Nachschreibeklausur zur „Mathematik II für Informatik“ und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2018/2019
14.03.2019

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....
Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	16	16	18	14	10	16	90	
erreichte Punkte								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehnen Platz**. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht, Lose Blätter ohne Namen können nicht bewertet werden.

Sollten Sie **weiteres Papier** benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. Versehen Sie in diesem Fall jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Kennzeichnen Sie außerdem, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

Nachschreibeklausur Mathematik II für Informatik

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 1 (Grenzwerte und Reihen)

a) (8 Punkte) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5\cdot x)}{x}.$$

(Bemerkung Sie können annehmen, dass die Funktion $x \mapsto \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5\cdot x)}{x}$ auf der Menge $(0,\infty)$ definiert ist.)

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}.$$

Aufgabe 2 (Integralrechnung)

Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Integrale:

a) (8 Punkte) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

b) (8 Punkte) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx.$

Aufgabe 3 (Extremwerte in mehreren Variablen)

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -x^3 - \frac{1}{6}y^2 + xy.$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen des Gradienten von f und entscheiden Sie jeweils, ob ein relatives Maximum, ein relatives Minimum oder kein relatives Extremum vorliegt.

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen)

a) (10 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) &= \frac{2t}{e^{z(t)}}, \\ z(0) &= 0. \end{cases}$$

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + y^{(3)}(t) - 2y''(t) = 0.$$

Aufgabe 5 (Verallgemeinerung der Lipschitz-Stetigkeit)

Sei $\alpha > 0$ eine reelle Zahl. Eine Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ heißt α-Hölder-stetig, wenn es eine reelle Zahl $L>0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $x, y \in [0,\infty)$ gilt

$$|f(x)-f(y)| \le L\cdot|x-y|^{\alpha}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) (4 Punkte) Die durch $f(x) := \sqrt{x}$ definierte Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist $\frac{1}{2}$-Hölder-stetig.
(Hinweis: Sie dürfen die Ungleichung $(a-b)^2 \le |a^2-b^2|$ für $a,b\in[0,\infty)$ verwenden, ohne sie zu beweisen.)

b) (6 Punkte) Jede 2-Hölder-stetige und differenzierbare Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist konstant.

Nachschreibeklausur Mathematik II für Informatik

Name, Vorname: ______________________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 6 (Multiple Choice)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 2 Punkten bewertet. Jede leere oder fehlerhafte ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ konvergiert für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen.
Wahr ☐ Falsch ☐

b) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Wahr ☐ Falsch ☐

c) Jede stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.
Wahr ☐ Falsch ☐

d) Es gilt $\int_0^\pi \sin(x)^2 + \cos(x)^2 \, dx = \pi$.
Wahr ☐ Falsch ☐

e) Ist $f : [0,1] \to [0,1]$ streng monoton und in jedem Punkt $x \in [0,1]$ differenzierbar, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ in jedem Punkt $x \in [0,1]$ differenzierbar.
Wahr ☐ Falsch ☐

f) Jede integrierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Wahr ☐ Falsch ☐

g) Jede stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung $y'(t) = y(t)$ löst, ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
Wahr ☐ Falsch ☐

h) Hat eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (für reelle Zahlen $a < b$) ein relatives Extremum im Punkt $c \in [a,b]$, so muss $f'(c) = 0$ gelten.
Wahr ☐ Falsch ☐