Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2012/13
14.03.2013

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	13	15	14	12	11	10	75		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (13 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-7x^2-1}{(x-1)^3}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\ln(x)}.$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$?

2. Aufgabe (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$, um die Entwicklungsstelle 0.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = e^{y(t)} \sin(t)$, $y(0) = 0$.

3. Aufgabe (14 Punkte)

Es sei $F : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(u,v) = \int_1^u \frac{2^{4tv}}{t}\, dt$ und $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = F(x,x)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla F(u,v)$.

(b) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{x}(2 \cdot 2^{4x^2} - 2^{4x})$ für alle $x > 0$ gilt.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Die Gleichung $z^4 = \mathrm{i}$ hat vier verschiedene komplexe Lösungen, von denen keine reell ist.

(b) Die Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| \cdot x$ hat als Fourierreihe eine reine Sinusreihe, d.h. für die Fourierkoeffizienten gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und gilt $f'(a) = f'(b)$ für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$, so gibt es ein ξ zwischen a und b mit $f(\xi) = 0$.

(d) Das Anfangswertproblem $y'(t) = \arctan(y(t))$, $y(0) = 1$, hat eine eindeutige Lösung.

5. Aufgabe (11 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

- $f(0) = 1$,
- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und
- $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, h \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{f(x)}{f(-h)} \leq f(x+h) \leq f(x) \cdot f(h)$.

(b) Beweisen Sie: Ist f stetig in Null, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 1 Punkt, jede leere Zeile gibt 0.5 Punkte und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien $n, m \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ konvergiert an mindestens einem Randpunkt des Konvergenzintervalls.	☐	☐
(b)	Hat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an einem kritischen Punkt eine Hesse-Matrix mit den Eigenwerten 1, 2 und -1, so hat f an dieser Stelle ein lokales Minimum.	☐	☐
(c)	Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, so existieren in x_0 alle Richtungsableitungen.	☐	☐
(d)	Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lvert x_j \rvert$. Dann ist f beschränkt.	☐	☐
(e)	Ist $f = (f_1, f_2, \dots f_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, so sind alle Komponentenfunktionen $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig.	☐	☐
(f)	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	☐	☐
(g)	Der Tangens ist eine 2π-periodische Funktion.	☐	☐
(h)	Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ hat $\sqrt{2}$ als Häufungspunkt.	☐	☐
(i)	Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und existieren $a := \lim_{x\to 0} f(x)$ und $b := \lim_{x\to 0} g(x)$ mit $b \neq 0$, so gilt $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = a/b$.	☐	☐
(j)	Es sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$. Dann gilt auch $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$.	☐	☐