$\boxed{\text{Mathe 2 SoSe 2016}}$

1. Aufgabe

a)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3+2/n^2}}{2+5/n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\ln(x+1)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{1}\right)} = 1$

b.) $a_1 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-x)\cos(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(x)\,dx\right]$

$= \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\sin(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)\right] = -\frac{2}{\pi}\left(-\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \dfrac{2}{\pi}(-1-1) = -\dfrac{4}{\pi}$

Aufgabe 2 a) $\nabla f(x,y) = (2x(y-1), x^2-y)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

b) Sei (x_0,y_0) ein kritischer Punkt. Dann gilt

$0 = \nabla f(x_0,y_0)$

$$\iff \begin{array}{ll} 2x_0(y_0-1) = 0 & (\mathrm{I}) \\ x_0^2 - y_0 = 0 & (\mathrm{II}) \end{array}$$

(I) gilt genau dann wenn $x_0 = 0$ (1. Fall) oder $y_0 = 1$ (2. Fall)

1. Fall ($x_0 = 0$). Dann gilt (vgl. (II)) $y_0 = 0$. Weiter ist

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mit EW -2 und -1 negativ definit, also ist bei $(0,0)$ ein Maximum.

2. Fall ($y_0 = 1$). Dann gilt (vgl. (II)) $x_0 = \pm 1$. Weiter ist

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, da $\det H_f(1,1) = -4 < 0$. Also liegt ein Sattelpunkt bei $(1,1)$ vor. Außerdem ist $H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, da $\det(H_f(-1,1)) = -4 < 0$. Also liegt bei $(-1,1)$ ein Sattelpunkt.

c) Ja, da f (als Polynom) stetig ist, nimmt es auf der kompakten Menge ($K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen und beschränkt) ein Maximum an.

Aufgabe 3

Sei $z > 1$.

Da $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [1, z]$, sodass $\ln(z) = \ln(z) - \ln(1) = (z-1)\frac{1}{\xi}$. Also gilt mit $z = \frac{Y}{X}$

$$1 - \frac{X}{Y} = 1 - \frac{1}{z} = (z-1)\cdot\frac{1}{z} \leq \underbrace{(z-1)\cdot\frac{1}{\xi}}_{=\ln(z)=\ln\left(\frac{Y}{X}\right)} \leq z - 1 = \frac{Y}{X} - 1.$$

Aufgabe 4

1.) falsch. Sei $a_n = \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Dann gilt mit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{\frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{3}.$$

Also ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleich 3. Aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

) wahr. Wenn g ungrade und stetig diffbar, dann ist g' grade:

$$g'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{-(g(x-h) - g(x))}{h} \overset{k=-h}{=} \lim_{k\to 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{k} = g'(x).$$

Also ist $f\cdot g'$ ungerade, denn

$$f\cdot g'(-x) = f(-x)\,g'(-x) = (-f(x))(g'(x)) = -f(x)g'(x) = -f\cdot g'(x).$$

) wahr. Fundamentalsatz der Analysis.

Aufgabe 5

a.) wahr, da die Quadratfunktion stetig ist.

b.) falsch. Sei $f \equiv 0$ und $g = \mathrm{sgn}$. Dann ist g unstetig in $x_0 = 0$, aber $f \circ g \equiv 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

c.) wahr. $(i)^{2016} = \left((i)^4\right)^{504} = (1)^{504} = 1$ und $\ln(1) = 0$.

d.) wahr. Es gilt $1 + \tan^2(x) = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

e.) wahr.

f.) wahr

g.) falsch. $f: x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ ist in 0 und 1 stetig, nicht aber in $\frac{1}{2} \in (0,1)$.

h.) falsch. Sei $f(x) = g(x) = x$. Dann gilt

$$\int_0^1 f(x) g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right)^2 = \left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 = \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx$$