Klausur zur „Mathematik II für Informatik“ und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SS 2018
06.09.2018

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....
Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	12	10	12	15	15	10	16	90	
erreichte Punkte									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehnen Platz**. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht, Lose Blätter ohne Namen können nicht bewertet werden.

Sollten Sie **weiteres Papier** benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. Versehen Sie in diesem Fall jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Kennzeichnen Sie außerdem, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

Klausur Mathematik II für Informatik

Name, Vorname: ______________________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 1 (Integralrechnung)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale.

a)

$$\int_0^2 (x-2)e^{3x}\, dx$$

b)

$$\int_0^\infty t^2 \exp(-t^3+2)\, dt$$

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen)

a) Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = 12t^2 e^{-y(t)} - e^{-y(t)}, & t \geq \frac{1}{2}, \\ y(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 9y''(t) = 0.$$

Aufgabe 3 (Bestimmung von Extremwerten)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x,y)^T \mapsto \frac{1}{3}xy^3 - xy + \frac{1}{2}x^2 + 18.$$

Bestimmen und charakterisieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion.

Aufgabe 4 (Konvergenz von Reihen)

a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k))$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k} x^{3k}$$

konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Klausur Mathematik II für Informatik

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x)$.

- Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung von f im Entwicklungspunkt $x = \frac{1}{3}$. Die Terme müssen nicht ausmultipliziert werden!
- Zeigen Sie, dass der Fehler im Intervall $[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ echt kleiner als 10^{-1} ist.

Aufgabe 6 (Lipschitz-Stetigkeit)

Zeigen Sie: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f auf dem Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig. Geben Sie auch eine Abschätzung für die Lipschitz-Konstante an.

Aufgabe 7 (Multiple Choice)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.
Wahr ☐ Falsch ☐

b) Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x^2)}{1-\exp(x^2)} = -3$.
Wahr ☐ Falsch ☐

c) Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert.
Wahr ☐ Falsch ☐

d) Die Menge $[3, \infty)\setminus(4, 7)$ ist abgeschlossen und unbeschränkt.
Wahr ☐ Falsch ☐

e) Gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dass $f(x) \leq -\frac{1}{2}$ für alle $x \in [0, 2]$, so ist $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 1$.
Wahr ☐ Falsch ☐

f) Die Funktion $f(x) = \sin(\pi x) + 3\cos(\pi x) - \sin^2(2\pi x) + 6\cos^2(2\pi x)$ ist eine trigonometrisches Polynom.
Wahr ☐ Falsch ☐

g) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{y}\cos(xy)\,dy$ gilt $f'(1) = -1$.
Wahr ☐ Falsch ☐

h) Falls $f : \mathbb{R}^2 \to$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar ist, so ist die Hesse-Matrix (falls existent) in x_0 symmetrisch.
Wahr ☐ Falsch ☐