = \left( \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \right)$$

Also folgt

$$\frac{\pi}{4} + \left( \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \right) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

für das Taylorpolynom.

## 2. Aufgabe




(a) Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \overset{\text{Def. } f}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx$$

$$\overset{n \neq 0}{=} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot [0 - 0] = 0 \text{ und}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx \overset{\text{Def. } f}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$\overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } n=2k, \\ \frac{2}{\pi(2k+1)} & \text{für } n=2k+1. \end{cases}$$

Weiter ist $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx \overset{\text{Def. } f}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

Also ist $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx)\right)$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)\cdot x\right) =: FR(x)$$

die Fourierreihe.

(b) $f$ und seine $2\pi$-periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ sind stückweise glatt. Die Fourierreihe konvergiert in allen Stetigkeitspunkten gegen $\tilde{f}$ und in den Unstetigkeitspunkten $\{n\cdot\pi \,;\, n\in\mathbb{Z}\}$ gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}$, d.h. nach Satz

$$FR(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x\in(-\pi+2\pi n,\, 0+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}, \\ 1, & \text{falls } x\in(0+2\pi n,\, \pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x=n\cdot\pi \text{ mit } n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

# 3. Aufgabe

(a) Sei $g(\tau) := -\sin(\tau)$ und $h(\eta) := e^{-\eta}$. Dann ist

$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$, d.h. die DGL liegt in getrennten Veränderlichen vor. Weiter ist $h(y(\pi/2)) = 1 \neq 0$.

Schmiermethode: $$\frac{dy}{dt} = -\sin(t) \cdot e^{-y}$$

$$\Rightarrow \quad e^{y}\, dy = -\sin(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^y e^{\eta}\, d\eta = \int_{\pi/2}^{t} -\sin(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad e^{y} - 1 = \cos(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \ln(1 + \cos(t)).$$

Es gilt dann $y(\frac{\pi}{2}) = \ln(1) = 0$ und

$$y'(t) = \frac{1}{1+\cos(t)} \cdot (-\sin(t)) = e^{-y(t)} \cdot (-\sin(t)),$$

wie gewünscht.

(b) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$ sind die Lösungen.
Also ist $\{e^{-3t}, e^{2t}\}$ ein Fundamentalsystem.

Sei $y(t) := \alpha \cdot e^{-3t} + \beta \cdot e^{2t}$ mit

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{lr} \alpha+\beta = 1 & \mathrm{I} \\ -3\alpha + 2\beta = -3 & \mathrm{II} \end{array}$$

$$\overset{3\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}}{\Rightarrow} \quad 5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1.$$

Also ist $y(t) = e^{-3t}$ die eindeutige Lösung.

4. Aufgabe

(a) Falsch: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ ist in $0$ nicht diff.bar, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1$ ist als konstante Funktion diff.bar und $(f \circ g)(x) = f(1) = 1$ ist auch konstant, also diff.bar.

(b) Wahr: $B$ ist kompakt, $f$ ist stetig, weil dies aus stetig diff.bar folgt. Nach Satz vom Maximum ist $f$ auf $B$ beschränkt.

(c) Wahr: Es gilt $(1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, also

$$(1+i)^8 = \sqrt{2}^8 e^{i\, 8\cdot\frac{\pi}{4}} = 2^4 \cdot e^{i2\pi} = 2^4$$

und damit $(1+i)^{64} = ((1+i)^8)^8 = (2^4)^8 = 2^{32} \in \mathbb{R}$.

(d) Falsch: $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig mit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, aber $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} [\ln(x)]_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln(b) \text{ konv. nicht.}$$

## 5. Aufgabe

(a) Sei $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} \overset{f(x_0)>0}{>} 0$. Dann gibt es $\delta > 0$

mit $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ für alle $y \in [a,b]$

mit $|x_0 - y| < \delta$, d.h. für alle $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) =: I$

gilt $f(y) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2}\right)$,

was zu zeigen war.

(b) Angenommen es gibt $x_0$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann ist

$f(x_0)^2 > 0$, d.h. $g(x) := f(x) \cdot f(x)$ ist positiv in $x_0$.

Nach (a) existiert ein Intervall $I \overset{[a_0, b_0]}{\subseteq} [a,b]$ mit

$x_0 \in I$ und $g(y) > \frac{g(x_0)}{2} > 0$ für alle $y \in I$. Es folgt

$$0 = \int_a^b (f(x))^2 dx \geq \int_{a_0}^{b_0} g(x)\, dx \overset{\text{Monotonie}}{>} \int_{a_0}^{b_0} \frac{g(x_0)}{2} dx$$

$$= \frac{(b_0 - a_0)}{2} g(x_0) > 0,$$ ein Widerspruch.

(c) (i) Sei $f \in C([a,b])$. Dann ist $f(x) \cdot f(x) \geq 0$
für alle $x \in [a,b]$ und aus Monotonie des Integrals
folgt $(f \mid f) = \int_a^b (f(x))^2 dx \geq \int_a^b 0\, dx = 0$.
Sei nun $(f \mid f) = 0$, d.h. $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$. Nach (b)
ist $f = 0$.

(ii) Für alle $f, g \in C([a,b])$ gilt

$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Also

ist $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b g(x) \cdot f(x)\, dx = (g \mid f)$.

$(f \mid g)$ $=$

(iii) Seien $f, g, h \in C([a,b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x) = \alpha \cdot f(x) \cdot h(x) + \beta \cdot g(x) \cdot h(x), \quad (*)$$

also $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g \mid h) = \int_a^b (\alpha \cdot f(x) \cdot \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)\, dx$

$$\overset{(*) \text{ und}}{\underset{\int \text{ linear}}{=}} \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot h(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \cdot h(x)\, dx$$

$$= \alpha \cdot (f \mid h) + \beta \cdot (g \mid h).$$

6. Aufgabe

(a) Wahr: $1 \in (-2, 2)$

(b) Wahr: Satz

(c) Wahr: Def. $C^2(I)$

(d) Falsch: $f(x) := e^{-x}$

(e) Falsch: $\int_0^x f'(s)\, ds = f(x) - f(0)$

(f) Falsch: $f(x_1, x_2) := x_2$

(g) Falsch: Nur wenn rechte Seite lokal Lipschitz

(h) Falsch: $f(x) := x$, $g(x) := -1 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = -x$

(i) Falsch: Beispiel

(j) Falsch: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$