

1. Aufgabe

Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^{n+1} ein Teiler von $3^{2^n} - 1$, d.h. es gibt $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$3^{2^n} - 1 = 2^{n+1} \cdot q.$$

Anfang $n=0$: Für $n=0$ ist $3^{2^n} - 1 = 3^1 - 1 = 2$
 $= 2^{0+1} \cdot 1$

also stimmt die Aussage für $n=0$.

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$3^{2^n} - 1 = 2^{n+1} \cdot q.$$

Schritt $n \rightarrow n+1$: Es gilt

$$3^{2^{n+1}} - 1 = 3^{2^n \cdot 2} - 1^2 = (3^{2^n})^2 - 1^2$$

$$\stackrel{\text{Hinweis}}{=} (3^{2^n} + 1) \cdot (3^{2^n} - 1)$$

$$= (3^{2^n} - 1 + 2) \cdot (3^{2^n} - 1)$$

$$\stackrel{\text{Annahme}}{=} (2^{n+1} \cdot q + 2) \cdot 2^{n+1} \cdot q$$

$$= (2^n \cdot q + 1) \cdot 2 \cdot 2^{n+1} \cdot q$$

$$= (2^n \cdot q + 1) \cdot 2^{n+1+1} \cdot q$$

(2)

$$= 2^{n+1+1} \cdot \underbrace{(2^n \cdot q + 1) \cdot q}_{=: \hat{q}}$$

Offenbar ist $\hat{q} \in \mathbb{Z}$, weil $2^n, q, 1 \in \mathbb{Z}$.

Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe

(a) und (b): Es gilt

$$A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot b_1,$$

$$A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot b_2 \text{ und}$$

$$A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot b_3.$$

Wegen $b_j \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ sind b_1, b_2, b_3

Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$. Die Vektoren

b_1 und b_2 sind linear unabhängig, denn

$$\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Also ist $\{b_1, b_2\}$ Basis von $E(A, -2)$. (3)

Da $4 \neq -2$, muss $\{b_1, b_2, b_3\}$ Basis sein (siehe Satz 3.11.11. (c)), denn b_3 spannt $E(A, 4)$ auf. Also sind -2 und 4 die Eigenwerte von A .

(c) Bezüglich \mathcal{B} gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ denn nach (b)}$$

ist $m_1 := \dim(E(A, -2)) = 2$, $m_2 := \dim(E(A, 4)) = 1$, also

ist $m_1 + m_2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Nach Satz 3.11.13.

hat ϕ bzgl. \mathcal{B} die Matrix von oben.

3. Aufgabe

(a) Sei $p(\lambda) := X$, dann ist $p \in V$, $p(0) = 0$,

aber $p \neq 0_V$. Somit gilt

$\|p\|_0 = 0$ für ein $p \neq 0_V$, d.h. (N1) ist nicht erfüllt.

(b) Es gilt $p(0)=0$ für $p(x):=x$, d.h.

(4)

$U \neq \emptyset$. Seien nun $p, q \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot p + \mu \cdot q)(0) &\stackrel{\text{Def.}}{=} (\lambda \cdot p)(0) + (\mu \cdot q)(0) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \underbrace{\lambda \cdot p(0)}_{=0} + \underbrace{\mu \cdot q(0)}_{=0} \end{aligned}$$

$$p, q \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0, \text{ d.h.}$$

$$\lambda \cdot p + \mu \cdot q \in U.$$

$$(c) \quad \tilde{p} = \tilde{q} \stackrel{\text{Def. } V/U}{\Leftrightarrow} p - q \in U$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (p - q)(0) = 0$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} p(0) - q(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow p(0) = q(0),$$

wobei $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/U$.

(d) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert: Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/U$

mit $\tilde{p} = \tilde{q}$. Dann ist $p(0) = q(0)$ nach (c).

Also ist $\|\tilde{p}\| = |p(0)| = |q(0)| = \|\tilde{q}\|$.

(N1): Sei $\tilde{p} \in V/U$. Dann ist $\|\tilde{p}\| = |p(0)| \geq 0$.

Sei $\|\tilde{p}\| = 0$, d.h. $p(0) = 0$. Dann ist

$p \in \mathcal{U}$ (nach Def. von \mathcal{U}). Nach Definition (5)

von V/\mathcal{U} ist $\mathcal{O}_{V/\mathcal{U}} = \tilde{p}$ mit $p \in \mathcal{U}$, d.h.

(N1) ist erfüllt.

(N2): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\tilde{p} \in V/\mathcal{U}$. Dann ist

$$\|\alpha \cdot \tilde{p}\| \stackrel{\text{Def. } V/\mathcal{U}}{=} \|\widetilde{\alpha \cdot p}\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |(\alpha \cdot p)(0)|$$

$$= |\alpha \cdot p(0)| \stackrel{|\cdot| \text{ Norm}}{=} |\alpha| \cdot |p(0)|$$

$$\stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |\alpha| \cdot \|\tilde{p}\|. \quad \checkmark$$

(N3) Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/\mathcal{U}$. Dann gilt

$$\|\tilde{p} + \tilde{q}\| \stackrel{\text{Def. } V/\mathcal{U}}{=} \|\widetilde{p+q}\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |(p+q)(0)|$$

$$= |p(0) + q(0)|$$

$$\stackrel{\substack{\Delta\text{-Ungl. f\"ur} \\ |\cdot|}}{\leq} |p(0)| + |q(0)| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|\tilde{p}\| + \|\tilde{q}\|.$$

4. Aufgabe

(a) Wahr: Nach dem Kleinen Satz von Fermat ist $a^p \equiv a \pmod{p}$, d.h. es gibt zunächst

$k \in \mathbb{Z}$ mit $a^p - a = k \cdot p \Leftrightarrow a^p = a + k \cdot p$.

Wegen $p \geq 2$ und $a \in \mathbb{N}$ ist $a^p - a \geq 0$, d.h. es

gilt sogar $k \in \mathbb{N}$.

(6)

(b) Wahr: Es gilt

$$\begin{aligned}\phi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= \left((1, 0, 1)^T \mid \lambda \cdot x + \mu \cdot y \right) \\ &\stackrel{(SP2)}{=} \left(\lambda \cdot x + \mu \cdot y \mid (1, 0, 1)^T \right) \\ &\stackrel{(SP3)}{=} \lambda \cdot (x \mid (1, 0, 1)^T) + \mu \cdot (y \mid (1, 0, 1)^T) \\ &\stackrel{(SP2)}{=} \lambda \cdot ((1, 0, 1)^T \mid x) + \mu \cdot ((1, 0, 1)^T \mid y) \\ &= \lambda \cdot \phi(x) + \mu \cdot \phi(y),\end{aligned}$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nach Satz 3.6.2.
ist ϕ linear.

(c) Wahr: Reflexiv klar, denn $v \sim v \Leftrightarrow v$ und v
sind linear
abhängig.

Symmetrisch: Sei $v \sim w$, d.h. v und w linear ab-
hängig. Dann gibt es $\lambda \neq 0$ mit
 $v = \lambda \cdot w$. Also sind auch w und v
linear abhängig, d.h. $w \sim v$.

Transitiv: Sei $v \sim w$ und $w \sim u$, dann gibt
es $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ mit $v = \lambda \cdot w$ und $w = \mu \cdot u$.

Also ist $v = \lambda \cdot w = \lambda \cdot \mu \cdot u = \gamma \cdot u$ mit
 $\gamma = \lambda \cdot \mu \neq 0$. Somit ist auch $v \sim u$, d.h.
 v und u sind linear abhängig.

5. Aufgabe

7

(a) Wahr: Klar!

(b) Wahr: Für $g=n$ gilt $g * g = n * n = n$.

(c) Wahr: $(-e) \cdot (-e) = e$.

(d) Wahr: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{|z|^2 + z^2}{z} &= \frac{z \cdot \bar{z} + z \cdot z}{z} = \frac{z \cdot (\bar{z} + z)}{z} \\ &= \bar{z} + z = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(e) Falsch: $V = \mathbb{C}^2 = U$ und $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
sowie $W = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ mit $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $U \cap W = W$ und $B_U \cap B_W = \emptyset$.

(f) Wahr: $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = 0$.

(g) Falsch: $0 \cdot x = 1, x \in \mathbb{R}$, ist unlösbar.

(h) Wahr: Korollar 3.6.18.