Nachschreibeklausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2017/2018
08.03.2018

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	16	11	7	19	10	18	81	
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nehmen Sie bitte **eigenes Papier**. Versehen Sie alle Blätter mit **Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (6+10 Punkte) (16 Punkte)

(a) i. Bestimmen Sie das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ und geben Sie es in der Reihenschreibweise an.

ii. Entscheiden Sie, ob die Folge von Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{N}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{N\geq 0}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) i. Sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x):=x^2\cdot\ln(x)$, für $x>0$. Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ii. Sei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ gegeben durch $g(x):=x^{x^2}$, für $x>0$. Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} g(x)$.

2. Aufgabe (6+5 Punkte) (11 Punkte)

Betrachten Sie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\sin(x)\cdot\cos(x)$ für $x\in\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $x_0=0$.

(b) Zeigen Sie, dass der Approximationsfehler $|f(x)-T_{2,f}(x;0)|$ auf dem Intervall $\left[-\frac{1}{100},\frac{1}{100}\right]$ echt kleiner als 10^{-6} ist.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Beweisen Sie die nachfolgende Einschließung mit dem Mittwelwertsatz der Differentialrechung:

$$1-\frac{1}{x}<\ln(x)<x-1,\qquad \text{für } x\in(1,\infty).$$

4. Aufgabe (19 Punkte)

Bestimmen und charakterisieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f:(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y):=\sin(x)\cdot\cos(y),\qquad \text{für } (x,y)\in(0,2\pi)\times(0,2\pi).$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Lösen Sie das nachfolgende Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen:

$$\begin{cases} xy'(x)=\frac{1}{y(x)}, & x\geq 1,\\ y(1)=1. \end{cases}$$

Beachten Sie, dass Sie bei Verwendung der Schmiermethode Ihr Ergebnis überprüfen müssen.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (18 Punkte)

Bitte kreuzen Sie im Folgenden die entsprechenden Kreise an. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(a) Berechnen Sie das Integral $I = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$ und kreuzen Sie das richtige Ergebnis an. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, falls Sie keine Antwort auswählen gibt es 1 Punkt und bei einer falschen Antwort erhalten Sie 0 Punkte.

- ○ $I = \frac{1}{3}e$.
- ○ $I = e - \frac{2}{3}$.
- ○ $I = e - 2$.
- ○ $I = \frac{1}{3}e - 2$.

(b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.

	Wahr	Falsch
1.) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch die Komposition $f \circ g$ differenzierbar.	○	○
2.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, dann ist f stetig.	○	○
3.) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\hat{x} \in D$. Falls $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $\hat{x}$ ist und $\nabla f(\hat{x}) = 0$, dann ist $\hat{x}$ eine Extremestelle von f.	○	○
4.) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so besitzt sie auch einen Häufungspunkt.	○	○
5.) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lvert b_n\rvert \leq \lvert a_n\rvert$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.	○	○
6.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $o(a_n) \subseteq O(a_n)$.	○	○
7.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $b_n \in O(a_n)$.	○	○
8.) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut, wenn $\lvert b_n\rvert \in O(a_n)$ gilt.	○	○