Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2019/2020
12.03.2020

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen. ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	20	10	6	7	7	15	10	75	
erreichte Punktzahl									

Zweitprüfer bei Drittversuch: ....

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.** Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte, wie beispielsweise Kugelschreiber**. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(1) Für beliebige Mengen A, B und C in einer Grundmenge G gilt $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.	X	○
(2) Die Menge $\left\{ \frac{n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Minimum aber kein Maximum.	X	○
(3) Für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k$.	X	○
(4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt: Ist $m \equiv 1 \pmod n$, so ist m durch n teilbar.	○	X
(5) Für alle $a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + l \cdot b$.	X	○
(6) Die Menge $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ mit der Division als Verknüpfung ist eine Gruppe.	○	X
(7) Ist $(\cdot\|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so ist durch $\\|v\\| := (v\|v)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert.	○	X
(8) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \|x\| \\ \|y\| \end{pmatrix}$ ist linear.	○	X

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Es gilt $\boxed{1} = 9^{2020} \mod 10$. $= (81)^{1010} \bmod 10 = ((81 \bmod 10))^{1010} \bmod 10$

$= 1^{1010} \bmod 10$

$= 1 \bmod 10$

(2) Für das Supremum der Menge $M := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup(M) = \boxed{1/2}$.

(3) Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ hat Euklidische Norm $\|x\|_2 = \boxed{3}$

und Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \boxed{2}$.

(4) Für die komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 5i$ und $z_2 = 2 - i$ gilt $z_1 + z_2 = \boxed{7+4i}$ und $\frac{z_1}{z_2} = \boxed{1+3i}$.
Hinweis: Geben Sie die Lösungen in Teilaufgabe (4) in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 + z_2 = (5+5i) + (2-i) = 7 + 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(5+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10 + 5i + 10i + 5i^2}{4 + 2i - 2i - i^2}$$

$$= \frac{5 + 15i}{5} = 1 + 3i$$

2. Aufgabe (Äquivalenzrelationen) (10 Punkte)

Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir definieren eine zweistellige Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Leftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

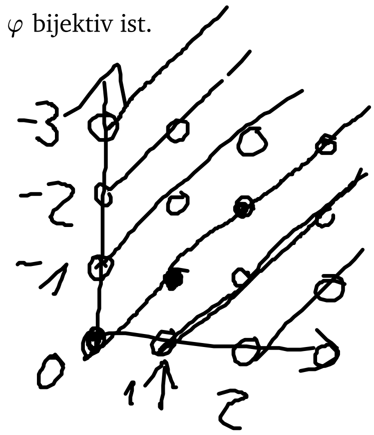
$$\iff m_1 - n_1 = m_2 - n_2$$

für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(\widetilde{(m,n)}) := m - n$ eine Funktion $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ gegeben ist.
Hinweis: Es genügt, wenn Sie die Wohldefiniertheit nachweisen. Zeigen Sie dazu, dass die angegebene Definition von $\varphi(\widetilde{(m,n)})$ nicht von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\widetilde{(m,n)}$ abhängt.

(c) (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ die in Teilaufgabe (b) definierte Funktion. Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.



Hinweis zur Notation: Wir schreiben

$$\widetilde{(m,n)} = \{(m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (m,n) \sim (m_2, n_2)\}$$

für die Äquivalenzklasse von $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Weiter schreiben wir

$$\mathbb{N}^2/_\sim = \{\widetilde{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen. Wie üblich bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

a) (i) Reflexiv. Sei $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

$(m,n) \sim (m,n) :\iff m + n = m + n \iff$ wahr ✓

(ii) Symmetrisch. ~~Seien~~ $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$.

$(m_2,n_2) \sim (m_1,n_1) :\iff m_2 + n_1 = m_1 + n_2$

$\iff m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ wahr, weil $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ ✓

(iii) Transitiv. $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$, $(m_2,n_2) \sim (m_3,n_3)$.

$(m_1,n_1) \sim (m_3,n_3) :\iff m_1 + n_3 = m_3 + n_1 \iff$

$m_1 + \cancel{n_3} = \cancel{m_3} + n_1 + \underbrace{(m_2 + \cancel{n_3} - (\cancel{m_3} + n_2))}_{=0 \ (m_2,n_2) \sim (m_3,n_3)}$

$\iff m_1 + n_2 = n_1 + m_2 \iff$ wahr, wegen $(m_1,n_1) \sim (m_3,n_3)$ ✓

2. Aufgabe (Äquivalenzrelationen) (10 Punkte)

Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir definieren eine zweistellige Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Leftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(\widetilde{(m,n)}) := m - n$ eine Funktion $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ gegeben ist.
Hinweis: Es genügt, wenn Sie die Wohldefiniertheit nachweisen. Zeigen Sie dazu, dass die angegebene Definition von $\varphi(\widetilde{(m,n)})$ nicht von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\widetilde{(m,n)}$ abhängt.

(c) (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N}^2/_\sim \to \mathbb{Z}$ die in Teilaufgabe (b) definierte Funktion. Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.

Hinweis zur Notation: Wir schreiben

$$\widetilde{(m,n)} = \{(m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid (m,n) \sim (m_2, n_2)\}$$

für die Äquivalenzklasse von $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Weiter schreiben wir

$$\mathbb{N}^2/_\sim = \{\widetilde{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen. Wie üblich bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

b) Seien $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$

$\varphi((m_1,n_1)) - \varphi((m_2,n_2)) = (m_1 - n_1) - (m_2 - n_2)$

$= m_1 - n_1 - m_2 + n_2 = (m_1+n_2) - (m_2+n_1)$

$= 0$ ✓

c) Surjektiv: Sei $k \in \mathbb{Z}$.

Fall 1: $k \geq 0$: $(k,0) = (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$. Dann $\varphi((m,n)) = m - n = k - 0 = k$

Fall 2: $k < 0$: $(0,-k) = (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$. Dann $\varphi((m,n)) = m - n = 0 - (-k) = k$ ✓

Injektiv:

Seien $(m_1,n_1), (m_2,n_2) \in \mathbb{N}_0^3$ mit $\varphi((m_1,n_1)) = \varphi((m_2,n_2))$.

Zeige $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$.

$(m_1+n_2) - (m_2+n_1) = m_1 - n_1 + n_2 - m_2$

$= (m_1-n_1) - (m_2-n_2) = \varphi((m_1,n_1)) - \varphi((m_2,n_2)) = 0$

$\Rightarrow (m_1+n_2) = m_2+n_1 \Leftrightarrow (m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ ✓

3. Aufgabe (Untervektorräume) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Teilmengen

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y = 1 \right\}$$

des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$.

(a) (4 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge V ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Menge W ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum ist, müssen Sie insbesondere auch $U \neq \emptyset$ nachweisen.

a) (UVR1) V ist nichtleer:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$, da $x + y = 0 + 0 = 0$. ✓

(UVR2) Seien $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann $w = \lambda u + \mu \cdot v \in V$?

$w = (\lambda u + \mu \cdot v)$

$w_1 + w_2 = (\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1) + (\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2)$

$= \lambda (u_1 + u_2) + \mu \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow w \in V$ ✓

$\Rightarrow$ V ist UVR.

---

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, denn $x \cdot y = 1 \cdot 1 = 1$

$\mu = 1, \lambda = 1, u = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$.

$w = \lambda u + \mu v = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$w_1 \cdot w_2 = 2 \cdot 2 = 4 \neq 1 \Rightarrow w \notin W$

(UVR2) verletzt $\Rightarrow$ W kein UVR.

4. Aufgabe (Lineare Unabhängigkeit) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

(b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 linear unabhängig sind.

a) Zeige, dass $\det(A) \neq 0$ für $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$

d.h. es gibt keine nichttriviale Lösung von $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$= A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$

$+1 \quad +2 \quad +3 \quad -6$

$-4 \quad -3 \quad -4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$+2 \quad -8$

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1)(-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 1(-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 2$$

$$= -1 + 4 + 18 + 4 - 3 - 6$$

$$= (18+4+4) - (1+3+6) = 26 - 10 = 16 \neq 0$$

b) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \iff 3$ ist maximale Anzahl l.u. Vektoren

$\iff v_1, \dots, v_3$ bilden Basis $\iff$

$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \iff \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 - v_4 = 0$

$\iff v_1, \dots, v_4$ l.a.

5. Aufgabe (Orthogonalität) (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Euklidischen Norm. Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrix $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot A$ orthogonal ist.
Tipp: Vergessen Sie nicht, dass die Spalten dafür auch normiert sein müssen.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

a) $\frac{1}{\sqrt{6}} A$ orthogonal $\Longleftrightarrow$ Spalte v_1, v_2, v_3 von $\frac{1}{\sqrt{6}} A$ erfüllen $(v_i | v_j) = \delta_{ij}$

$(v_1|v_1) = \frac{1}{6} (\sqrt{2} \; \sqrt{2} \; -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(2+2+2) = 1$ ✓

$(v_1|v_2) = (v_2|v_1) = \frac{1}{6}(\sqrt{2} \; \sqrt{2} \; -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}) = 0$ ✓

$(v_1|v_3) = (v_3|v_1) = \frac{1}{6}(\sqrt{2} \; \sqrt{2} \; -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{6}+0) = 0$ ✓

$(v_2|v_2) = \frac{1}{6}(1 \; 1 \; 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(1+1+2) = 1$ ✓

$(v_2|v_3) = (v_3|v_2) = \frac{1}{6}(1 \; 1 \; 2) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0) = 0$ ✓

$(v_3|v_3) = \frac{1}{6}(\sqrt{3} \; -\sqrt{3} \; 0) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(3+3+0) = 1$ ✓

---

b) $B = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot A$ $\qquad B^T B B^{-1} = E B^{-1} \quad B^T = B^{-1}$.

$B^T = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^T = A^T \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot A^T$

$B^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} A\right)^{-1} = A^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1} = \sqrt{6}\, A^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} A^T = \sqrt{6} \cdot A^{-1} \implies A^{-1} = \frac{1}{6} A^T.$

6. Aufgabe (Diagonalisierung) (15 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
Tipp: Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie das charakteristische Polynom *nicht* vollständig ausmultiplizieren. Versuchen Sie stattdessen, den Faktor $(3-\lambda)$ auszuklammern.

(b) (9 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A einen Eigenvektor.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt. *Hinweis:* Sie brauchen die inverse Matrix S^{-1} nicht zu berechnen.

a) $g_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$ $+$

$= (3-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) - 1\cdot(3-\lambda)\,-4$

$= (3-\lambda)\left((3-\lambda)(-2-\lambda)+4\right)$

$= (3-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda-3\lambda-6+4\right) = (3-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -1$

---

b) $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\cdot 4$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\cdot(-3)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

II: $v_{1,3} = 0 \Rightarrow I$ $v_{1,1} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Aufgabe (Diagonalisierung) (15 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
Tipp: Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie das charakteristische Polynom *nicht* vollständig ausmultiplizieren. Versuchen Sie stattdessen, den Faktor $(3-\lambda)$ auszuklammern.

(b) (9 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A einen Eigenvektor.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt. *Hinweis:* Sie brauchen die inverse Matrix S^{-1} nicht zu berechnen.

$\underline{\lambda_2 = 2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (4) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_{2,3} = -1$, $\underline{II}$: $v_{2,2} = 1$ $\underline{I}$: $v_{2,1} = 1$ $\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(+1) \\ (-\frac{1}{4}) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_{3,3} = 16$ $\quad II: v_{3,2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{7}{4}\cdot 16\right) = -7$

$I: v_{3,1} = \frac{1}{4}(-1\cdot 16) = -4 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$

---

c) $A \cdot \underbrace{(v_1 | v_2 | v_3)}_{=:S} = (\lambda_1 \cdot v_1 | \lambda_2 v_2 | \lambda_3 \cdot v_3) = (v_1|v_2|v_3) \cdot \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{=:D}$

$A \cdot S = S \cdot D$

S ist invertierbar, da Spalten v_1, v_2, v_3 als EV zu unterschiedlichen EW l.u. $\Rightarrow A = S\cdot D\cdot S^{-1}$

$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 16 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Aufgabe (Induktion und Grenzwerte) (10 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n, dass $0 \le f_n \le f_{n+1} \le 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Es gilt $2^0 = 1$.

(b) (4 Punkte) Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n^n} = 0$ gilt.

a) Induktionsanfang: $n=0$: $0 \le f_0 = 1 \le f_1 = 1 \le 2^0 = 1$ ✓ ✓ ✓ ✓

Induktionsannahme: $0 \le f_n \le f_{n+1} \le 2^n \quad (*)$

Induktionsschritt: Zeige $0 \le f_{n+1} \le f_{n+2} \le 2^{n+1}$.

$f_{n+1} - 0 \ge f_n - 0 \overset{(*)}{\ge} 0 \Rightarrow f_{n+1} \ge 0$. ✓

$f_{n+2} - f_{n+1} = (f_{n+1} + f_n) - f_{n+1} = f_n \overset{(*)}{\ge} 0 \Rightarrow f_{n+2} \ge f_{n+1}$ ✓

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - f_{n+2} &= 2^{n+1} - (f_{n+1} + f_n) \\ &\overset{*}{\ge} 2^{n+1} - (f_{n+1} + f_n + \underbrace{(f_{n+1} - f_n)}_{\ge 0 \, (*)}) \\ &= 2^{n+1} - 2 \cdot f_{n+1} \\ &\overset{(*)}{\ge} 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 0 \Rightarrow 2^{n+1} \ge f_{n+2} \end{aligned}$$ ✓

b) Wissen aus a) $0 \le f_n \le 2^n$.

$\underbrace{0}_{=:a_n} \le \underbrace{\frac{f_n}{n^n}}_{=:b_n} \le \underbrace{\frac{2^n}{n^n}}_{=:c_n} \qquad a_n \le b_n \le c_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 0 \Rightarrow$ Sandwich, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n^n} = 0$