1. Aufgabe (0 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ absolut konvergiert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad\qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

2. Aufgabe (0 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$\text{(i)} \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}.$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

3. Aufgabe (0 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungsfunktionen von f.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom $T_{3,f}(x,1)$ von f um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ an.

4. Aufgabe (0 Punkte)

Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x,y) = \sin\left(\frac{x+y}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{4}\arctan(x)\cos(y).$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f_1(x,y)$ und $\nabla f_2(x,y)$ und weisen Sie nach, dass $\|\nabla f_j(x,y)\|_2 \leq 1/2$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ und für $j=1$ und $j=2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)^T$ bezüglich der üblichen 2-Norm eine strikte Kontraktion ist.

(c) Begründen Sie, warum das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sin\left(\frac{x+y}{4}\right) & = & x \\ \arctan(x)\cos(y) & = & 4y \end{array} \right.$$

genau eine Lösung in $\mathbb{R}^2$ hat.

5. Aufgabe (0 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Null unstetige Funktionen, so ist auch $f + g$ in Null unstetig.

(b) Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 2, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|_2^2$ hat in 0 ein globales Minimum.

(d) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_1 f(x, y) = 3x^2 y$ und $\partial_2 f(x, y) = x^3$.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (0 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\arg(z^2) = \arg(z)^2$.	☐	☐
(b)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq f(x_*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(c)	Für alle $x, y > 0$ gilt $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$.	☐	☐
(d)	Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $x = 2$, so konvergiert sie auch für $x = -1$.	☐	☐
(e)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ nicht differenzierbar, so ist f auch an der Stelle 1 nicht differenzierbar.	☐	☐
(f)	Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.	☐	☐
(g)	Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt $H_{f+g} = H_f + H_g$.	☐	☐
(h)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$.	☐	☐
(i)	Ist $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, so konvergiert die Fourierreihe von f in jedem $x \in (-\pi, \pi)$ gegen $f(x)$.	☐	☐
(j)	Jede lineare Differentialgleichung ist eindeutig lösbar.	☐	☐