1 a.) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+5x}(5)}{1}$

$= \dfrac{\frac{5}{1}}{1} = 5$

L'H ist anwendbar, da ln, und x diff-bar.

b.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-1)^n}{n}$, Substitution $z = (2x-1)$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \to 1$$

$\Rightarrow r = \frac{1}{1}$ ist Konv.-Radius.

$\Rightarrow$ Die Reihe konv. abs. für $|z| < 1$ und für $|z| > 1$ konvergiert sie nicht. Für $z = 1$ handelt es sich um die harmonische Reihe, also divergiert die Reihe. Für $z = -1$ handelt es sich um die alternierende harmonische Reihe, die konvergiert.

Daraus folgt

Für
$$x \in \begin{cases} |2x-1| < 1, & \text{konv abs} \\ 2x-1 = -1 & \text{konv.} \\ 2x-1 = 1 & \text{div} \end{cases}$$

$\left[\ |2x-1| > 1 \qquad \text{div} \qquad \right)$

D.h. $x \in \begin{cases} [0,1) \\ \mathbb{R} \setminus [0,1) \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \text{konvergiert} \\ \text{divergiert} \end{matrix}\right\}$ die Reihe

---

2. a) $\int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{v'} dx = \Big[\underbrace{x}_{u} \, \underbrace{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{v} \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{v} dx$

$= 0 - 0 - \left[-4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 4\cos(\pi) - 4\cos(0)$

$= -4 - 4 = -8$

---

b.) $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} dx$

$z = x^2 + 9$

$z' = \frac{dz}{dx} = 2x$ "$\Rightarrow dz = 2x\,dx$"

$$= \int_{9=z(0)}^{25=z(4)} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_9^{25} = 2\cdot 5 - 2\cdot 3 = 4.$$

$$= \int_{z(0)}^{z(4)} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_{z(0)}^{z(4)} = \left[2\sqrt{x^2+9}\right]_0^4 = 2\cdot 5 - 2\cdot 3 = 4$$

3 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -x^3 - \frac{1}{6}y^2 + xy$, beliebig oft diff, da Polynom.

$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-3x^2 + y, -\frac{1}{3}y + x\right)$

Krit. Pkte Sei (x_0, y_0) : $0 = \nabla f(x_0, y_0)$

Also $y_0 = 3x_0$ und somit $3x_0 = 3x_0^2 \Rightarrow 0 = x_0(x_0 - 1) \Rightarrow x_0 \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow (x_0, y_0) \in \{(0,0), (1,3)\}$

Art der Extrema $\quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Es gilt $\det(H_f(0,0)) = 0 - 1 < 0$

Also ist die Matrix indefinit, es liegt kein lokales Extremum vor.

- $H_f(1,3) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Es gilt $\det(H_f(1,3)) = 2 - 1 = 1 > 0$

und $(H_f(1,3))_1 = -6 < 0$. Damit ist $H_f(1,3)$ neg. definit (Hauptminorenkriterium). Es liegt also ein lokales Maximum bei $(1,3)$ vor.

4.) a.) $\begin{cases} z'(t) = \dfrac{2t}{e^{z(t)}} \\ z(0) = 0 \end{cases}$

"Schmiermethode": $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2t}{e^{z}}$ "$\Rightarrow$ $e^{z}dz = 2t\,dt$"

$$\Rightarrow \int_0^{z(t)} e^{\tilde{z}}\,d\tilde{z} = \int_0^{t} 2\tilde{t}\,d\tilde{t} = \left[\tilde{t}^2\right]_0^t$$

$$\left[e^{\tilde{z}}\right]_0^{z(t)}$$

$$\Rightarrow e^{z(t)} - 1 = t^2 \Rightarrow e^{z(t)} = t^2 + 1 \Rightarrow z(t) = \ln(t^2+1)$$

<u>Probe:</u> $z(0) = \ln(0+1) = 0$ ✓

$$z'(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot (2t) = \frac{1}{e^{\ln(t^2+1)}} \cdot 2t = \frac{2t}{e^{z(t)}} \checkmark$$

6.) Die Nullstellen von dem char. Polynom $\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2$

$= \lambda^2(\lambda^2+\lambda-2) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+2)$

Sind 0 (zweifach), 1, und -2.

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \in \{1,-2\}$$

Nach Satz 7.4.6 ist

$\{e^t, e^{-2t}, e^0, te^0\}$ ein Fundamentalsystem

Also ist $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 + c_4 t$ die allg. Lösung.

5. <u>Def:</u> $\alpha > 0$ $\quad f: [0,\infty) \to \mathbb{R}.$

f α-Hölder stetig $\Longleftrightarrow$ $\exists L > 0 : \forall x,y \in [0,\infty)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|^{\alpha}$$

a.) z: $f(x) = \sqrt{x}$ ist $\frac{1}{2}$-Hölder stetig.

Wollen zeigen $\exists L > 0$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L\,|x-y|^{1/2}$$

Es gilt

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \overset{\text{Hinweis}}{\leq} |\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2| = |x-y|$$

Wurzel ziehen auf beiden Seiten ergibt (Monoton steigend)

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| \leq |x-y|^{1/2}$$

6.) Sei f 2-Hölder-stetig und diff-bar. Sei $x \in [0,\infty)$

Es gilt

$$|f'(x)| = \left| \lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \overset{\text{Betrag stetig}}{=} \lim_{y \to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$$\overset{\text{2-Hölder-Stetig}}{\leq} \lim_{y \to x} \frac{L|x-y|^2}{|x-y|} = \lim_{y \to x} L|x-y| = 0 .$$

Also ist f konstant.