Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2016/17
09.03.2017

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	16	24	16	16	16	88	
erreichte Punktzahl							

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (16 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos^2(x)-1} \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{x\to\infty} \cos(\pi x).$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

2. Aufgabe (24 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x.$$

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung, d. h. $\nabla f(x,y)$ und $H_f(x,y)$.

(b) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \partial_2 f(\mathrm{e}^t, t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Aufgabe (16 Punkte)

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der 2π-periodischen Fortsetzung von f für $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(b) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f gegeben ist durch

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\big((2n+1)x\big).$$

(c) Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe in (b) konvergiert und geben Sie an jeder dieser Stellen den Reihenwert an.

(d) Finden Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

1 a.) i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}(2+3/x)}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos^2(x)-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2\cos(x)\cdot(-\sin(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\cos(x)\cdot\sin(x)} \overset{L'H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{1}{-\sin^2(x)+\cos^2(x)} = -\frac{1}{1} = -1$$

L'H ist anwendbar, da Nenner und Zähler beliebig oft diff-bar sind

iii.) $\lim_{x\to\infty} \cos(\pi x)$

Sei $x_n = 2n$, dann $\cos(\pi x_n) = 1$

Sei $y_n = 2n+1$, dann gilt $\cos(\pi y_n) = -1$, Also hat $\cos(\pi x)$ mehr als ein HP.

Also ist $\cos(\pi x)$ divergent, für $x \to \infty$

b.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} x^n. \text{ Wurzelkriterium}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Also ist der konv.-Radius gleich e^{-1} $\quad \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$

$a^{p\cdot q} = (a^p)^q \qquad a^{(n^2)} = a^{n\cdot n} = (a^n)^n \quad = a^n$

$(a^n)^2 \neq a^{2n}$

2.)

$f(x,y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$

a) f ist (als Polynom) beliebig oft diff.bar.

$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 6y^2 - 12 \,,\, 12xy - 6y^2)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12y \\ 12y & 12x - 12y \end{pmatrix}$$

b.) Sei (x_0, y_0) ein krit. Punkt. Dann gilt

$0 = \nabla f(x_0,y_0) \iff \begin{matrix} 0 = 3x_0^2 + 6y_0^2 - 12 \\ 0 = 12x_0y_0 - 6y_0^2 = 6y_0(2x_0 - y_0) \end{matrix}$

Also muss $y_0 = 0$ (1. Fall) oder $y_0 = 2x_0$ (2. Fall)

1. Fall $y_0 = 0 \Rightarrow 0 = 3x_0^2 - 12 \Rightarrow 4 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm 2$

$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ hat EW 12 und 24, ist also pos. def.

Damit ist f bei $(2,0)$ ein Minimum.

$H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ hat EW -12 und -24, ist also neg. def. Damit ist bei $(-2,0)$ ein Maximum.

<u>2. Fall</u> $y_0 = 2x_0 \Rightarrow 0 = 3x_0^2 + 6(2x_0)^2 - 12$

$$\Rightarrow 27x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{2}{3}$$

Also sind $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ und $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ die krit. Punkte.

$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 8-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det\left(H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right) = -32 - 16^2 < 0$. Also ist $H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ indefinit und damit ist bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ein Sattelpunkt (also kein lok. Extremum

$$H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right) = -32 - (-16)^2 < 0$. Also ist $H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ indefinit. Damit liegt bei $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ein Sattelpunkt vor (also kein lok. Extr.

c.) $$\int_0^1 \partial_2 f(e^t, t)\,dt = \int_0^1 (12e^t \cdot t - 6t^2)\,dt$$

$$= 12 \int_0^1 \underbrace{e^t}_{v'} \cdot \underbrace{t}_{u}\,dt - 6\int_0^1 t^2\,dt$$

$$= 12\left[\underset{v'}{e^t}\cdot \underset{u}{t}\right]_0^1 - 12\int_0^1 \underset{v}{e^t}\,\underset{u'}{dt} - 6\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= 12\left[e^t t\right]_0^1 - 12\left[e^t\right]_0^1 - 6\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= 12(e-0) - 12(e-1) - 6\left(\frac{1}{3}-0\right)$$

$$= 12e - 12e + 12 - 2 = 10$$

4. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$, so gilt für das Taylorpolynom $k-1$-ten Grades $f(x) = T_{k-1,f}(x, 0)$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in -1 und 1 differenzierbar, so ist f auch in 0 differenzierbar.

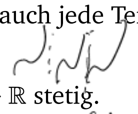
(c) Es sei $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ein Polynom mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann hat die Differentialgleichung $y'(t) = p(y(t))$ eine konstante Lösung. wahr, denn $y(t) = 0$, löst die DGL.

(d) Sind $q \in \mathbb{Q}$ und $z \in \mathbb{C}$ so, dass $\arg(z) = q\pi$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z^k \in \mathbb{R}$.

$q = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$: $z = |z| e^{iq\pi} = |z| e^{i\frac{a}{b}\pi} \Rightarrow z^b = |z|^b \underbrace{e^{ia\pi}}_{\in \{-1, 1\}} \in \mathbb{R}$

5. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit Null Punkten bewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist (a_n) eine beschränkte reelle Folge, so ist auch jede Teilfolge von (a_n) beschränkt.	☒	☐
(b)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $\tan \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. 	☐	☒
(c)	Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$ hat die Ableitung $f'(x) = x x^{x-1}$. $e^{x\ln(x)} \to e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$	☐	☒
(d)	Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.	☒	☐
(e)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = f(1)$, dann gibt es ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = 0$.	☒	☐
(f)	Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ total differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.	☒	☐
(g)	Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. $a_n = \frac{1}{n}$	☐	☒
(h)	Es gibt eine Potenzreihe, die in allen $x \in \mathbb{Z}$ konvergiert, aber in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ nicht.	☐	☒

4 a.) $f(x) = x^2$, beliebig oft diff-bar (Polynom)

$f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$

aber $T_{0,f}(x,0) = \sum_{n=0}^{0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = 0 \neq x^2 = f(x)$

b.) z.B. $f(x) = |x|$. ist offensichtlich in -1 und 1 diff-bar, aber nicht in 0

3^*

$$y'(t) = \frac{y}{t} - \frac{y^2}{t^2} = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad f(x) = x - x^2$$
$$y(1) = 1$$

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \Rightarrow z'(t) = \frac{y' \cdot t - y \cdot 1}{t^2} = \frac{\left(\frac{y}{t} - \frac{y^2}{t^2}\right) \cdot t - y}{t^2}$$
$$= \frac{y - \frac{y^2}{t} - y}{t^2} = -\frac{y^2}{t^3} = -\frac{\frac{y^2}{t^2}}{t} = -\frac{z^2}{t}$$

$$\begin{cases} z' = -\dfrac{z^2}{t} \\ \underset{t_0}{z(1)} = \dfrac{y(1)}{1} = \underset{z_0}{1} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow z' = \frac{dz}{dt} = -\frac{z^2}{t} \Rightarrow -\frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow \int_{1 = z(1)}^{z(t)} -\frac{1}{\tilde{z}^2} d\tilde{z} = \int_1^t \frac{1}{\tilde{t}} d\tilde{t} = \left[\ln(\tilde{t})\right]_1^t = \ln(t)$$
$$\parallel$$
$$\left[\frac{1}{\tilde{z}}\right]_1^{z(t)} = \frac{1}{z(t)} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(t)} = \ln(t) + 1 \Rightarrow z(t) = \frac{1}{\ln(t) + 1}$$

Probe: $z(1) = \frac{1}{\ln(1)+1} = 1$ ✓

$z'(t) = -\frac{1}{(\ln(t)+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{z^2}{t}$ ✓

Rücksubstitution

$y(t) = z(t) \cdot t = \frac{t}{\ln(t)+1}$

$$\int -\frac{1}{z^2}\,dz = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln(|t|) + c_1$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{z} + c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \ln(|t|) + \underbrace{c_1 - c_2}_{=:c}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{\ln(|t|)+c}$$

Es gilt $1 = z(1) = \frac{1}{\ln(1)+c} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{\ln(|t|)+1}$$