Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2012
06.09.2012

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	13	13	10	18	6	60			
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + e^{2y} - 8y$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(b) Entscheiden Sie, ob f ein globales Maximum besitzt.

(c) Entscheiden Sie, ob f ein globales Maximum auf der kompakten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 \leq 1\}$ besitzt.

2. Aufgabe (13 Punkte)

(a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$\text{(i)} \quad \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \lim_{a\to 0} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{1-y(t)^2}{y(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad y(0) := \frac{1}{2}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_{2,f}(x;1)$ zweiten Grades von f um die Entwicklungsstelle 1.

(b) Berechnen Sie $T_{2,f}(4/3;1)$ und zeigen Sie, dass $|f(4/3) - T_{2,f}(4/3;1)| < 0.008$ gilt.

4. Aufgabe (18 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so kann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nicht den Konvergenzradius 1 haben.

(b) Die komplexe Zahlenfolge $(2^{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so ist sie auch in allen Punkten zwischen x und y differenzierbar.

(d) Ist $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$.

(e) Ist $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ unstetig in $x_0 \in \mathbb{R}^6$, so ist f in x_0 nicht total differenzierbar.

(f) Sind $n \geq 2$, sowie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Funktionen, so gilt $J_{g\circ f}(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(J_{g\circ f}(0)) = 0$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie die folgende Aussage:

Existiert eine Konstante $C \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq C\sqrt{|x-y|}$ für alle $x, y \in I$, so ist f auf I stetig.