Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2016
08.09.2016

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	14	20	7	12	16	69		
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (14 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte exisieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}.$$

(b) Bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten a_1 der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$.

2. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = x^2(y-1) - \frac{1}{2}y^2.$$

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung, d. h. $\nabla f(x,y)$ und $H_f(x,y)$.

(b) Unteruchen Sie f auf lokale Extrema und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(c) Es sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Existiert $\max_{(x,y)\in K} |f(x,y)|$?

3. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt

$$1 - \frac{x}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{x} - 1.$$

Hinweis: Logarithmus-Rechenregeln und Mittelwertsatz

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 3, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-3)^n$ konvergent.

(b) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare und ungerade Funktionen. Dann ist $f \cdot g'$ ebenfalls ungerade.

Zur Erinnerung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = -f(x)$.

(c) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $f' = g$.

4) a.) falsch. Ziel: Bring $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-3)^n$ auf eine divergente Form, indem man a_n geschickt wählt. $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$. Wähle $a_n = \frac{1}{(-3)^n n}$.

Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Konvergenzradius 3 hat.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{-3}\right)\right| = \frac{1}{3}.$$

Also ist der Konv.-radius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleich 3. Aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-3)^n = \quad \dots \quad = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$$

b.) Nach Satz ...aus Skript gilt g' ist gerade (da g stetig diff. und ungerade).

$$g'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(-x+h)-g(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(g(x-h)-g(x))}{h} \overset{k=-h}{=} \lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)-g(x)}{k} = g'(x)$$

Also ist $f\cdot g'$ ungerade, denn

$$f\cdot g'(-x) = f(-x)\cdot g'(-x) = (-f(x))\cdot g'(x) = -f\cdot g'(x)$$

c.) wahr. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung.

z.z. $1-\frac{x}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{x}-1 \quad , 0<x<y$

$\forall a,b \in \mathbb{R} \ldots$ $\exists \xi$, sodass. f stetig diffbar

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad , \xi \in [a,b]$$

$$\ln(b)-\ln(a)=\frac{1}{\xi}(b-a)$$

Setze $a=1$

$$\ln(b)=\frac{1}{\xi}(b-1) \qquad \xi \in [1,b]$$

Da $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [1,b]$, sodass $\ln(b)=\frac{1}{\xi}(b-1)$. Also gilt mit $b:=\frac{y}{x}$

$$1-\frac{x}{y}=1-\frac{1}{b}=(b-1)\cdot\frac{1}{b} \leq \underbrace{(b-1)\frac{1}{\xi}}_{\ln(b)=\ln\left(\frac{y}{x}\right)} \leq b-1=\frac{y}{x}-1$$

2) c.) Ja, da f (als Polynom) stetig ist, nimmt es auf der kompakten Menge ($K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen und beschränkt) ein Maximum an.

2.) $f(x,y) = x^2(y-1) - \frac{1}{2}y^2$

a.)
$$\nabla f(x,y) = \left(2x(y-1),\ x^2 - y\right)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

b.) Sei (x_0, y_0) ein kritischer Punkt. Dann gilt

$$0 = \nabla f(x_0,y_0) \iff \begin{array}{ll} 2x_0(y_0-1) = 0 & (I) \\ x_0^2 - y_0 = 0 & (II) \end{array}$$

I gilt genau dann wenn $x_0 = 0$ (1. Fall) oder $y_0 = 1$ (2. Fall)

<u>1. Fall ($x_0 = 0$)</u>. Dann gilt (vgl. (II)) $y_0 = 0$. Weiter gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mit EW -2 und -1, ist negativ definit. Also ist bei $(0,0)$ ein Maximum.

<u>2. Fall ($y_0 = 1$)</u> Dann gilt $x_0 = \pm 1$. Dann ist

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, weil $\det(H_f(1,1)) = -4 < 0$

Also liegt kein Sattelpunkt bei $(1,1)$ vor. Außerdem ist

$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ auch indefinit, da $\det(H_f(-1,1)) = -4 < 0$

Also liegt auch bei $(-1,1)$ Kein Sattelpunkt vor.

1) a.)

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1/n} \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+2/n^2}}{2+5/n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt{3+2/n^2}}{\lim_{n\to\infty}(2+5/n)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x+1)} \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1}\right)} = 1$$

man darf L'Hospital benutzen, da sin, Ln diffbar sind.

b.)

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(1\cdot x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos(x)dx + \int_0^{\pi} x\cos(x)dx\right.$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx\right] \overset{PI}{=} \frac{2}{\pi}\left[x\sin(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\sin(x)dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0-0-\left(-\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-1-1\right] = -\frac{4}{\pi}$$

5. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit Null Punkten bewertet.

$\lim a_n^2 = \lim a_n \cdot a_n = \lim a_n \lim a_n = a \cdot a = a^2$

		Wahr	Falsch
(a)	Ist (a_n) eine konvergente reelle Folge, so ist auch (a_n^2) konvergent.	☒	☐
(b)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 unstetig, so ist auch $f \circ g$ in x_0 unstetig.	☐	☒
(c)	Der Imaginärteil der komplexen Zahl i^{2016} ist Null. $i^{2016} = (i^4)^{504} = 1^{504} = 1$	☒	☐
(d)	Für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$.	☒	☐
(e)	Die Differentialgleichung $y'(t) = \sin(t)y(t) + \cos(t)$ ist linear.	☒	☐
(f)	Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ partiell differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.	☒	☐
(g)	Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ in 0 und 1 stetig, so ist sie auch in allen x zwischen 0 und 1 stetig.	☐	☒
(h)	Sind $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.	☐	☒

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 1/2 \\ 1 & , x = 1/2 \end{cases}$

$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x) = g(x) = x$

$$y^{(4)}(t) + 9\,y''(t) = 0$$

$z(t) = y''(t)$. Dann gilt

$$z''(t) + 9\,z(t) = 0$$

$$V_1 = z$$
$$V_2 = z'$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} V_2 \\ -9V_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = \underline{(\lambda - 3i)}\,\underline{(\lambda + 3i)}$$

$\rightsquigarrow$ Satz ... 7.4.6

$$z(t) = V_2(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

$$\rightsquigarrow y(t) = 9c_1\cos(3t) + 9c_2\sin(3t) + c_3 t + c_4$$
$$= k_1\cos(3t) + k_2\sin(3t) + k_3 t + k_4$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 3i & \\ & -3i \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = e^{t3i}\tilde{c}_1 + e^{-t3i}\tilde{c}_2$$

$$= \frac{e^{t3i} - e^{-t3i}}{2} c_2 + \frac{e^{t3i} + e^{-t3i}}{2} c_1$$

$$= \sin(3t)\,c_2 + \cos(3t)\,c_1$$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = 12t^2 e^{-y(t)} - e^{-y(t)} = (12t^2 - 1)\, e^{-y t}$$

$y_0 = 0$

$t_0 = 1/2$

$$\int_{y_0}^{y(t)} e^{\tilde{y}}\, d\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} (12\tilde{t}^2 - 1)\, d\tilde{t}$$

$$e^{\tilde{y}} \Big|_{y_0}^{y(t)} = 4\tilde{t}^3 - \tilde{t} \Big|_{t_0}^{t}$$

$$e^{y(t)} - 1 = -4 \cdot \frac{1}{8} + 4t^3 + \frac{1}{2} - t$$

$$y(t) = \ln(4t^3 - t + 1)$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^3+2}\, dt \overset{z = -t^3+2}{=} \int_2^{-\infty} t^2 e^{z} \frac{1}{(-3t^2)}\, dz = -\frac{1}{3} \int_2^{-\infty} e^{z}\, dz$$

$$dz = -3t^2\, dt$$

$$dt = \frac{1}{-3t^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{2} e^{z}\, dz = \frac{1}{3} \left[e^{z} \right]_{-\infty}^{2}$$

$$= \frac{e^2}{3}$$

$\boxed{\text{S } 215/319}$

10 – 16 \ (12–13)