Klausur: Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SoSe 22
08.09.2022

Name .... | Matrikelnummer ....

Vorname .... | Studiengang ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	10	9	6	10	6	7	12	60	
erreichte Punktzahl									

Wichtige Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **leserlich in Blockschrift (Grobuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. **Bitte lösen Sie nicht die Tackernadel**. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**. Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte**, wie beispielsweise Kugelschreiber. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. Aufgabe (Wahr oder Falsch) (10 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Aussage wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Aussage wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

		Wahr	Falsch
1.	Die Menge $\mathbb{N} \cap (0, 2022)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.	□	□
2.	Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.	□	□
3.	Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.	□	□
4.	Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x)$ ist ungerade.	□	□
5.	Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn $f \cdot g$ differenzierbar ist, dann sind auch f und g differenzierbar.	□	□
6.	Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in [0,1]$. Wenn f in x_0 ein lokales Maximum hat, gilt $f'(x_0) = 0$.	□	□
7.	Jede stetig partiell differenzierbare Funktion ist total differenzierbar.	□	□
8.	Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Wenn Ober- und Untersumme zu Z übereinstimmen, d.h. $\underline{s}_f(Z) = \bar{s}_f(Z)$, dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.	□	□
9.	Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig und sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = A \cdot y(t), t \in \mathbb{R}$. Dann ist $y(t) = t \cdot y_1(t)$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung .	□	□
10.	Das Anfangswertproblem $y'(t) = 2022 \cdot y(t) + t \cdot e^{y(t)} + 5,\ y(0) = 0$ besitzt eine Lösung auf einem geeigneten Intervall in $\mathbb{R}$.	□	□

2. Aufgabe (Fill-in) (9 Punkte)

Füllen Sie die leeren Kästen aus. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Sie können den Platz auf der nächsten Seite für Nebenrechnungen nutzen, diese werden aber nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit 1 Punkt bewertet. Jede fehlerhafte Antwort wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(a) Geben Sie eine Reihe an, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

$\sum_{n=1}^{\infty}$

(b) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die weder offen noch abgeschlossen ist.

(c) Geben Sie eine Funktion an, die stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. Legen Sie dabei auch den Definitionsbereich fest. $f : \qquad \to \mathbb{R}, x \mapsto$

(d) Geben Sie das richtige Ergebnis in der Form $a + ib$ an mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$2022e^{2022\pi i} =$

$e^{\frac{3}{2}\pi i} =$

(e) Geben Sie eine reelle Funktion an, die stetig, aber nicht differenzierbar ist.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto$

(f) Geben Sie die Ableitung von $f(x) = \ln(\sin(x))$ an.

(g) Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{2x}$ in $x_0 = 3$ an.

$T_{2,f}(x; 3) =$

(h) Geben Sie eine nicht-konstante reelle Funktion an, sodass für die Fourierkoeffizienten von f gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto$

3. Aufgabe (Reihen) (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Sie müssen nicht den Reihenwert bestimmen.

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \qquad\qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2022n^2 + 2022}$$

4. Aufgabe (Extremwertbetrachtung in mehreren Variablen) (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y^2 + \sin(y).$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.

(b) Geben Sie die Hessematrix $H_f(x, y)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der kritischen Punkte gegeben ist durch

$$\left\{ \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(d) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und entscheiden Sie ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

5. Aufgabe (Integrale) (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a)

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

Tipp: Verwenden Sie Substitution.

(b)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x \cdot \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$$

Tipp: Verwenden Sie partielle Integration.

6. Aufgabe (Differentialgleichung höherer Ordnung) (7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + y^{(2)}(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit $y(0) = 2$ und $y(\pi) = 0$.

7. Aufgabe (Beweisen/widerlegen) (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
Hinweis: $I \subseteq \mathbb{R}$ ist ein *Intervall*, wenn für alle $x \leq y \leq z$ mit $x, z \in I$ gilt, dass auch $y \in I$.
Die Menge $f(I)$ ist definiert durch $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$.

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sodass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(c) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f Lipschitz-stetig.

Weiterer Platz für Nebenrechnungen:

Weiterer Platz für Nebenrechnungen: