Klausurvorbereitung SoSe21 vom 10.03.22

1

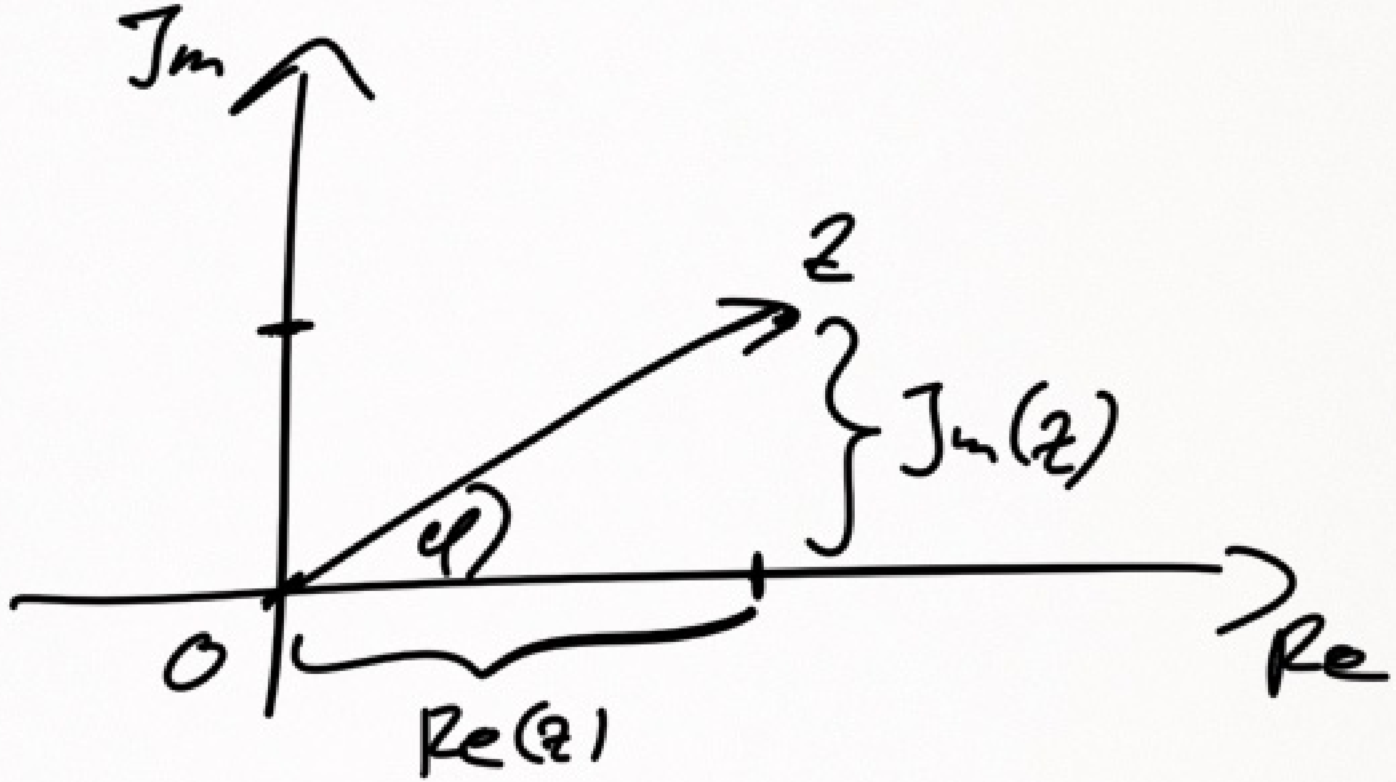
$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi}$$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{\quad} \; = \; \sqrt{\langle z_1, z_1 \rangle}$$

$$z_1 \in \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{z_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$$



$$\tan\varphi = \frac{Re(z)}{Jm(z)} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{Re(z)}{Jm(z)}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\underline{\underline{z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}}$$

<u>Alternativ:</u>

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin \varphi$$

$$\sqrt{3} + i = z_1 = 2\left(\cos(\varphi) + i \sin \varphi\right)$$

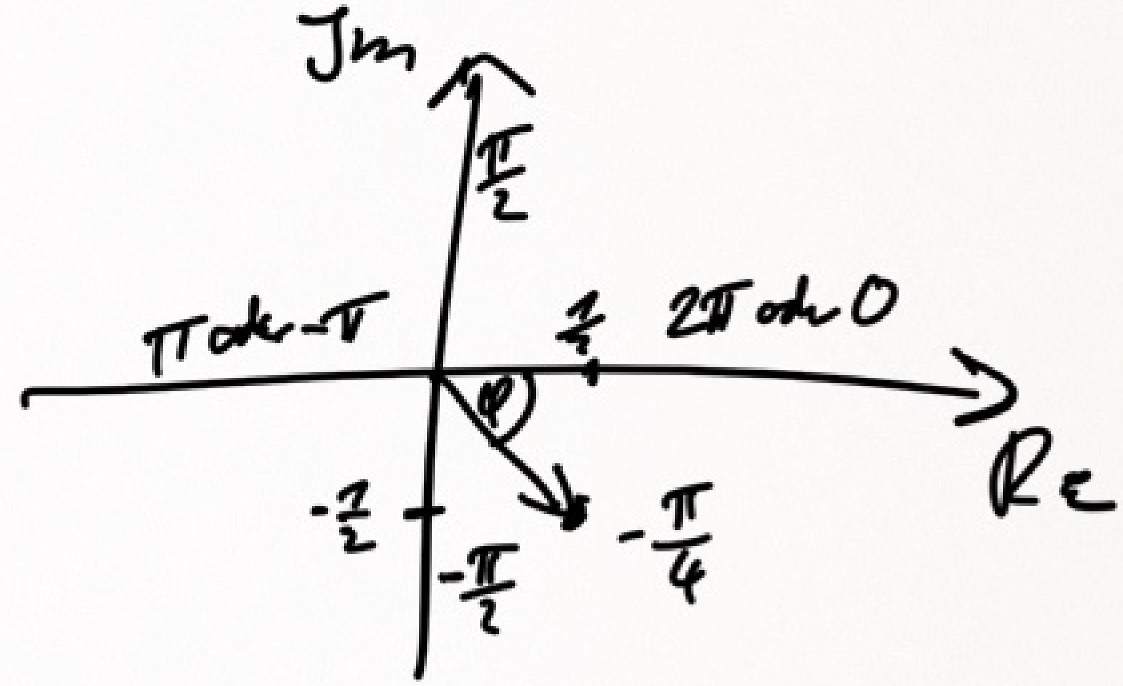
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)}{\underbrace{(1+i)(1-i)}_{\in \mathbb{R}}} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \arctan(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}}$$



$$z_2 \cdot z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi - 3\pi}{12}\right)}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2}$$

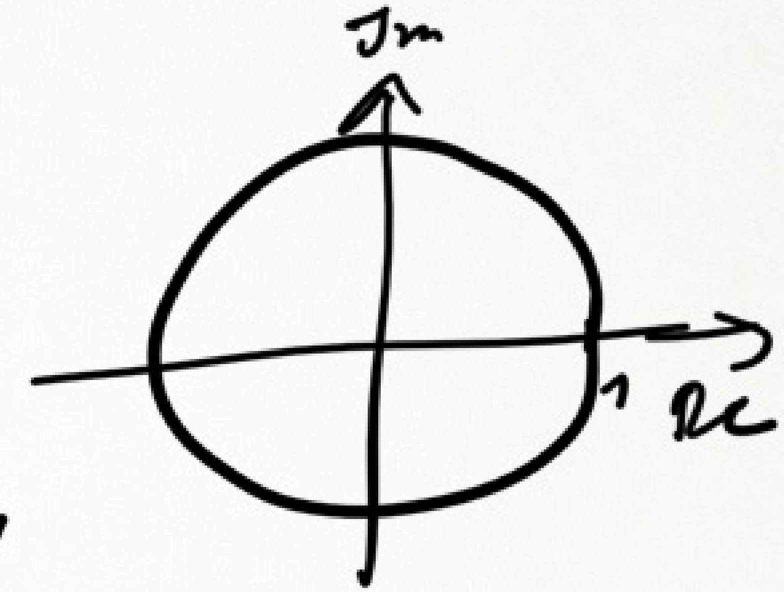
$$|z_1 z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2|^{-1} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{2}}}$$

$$\shortparallel$$

$$|2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}| = |2\sqrt{2} \cdot e^{i\alpha}| = |2\sqrt{2}| \cdot \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{=1}$$

$$\underline{= 2\sqrt{2}}$$

b) $z^3 - 1 = 0 \iff z^3 = 1$



Sei $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$$\rightsquigarrow (r \cdot e^{i\varphi})^3 = r^3 e^{3i\varphi} = 1$$

wegen $|z^3| = 1^3 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

$$|z^3| = |r^3| \cdot \underbrace{|e^{3i\varphi}|}_{=1}$$

Also gilt es $e^{3i\varphi} = 1$ zu lösen.

$$e^{3i\varphi} = \cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)$$

$\Rightarrow \cos(3\varphi) = 1$ und $\sin(3\varphi) = 0$

$$\Rightarrow \varphi \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right\}$$

$\sin \alpha = 0$ für $\alpha \in \{0, \pi\}$

aber $\cos \alpha = -1$ für $\alpha \in \{\pi\}$

$$\rightarrow z = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = \underline{\underline{1 + 0i}}$$

oder

$$z = 1 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}$$

oder

$$z = 1 \cdot e^{i \cdot -\frac{2\pi}{3}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}}$$

② a) $$a_n = \begin{cases} \left(\frac{2^{\frac{1}{n^2}}(n^2-1)}{n^2-n}\right)^n & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \exp\left(\left(\frac{-n}{n+1}\right)^2\right) & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Betrachten die zwei Teilfolgen für n gerade und n ungerade. Also

$$(g_n)_{n\geq 1} = (a_{2n})_{n\geq 1} \text{ und } (u_n)_{n\geq 1} = (a_{2n-1})_{n\geq 1}$$

wir wissen $$\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

und weiter

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-n}\right)^n = \lim\left(\frac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Damit folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 1 \cdot e = e$$ als Produkt der Grenzwerte.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\left(\frac{-n}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= \exp\left(\left(\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= \exp\left((-1)^2\right)$$

$$= \underline{\underline{e}}$$

Da sowohl g_n als auch a_n gegen e konvergieren, ist e der einzige Häufungspunkt. Also konvergiert a_n auch gegen e.

b) $b_n = \cos\left(\frac{1}{n} + n\pi\right)$

$$b_{2n} = \cos\left(\frac{1}{2n} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$b_{2n-1} = \cos\left(\frac{1}{2n-1} + 2\pi n - \pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2n-1} - \pi\right)$$

$\cos(x-\pi)$
$= -\cos(x)$

$$= -\cos\left(\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\right) = \cos(0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = -\cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1}\right) = -\cos(0) = \underline{\underline{-1}}$$

$\Longrightarrow$ -1 und 1 sind Häufungspunkte.

Ist $M := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt?

Ja, da $\cos(x) \in (-1, 1)$. Sprich,

cos ist beschränkt also auch die

Menge der Folgeglieder.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n} \underset{u=2x-1}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u^n$

Quotienten Kriterium

$\longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\Longrightarrow$ Konv. radius ist $r = \frac{1}{1} = 1$

D.h. die Reihe konvergiert für $|u| < 1$

$\underset{u=2x-1}{\Longleftrightarrow}$ Konv. für $0 < x < 1$

$u = 2x-1$

$\Leftrightarrow 2x = u+1$

$x = \frac{u+1}{2}$

Am Rand, also für $x=0$ und $x=1$ gilt:

$\underline{x=0:}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n} \underset{x=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$$

Nach dem Leibnitz-Kriterium

alternierende Folge

- Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe hat Grenzwert.

$\underline{x=1:}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Also konv. die Potenzreihe für $x \in [0,1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ für $|z|<1, z \in \mathbb{R}$

<u>Ind. Anfang:</u> $k=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+0)!}{n!\,0!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{\frac{n!}{n!}} z^n \overset{\substack{\text{geometrische Reihe} \\ |z|<1}}{=} \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{0+1}}$$

Also gilt die Aussage für $k=0$.

<u>Ind. Hypothese:</u> Die Aussage gilt für ein $k \in \mathbb{N}$.

Ind. Schritt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\, z^n\right)' \overset{\text{I.H.}}{=} \left(\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\right)'$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{(n+1)} \cdot \frac{(n+1+k)!}{\underbrace{(n+1)!}_{\cancel{(n+1)}\cdot n!}\, k!}\, z^n = \frac{\cancel{-}(k+1)\cdot \cancel{(-1)}}{(1-z)^{k+2}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\, \frac{(n+(k+1))!}{n!\,k!}\, z^n = \frac{1}{(1-z)^{(k+1)+1}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+(k+1))!}{n!\,(k+1)!}\, z^n = \frac{1}{(1-z)^{(k+1)+1}}$$

Also gilt die Aussage auch für $k \mapsto k+1$.
Und damit für alle $k \in \mathbb{N}$.

④ a) $M_{n,k} := \{(a_1,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 + \dots + a_k = n\}$

$M_{0,1} = \{(0)\}$; $M_{1,1} = \{(1)\}$; $M_{2,1} = \{(2)\}$

$m_{0,1} = m_{1,1} = m_{2,1} = 1$

$M_{0,2} = \{(0,0)\}$; $M_{1,2} = \{(1,0),(0,1)\}$;

$M_{2,2} = \{(2,0),(0,2),(1,1)\}$

$m_{0,2} = 1$; $m_{1,2} = 2$; $m_{2,2} = 3$

$M_{0,3} = \{(0,0,0)\}$; $M_{1,3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

$M_{2,3} = \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

usw.

$m_{0,3} = 1$; $m_{1,3} = 3$; $m_{2,3} = 6$

b) $0^{a_1}\,1\,0^{a_2}\,1\,0^{a_3}\,1 \ldots 1\,0^{a_k}$

$\{0011, 1001, 1100, 0101, 0110, 1010\}$

usw.

c) Einsen im String: $k-1$

Nullen im String: $\sum_{i=1}^{k} a_i$

D.h. die Länge des Strings ist insgesamt

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + k - 1 = n + k - 1 .$$

Weiterhin ist $m_{n,k}$ genau die Anzahl an möglichen Positionen der Einsen. Also

$$m_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$\boxed{m_{10,3} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{10!}} = \underline{\underline{66}}}$$

⑤ $f: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n \ln(x) \quad ; n \geq 1$

a)

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0} x^n \ln(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\xrightarrow{x\to 0} -\infty}}{\underbrace{x^{-n}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \infty}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln'(x) = x^{-1} \\ (x^{-n})' = -n x^{-n-1} \end{array} \right]$$

$$\leadsto \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{n\cancel{+1}\cancel{-1}}}{-n} \underline{\underline{= 0}}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n \ln(x) = \infty$$

unbeschränkt
und monoton wachsend.

b)

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \left(x^n \ln(x)\right)' = (x^n)' \cdot \ln(x) + x^n \cdot \ln(x)'$$

$$= n x^{n-1} \ln(x) + x^n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{= x^{n-1}\left(n \ln(x) + 1\right)}}$$

$$\underline{\underline{f''(x)}} = (x^{n-1})'\left(n \ln(x) + 1\right) + x^{n-1} \cdot \left(n \ln(x) + 1\right)'$$

$$= (n-1)x^{n-2}\left(n \ln(x) + 1\right) + x^{n-1} n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{= x^{n-2}\left((n-1) \cdot (n \ln(x) + 1) + n\right)}}$$

c) $0 = f'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln(x))$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad 0 = 1 + n\ln(x)$$

$$-1 = n\ln(x)$$

$$-\frac{1}{n} = \ln(x)$$

$$\underline{\underline{e^{-\frac{1}{n}} = x}}$$

$$f''(e^{-\frac{1}{n}}) = \underbrace{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-2}}_{= e^{-\frac{n-2}{n}} > 0} \cdot \left((n-1)\cdot(1 + n\cdot\underbrace{\ln(e^{-\frac{1}{n}})}_{-\frac{1}{n}}) + n\right)$$

Da $x^{n-2} > 0$, und wir uns nur für das Vorzeichen von $f''(e^{-\frac{1}{n}})$ interessieren, genügt es den Term in der Klammer abzuschätzen.

$$(n-1)\cdot\underbrace{\left(1+\cancel{n}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{n}}\right)\right)}_{=0}+n = n > 0$$

$\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x = e^{-\frac{1}{n}}$.

lokales Minimum $\Rightarrow$ in offener Umgebung um $x = e^{-\frac{1}{n}}$ gilt

$$f(x) \geq f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{e\cdot n}$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{e\cdot n}}}$$

Da bei $x = e^{-\frac{1}{n}}$ das einzige Extremum ist,

bleibt $f(x) \geq -\frac{1}{n \cdot e}$ auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$.

Alternativ: zeigen, dass f monoton fallend auf $(0, e^{-\frac{1}{n}})$ und monoton wachsend auf $(e^{-\frac{1}{n}}, \infty)$. (über $f'(x)$, $x > e^{-\frac{1}{n}}$ und $x < e^{-\frac{1}{n}}$)

d) $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\}$

In der c) haben wir gesehen, dass $f(x) \geq -\frac{1}{ne}$

und in der a), dass $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Also bietet sich $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{1}{ne}, \infty)$ als

Lösung an. Sei $a > -\frac{1}{n \cdot e}$

Es ex. $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ mit

$-\frac{1}{n \cdot e} = f(x_1) < a < f(x_2)$. Da f stetig ist,

folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_a \in (x_1, x_2)$

ex., sodass $f(x_a) = a$. Also $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{1}{ne}, \infty)$.

⑥ a) $f(x) = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Substituiere $u(x) := x^2-2x+2$.

Dann ist $u'(x) = 2x-2$ und daraus

$$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}}$$

Also ist die Stammfunktion von f gegeben als

$$2\sqrt{u(x)} + c = \underline{\underline{2\sqrt{x^2-2x+2} + c}}\ , c\in\mathbb{R}$$

b) $g(x) = \frac{1}{2}e^x + x\cos(\pi x)$

Stammfunktion von e^x ist $e^x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$$\int \underbrace{x}_{a(x)} \underbrace{\cos(\pi x)}_{b'(x)}\,dx = \Big[x \cdot \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big]_{\dots}^{\dots}$$

$$- \int 1 \cdot \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx$$

$$= \Big[x \cdot \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big]_{\dots}^{\dots} - \Big[-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big]_{\dots}^{\dots}$$

$$= x \cdot \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + C_2 \quad, C_2 \in \mathbb{R}$$

Insgesamt:

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{\pi}x\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + C_3,$$

$C_3 \in \mathbb{R}.$

$$\int a(x) + b(x)\,dx = \int a(x)\,dx + \int b(x)\,dx$$