Klausurvorbereitung WiSe 16/17 am 08.03.22

1 a)

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x}\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{\cancel{2x}\left(1+\frac{3}{2x}\right)}$

$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)} = \frac{\sqrt{1}}{1} = \underline{\underline{1}}$

$$\left[\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right) &= 1 + \lim \frac{3}{2x} \\ &= 1 + \frac{3}{2\lim 2x} \\ &= 1 + \frac{3}{2\lim x} \end{aligned}\right]$$

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos(x)^2 - 1} \underset{\substack{x^2 \to 0 \\ \cos^2(x)-1 \to 0}}{\overset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{2\cos(x)\cdot(-\sin(x))}$

$\underset{\substack{2x \to 0 \\ \sin(x) \to 0}}{\overset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(\sin^2(x) - \cos^2(x))} = \frac{1}{0-1} = -1$

iii) $\lim_{x \to \infty} \cos(\pi x)$; $\cos(\pi \cdot K) = \begin{cases} 1 & , K \text{ gerade} \\ -1 & , K \text{ ungerade} \end{cases}$

Wir definieren $a_K = K \cdot \pi$

$|\cos(a_K) - \cos(a_{K+1})| = |(-1)^K - (-1)^{K+1}| = 2$

$\Rightarrow$ $\cos(a_K)$ ist keine Cauchyfolge $\Rightarrow$ $\cos(a_K)$ divergiert

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}_{=a_n} x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n\cdot\cancel{n}}{\cancel{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $r = \frac{1}{e}$

$$\frac{(x-1)^n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}(x-1)^n = \frac{1}{n}y^n$$

2

a) $f(x,y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$

$\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 6y^2 - 0 - 12$

$\partial_y f(x,y) = 0 + 12xy - 6y^2 - 0$

$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 6y^2 - 12,\ 12xy - 6y^2\right)$

$\partial_{xx} f(x,y) = 6x + 0 + 0$

$\partial_{yy} f(x,y) = 12x - 12y$

$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 12y - 0$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 12y \\ 12y & 12x-12y \end{pmatrix}$$

b) $\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2+6y^2-12 &= 0 \\ 12xy-6y^2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 3x^2+6y^2 &= 12 \\ 6y(2x-y) &= 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ 2 Fälle: 1) $y=0$; 2) $2x-y=0$

$2x = y$

Fall 1): $y=0$

$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Also $(x_1, y_1) = (2, 0)$

und $(x_1, y_2) = (-2, 0)$

Fall 2): $2x = y$

$$3x^2 + 6(2x)^2 = 12$$
$$3x^2 + \underbrace{6 \cdot 4}_{24} x^2 = 12$$
$$x^2 + 8x^2 = 4$$
$$x^2(1+8) = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{9}$$
$$x = \pm \frac{2}{3}$$

Also

$(x_3, y_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

und

$(x_4, y_4) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$$H_f(x_1,y_1) = H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Diese ist positiv definit, also ist $(2,0)$ ein lokales Minimum.

$$H_f(x_2,y_2) = H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

Diese ist negativ definit, also ist $(-2,0)$ ein lokales Minimum.

$$H_f(x_3,y_3) = H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(x_3,y_3) = 4\cdot(-8) - 16^2 < 0.$$

A ist genau dann negativ definit, wenn die Vorzeichen der führenden Hauptminoren alternieren, d.h., falls alle ungeraden führenden Hauptminoren negativ und alle geraden positiv sind.

$H_f(x_3, y_3)$ ist indefinit, also ist (x_3, y_3) ein Sattelpunkt.

$$H_f(x_4, y_4) = H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ -16 & +8 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(x_4, y_4) = (-4) \cdot 8 - (-16)^2 < 0$$

$$\det(-4) < 0 \implies (x_4, y_4) \text{ Sattelpunkt.}$$

c) $\partial_y f(x,y) = 12xy - 6y^2$

$\partial_y f(e^t, t) = 12e^t \cdot t - 6t^2$

$$\int_0^1 (\underbrace{12t}_{g(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{h'(t)} - 6t^2)\, dt \overset{\text{Part.Int.}}{=}$$

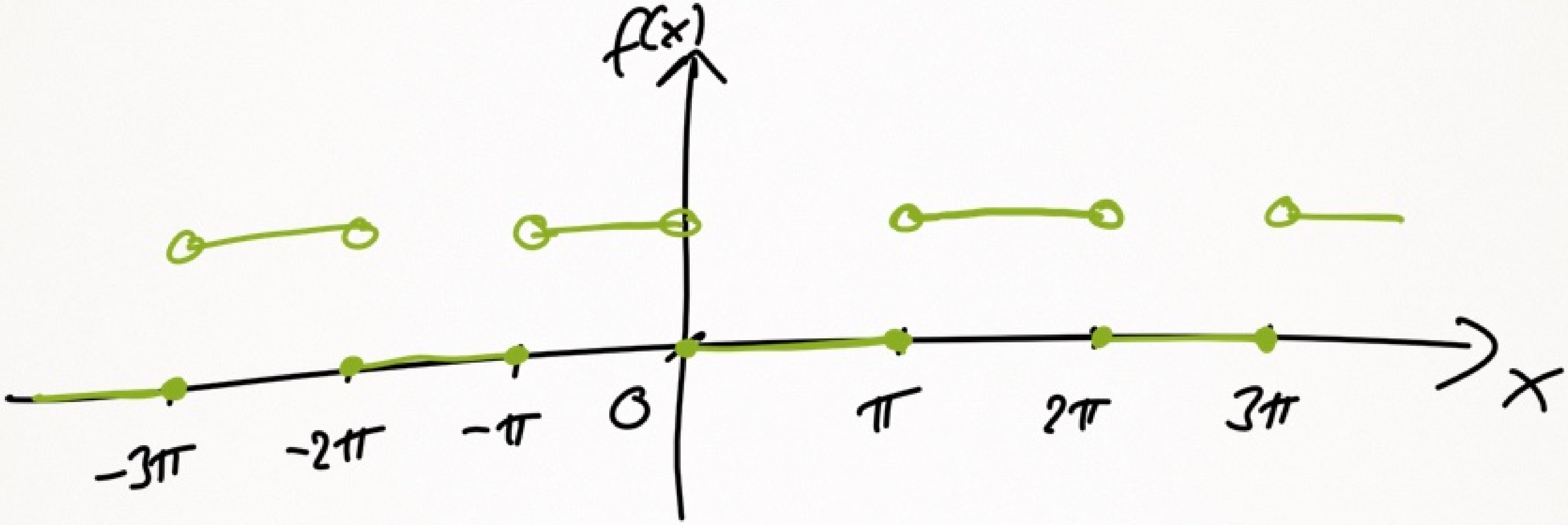
$g'(t) = 12$, $h(t) = e^t$

$$= \left[g(t) \cdot h(t)\right]_0^1 - \int_0^1 g'(t) \cdot h(t)\, dt - \int_0^1 6t^2\, dt$$

$$= \left[12te^t\right]_0^1 - \int_0^1 12e^t\, dt - \left[2t^3\right]_0^1$$

$$= [\cancel{12e} - 0] - [\cancel{12e} - 12] - [2 - 0] = \underline{\underline{10}}$$

③ a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [-\pi, 0) \\ 0 & , x \in [0, \pi] \end{cases}$



b) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad ; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin kt \, dt$

$k \geq 0$ $\qquad$ $k \geq 1$

$$\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi = \underline{\underline{1}}$$

$\underline{k>0}$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left[0-0\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\cos(+k\pi)\right] \quad ; \quad \cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & , k \text{ gerade} \\ -1 & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{k\pi} & , k \text{ ungerade} \\ 0 & , k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \;;\; \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

c)

$$F_\infty(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \pi\mathbb{Z} \\ 1 & , x \in ((2k-1)\pi, 2k\cdot\pi) \quad , k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = X$

$$0 = F_\infty\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \underbrace{\sin\left((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{= \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ = (-1)^k}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot X$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \Big/ \frac{2}{\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

④ a) Falsch

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$, $k = 1$

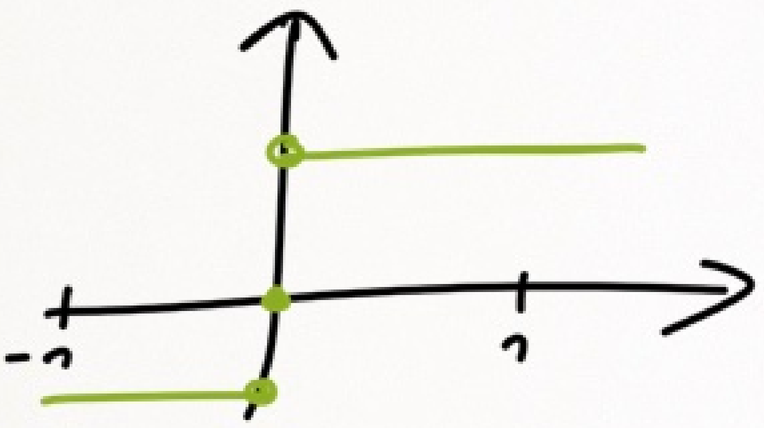
$f'(x) = 2x$ erfüllt $f'(0) = 0$

$T_{k-1,f}(x) = T_{0,f}(x) = f(0) = 0$

Aber $f(x) = x^2 \neq 0$. $\lightning$

b) Falsch

Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



f ist lokal konstant in ± 1 und damit diffbar. mit

$f'(\pm 1) = 0$

Aber f ist unstetig in $x=0$

$\Longrightarrow$ f ist nicht diff.bar in 0

c) $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Richtung

$y(t) = 0$ ist konstante Lösung von

$$y'(t) = p(y(t)) = y(t)^3 + a\,y(t)^2 + b\,y(t)$$

$$= 0 \checkmark$$

$0 = y'(t)$

d) $q \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{C}$, $\arg(z) = q \cdot \pi$

Dann ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $z^k \in \mathbb{R}$.

Richtig

- $k=0$: Dann gilt $z^0 = 1 \in \mathbb{R}$

- $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$z^{2n} = \left(|z| \cdot e^{i\arg(z)}\right)^{2n} = |z|^{2n} \cdot e^{i\pi \cancel{\frac{m}{n}} \cdot 2\cancel{n}}$$

$$= \underbrace{|z|^{2n}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \left(\underbrace{e^{(2\pi i)}}_{=1}\right)^m = |z|^{2n} \in \mathbb{R}$$

5 a) wahr

b) $f(x) = x \Rightarrow (\tan \circ f)(x) = \tan(x)$

unstetig auf ganz $\mathbb{R}$

Also falsch

c) $f'(x) = x \cdot x^{x-1} = x^x = f(x)$

$f(x) = x^x = \left(e^{\ln(x)}\right)^x = e^{\ln(x) \cdot x}$

$\rightarrow f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x} \cdot (\frac{1}{x} \cdot x + \ln(x)$

$= x^x (1 + \ln(x)) \neq x \cdot x^{x-1}$

Also falsch.

d) wahr

e) Wahr

Mittelwertsatz: $\exists x_0 \in (0,1)$ s.d.

$$f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

f) wahr.

g) falsch. Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Falsch.

Nächster Termin: 10.03.22 um 11 Uhr

WiSe 19/20 (Strecker)

[evtl. aber SoSe 21]