

Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2016
08.09.2016

Name: Studiengang:
Vorname: Semester:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Bonus	Note
Punktzahl	14	20	7	12	16	69		
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe

(14 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 2}}{2n + 5}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}.$$

(b) Bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten a_1 der Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$.

2. Aufgabe

(20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2(y - 1) - \frac{1}{2}y^2.$$

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung, d. h. $\nabla f(x, y)$ und $H_f(x, y)$.

(b) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(c) Es sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Existiert $\max_{(x, y) \in K} |f(x, y)|$?

3. Aufgabe

(7 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt

$$1 - \frac{x}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{x} - 1.$$

Hinweis: Logarithmus-Rechenregeln und Mittelwertsatz

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned} \ln(z) &= (z - 1) \cdot \frac{1}{\xi} \\ &= \left(\frac{y}{x} - 1\right) \cdot \frac{1}{\xi} \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 3, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-3)^n$ konvergent.

Idee: Wähle a_n , sodass $a_n (-3)^n = \frac{1}{n}$

(b) Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare und ungerade Funktionen. Dann ist $f \cdot g'$ ebenfalls ungerade.

Zur Erinnerung: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ungerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = -f(x)$.

(c) Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) := \int_0^x g(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $f' = g$.

$$1) a.) i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}{n (2+\frac{5}{n})} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{5}{n}} = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2+\frac{5}{n})} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x+1)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

$$b.) \dots = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \overset{u}{x} \overset{v'}{\cos(x)} dx$$

partielle Integration

$$= \frac{2}{\pi} \left[\underset{u}{x} \underset{v}{\sin(x)} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underset{u'}{1} \underset{v}{(+\sin(x))} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[+\cos(x) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (+\cos(\pi) - (+\cos(0)))$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1 - 1) = -\frac{4}{\pi}$$

$$2 \text{ a.) } f(x, y) = x^2(y-1) - \frac{1}{2}y^2$$

f ist (als Polynom) beliebig oft diff.-bar. (1)

$$\nabla f(x, y) = (2x(y-1), x^2 - y)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

b.) Sei (x_0, y_0) ein kritischer Punkt. Dann gilt

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) \Leftrightarrow 2x_0(y_0 - 1) = 0 \quad (I)$$

$$x_0^2 - y_0 = 0 \quad (II)$$

(I) gilt genau dann, wenn $x_0 = 0$ (1. Fall) oder $y_0 = 1$ (2. Fall).

1. Fall ($x_0 = 0$) Dann gilt (vgl. (II)) $y_0 = 0$. Weiter gilt

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit EW -2 und -1 ist negativ definit. Also ist bei $(0, 0)$ ein Maximum

2. Fall ($y_0 = 1$) Dann gilt (vgl. (II)) $x_0 = \pm 1$

Weiter ist $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, da $\det(H_f(1, 1)) = -4 < 0$

Also liegt bei $(1, 1)$ ein Sattelpunkt vor.

Außer dem ist $H_f(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, da $\det(H_f(-1, 1)) = -4 < 0$. * Also liegt bei $(-1, 1)$ ein Sattelpunkt vor.

~~* nach Unterscheidungskriterium~~ Da die Determinante negativ ist, haben die beiden unterschiedliche VZ. Also ist die Matrix indefinit

c.) Ja, da f (als Polynom) stetig ist, nimmt es auf der kompakten Menge K (abgeschl. und beschränkt) ein Maximum an, nach Satz Weierstrass.

3. Sei $z > 1$

Da $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff. bar existiert nach dem MWS ein $\xi \in [1, z]$, sodass

$\ln(z) = \ln(z) - \ln(1) = (z-1) \cdot \frac{1}{\xi}$ Also gilt mit $z = \frac{\gamma}{x}$

$$1 - \frac{x}{\gamma} = 1 - \frac{1}{z} = (z-1) \cdot \frac{1}{z} \leq (z-1) \cdot \frac{1}{\xi} \leq (z-1) = \frac{\gamma}{x} - 1$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{= \ln(\frac{\gamma}{x})}$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x) = (y-x) \cdot \frac{1}{x} \leq (y-x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\llcorner$$

$$(y-x) \cdot \frac{1}{x}$$

4.) a.) falsch. Sei $\tilde{a}_n = \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{3}\right) \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\tilde{a}_n|} = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

$= \frac{1}{3}$. Also ist der Konv.-radius von

$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$ gleich 3. Aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{\frac{1}{n}} \uparrow \text{ ist divergent.}$$

b.) wahr. Wenn g ungerade, ist diff.-bar, dann ist g' gerade:

$$g'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(g(x-h) - g(x))}{h}$$

$$\stackrel{k=-h}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{k} = g'(x)$$

Also ist $f \cdot g'$ ungerade, da

$$f \cdot g'(x) = f(x) \cdot g'(-x) = -f(x) \cdot g'(x) = -(f \cdot g')(x).$$

! dce:

$$h(x) = -x$$

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = g'(-x) \cdot (-1) = -g'(x)$$

$$g(h(x)) = g(-x)$$

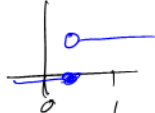
c.) Wahr. Fundamentalsatz der Integral- und
Diff. rechnung.

5. Aufgabe (Multiple Choice)

(16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit Null Punkten bewertet.

- | | Wahr | Falsch |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) Ist (a_n) eine konvergente reelle Folge, so ist auch (a_n^2) konvergent. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 unstetig, so ist auch $f \circ g$ in x_0 unstetig. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (c) Der Imaginärteil der komplexen Zahl i^{2016} ist Null. $= (i^4)^{504} = 1^{504} = 1$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (e) Die Differentialgleichung $y'(t) = \sin(t)y(t) + \cos(t)$ ist linear. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (f) Ist $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ partiell differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.  | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (g) Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in 0 und 1 stetig, so ist sie auch in allen x zwischen 0 und 1 stetig. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (h) Sind $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

zu c.) $i^{2016} = i^3 \cdot i^{2016} = i^3 = -i$

zu d.) $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

stet. part diff \Rightarrow total diff \Rightarrow stetig

alle Richtungs-
abl. existieren \Rightarrow partiell diff-bar

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{x^2}$$

$$T_{4,f}(x, 0) = \sum_{n=0}^2 \frac{x^{2n}}{4n!}$$

$$R_{4,f}(x, 0) = x^5 \cdot \Sigma$$

$$f(x, y) = x^4 - y^2$$

$$\nabla f(x, y) = (4x^3, -2y)$$

$$(0, 0)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad \forall z \in W \quad \nabla f($$

$$z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$2 \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f((z, 0)) = z^4 > 0$$

$$f(x) = G(x) - G(0) = \int_0^x g(t) dt$$

$$f'(x) = G'(x) = g(x)$$

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) dx$$

$$= \int e^z dz \Big|_{z=\sin(x)}^{z=\sin(x)} = [e^z]_{z=\sin(x)}^{z=\sin(x)} = [e^{\sin(x)}]$$

$$(F \circ g)' = F'(g) \cdot g'$$

$$\Rightarrow F \circ g = \int F'(g) \cdot g' \\ = \int f(g) \cdot g' \quad , \quad F' = f$$