Nachschreibeklausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **WS 2019/2020**
Prof. Dr. Thomas Streicher **12.03.2020**

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: .... Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen. ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	8	8	8	8	8	8	6	54	
erreichte Punktzahl									

Zweitprüfer bei Drittversuch: ....

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.** Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte, wie beispielsweise Kugelschreiber**. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Multiple Choice) (8 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(a) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen gilt: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.	○	○
(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ hat Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.	○	○
(c) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.	○	○
(d) Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jedes $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: Ist f in x stetig partiell differenzierbar, so ist f in x total differenzierbar.	○	○
(e) Es gibt genau ein $x \in [-1, 1]$ mit $\cos(x) = x$.	○	○
(f) Jede monotone Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.	○	○
(g) Für jede Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\lvert f\rvert : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (mit $\lvert f\rvert(x) := \lvert f(x)\rvert$) integrierbar ist, dann ist auch f integrierbar.	○	○
(h) Sind $y_1, y_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y'(t) - y(t) = 0$, so ist auch die Funktion $y_1 + y_2$ (mit $(y_1 + y_2)(x) := y_1(x) + y_2(x)$) eine Lösung dieser Differentialgleichung.	○	○

2. Aufgabe (Grenzwerte) (8 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir eine beliebige reelle Zahl $a > 0$.

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a.$$

Sie können dabei annehmen, dass die Funktion $x \mapsto x \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ auf der Menge $(0, \infty)$ definiert ist.
Tipp: Schreiben Sie $x \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ und wenden Sie die Regel von de l'Hospital an. Weisen Sie insbesondere nach, dass die Voraussetzungen dieser Regel erfüllt sind.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

Sie können dabei annehmen, dass die Funktion $x \mapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ auf der Menge $(0, \infty)$ definiert ist.
Tipp: Vereinfachen Sie zunächst den Ausdruck $e^{x \cdot \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$. Verwenden Sie dann den Grenzwert aus Teilaufgabe (a).

3. Aufgabe (Taylorapproximation) (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x}$.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie $T_{2,f}(x; 1)$, also das Taylorpolynom zweiten Grades von f in 1.

(b) (3 Punkte) Verwenden Sie den Satz von Taylor, um $|T_{2,f}(2; 1) - \sqrt{2}| < \frac{1}{16}$ zu zeigen.

4. Aufgabe (Integralrechnung) (8 Punkte)

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln(x)\, dx$.

Tipp: Verwenden Sie partielle Integration.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$.

Tipp: Verwenden Sie eine geeignete Substitution.

5. Aufgabe (Extremwerte in mehreren Variablen) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^3 + 3xy + 2y + y^2.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f (also die Nullstellen des Gradienten von f). Entscheiden Sie für jeden der kritischen Punkte, ob ein relatives Maximum, ein relatives Minimum oder kein relatives Extremum vorliegt.

6. Aufgabe (Differentialgleichungen) (8 Punkte)

(a) (5 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) &= z(t)^2 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z(1) &= -1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie dazu eine stetig differenzierbare Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die gegebenen Gleichungen erfüllt.
Hinweis: Wenn Sie informell rechnen, dann müssen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe verifizieren.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differenzialgleichung

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tipp: Es gilt $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1) \cdot (\lambda - 1)$.
Hinweis: Ein Fundamentalsystem zu bestimmen bedeutet dasselbe, wie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung zu finden.

7. Aufgabe (Stetigkeit) (6 Punkte)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass gilt: Für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := x^2$ gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass g und h unterschiedliche Definitionsbereiche haben.