Mathe 1 SoSe 2017

1. Aufgabe

a) Es gilt $14^{22}-2^{44}=2^{22}(7^{22}-2^{22})$. Wir zeigen, dass $7^{22}-2^{22}$ durch 5 teilbar ist mittels Modulorechnung. Es gilt

$7^{22} \bmod 5 = (7 \bmod 5)^{22} \bmod 5 = 2^{22} \bmod 5$.

Also ist $7^{22}-2^{22}=5k$ für ein $k\in\mathbb{Z}$. Also gilt

$14^{22}-2^{44}=10\cdot k\, 2^{21}$.

4

b) Wir benutzen den erweiterten Euklidischen Algorithmus.

m	a_m	b_m	q_m	k_m	l_m
0	61	16	3	5	$-4-5\cdot3=-19$
1	16	13	1	-4	$1-(-4)\cdot1=5$
2	13	3	4	1	$0-1\cdot4=-4$
3	3	1	3	0	1
4	1	0		1	0

3

$\downarrow$

ggT(61,13) also $\exists\, k,l\in\mathbb{Z}$. Es gilt also

$61\cdot5+16(-19)=a_0\cdot k_0+b_0 l_0=\text{ggT}(a_0,b_0)=\text{ggT}(61,16)=1.$ 1

2. Aufgabe

Induktionsanfang

Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$. Also gilt die Aussage für $n=1$. 2

Induktionsvoraussetzung (IV)

Für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ 1

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage für $n+1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{(IV)}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}.$$ 3

3. Aufgabe

a.) Bestimme das charakteristische Polynom.

$$P_A(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 2 & -t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(-t)(1-t) + 4 + 4 - (-t) - 4(1-t) - 4(1-t)$$

Bestimme Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$0 \overset{1}{=} P_A(\lambda) = -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + \lambda - 8 + 8\lambda = -\lambda\underbrace{(\lambda^2 - 2\lambda - 8)}_{\text{p,q-Formel!}} \quad 2$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2 \quad 3$$

- $E_0(A) = \{x : Ax = 0\}$, 1 $\quad (A|0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} I+\frac{1}{2}II \\ -\frac{1}{4}II \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

1 Nullzeile ≙ 1 Freiheitsgrad. Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_1 = -s$ und $x_2 = 0$. Also

$$E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \overset{2}{\in} \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

- $E_4(A) = \{x : (A - 4\mathbb{I})x = 0\}$, $(A - 4\mathbb{I}|0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} III \\ II-2III \\ I+3III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I+\frac{1}{4}II \\ -\frac{1}{8}II \\ III+II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. 1 Nullzeile ≙ 1 Freiheitsgrad. Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_1 = x_2 = s$. Also

$$E_4(A) = \left\{\begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} : s \overset{2}{\in} \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

- $E_{-2}(A) = \{x : (A + 2\mathbb{I})x = 0\}$, $(A + 2\mathbb{I}|0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} III \\ II-2III \\ I-3III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I+II \\ -\frac{1}{2}II \\ III-2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. 1 Nullzeile ≙ 1 Freiheitsgrad. Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = -2s$, $x_1 = s$. Also

$$E_{-2}(A) = \left\{\begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix} : s \in \overset{2}{\mathbb{R}}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

b) Den Kern haben wir bereits in a) berechnet. Es gilt $\ker(A) = E_0(A) = \langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$. 1 Weiter gilt

$$\mathrm{Bild}(A) = \langle \{ Ae_1, Ae_2, Ae_3 \} \rangle = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}_{=:\mathcal{B}} \rangle.$$

$\mathcal{B}$ bildet eine Basis von Bild(A), da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ offensichtlich 1 lin. unabhängig sind. Es gilt also $\mathrm{rg}(A) = 2$.

c) Nein, da 0 EW gilt $\det(A) = 0$. 1

d) Ja, da A drei verschiedene EW hat ist A diagonalisierbar 1 und ist ähnlich zu $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 1

e) A ist indefinit, da sie positive und negative EW hat. 2

f) Ist λ EW von A mit EV v, dann gilt $A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$. Also ist λ^2 EW von A^2. Also sind $\lambda_0^2 = 0$, $\lambda_1^2 = 16$, $\lambda_2^2 = 4$ die EW von A^2. 1

g) Damit $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ lösbar ist, muss $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ im Bild von A liegen. Es gilt $\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ liefert $\mu_1 = \frac{1}{2}$ und somit $\mu_2 = \frac{1}{4}$. Dann gilt $\alpha = \mu_1 + 2\mu_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Also ist das Gleichungssystem nur für $\alpha = 1$ lösbar, und es gilt $A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin gilt $\left\{ x : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker(A)$.

Also hat $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{unendlich} \\ \text{keine} \end{matrix} \right\}$ Lösungen für $\left\{ \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \alpha \neq 1 \end{matrix} \right\}$. 3

4 Aufgabe

Wähle $U = \langle v_0 - v_1 \rangle$. 2

(i) Der Spann von Vektoren $v \in V$ ist immer ein Untervektorraum. 1

(ii) Offensichtlich gilt $v_0 - v_1 \in U$. Also $v_0 \sim_U v_1$ 1

(iii) Sei U' ein UVR von V, sodass $v_0 \sim_{U'} v_1$ gilt. Dann gilt $v_0 - v_1 \in U'$. Also auch $U = \langle v_0 - v_1 \rangle \subseteq \langle U' \rangle = U'$. Damit ist U der kleinste mögliche UVR. 1

Nach der Dimensionsformel gilt für die Projektion $\pi_U : V \to U$ das

$n = rg(\pi_U) + \dim(\ker(\pi_U)) = 1 + \dim(\ker(\pi_U))$. Also $\dim(V/U) = \dim(\pi_U) = n-1$.

1

5. Aufgabe

a.) falsch. 1 $X = \{0\}$, $Y = Z = \{0,1\}$, $\phi(0) = 0$, $\psi(x) = x$. Dann ist $\psi \circ \phi(0) = 0 \neq 1$ also ist $\psi \circ \phi$ nicht surjektiv also auch nicht bijektiv. 3

b.) wahr. 1 Seien $a, b \in G$. Es gilt

2

$a * b = a^{-1} * a * a * b * b * b^{-1} = a^{-1} * f(a) * f(b) * b^{-1} = a^{-1} * f(a * b) * b^{-1} = a^{-1} * a * b * a * b * b^{-1} = b * a$.

c.) wahr. 1 Da v und w linear abhängig sind gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda v$. Dann gilt

$|(v|w)| = |(v|\lambda v)| = |\lambda|\,|(v|v)| = |\lambda|\,\|v\| \cdot \|v\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot \|w\|$ 3

d.) wahr. 1 Da A und B ähnlich sind existiert $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $A = S^{-1}BS$. Dann gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda I) = \det(S^{-1}(B - \lambda I)S) = \det(S^{-1})\det(B - \lambda I)\det(S)$$
$$= \det(S^{-1})\det(S)\det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}S)\det(B - \lambda I)$$
$$= \det(I)\det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$ 3

6. Aufgabe

a) wahr.

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q)$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	f	f

b) falsch. Für $A = \{0\}, B = \{1\}$ gilt

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \neq \emptyset = (A \cap B) \setminus (A \cup B)$$

c) wahr. Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$Re\left(\frac{(z-\overline{z})\,\overline{z}}{\overline{z}^2 \cdot z}\right) = Re\left(\frac{(z-\overline{z})}{|z|^2}\right) = Re\left(\frac{a+bi-a+bi}{a^2+b^2}\right) = Re\left(\frac{2bi}{a^2+b^2}\right) = 0$$

d) wahr. $U = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4\}\rangle$. Dann ist $\mathbb{R}^6/U = \langle\{e_5 + U, e_6 + U\}\rangle$

e) wahr. $x = 0 \in V$ löst stets $Ax = 0 \in W$ für lineare Funktione $A: V \to W$.

f) falsch. Die Hesse-Normalform von E ist $H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\nu}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Also ist $dist(0, H) = |(0|\nu) - \frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

g) wahr. Offensichtlich ist $\mathcal{L}(V,W)$ (punktweise) additive kommutative Gruppe. Mit der punktweisen definierten Skalarmultiplikation gelten die Distributivgesetze.

h) falsch. Es gilt $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$. Also für $n = 2$, $\alpha = 2$ gilt mit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$det(2I) = 4 \neq 2 = 2\,det(I).$$

i) falsch. Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und $v \in \mathbb{C}^3$, sodass: $Av = iv$. Dann gilt $A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{iv} = -i\overline{v}$

Also ist $-i$ auch ein EW.

j) wahr. Gilt $dim(ker(A - \lambda I)) = 0$ dann ist $ker(A - \lambda I) = \{0\}$ und damit

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \neq 0.$$ Also ist λ kein EW von A