# Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Thomas Streicher**

**SS 2017**
**07.09.2017**

Name: ...............................................

Vorname: ...............................................

Matrikelnummer: .......................................

Studiengang: ...........................................

Semester: ...............................................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ | Bonus | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 14 | 7 | 15 | 11 | 17 | 10 | 16 | 90 | | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | | | |

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nehmen Sie bitte **eigenes Papier**. Versehen Sie alle Blätter mit **Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

**Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

**Viel Erfolg!**

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

## 1. Aufgabe (3+7+4 Punkte) (14 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$c_n := \frac{2n + (-1)^n}{6n^2 - 2n}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit Hilfe der Grenzwertsätze für Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(b) Betrachten Sie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in (0,\infty)$. Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Beweisen Sie, dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert, d.h., dass der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

existiert. Konvergiert sie auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 2. Aufgabe (3+4 Punkte) (7 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

(b) Sei $z := 1 + i \cdot \sqrt{3}$. Berechnen Sie $z^3$ und den Betrag $|z|$.

## 3. Aufgabe (5+4+2+4 Punkte) (15 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\varphi : I \to I$ heißt *Kontraktion auf $I$*, falls es eine Zahl $K \in [0,1)$ gibt, sodass für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K \cdot |x - y|.$$

Betrachten Sie im Folgenden die Abbildung $f : \left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := 1 + \frac{1}{x}, \qquad \text{für } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : \left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ eine Kontraktion auf $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ist und geben Sie ein mögliches $K$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $f$ auf $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ höchstens einen Fixpunkt besitzt.

(d) Bestimmen Sie den Fixpunkt von $f$ in $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

## 4. Aufgabe (6+5 Punkte) (11 Punkte)

Betrachten Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cdot \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass der Approximationsfehler $|f(x) - T_{2,f}(x;0)|$ auf dem Intervall $\left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$ echt kleiner als $10^{-6}$ ist.

## 5. Aufgabe (17 Punkte)

Bestimmen und charakterisieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 \cdot y - y^2 - \frac{y}{2}, \qquad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

## 6. Aufgabe (10 Punkte)

Lösen Sie das nachfolgende Anfangswertproblem durch Variation der Konstanten:

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{t} = t^2, & t > 0, \\ y(1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis.

## 7. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

| | Wahr | Falsch |
|---|---|---|
| 1.) Sei $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann kann $a_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. | ☐ | ☐ |
| 2.) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in \mathbb{R}$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt aus $\lvert x - y\rvert < \delta$ bereits $\lvert f(x) - f(y)\rvert > \varepsilon$. | ☐ | ☐ |
| 3.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist $f$ Lipschitz-stetig. | ☐ | ☐ |
| 4.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, dann ist $f$ im allgemeinen nicht stetig. | ☐ | ☐ |
| 5.) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$. | ☐ | ☐ |
| 6.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}$. Dann ist das Konvergenzintervall der Reihe durch $[-r, r]$ gegeben. | ☐ | ☐ |
| 7.) Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen gegeben sind, sind im Inneren des Konvergenzbereichs immer stetig, also auch integrierbar. | ☐ | ☐ |
| 8.) Für unbestimmte Integrale kann die Regel der Partiellen Integration nicht formuliert werden. | ☐ | ☐ |