Klausur zur „Mathematik II für Informatik“ und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SS 2019
05.09.2019

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....
Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	7	6	7	5	9	11	9	54	
erreichte Punkte									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehnen Platz**. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht.

Lose Blätter ohne Namen können nicht bewertet werden.

Sollten Sie **weiteres Papier** benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. Versehen Sie in diesem Fall jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Kennzeichnen Sie außerdem, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

Klausur zur „Mathematik II für Informatik“ und Wirtschaftsinformatik
Nachname, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ␣␣␣␣␣␣␣

1.Aufgabe (1 + 2 + 4 Punkte) (7 Punkte)

Bitte kreezen Sie bei Teilaufgaben (a) und (b) die richtigen Aussagen an, ohne Ihre Entscheidung zu begründen. Für die Bearbeitung von Aufgabenteil (c) haben Sie nach der Aufgabe ausreichen Platz.

(a) Im Nachfolgenden dürfen Sie genau eine Antwort auswählen. Ist diese richtig, erhalten Sie einen Punkt. In allen anderen Fällen erhalten Sie 0 Punkte. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Sollten Sie Ihre Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im zweifel wird die falsche Antwort gewertet.
Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gegeben durch

○ $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n-k}$
○ $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{k-n}$
○ $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$

(b) Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig. Wählen Sie die richtige Antwort, erhalten Sie einen Punkt. In allen anderen Fällen erhalten Sie 0 Punkte. Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	konvergiert	**divergiert**
1.) Sei $a \geq 1$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{1+a^k})$	○	○
2.) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)$	○	○

(c) Beweisen Sie nun Ihre Aussgane aus Teilaufgabe (b).

2.Aufgabe (3 + 3 Punkte) **(6 Punkte)**

Beweisen Sie die nachfolgenden beiden Aussagen

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_k)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot a.$$

Verwenden Sie hierfür die Definition der Konvergenz in normierten Räumen aus der Vorlesung

(b) Seien $I = [a, b]$ und J Intervalle in $\mathbb{R}$, wobei $0 \notin J$ ist. Sei weiter $f : I \to J$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$$

3.Aufgabe (7 Punkte) (7 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k, \text{ mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } k > 1,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x.$$

Bestimmen Sie nun

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Erläutern Sie zunächst, welchen Satz aus der Vorlesung Sie hierfür verwenden können und zeigen Sie, dass dieser anwendbar ist. Bestimmen Sie anschließend den Grenzwert.

4.Aufgabe (5 Punkte) **(5 Punkte)**

Betrachten Sie den Banachraum $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Gegeben seien die Mengen $M := [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ und die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Zeigen Sie, dass es genau ein $\xi \in M$ gibt, sodass $f(\xi) = \xi$ gilt. Erläutern Sie hierfür zunächst, welchen Satz aus der Vorlesung Sie verwenden können und zeigen Sie dass dieser anwendbar ist. Sie müssen hierbei das ξ nicht bestimmen.

5.Aufgabe (3 + 6 Punkte) **(9 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{1-x}.$$

(a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ die n-te Ableitung von f gegeben ist durch:

$$f^{(n)}:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(b) Bitte füllen Sie die Lücken in der nachfolgenden Rechnung aus. Je richtig ausgefülltem Feld erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt. Falls ein Feld unvollständig oder fehlerhaft ausgefüllt ist, erhalten Sie 0 Punkte. Sie müssen Ihre Angaben nicht begründen. Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

Das Taylorpolynom dritten Grades einer Funktion f im Entwicklugnspunkt x_0 ist allgemein gegeben durch:

$$T_3,f(x,x_0)=\boxed{}$$

Zunächst müssen also die Ableitungen von f bestimmt werden. Diese sind gegeben durch

$$f'(x)=\boxed{},$$
$$f''(x)=\boxed{},$$
$$f^{(3)}(x)=\boxed{},$$

oder allgemein:

$$f^{(n)}(x)=\boxed{}.$$

Dann ist das Taylorpolynom dritten Grades im Entwicklugnspunkt $x_0=$ gegeben durch.

$$T_{3,f}\left(x,\boxed{}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{}}\left(\boxed{}\right)+\frac{1}{8}\left(\boxed{}\right)^2+\left(\boxed{}\right)^3.$$

Bitte tragen Sie hier die entsprechenden Werte ein, die Sie erhalten, wenn Sie den Entwicklungspunkt einsetzen.

6.Aufgabe (3 + 6 Punkte) (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle drei kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

und zeigen Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

7.Aufgabe (8 + 1 Punkte) **(9 Punkte)**

Betrachten Sie das nachfolgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie ein zugehöriges Fundamentalsystem.

(b) Geben Sie nun die allgemeine Lösung des obigen Systems von Differentialgleichungen an.