Probeklausur „Mathematik I für Informatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WS 2010/11
11.01.2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Euklidischer Algorithmus) (10 Punkte)

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie den ggT von 235 und 124.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $235x + 124y = 1$.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $235x + 124y = 3$.

Lösung:

(a) Der erweiterte Euklid ergibt:

a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	k	l
235	124	1	19	−36
124	111	1	−17	19
111	13	8	2	−17
13	7	1	−1	2
7	6	1	1	−1
6	1	6	0	1
1	0	0	1	0

(b) Es ist $19 \cdot 235 - 36 \cdot 124 = 1$.

(c) Nach (b) gilt

$$19 \cdot 235 - 36 \cdot 124 = 1 \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} 57 \cdot 235 - 108 \cdot 124 = 3.$$

2. Aufgabe (Geometrie) (10 Punkte)

Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E_2 := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_2 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge der beiden Ebenen.

Lösung: Zunächst geben wir E_2 in Parameterdarstellung an. Offensichtlich sind die Punkte $(0,0,0)^T, (1,0,0)^T, (0,0,1)^T$ in E_2 und die Ortsvektoren der letzten beiden Punkte sind linear unabhängig. Demnach ist

$$E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \varphi, \rho \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gleichsetzen von E_1 und E_2 ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda + \mu &= \varphi \\ 2 + \mu &= 0 \\ -2 - 2\lambda &= \rho. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich demnach $\mu = -2$, $\varphi = -2\lambda - 2$ und $\rho = -2 - 2\lambda$. Einsetzen in die Parameterdarstellung von E_2 ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2\lambda - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2 - 2\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort und die richtige Begründung jeweils 1 Punkt.

1.) Auf $\mathbb{R}$ ist $\leq$ eine Äquivalenzrelation.

2.) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: 8 teilt $9^n - 1$.

3.) Jede Menge, deren lineare Hülle der ganze Vektorraum ist, ist eine Basis.

4.) Für jede Primzahl p ist $\mathbb{Z}_p$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

5.) Für jeden Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ gilt $f(g *_G \overline{h}) = \overline{f(\overline{g}) *_H f(h)}$.

Lösung:

1.) Die Aussage ist falsch, da wegen $2 \leq 3$ und $3 \not\leq 2$ die Relation nicht symmetrisch ist.

2.) Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion. Induktionsanfang $n = 1$: 8 teilt $9^1 - 1 = 8$ ist wahr.

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$9^{n+1} - 1 = 9 \cdot 9^n - 1 = 9 \cdot 9^n - 9 + 8 = 9(9^n - 1) + 8.$$

Nach der Induktionsannahme teilt 8 den Term $9^n - 1$ und damit auch $9(9^n - 1)$. Aus $8|8$ folgt dann die Behauptung.

3.) Die Assage ist falsch. Zum Beispiel ist $\langle \mathbb{R}^2 \rangle = \mathbb{R}^2$ aber $\mathbb{R}^2$ offensichtlich kleine Basis.

4.) Die Aussage ist falsch. Für nichtganzahlige Skalar ist die Skalarmultiplikation nicht abgeschlossen. Z.Bsp. ist für $\lambda = \frac{1}{2}$ und $1 \in \mathbb{Z}_p$ das Produkt $\lambda \cdot 1 = \frac{1}{2}$ nicht in $\mathbb{Z}_p$ enthalten/

5.) Die Aussage ist nur in abelschen Gruppen gültig, aber allgemein falsch. Es gilt

$$f(g *_G \overline{h}) \stackrel{2.3.14}{=} f(g) *_H f(\overline{h}) = \overline{\overline{f(g) *_H f(\overline{h})}} = \overline{f(\overline{\overline{h}}) *_H f(\overline{g})} = \overline{f(h) *_H f(\overline{g})}$$

4. Aufgabe (Orthognales Komplement) (10 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ und U ein Untervektorraum von V.

(a) (7 Punkte) Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement von U

$$U^\perp := \{v \in V : (v|u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) (3 Punkte) Sei $\dim(V) = n$ und $\dim(U) = m \leq n$. Bestimmen Sie $\dim(U^\perp)$.

Lösung:

(a) Wir zeigen die drei Eigenschaften eines Untervektorraumes:

$0 \in U^\perp$ Es ist $(0|u) = 0$ für alle $u \in U$ und somit ist $0 \in U^\perp$.

$v + w \in U^\perp$ Seien $v, w \in U^\perp$. Dann gilt

$$(v + w|u) = (v|u) + (w|u) = 0$$

für alle $u \in U$. Somit ist $v + w \in U^\perp$.

$\lambda v \in U^\perp$ Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in U^\perp$. Dann gilt

$$(\lambda v|u) = \lambda(v|u) = 0$$

für alle $u \in U$ und somit ist $\lambda v \in U^\perp$.

damit ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V.

(b) Da U ein Vektorraum ist können wir nach Satz 3.4.14 eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_m$ von U wählen. Diese können wir dann nach Satz 3.2.17 zu einer Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ von V ergäenzen.

Für diese ergänzten Vektoren $v_{m+1}, \dots, v_n$ ist nun $(v_j|u) = 0$ für alle Vektoren $u \in U$, d.h. $\langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle \subset U^\perp$.

Sei $\tilde{u} \in U^\perp$ nun ein Vektor, der nicht in $\langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$ enthalten ist. Da $\tilde{u}$ auch in V enthalten ist kann $\tilde{u}$ dargestellt werden als

$$\tilde{u} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Da $\tilde{u}$ nicht in $\langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$ enthalten ist muss mindestend eines der $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ungleich 0 sein. O.b.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann gilt jedoch für jeden Vektor $u \in U$

$$(\tilde{u}|u) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \lambda_n v_n|u) = \lambda_1(v_1, u) + \lambda_{m+1}(v_{m+1}|u) + \ldots + \lambda_n(v_n|u).$$

Da $\langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle \subset U^\perp$ ist folgt damit

$$(\tilde{u}|u) = \lambda_1(v_1, u) \tag{1}$$

Da $\tilde{u}$ aus $U^\perp$ gewählt wurde muss $(\tilde{u}|u) = 0$ sein für alle $u \in U$. Wählen wir jedoch speziell $u = v_1 \in U$, so ergibt sich aus (1)

$$(\tilde{u}|v_1) = \lambda_1(v_1|v_1) = \lambda_1 \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $\tilde{u}$ und somit ist $\langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle = U^\perp$, d.h. $\dim(U^\perp) = n - m$.

5. Aufgabe (Gruppen) (10 Punkte)

(a) (4 Punkte) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \cdot)$ und die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11}$ mit $f(k) = k \cdot k$. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

Bestimmen Sie $f(\tilde{3})$, $f(\tilde{5})$ und $f(\tilde{9})$.

(b) (6 Punkte) Nun sei $(G, *)$ eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie, dass G abelsch ist, wenn $f : G \to G$ mit $f(g) = g * g$, $g \in G$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung:

(a) Es ist

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{3}) &= \tilde{3} \cdot \tilde{3} = \tilde{9} && (1)\\
f(\tilde{5}) &= \tilde{5} \cdot \tilde{5} = \tilde{25} = \tilde{3} && (2)\\
f(\tilde{9}) &= \tilde{9} \cdot \tilde{9} = -\tilde{2} \cdot -\tilde{2} = \tilde{4}. && (3)
\end{aligned}
$$

(b) Es ist zu zeigen, dass $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$ ist. Da f ein Gruppenhomomorphismus ist gilt

$$
\begin{aligned}
f(g * h) &= f(g) * f(h)\\
(g * h) * (g * h) &= g * g * h * h\\
g * h * g * h &= g * g * h * h\\
\bar{g} * g * h * g * h &= \bar{g} * g * g * h * h\\
n * h * g * h &= n * g * h * h\\
h * g * h &= g * h * h\\
h * g * h * \bar{h} &= g * h * h * \bar{h}\\
h * g * n &= g * h * n\\
h * g &= g * h.
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Für keine Antwort erhalten Sie 0 Punkte. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	Wahr	Falsch
1.) Eine Funktion $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn $f(A) = B$.	☐	☐
2.) Eine Funktion $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in A$ aus $x = y$ schon $f(x) = f(y)$ folgt.	☐	☐
3.) Eine Äquivalenzrelation ist symmetrisch, reflexiv und transitiv.	☐	☐
4.) Die reellen Zahlen zusammen mit der Multiplikation bilden eine Gruppe.	☐	☐
5.) Für ein Dreieck D ist die Menge aller Drehungen, die D auf sich selbst abbildet, eine Gruppe.	☐	☐
6.) Jedes Polyonom über $\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren.	☐	☐
7.) Die Menge $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
8.) Jede Menge von linear unabhängigen Vektoren bildet eine Basis.	☐	☐
9.) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm.	☐	☐
10.) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, v \mapsto 2v + 1$ ist linear.	☐	☐

Lösung: 1.) Wahr
2.) Falsch

3.) Wahr
4.) Falsch
5.) Wahr
6.) Wahr
7.) Falsch
8.) Nicht eindeutig. Jeder bekommt 1 Punkt.
9.) Wahr
10.) Falsch