Mathe 1 WiSe 18/19

2) $(7^{2n}-4^{2n}) \bmod 33$

$= ((7^2)^n-(4^2)^n) \bmod 33 = (49^n - 16^n) \bmod 33$

$= ((49 \bmod 33)^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33$

$= ((16 \bmod 33^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33 = 0$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

3) a) $(1+x)^n \geq 1+nx$

Induktionsanfang:

Für $n=0$ gilt: $(1+x)^n = 1 = 1+n\cdot x$ ✓

Induktionshypothese:

Für ein fixes beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx$ (IH)

Induktionsschritt:

Betrachte $n+1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{(IH)}{\geq} (1+x)(1+nx)$

$= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2$

$\overset{x^2>0}{\geq} 1+(n+1)x$

b) z.z. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$, $x>0$.

Es gilt:

$\frac{1}{(1+x)^n} \overset{a)}{\leq} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

4) "$\subseteq$": Sei $v \in \langle M \rangle$. Dann existieren $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $m_i \in M$: $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i$.

Sei $U \in \mathcal{M}$. Dann ist $m_i \in U$ für alle $i=1,..,n$.

Also auch $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i \in U$.

Da U beliebig, gilt $v \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$.

"$\supseteq$": Offensichtlich ist $M \subset \langle M \rangle$. Außerdem ist $\langle M \rangle$ UVR von V.

Also gilt: $\langle M \rangle \in \mathcal{M}$

Damit gilt:

$$\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U = \langle M \rangle \cap \bigcap_{U \in \mathcal{M} \setminus \{\langle M \rangle\}} U \quad \subset \langle M \rangle$$

5)

a) wahr: A orthogonal $(AA^T = I) \Rightarrow |\det A| = 1$

Begründung:

$$|\det A| = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det A \cdot \det A}$$
$$= \sqrt{\det A \cdot \det A^T}$$
$$= \sqrt{\det(A \cdot A^T)} = \sqrt{\det(I)} = 1 \quad \blacksquare$$

b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \neq 0 \Rightarrow A^n \neq 0 \quad \forall n$?

Falsch. $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Sei A symmetrisch pos. def. $(x|y)_A := (x|Ay)$

Prüfe Eigenschaften des Skalarprodukts:

- Definitheit: $(x|x)_A = (x|Ax) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
  und Gleichheit gilt nur für $x = 0$, weil A positiv definit.
- Symmetrie: $(x|y)_A = (x|Ay) \underset{(\cdot|\cdot)\text{ symmetrisch}}{=} (Ay|x) \underset{\text{Hinweis}}{=} (y|A^T x)$

$$\underset{A\text{ symmetrisch}}{=} (y|Ax) = (y|x)_A$$

- Linearität:

$$(\lambda x_1 + \mu x_2 | y)_A = (\lambda x_1 + \mu x_2 | Ay)$$
$$\underset{(\cdot|\cdot)\text{ linear}}{=} \lambda \cdot (x_1|Ay) + \mu \cdot (x_2|Ay)$$
$$= \lambda (x_1|y)_A + \mu (x_2|y)_A$$

$\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Also definiert $(x|y)_A$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

7) a) $A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\det(A_\alpha) =$ α

$= \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$

Die Matrix ist invertierbar falls $0 \neq \det(A_\alpha) = \alpha \cdot (1-\alpha)$

$\Rightarrow$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist A_α invertierbar, für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ nicht.

b) Berechne EW von A_α:

$p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$

$= (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - (\alpha - \frac{1}{2})^2$

$= \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} - (\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4})$

$= \lambda^2 - \lambda + \alpha - \alpha^2$

$= (\lambda - \alpha) \cdot (\lambda - (1-\alpha))$

p-q-Formel

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2 - \alpha}$

$= \frac{1}{2} \pm (\alpha - \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1 - \alpha$

Also ist A_α ähnlich zu

$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$

c) Ges: S, S^{-1} mit $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S$

$E_\alpha(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - \alpha I) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - \alpha & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \end{array}\right) = \langle \{ \binom{1}{1} \} \rangle$

$\Rightarrow \binom{1}{1}$ EV zum EW $\lambda_1 = \alpha$.

$E_{1-\alpha}(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - (1-\alpha) I)$

$= \left(\begin{array}{cc|c} \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = \langle \{ \binom{1}{-1} \} \rangle$

$\Rightarrow \binom{1}{-1}$ EV zum EW $\lambda_2 = 1 - \alpha$.

Also gilt: $S^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{1}_{\text{EV zu EW}_\alpha} & \underbrace{1}_{\text{EV zu EW } 1-\alpha} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Bem: S und S^{-1} waren vertauscht in der Veranstaltung

$S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det S^{-1}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) 1) A_α ist pos. definit, wenn $\min\{\alpha, 1-\alpha\} > 0$,
also für $\alpha \in (0,\infty) \cap (-\infty, 1) = (0,1)$
D.h. A_α ist pos. definit für $\alpha \in (0,1)$

2) A_α ist negativ definit, wenn $\max\{\alpha, 1-\alpha\} < 0$, also
für $\alpha \in (-\infty, 0) \cap (1, \infty) = \emptyset$
Also ist A_α für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ negativ definit.

3) A_α ist indefinit, wenn $\alpha > 0$ und $1-\alpha < 0$ $\Leftrightarrow \alpha > 1$
oder $\alpha < 0$ und $1-\alpha > 0$ $\Leftrightarrow \alpha < 1$

$\alpha \in ((0,\infty) \cap (1,\infty)) \cup ((-\infty, 0) \cap (-\infty, 1))$

$= (1,\infty) \cup (-\infty, 0)$

Also ist A_α indefinit für $\alpha \in (1,\infty) \cup (-\infty, 0)$.

e) $B_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$

$\det(B_\alpha - \lambda I) = \begin{pmatrix} A_\alpha - \lambda I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1-\alpha^2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\alpha^2-\lambda) \cdot \det(A_\alpha - \lambda I)$

$= (1-\alpha^2-\lambda) \cdot (\lambda - \alpha)(\lambda - (1-\alpha))$

$\Rightarrow$ EW von B_α sind α, $1-\alpha$, $1-\alpha^2$.

f) Gilt: A_α invertierbar $\Leftrightarrow$ B_α invertierbar?
Nein, das gilt nicht.
Sei $\alpha = -1$: $\det(A_{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$

Also ist A_{-1} invertierbar, aber

$$\det(B_{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Also ist B_{-1} nicht invertierbar.