Mathe 1: Klausur #2

(a) $E := \{ p + \lambda \cdot (q-p) + \mu \cdot (r-p) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

eindeutige Ebene $\Leftrightarrow$ $v := q - p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$w := r - p = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear

unabhängig

Sei $\alpha \cdot v + \beta \cdot w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{matrix} \alpha - \beta = 0 \\ -4\beta = 0, \\ -\alpha - \beta = 0 \end{matrix}$

also ist $\beta = 0$ und $\alpha = \beta = 0$.

(b) Hesse-Normalform: Bestimme $\nu = \dfrac{v \times w}{\|v \times w\|_2}$

Es gilt $v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, also

$\| v \times w \|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ und

$\nu = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. Weiter ist $(p \mid \nu) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$,

so dass $E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \nu) = -1 \}$

die Hesse-Normalform ist.

(c) Nach Rechnung in (b) ist die Gerade $g = \{ p + \gamma \cdot v : \gamma \in \mathbb{R} \}$ senkrecht zu E und enthält p (setze $\gamma = 0$).

2. Aufgabe

(a) Sei $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie

$$b_3 := b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung nach}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -1 + 7 = 6 \neq 0.$$

Also ist $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ linear unabhängig und aus Dimensionsgründen sogar eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Da b_1 und b_2 in E liegen, gilt

$$\Phi(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \quad \text{und}$$

$$\Phi(b_2) = b_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 .$$

Da b_3 senkrecht zu E ist, muss $\Phi(b_3) = -b_3$ sein (Spiegelung an Ebene). Es folgt

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [\phi(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\phi(b_2)]_{\mathcal{B}} & [\phi(b_3)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Basiswechselformel gilt

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1}$$

$$\overset{\mathcal{E}\text{ Standard-basis}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\overset{\text{Rechnung + Hinweis}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Da ϕ eine Spiegelung ist, gilt $\phi \circ \phi = id_{\mathbb{R}^3}$.

Nach Satz 3.7.18. ist

$$\left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi)\right)^n = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n\text{-mal}}) = \begin{cases} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & n \text{ gerade} \\ M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für n gerade sind also 1, 1, 1 die Eigenwerte, weil $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist.

Für n ungerade sind 1, 1, −1 die Eigenwerte, weil $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ ähnlich zur Diagonalmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist und ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

3. Aufgabe

Wir wissen $A \cdot u = \lambda \cdot u$, $A \cdot v = \mu \cdot v$ und $u \neq 0$ sowie $v \neq 0$. Dann gilt

$$\lambda \cdot (u \mid v) = (\lambda \cdot u \mid v) = (A \cdot u \mid v) = (u \mid A^T \cdot v)$$

$$\overset{A \text{ symm.}}{=} (u \mid A \cdot v) = (u \mid \mu \cdot v) = \mu \cdot (u \mid v).$$

Also ist $0 = \lambda \cdot (u \mid v) - \mu \cdot (u \mid v)$

$$= (\lambda - \mu) \cdot (u \mid v) \overset{\lambda - \mu \neq 0}{\Longrightarrow} (u \mid v) = 0.$$

Somit gilt $u \perp v$.

4. Aufgabe

(a) Nicht für diese Mathe 1.

(b) Falsch: Sei $(R, +, \cdot) = (\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot)$

der Ring der (2×2)-Matrizen. Für

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$X \cdot Y = Y \cdot X$ und $Y \cdot Z = Z \cdot Y$, weil Y die Einheitsmatrix ist, d.h. $X \sim Y$ und $Y \sim Z$.

Es ist
$$X \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$\neq$$
$$Z \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
so dass die Transitivität verletzt ist.

(c) Falsch: $5^{222} = 25^{111} \equiv 1^{111} \bmod 8 \equiv 1 \bmod 8$,

denn $25 \equiv 1 \bmod 8$. Weiter ist

$$3^{221} = 3^{220} \cdot 3 = 9^{110} \cdot 3 \equiv 1^{110} \cdot 3 \bmod 8$$
$$\equiv 3 \bmod 8,$$

denn $9 \equiv 1 \bmod 8$. Also ist

$$5^{222} + 3^{221} \equiv 1 + 3 \bmod 8 \equiv 4 \bmod 8$$
$$\not\equiv 0 \bmod 8,$$

so dass $5^{222} + 3^{221}$ nicht durch 8 teilbar ist.

(d) Falsch: Sei $V = \mathbb{R}^2 = U_1$ und $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sowie $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Dann ist B_1 Basis von U_1, aber kein Element von $\mathcal{B}_1$ spannt die x-Achse U_2 auf.

5. Aufgabe

Sei $g \in G$ und setze $h = n$. Dann gilt

$$g = g * n \overset{\text{Voraussetzung}}{=} (g * n)^{\#} = g^{\#}, \text{ d.h.}$$

jedes Element ist selbstinvers. Seien nun $g, h \in G$. Dann gilt

$$g * h \underset{\text{aussetzung}}{\overset{\text{Vor-}}{=}} (g * h)^{\#} \overset{\text{Satz 2.3.3. (d)}}{=} h^{\#} * g^{\#}$$

$$\underset{g^{\#} = g}{\overset{h^{\#} = h \text{ und}}{=}} h * g, \text{ d.h. } G \text{ ist abelsch.}$$

6. Aufgabe

(a) Wahr: $f(g) \diamond f(g^{\#}) = f(g * g^{\#}) = f(n_G) \overset{\text{Satz 2.3.17.(a)}}{=} n_H$

(b) Wahr: Nicht für diese Mathe 1

(c) Wahr: Satz 3.10.4. (f) und Satz 3.10.9.

(d) Falsch: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ neg. definit, aber $\det(A) = 1$

(e) Falsch: Einfach Unsinn, weil V/U nicht Teilmenge von V ist

(f) Wahr: 0 nicht EW $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$

(g) Falsch: Wäre 2 Grenzwert, so müsste

$2 = 2 + \frac{1}{2}$ gelten, also $0 = \frac{1}{2}$ ↯

(h) Falsch: Setze $z=1$, dann ist $|(1+i)\cdot 1| = \sqrt{2}$,

aber $|z| + |i\cdot z| = |1| + |i| = 1+1 = 2$ #

(i) Falsch: $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, aber

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \rightsquigarrow$ (SP1) verletzt

(j) Falsch: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (k)_{k\in\mathbb{N}}$ und

$(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (-k)_{k\in\mathbb{N}}$