Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SoSe 2023
07.09.2023

Nachname: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	10	9	12	13	10	9	12	75		
erreichte Punktzahl										

Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Klausurdauer: 90 Min.
- Die Klausur besteht aus 17 Seiten (7 Aufgaben). Bitte überprüfen Sie sie auf Vollständigkeit.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beitseitig beschriebenes DIN A4 Blatt) verwenden.
- Sie dürfen zusätzliche Blätter als Schmierpapier verwenden, aber schreiben Sie die Lösungen direkt auf die Klausur.
- Versehen Sie alle zu bewertenden Blättter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründung Wert gelegt.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.
- Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.
- Viel Erfolg!

1. Aufgabe (Multiple-Choice) (10 Punkte)

Bei jeder der anschließenden 10 Teilfragen ist genau eine Antwort richtig. Die richtige Antwort wird mit 1 Punkt und eine falsche mit 0 Punkten bewertet.

Eine Begründung wird in dieser Aufgabe nicht verlangt.

(a) Jede Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr globales Maximum an. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig. ☐ wahr ☐ falsch

(e) Eine Funktion ist genau dann partiell differenzierbar wenn alle Richtungsableitungen existieren. ☐ wahr ☐ falsch

(f) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig partiell differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $\nabla f(x_0) = 0$. Hat f ein relatives Maximum in x_0, so ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ negativ definit. ☐ wahr ☐ falsch

(g) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist $|f|$ stetig, dann ist auch f stetig. ☐ wahr ☐ falsch

(h) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist $f \circ g$ differenzierbar, dann ist auch f differenzierbar. ☐ wahr ☐ falsch

(i) Das Anfangswertproblem $y'(t) = \sin(y(t)) \cdot \arctan(t y(t)), y(0) = 0$ besitzt eine Lösung auf einem geeigneten Intervall in $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

(j) Das Anfangswertproblem $y'(t) = \sqrt[3]{2023|y|}, y(0) = 0$ besitzt eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten Intervall in $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

Name:	Matrikelnummer:

2. Aufgabe (Fill-in) (9 Punkte)

Füllen Sie die leeren Kästen aus. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Sie können den Platz auf der nächsten Seite für Nebenrechnungen nutzen, diese werden aber nicht bewertet. Jede fehlerhafte Antwort wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(a) Geben Sie zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ an, die nicht absolut konvergieren, aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ absolut konvergiert.

$a_n =$ $\qquad\qquad$, $b_n =$

(b) Geben Sei eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L > 1$, d.h. die Voraussetzung ist nicht erfüllt für $L \leq 1$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) =$

(c) Geben Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ \sin(x \cos(y)) \end{pmatrix}$ an.

$J_f(x, y) =$

(d) Hat die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 y$ im kritischen Punkt $(0, 0)$ einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt?

(e) Geben Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(2x)$ in $x_0 = 2$ an.

$T_{3,f}(x; 2) =$

(f) Geben Sie eine Funktion an, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) =$

Name:	Matrikelnummer:

3. Aufgabe (Integration) (12 Punkte)

Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Integrale:

(a) (4 Punkte) $\int_0^1 x \cdot 7^{x^2} \mathrm{d}x$.

(b) (8 Punkte) $\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin(x) \mathrm{d}x$.

Name:	Matrikelnummer:

4. Aufgabe (Extremwerte in mehreren Variablen) (13 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 - y + yx^2.$$

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und zeigen Sie, dass $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ die Menge der kritischen Punkte ist.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x, y)$.

(c) (8 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Art der kritischen Punkte.

Name:	Matrikelnummer:

5. Aufgabe (Reihen) (10 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - 1)\left(2 + \frac{1}{x}\right)^n$$

Hinweis: Unterteilen sie den Definitionsbereich in geeignete Abschnitte und untersuchen Sie diese einzeln. Nutzen Sie für komliziertere Fälle das Quotientenkriterium.

Name:	Matrikelnummer:

6. Aufgabe (Differentialgleichungen höherer Ordnung) (9 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 2y^{(3)}(t) + y''(t) = 0.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL.

(b) (5 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 3; \quad y''(0) = 4; \quad y''(-2) = 0.$$

Name:	Matrikelnummer:

7. Aufgabe (Beweisen oder widerlegen) (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Jede integrierbare Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

(b) Sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ und F die Fourierreihe von f. Dann gilt $F(x) = f(x)$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$.

(c) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn (a_n) eine Nullfolge ist und (s_n) beschränkt, dann konvergiert die Reihe.

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

(Leere Seite für etwaige weitere Löungsnotizen — kennzeichnen Sie, zu welcher Aufgabe sie gehören!)