Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2013**
Dr. Robert Haller-Dintelmann **05.09.2013**

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	16	16	12	16	16	20	96		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (16 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{(x+1)^2}.$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4n!}.$$

(c) Bestimmen Sie die Funktion f, die durch die Potenzreihe aus (b) in ihrem Konvergenzintervall dargestellt wird.

(d) Geben Sie das Taylorpolynom $T_{4,f}(x;0)$ für die Funktion aus (c) an.

Hinweis: Das können Sie auch tun, wenn Sie Aufgabenteil (c) nicht bearbeitet haben.

2. Aufgabe (16 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 - 3y + 3z - z^3.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und stellen Sie fest, ob es sich jeweils um Maxima oder Minima handelt.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe (16 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegegben durch

$$f(x) = \frac{1}{4}\big(\sin(x) + \arctan(x) + 1\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' von f auf ganz $\mathbb{R}$ durch $1/2$ beschränkt ist.

(b) Weisen Sie nach, dass es genau einen Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x_*) = x_*$.

(c) Geben Sie eine Rekursionsvorschrift für eine Folge (x_n) an, so dass für $x_0 = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$.

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\arg(z\overline{z}) = 0$.

(b) Es gibt eine 2 mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_1 f(x,y) = xy$ und $\partial_2 f(x,y) = y$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Es sei $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ die Fourierreihe von $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Dann gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Es seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, sowie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x} = \int_{a/c}^{b/d} \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.	☐	☐
(b)	Ist f stetig mit $f(0) = -3$ und $f(1) = 2$, so gibt es ein $x \in (0,1)$ mit $f(x) = 1$.	☐	☐
(c)	Ist f stetig differenzierbar und bijektiv, so ist auch $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und bijektiv.	☐	☐
(d)	Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$, so ist f stetig in Null.	☐	☐
(e)	Sind f und g monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, so ist auch $f \cdot g$ monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.	☐	☐
(f)	Ist f differenzierbar, so ist f auf $[0,1]$ beschränkt.	☐	☐
(g)	Ist f differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ in $x_0 \in \mathbb{R}$, so liegt in x_0 ein Extremum vor.	☐	☐
(h)	Ist f stetig differenzierbar, so ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ zweimal stetig differenzierbar auf (a,b).	☐	☐
(i)	Es gilt $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x > 0$.	☐	☐
(j)	Die Differentialgleichung $y'(t) = t \cdot y^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.	☐	☐