Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2013/14
13.03.2014

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	16	24	20	9	16	20	105		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (16 Punkte)

(a) Finden Sie ein $k \in \mathbb{N}^*$, so dass $87 \cdot k$ die Endziffern '01' hat.

(b) Bestimmen Sie $[12 \cdot (6^{333} + 5!)] \bmod 18$.

2. Aufgabe (24 Punkte)

Es sei $\mathscr{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\mathscr{E}$ sei die Standarbasis des $\mathbb{R}^2$. Weiter sei Φ die lineare Abbildung, die durch die Orthogonalprojektion auf den Unterraum $\langle b_1 \rangle$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts ist.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\Phi)$ und $A := M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\Phi)$ von Φ.

(c) Bestimmen Sie A^{2014}, sowie alle Eigenwerte von A^{2014}.

(d) Ist A^{2014} positiv definit?

3. Aufgabe (20 Punkte)

(a) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

i. $a_n = \dfrac{5n^3 - 3n^2 - 4}{2n^2(n+1)^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$

ii. $b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$

iii. $c_n = \dfrac{2}{n} + \dfrac{n}{2} + 2^{-n} + n^{-2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass -1 ein Eigenwert von $\Phi \circ \Phi + \Phi$ ist. Zeigen Sie, dass $\Phi \circ \Phi \circ \Phi$ den Eigenwert 1 hat.

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: a teilt nicht b und b teilt nicht c impliziert a teilt nicht c.

(b) Es sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch $(\tilde{u}|\tilde{v})_{\mathbb{R}^n/U} := (u|v)_{\mathbb{R}^n}$ für $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^n/U$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n/U$ definiert.

(c) Die Eigenwerte jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stimmen mit denen von A^T überein.

(d) Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $b \in G$ mit $b = b^\sharp$. Dann hat die Gleichung $x * x = b$ in G immer mindestens zwei Lösungen.

Bemerkung für WiederholerInnen: Mit $b^\sharp$ ist das inverse Element zu b bezeichnet.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Jede symmetrische Relation ist nicht antisymmetrisch.	☐	☐
(b)	Sind A, B endliche Mengen und gibt es eine surjektive Funktion $f : A \to B$, so ist $\lvert B\rvert \leq \lvert A\rvert$.	☐	☐
(c)	Jede Gruppe hat eine endliche Untergruppe.	☐	☐
(d)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z}/\lvert z\rvert \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(e)	Ist U ein Untervektorraum eines Vektorraums V, so ist auch $V \setminus U$ ein Untervektorraum von V.	☐	☐
(f)	Für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(A) \leq \operatorname{Rang}(A)$.	☐	☐
(g)	Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ Matrizen, die beide die Eigenwerte 1 und -1 und keine weiteren haben. Dann sind die beiden ähnlich.	☐	☐
(h)	Sind $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen mit $AB^{-1}A = I$, so gilt $A = A^{-1}B$.	☐	☐
(i)	Ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar, so auch $Ax = 2b$.	☐	☐
(j)	Sind (a_k) und (b_k) konvergente Folgen in $\mathbb{C}$, so ist $(\lvert a_k - b_k\rvert)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$.	☐	☐