1. Aufgabe

Mathe 1 WiSe 2017/18

a) Richtig: Definition der Schnittmenge

b) Falsch. $X=Y=\{0\}$, $Z=\{0,1\}$, $f(0)=0$, $g(0)=0$

c) wahr. Nach dem erweiterten Euklid existieren $\tilde{k}, \tilde{l}$, sodass $1=\tilde{k}a+\tilde{l}b$ gilt
Multiplikation mit c und die Wahl $k=\tilde{k}c$ und $l=\tilde{l}c$ liefern die Aussage

d) Falsch. $0 \notin \{3k+5 : k \in \mathbb{Z}\}$

e) wahr. $\left(\frac{1}{i}\right)^{2018} = \left(\frac{1}{i}\right)^{2016}\left(i^2\right)^{-1} = 1\cdot(-1) = -1$

f) wahr. Sei $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Dann gilt $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$

g) falsch. Sei $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Dann sind A und B ähnlich mit
$S^{-1}BS=A$, wobei $S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $S^{-1}=S^T$. Dann ist $\binom{1}{0}$ EV
von A, aber $\binom{1}{0}$ ist kein EV von B.

h) falsch. $V=\mathbb{R}$, $\lambda=2$, $x=1$ $\quad (2\cdot 1 | 2\cdot 1) = 4 \neq 2 = 2\cdot(1|1)$

i) falsch. $\sup\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n\in\mathbb{N}^*\right\} = \sup\left\{-1, \underline{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{2}$

j) wahr. Sei $\varepsilon>0$ und sei n, sodass $|a_n|<\frac{\varepsilon}{b}$, wobei b die
Schranke von (b_n) ist. Es gilt:
$|a_n b_n| \leq b|a_n| < \varepsilon$.

2. Aufgabe

a) • (i.) symmetrisch (und nicht transitiv)

(offensichtlich symmetrisch und wegen z.B. $x=8, y=4, z=0$ nicht transitiv)

• (ii.) transitiv (und nichtsymmetrisch)

$((a_n) \equiv (1), (b_n) = (n+1) \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ aber $b_n \notin \mathcal{O}(a_n)$. Sei $(x_n) \in \mathcal{O}(y_n)$, $y_n \in \mathcal{O}(z_n)$

Dann $\exists\, C_1, C_2: \frac{x_n}{y_n} < C_1, \frac{y_n}{z_n} < C_2 \;\forall n \in \mathbb{N}$. Also auch $\frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{y_n}\frac{y_n}{z_n} < C_1 C_2$ Also $x_n \in \mathcal{O}(z_n))$

b) (i) 0

$(1+12) \bmod 13 = 0, \ldots, (6+7) \bmod 13 = 0$

(ii) 4

$(-9-4) \bmod 13 = 0$

c) (i) 2

(Dimensionsformel $5 = \dim(V) = \dim(V/U) - \underbrace{\dim(\ker \pi)}_{\dim(U)} = \dim(V/U) - 3$)

(ii)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} + U \right\}, M_B^E(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n^4}{4^n} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 6n^3}{n(5n - 2n^2) + 12} = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = 1$

3. Aufgabe

a) Beweis per Kontraposition. $\varphi(a) = e \Rightarrow a = e$

Es gilt $\varphi(e) = e$. Aus der Injektivität folgt $a = e$

b) Induktionsanfang

Sei $n = 0$. Nach der Wahl von a gilt $a_0 = a \neq 0$

Induktionsvorraussetzung (IV)

Sei $a_n \neq e$ für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt

Nach IV ist $a_n \neq 0$. Nach a) ist also auch $a_{n+1} = \varphi(a_n) \neq 0$.

4 Aufgabe

$$h(f^A(x_1, \dots, x_n)) \overset{\text{Def Hom}}{=} f^B(h_{s_1}(x_1), \dots, h_{s_n}(x_n)) \overset{x_i \sim_s y_i}{=} f^B(h_{s_1}(y_1), \dots, h_{s_n}(y_n))$$

$$\underset{\text{Def. Hom}}{=} h(f^A(x_1, \dots, x_n)).$$

Also $f^A(x_1, \dots, x_n) \sim_s f^A(y_1, \dots, y_n)$.

5. Aufgabe

a.) Wohldefiniertheit: Offensichtlich ist $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Linearität: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, dann gilt

$$f(\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f((\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \lambda(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \mu(b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \lambda f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu f((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

b.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(f)$. Dann gilt

$$(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0 \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

Also $a_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Demnach gilt $\ker(f) = \{(x, 0, 0, ..) \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}\}$.

c.) Surj.: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

nicht Inj.: Sei $x_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $y_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $y_0 = 1$
dann gilt $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = 0_{Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})} = (y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = f((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$

d.) Weil $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nicht endlichdimensional.
$\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ ist unendlich und nicht linear abhängig.

6. Aufgabe

a) Es gilt $A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ offensichtlich sind die Zeilen II und VI linear abhängig (alternativ auch I und III, oder Spalte) also ist λ_1 ein Eigenwert.

Es gilt $A-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Begründung wie oben. Also ist λ_2 EW.

b.) $\left((A-\lambda_1 I)\times|0\right) \underset{\substack{III+\frac{I}{2} \\ IV-II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{I-II}{8}}{\underset{\frac{II}{2}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also gibt es zwei Freiheitsgrade (zwei Nullzeilen)

Wähle $x_4 = s$, Dann folgt $x_2 = -s$. Wähle $x_3 = r$, dann folgt $x_1 = -r$

Es gilt $E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ -s \\ r \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\mathcal{B}_{-2} \text{ Basis für } E_{-2}(A)} \rangle$

$\left((A-\lambda_2 I)|0\right) \underset{\substack{III+I \\ II+VI}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{I+II}{4}}{\underset{\frac{II}{2}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Also gibt es zwei Freiheitsgrade (zwei Nullzeilen)

Wähle $x_4 = s$, dann folgt $x_2 = s$. Wähle $x_1 = r$ dann folgt $x_3 = \frac{-s-r}{2}$.

Es gilt $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ \frac{-r-s}{2} \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\mathcal{B}_2 \text{ Basis von } E_2(A)} \rangle$

c.) Eigenvektoren (auch zu verschiedenen EW) sind linear unabhängig. Also ist auch $\mathcal{B}_{-2}\,\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und es gibt keine weiteren Eigenvektoren

d.) $\det(A) = \det\left(S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix} S\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = (-2)^2 \cdot 2^2 = \underline{\underline{16}}$, wobei $S = \mathcal{B}_{-2}\,\mathcal{B}_2$ ist.

e.) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$