MoSeS Klausur 16

Aufgabe 1: Formale Modellierung mit Symbolen, Mengen und Funktionen (17 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie ein Kursverwaltungssystem. Im Kursverwaltungssystem werden mehrere Kurse verschiedenen Typs verwaltet. Diese Kurse werden von verschiedenen Professoren gehalten und von verschiedenen Studenten besucht. Für die Modellierung des Kursverwaltungssystems werden die folgenden Symbole, Mengen und Funktionen verwendet:

KURS	modelliert die Menge der Kurse.
KURSTYP $:= \{vl, se, pr\}$	modelliert die Menge der Kurstypen, wobei vl den Kurstyp Vorlesung, se den Kurstyp Seminar und pr den Kurstyp Praktikum modelliert.
typ-von : KURS $\to$ KURSTYP	modelliert für jeden Kurs $k \in$ KURS den Typ des Kurses k.
PROFESSOR	modelliert die Menge der Professoren.
professor-von : KURS $\to$ PROFESSOR	modelliert für jeden Kurs $k \in$ KURS den Professor, der den Kurs k hält.
STUDENT	modelliert die Menge der Studenten.
angemeldet-zu : KURS $\to \mathcal{P}$(STUDENT)	modelliert für jeden Kurs $k \in$ KURS die Menge der Studenten, die sich für den Kurs k angemeldet haben.

Ansonsten bleiben diese Mengen und Funktionen unterspezifiziert.

- **Notationskonvention:** Die Schreibweise (x, xs) wird als Abkürzung für die Folge $(x, x_1, \ldots, x_n)$ verwendet wenn $xs = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt.

- **Zur Information:** Alle fünf nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in den vorigen Aufgabenstellungen deklariert wurden, auch wenn Sie diese Aufgabenteile nicht bearbeitet haben.

(2P) (A). Definieren Sie formal eine Funktion ist-von-typ : (KURS $\times$ KURSTYP) $\to \{w, f\}$, die für einen Kurs k und einen Kurstyp typ den Wahrheitswert w zurückgibt, wenn der Kurs k vom Kurstyp typ ist, und für einen Kurs k den Wahrheitswert f zurückgibt, wenn der Kurs k nicht vom Kurstyp typ ist.

Antwort:

(3P) (B). Definieren Sie formal die Menge aller Kurse PRAKTIKA-SEMINARE $\subseteq$ KURS, die vom Kurstyp Praktikum oder Seminar sind.

Antwort:

(C). Definieren Sie formal eine Relation GLEICHER-TYP-&-PROF, die modelliert, dass zwei Kurse den gleichen Kurstyp haben und vom gleichen Professor gehalten werden. (3P)

(D). Definieren Sie formal eine rekursive Funktion angemeldet-zu-mehreren : KURS* $\to \mathcal{P}$(STUDENT), die für eine gegebene Folge von Kursen ks die Menge aller Studenten zurückgibt, die zu einem Kurs oder mehreren Kursen in der Folge ks angemeldet sind. (4P)

(E). Definieren Sie formal eine rekursive Funktion ähnliche-kurse : (KURS $\times$ KURS*) $\to \mathcal{P}$(KURS), die für einen gegebenen Kurs k und eine Folge von Kursen ks die Menge aller Kurse zurückgibt, die den gleichen Kurstyp wie der Kurs k haben und vom gleichen Professor wie der Kurs k gehalten werden. (5P)

Aufgabe 2: Formale Modellierung von Anforderungen (15 Punkte)

In dieser Aufgabe modellieren Sie Anforderungen an das Kursverwaltungssystem aus Aufgabe 1, das um die folgenden Mengen und die folgende Funktion erweitert ist:

RAUM	modelliert die Menge der Räume, die im Kursverwaltungssystem verwaltet werden.
räume-von : KURS $\to \mathcal{P}$(RAUM)	modelliert für jeden Kurs $k \in$ KURS die Menge der Räume, die zu diesem Kurs zugewiesen ist. Falls räume-von$(k) = \emptyset$ gilt, dann ist dem Kurs k kein Raum zugeordnet.
RAUMTYP := {*vl-saal*, *se-raum*}	modelliert die Menge der Raumtypen, wobei *vl-saal* den Raumtyp Vorlesungssaal und *se-raum* den Raumtyp Seminarraum modelliert.
raumtyp-von : RAUM $\to$ RAUMTYP	modelliert für jeden Raum $r \in$ RAUM, den Raumtyp des Raums r.

► **Notationskonvention:** Die Schreibweise (x, xs) wird als Abkürzung für die Folge $(x, x_1, ..., x_n)$ verwendet wenn $xs = (x_1, ..., x_n)$ gilt.

► **Zur Information:** Sie können diese Aufgabe auch dann lösen, wenn Sie Aufgabe 1 nicht bearbeitet haben. Alle vier nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung alle Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in der Aufgabenstellung von Aufgabe 1 (inklusive Teilaufgaben) deklariert wurden, auch wenn Sie Aufgabe 1 nicht vollständig bearbeitet haben.

(3P) (A). Die Anforderung „Jedem Kurs ist mindestens ein Raum zugewiesen." sei durch folgende Relation modelliert:

ANFORDERUNG1 $\subseteq$ (KURS $\to \mathcal{P}$(RAUM))

räume-von $\in$ ANFORDERUNG1 genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_1 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_1 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

(3P) (B). Die Anforderung „Keinem Kurs sind mehr als zwei Räume zugewiesen." sei durch folgende Relation modelliert:

ANFORDERUNG2 $\subseteq$ (KURS $\to \mathcal{P}$(RAUM))

räume-von $\in$ ANFORDERUNG2 genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_2 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_2 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

(C). Die Anforderung „Nur Vorlesungssäle sind Vorlesungen zugewiesen." sei durch folgende Relation modelliert: (4P)

ANFORDERUNG3 $\subseteq$ (KURS $\to \mathcal{P}$(RAUM))

räume-von $\in$ ANFORDERUNG3 genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_3 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_3 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

(D). Die Anforderung „Jedes Praktikum und jedes Seminar sind genau einem Seminarraum und keinem anderem Raum zugewiesen" sei durch folgende Relation modelliert: (5P)

ANFORDERUNG4 $\subseteq$ (KURS $\to \mathcal{P}$(RAUM))

räume-von $\in$ ANFORDERUNG4 genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_4 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_4 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Aufgabe 3: Syntax und Semantik (16 Punkte)

In dieser Aufgabe erweitern Sie die Programmiersprache IMP. Folgende Wertebereiche werden verwendet:

Num	die Zahlen,	AExp	die arithmetischen Ausdrücke,
Bool	die Wahrheitswerte,	BExp	die Booleschen Ausdrücke,
Var	die Programmvariablen,	CCom	die Kommandos.

Die neue Sprache CIMP erweitert IMP um die im Folgenden grau hervorgehobenen Kommandos. Der Wertebereich CCom ist durch folgende Grammatik in BNF definiert, wobei $a \in \mathsf{AExp}$, $b \in \mathsf{BExp}$, $X \in \mathsf{Var}$ und $l \in (\mathsf{Num} \times \mathsf{CCom})^*$:

$$c ::= \texttt{skip} \mid X := a \mid c; c \mid \texttt{if } b \texttt{ then } c \texttt{ else } c \texttt{ fi} \mid \texttt{while } b \texttt{ do } c \texttt{ od} \mid \texttt{case } a \texttt{ of } l \texttt{ end}$$

Die Intuition des Kommandos case a of l end ist: Wenn der Ausdruck a im aktuellen Zustand zu n auswertet und (n', c) das erste Paar in l ist, für das $n' = n$ gilt, dann wird das Kommando c im aktuellen Zustand ausgeführt. Existiert kein solches Paar (n', c) in l, dann bleibt bei der Ausführung des Kommandos case a of l end der aktuelle Zustand unverändert. Ist l leer, dann bleibt bei der Ausführung des Kommandos case a of l end der aktuelle Zustand ebenfalls unverändert.

■ Erweitern Sie den Kalkül für die Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$ (siehe Beiblatt) um Kalkülregeln, mit denen Instanzen des Urteils $\langle \texttt{case } a \texttt{ of } l \texttt{ end}, \sigma\rangle \to \sigma'$ hergeleitet werden können. Dabei sollen die Kalkülregeln die im Aufgabentext beschriebene Intuition des Kommandos case a of l end angemessen modellieren. Sie brauchen in dieser Aufgabe aber nicht für die Angemessenheit der Kalkülregeln zu argumentieren.

Hinweis: Es existiert eine angemessene Lösung mit drei Kalkülregeln.

► **Notationskonvention:** Die Schreibweise (x, xs) wird als Abkürzung für die Folge $(x, x_1, ..., x_n)$ verwendet wenn $xs = (x_1, ..., x_n)$ gilt.

► **Zur Information:** Sie finden alle Kalkülregeln zur operationellen Semantik von IMP zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

Aufgabe 4: Programmäquivalenz (17 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Äquivalenz zweier Programme. Seien

$$P_1 := \texttt{if } b_1 \texttt{ then } c \texttt{ else if } b_2 \texttt{ then } c \texttt{ else skip fi fi}$$
$$P_2 := \texttt{if } (b_1 \text{ or } b_2) \texttt{ then } c \texttt{ else skip fi}$$

wobei b_1 und b_2 Metavariablen für boolesche Ausdrücke sind und c eine Metavariable für Kommandos ist. Dann gilt:

$$P_1 \sim P_2$$

In dieser Aufgabe soll die folgende Aussage bewiesen werden, welche einen Teil des Beweises der obigen Äquivalenz darstellt:

(∗) Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und alle Grundsubstitutionen η, deren Definitionsbereich b_1, b_2 und c einschließt, für die das Urteil

$$\langle (\texttt{if } b_1 \texttt{ then } c \texttt{ else if } b_2 \texttt{ then } c \texttt{ else skip fi fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle (\texttt{if } (b_1 \text{ or } b_2) \texttt{ then } c \texttt{ else skip fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar.

■ Vervollständigen Sie den folgenden Beweis der Aussage (∗) durch Ausfüllen der Boxen auf dieser und den folgenden Seiten.

Beachten Sie, dass alle Prämissen für verwendete Regeln instanziiert werden müssen. Herleitungen für ein Urteil dürfen Sie nur dann abkürzen, wenn deren Existenz schon sichergestellt ist.

► **Zur Information**: Alle Regeln der operationellen Semantik von IMP finden Sie zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

Antwort:

Seien die Zustände $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und die Grundsubstitution η, deren Definitionsbereich b_1, b_2 und c einschließt, beliebig, sodass es eine Herleitung von

gibt. In der Herleitung gibt es zwei Möglichkeiten für die letzte Regel: *rift* und *riff*. Wir fahren mit einer vollständigen Fallunterscheidung über diese beiden Möglichkeiten für die letzte Regel fort.

Fall *rift*: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle (\texttt{if } (b_1 \text{ or } b_2) \texttt{ then } c \texttt{ else skip fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Fall rift: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

In der Herleitung gibt es zwei Möglichkeiten für die letzte Regel: rift und riff. Wir fahren mit einer vollständigen Fallunterscheidung über diese beiden Möglichkeiten für die letzte Regel fort.

Fall rift: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

$$\text{rift}\ \frac{\dfrac{\vdots\ \mathcal{H}_5}{\langle b_2\eta,\ \sigma\rangle \Downarrow \texttt{true}} \qquad \dfrac{\vdots\ \mathcal{H}_4}{\langle c\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'}}{\langle(\texttt{if}\ b_2\ \texttt{then}\ c\ \texttt{else}\ \texttt{skip}\ \texttt{fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Das Urteil $\langle(\texttt{if}\ (b_1\ \texttt{or}\ b_2)\ \texttt{then}\ c\ \texttt{else}\ \texttt{skip}\ \texttt{fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

$$\text{rift}\ \frac{\text{rort2}\ \dfrac{\dfrac{\vdots\ \mathcal{H}_5}{\langle b_2\eta,\ \sigma\rangle \Downarrow \texttt{true}}}{\langle(b_1\ \texttt{or}\ b_2)\eta,\ \sigma\rangle \Downarrow \texttt{true}} \qquad \dfrac{\vdots\ \mathcal{H}_4}{\langle c\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'}}{\langle(\texttt{if}\ (b_1\ \texttt{or}\ b_2)\ \texttt{then}\ c\ \texttt{else}\ \texttt{skip}\ \texttt{fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Fall riff: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle(\texttt{if}\ (b_1\ \texttt{or}\ b_2)\ \texttt{then}\ c\ \texttt{else}\ \texttt{skip}\ \texttt{fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Aufgabe 5: Transitionssysteme & CSP (10 Punkte)

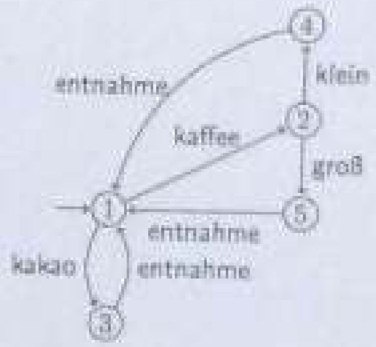
► **Zur Information:** Alle zwei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie finden die Syntax von CSP, die Semantik von CSP und die dazugehörige Intutition zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

(4 P) (A). In dieser Aufgabe betrachten Sie ein Transitionssystem. Es modelliert einen Getränkeautomaten für Heißgetränke. Der Getränkeautomat kann zwei verschiedene Heißgetränke in Bechern zubereiten: Kaffee und Kakao. Für Kakao ist die Größe des Bechers festgelegt. Für Kaffee gibt es Becher in zwei Größen: Klein und groß. Zur Zubereitung wird zuerst das Heißgetränk gewählt. Falls Kaffee gewählt wurde, wird anschließend die Bechergröße gewählt. Falls Kakao gewählt wurde, entfällt die Wahl der Bechergröße. Danach wird der Kaffee bzw. der Kakao zubereitet und dann der Becher entnommen werden. Nach der Entnahme kann ein neues Heißgetränk zubereitet werden. Das Transitionssystem *TS5A* modelliert den Getränkeautomaten. Dabei modelliert

- das Ereignis kaffee die Auswahl von Kaffee,
- das Ereignis kakao die Auswahl von Kakao,
- das Ereignis klein die Auswahl der Bechergröße klein,
- das Ereignis groß die Auswahl der Bechergröße groß und
- das Ereignis entnahme die Entnahme des Bechers.

Das gegebene Diagramm veranschaulicht das Transitionssystem *TS5A*

$$\begin{aligned}
TS5A &:= (\mathsf{S5A}, \mathsf{S5A}_0, \mathsf{E5A}, \rightarrow_{\mathsf{5A}}),\\
\mathsf{S5A} &:= \{1,2,3,4,5\}\\
\mathsf{S5A}_0 &:= \{1\},\\
\mathsf{E5A} &:= \{\mathsf{kaffee}, \mathsf{kakao}, \mathsf{klein}, \mathsf{groß}, \mathsf{entnahme}\}\\
\rightarrow_{\mathsf{5A}} &:= \{(1, \mathsf{kaffee}, 2), (1, \mathsf{kakao}, 3)\\
&\quad (2, \mathsf{klein}, 4), (2, \mathsf{groß}, 5),\\
&\quad (3, \mathsf{entnahme}, 1), (4, \mathsf{entnahme}, 1), (5, \mathsf{entnahme}, 1)\}
\end{aligned}$$



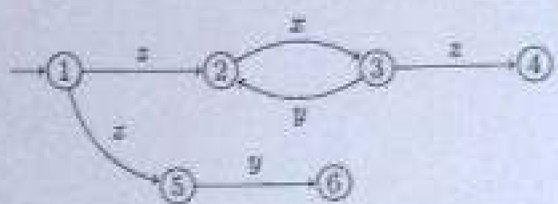
■ Widerlegen Sie folgende Aussage:

„Wenn ein Becher entnommen wird, muss irgendwann zuvor Kakao ausgewählt worden sein."

Geben Sie dazu eine Ereignisspur der durch das Transitionssystems *TS5A* induzierten Menge von Ereignisspuren E-Traces(*TS5A*) $\subseteq \mathsf{E5A}^*$ an, die die Aussage verletzt.

(B). Es sei folgendes Transitionssystem *TS5B* gegeben. Das gegebene Diagramm visualisiert das Transitionssystem *TS5B*. (6 P)

$$\begin{aligned}
TS5B &:= (\mathsf{S5B}, \mathsf{S5B}_0, \mathsf{E5B}, \rightarrow_{\mathsf{5B}}),\\
\mathsf{S5B} &:= \{1,2,3,4,5,6\},\\
\mathsf{S5B}_0 &:= \{1\},\\
\mathsf{E5B} &:= \{x, y, z\},\\
\rightarrow_{\mathsf{5B}} &:= \{(1, z, 2), (2, x, 3), (3, y, 2),\\
&\quad (3, z, 4), (1, z, 5), (5, x, 6)\}
\end{aligned}$$



■ Definieren Sie den Prozessausdruck *P5B* durch ein Gleichungssystem aus Prozessausdrücken, sodass der Prozessausdruck *P5B* den Prozess (E5B, E-Traces(*TS5B*)) spezifiziert.

Antwort:

$P5B =_{\mathsf{E5B}}$