Mathe 2: Klausur # 3

1. Aufgabe

(a) f ist stetig diff-bar, da es Summe solcher Funktionen ist. Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+18x-24 & 2e^{2y}-8 \end{pmatrix}.$$

Notwendig: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \; 6x^2+18x-24=0 \text{ und } 2e^{2y}=8$$

$$\Leftrightarrow \; x^2+3x-4=0 \text{ und } e^{2y}=4$$

$$\Leftrightarrow \; x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4} \text{ und } 2y=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow \; x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}} \text{ und } y=\frac{1}{2}\ln(4)$$

$$= -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}} \qquad = \ln(4^{1/2})$$

$$= -\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2} \qquad = \ln(2)$$

Also sind $p_1=\begin{pmatrix}-4\\ \ln(2)\end{pmatrix}$ und $p_2=\begin{pmatrix}1\\ \ln(2)\end{pmatrix}$

die kritischen Punkte von f.

Offenbar ist f auch 2-mal stetig partiell diff.bar

mit $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x+18 & 0 \\ 0 & 4e^{2y} \end{pmatrix}.$

Hinreichend: $A_j := H_f(p_j)$ für $j \in \{1,2\}$ ②

$A_1 = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ EW sind -30 und 16, haben also verschiedene Vorzeichen

$\Rightarrow$ A_1 ist indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum in p_1

$A_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ EW 30 und 16 sind beide positiv

$\Rightarrow$ A_2 ist positiv definit

$\Rightarrow$ lokales Minimum in p_2 mit

$f(p_2) = -9 - 8\ln(2)$.

(b) Nein, in (a) haben wir alle Extrema bestimmt und es gibt kein Maximum.

Alternativ: $f(0,y) = e^{2y} - 8y$ ist unbeschränkt, weil e^{2y} schneller als $8y$ wächst für $y \to +\infty$.

(c) f stetig partiell diff.bar $\overset{\text{Satz}}{\underset{\text{aus VL}}{\Rightarrow}}$ f stetig

f stetig auf Kompaktum hat immer globales Maximum auf " " nach Satz vom Maximum.

2. Aufgabe

(a) (i) $$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=g'(x)}\, dx \overset{\text{partielle Integration}}{=} \left[f(x)\cdot g(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)\cdot g(x)\, dx$$

$$= \left[x \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

(ii) $$\lim_{a\to 0} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{a\to 0} \left[2\cdot\sqrt{\sin(x)}\right]_a^{\pi/2}$$

Stamm fkt.

$$\frac{d}{dx}\, 2\cdot\sqrt{\sin(x)} = \frac{\cancel{2}\cdot\cos(x)}{\cancel{2}\cdot\sqrt{\sin(x)}}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(2\cdot 1 - 2\cdot\sqrt{\sin(a)}\right)$$

$$\overset{\sqrt{\sin(\cdot)}}{\underset{\text{stetig in } 0}{=}} 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2.$$

Alternativ: $z(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos(x) \Rightarrow$ $dz = \cos(x)\, dx$

$$\int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \int_{z(a)}^{z(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz = \left[2\sqrt{z}\right]_{\sin(a)}^{1} \xrightarrow[\text{für } a\to 0]{\text{wie oben}} 2$$

(b) Getrennte Variablen liegen vor

$\leadsto$ Schmiermethode

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow \frac{y}{1-y^2}\,dy = 1\cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{y(0)=1/2}^{y(t)} \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int_{t_0=0}^{t} 1\,dt = t.$$

Bestimme $\displaystyle\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{y}{1-y^2}\,dy \overset{f(y):=1-y^2}{=} \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{y}{f(y)}\,dy$

$$= -\frac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{-2y}{f(y)}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{1/2}^{y(t)} \frac{f'(y)}{f(y)}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln(f(y))\Big]_{1/2}^{y(t)}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\ln(f(y(t))) - \ln(f(\tfrac{1}{2}))\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{f(y(t))}{f(\frac{1}{2})}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4(1-y(t)^2)}{3}\right)$$

Also ist $t = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4(1-y(t)^2)}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow -2t = \ln\left(\frac{4(1-y(t)^2)}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-2t} = \frac{4(1-y(t)^2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}e^{-2t} = 1-y(t)^2$$

$$\Leftrightarrow y(t)^2 = 1-\frac{3}{4}e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-2t}}$$

$$\overset{y(0)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \quad y(t) = \sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-2t}}$$

Probe: $y'(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-2t}}}$

$$= \frac{3e^{-2t}}{4\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-2t}}}$$

und $\frac{1-y(t)^2}{y(t)} = \frac{\frac{3}{4}e^{-2t}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-2t}}} = y'(t)$ ✓

sowie $y(0) = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. ✓

3. Aufgabe

(a) $f'(x) \overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Auswerten in $x=1$: $f(1) = 0$

$f'(1) = 1$

$f''(1) = 1$

$$\Rightarrow T_{2,f}(x;1) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

(b) $T_{2,f}(\frac{4}{3};1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{7}{18}$.

Nach Satz von Taylor gibt es ξ zwischen 1 und $\frac{4}{3}$

mit $f(\frac{4}{3}) - T_{2,f}(\frac{4}{3};1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) \cdot \frac{1}{27}.$$

Also ist

$$\left|f(\tfrac{4}{3}) - T_{2,f}(\tfrac{4}{3};1)\right| = \left|-\frac{1}{\xi^2}\right| \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27}$$

$1 \le \xi \le \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\xi^2} \le 1$

$$\le 1 \cdot \frac{1}{162} < 0.008.$$

4. Aufgabe

(a) Falsch: Sei $a_n := \frac{1}{n+1}$. Dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (harmonische Reihe!), aber $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ zeigt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Konvergenzradius $r = \frac{1}{1} = 1$ hat.

(b) Wahr: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$2^{k\cdot i} = e^{\ln(2)\cdot k \cdot i}$, d.h. wegen $|e^{it}| = 1$ $t\in\mathbb{R}$ ist

$|2^{k\cdot i}| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge beschränkt.

(c) Falsch: $f(x) := |x|$ ist diff.bar in -1 und $+1$, aber nicht in 0 (Bsp. aus VL).

(d) Wahr: Das folgt direkt aus Satz 6.9.12.

(e) Wahr: Das ist die Negation von Satz 6.5.6.

(f) Wahr: $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow J_{g\circ f}(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A := J_{g\circ f}(0) = J_g(f(0)) \cdot J_f(0) = g'(f(0)) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(0) & \cdots & \partial_n f(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f(0)\cdot g'(f(0)) & \cdots & \partial_n f(0) \cdot g'(f(0)) \end{pmatrix}$$

Die Spalten von A sind linear abhängig, also ist $\det(A) = 0$.

5. Aufgabe

Sei $x_0 \in I$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in I mit

$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, d.h. $\lim_{n\to\infty} |a_n - x_0| = 0$.

Wir wissen, dass $\sqrt{\cdot}$ in 0 stetig ist, also

gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n - x_0|} = 0$.

Nach Annahme gilt

$$0 \leq |f(a_n) - f(x_0)| \leq C \cdot \sqrt{|a_n - x_0|}.$$

Nach Sandwichtheorem für Folgen ist

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |f(a_n) - f(x_0)| \leq \lim_{n\to\infty} C \cdot \sqrt{|a_n - x_0|} = 0.$$

Somit folgt $\lim_{n\to\infty} |f(a_n) - f(x_0)| = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

Damit ist f stetig in jedem $x_0 \in I$.