Klausur zur „Mathematik I für Informatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2011
08.09.2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	10	12	10	12	6	10	60			
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie zwei Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $132 \cdot k + 72 \cdot \ell = 60$.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $2^{3n} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Es sei $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/4$ und $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von $\Phi_2 \circ \Phi_1$ bezüglich der Standardbasis.

(b) Ist A eine orthogonale Matrix? Geben Sie die Inverse von A an.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn die Folge $(|a_n - a|)$ gegen Null konvergiert.

Achtung: Ein Hinweis auf Übungsaufgabe 4.3.3 im Skript genügt nicht als Lösung.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1}$.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Ist $(G, *)$ eine Gruppe, in der für alle $a, b \in G$ gilt $a * b * a = b * a * b$, so ist G trivial, d.h. $G = \{n\}$.

(b) Hat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$, so hat AB den Eigenwert $\lambda\mu$.

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{(z + \overline{z})(z - \overline{z})} \in \mathbb{R}$.

(d) Sind U und W Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gilt $\dim(U \cap W) = \dim(U) - \dim(W)$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$\ker(\Phi \circ \Phi) = \ker(\Phi) \quad \Longrightarrow \quad \ker(\Phi) \cap \Phi(V) = \{0_V\}.$$

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so hat jede Teilmenge $Y \neq \emptyset$ von X, die eine obere Schranke hat, auch ein Supremum.	☐	☐
(b)	Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, so hat $f(\mathbb{N})$ unendlich viele Elemente.	☐	☐
(c)	Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann ist für jede Wahl von $a, b \in R$ die Gleichung $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar in R.	☐	☐
(d)	Es seien A und B Aussagen. Dann ist die Aussage $(A \wedge B \wedge (\neg A)) \implies ((A \vee B) \wedge A)$ immer richtig.	☐	☐
(e)	Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \|x\|_2$ ist linear.	☐	☐
(f)	Es sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterverktorraum von V. Sind $v, w \in V$ so, dass $v + w \in U$ ist, so gilt $\tilde{v} + \tilde{w} = \tilde{0}$ in V/U.	☐	☐
(g)	Sind zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$ orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes, so sind sie auch orthogonal bezüglich jedes Skalarproduktes in $\mathbb{R}^n$.	☐	☐
(h)	Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und $b \in \mathbb{R}^4$. Dann ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar.	☐	☐
(i)	Hat die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Eigenwert Null, so gilt $\det(A) = 0$.	☐	☐
(j)	Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.	☐	☐