1. Aufgabe

Mathe 2 WiSe 2016/17

a) (i) Sei $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}}{2x+3}$. Dann gilt mit $\frac{2n}{2n+3} = b_n$, $c_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, $b_n < a_n < c_n$

aus $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 = \lim_{n\to\infty} c_n$ mit dem Sandwich-Theorem $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = 1$

(ii) Mit dem Satz von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos^2(x)-1} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\cos(x)\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = -1.$$

(iii) Der Grenzwert existiert nicht, da für $a_n = 2n$ und $b_n = 2n+1$

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\pi a_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \cos(\pi b_n) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

b) Wir berechnen erst $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$. Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

2 Aufgabe

a) $\nabla f(x,y) = (3x^2+6y^2-12,\ 12xy-6y^2)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12y \\ 12y & 12x-12y \end{pmatrix}$$

b) $0 = \nabla f(x_0,y_0)$ impliziert $0 = 12x_0y_0 - 6y_0^2$; $y_0 = 0$ oder $2x_0 = y_0$

1. Fall $y_0 = 0$. Dann folgt aus $3x_0^2 - 12 = 0$, $x_0 = \pm 2$. $\Rightarrow (2,0), (-2,0)$ sind kritische Punkte

$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Minimum bei $(2,0)$

$H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ Maximum bei $(-2,0)$

2. Fall $2x_0 = y_0$ $\Rightarrow 0 = 3x_0^2 + 6y_0^2 - 12 = 3x_0^2 + 24x_0^2 - 12 = 27x_0^2 - 12$

$\Rightarrow x_0^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ und $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ sind kritische Punkte

$H_f(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$

Es gilt $\det(H_f(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})) = -24 - 16^2 < 0$ also ist bei $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ ein Sattelpunkt, da $H_f(2/3, 4/3)$ indefinit

$H_f(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$

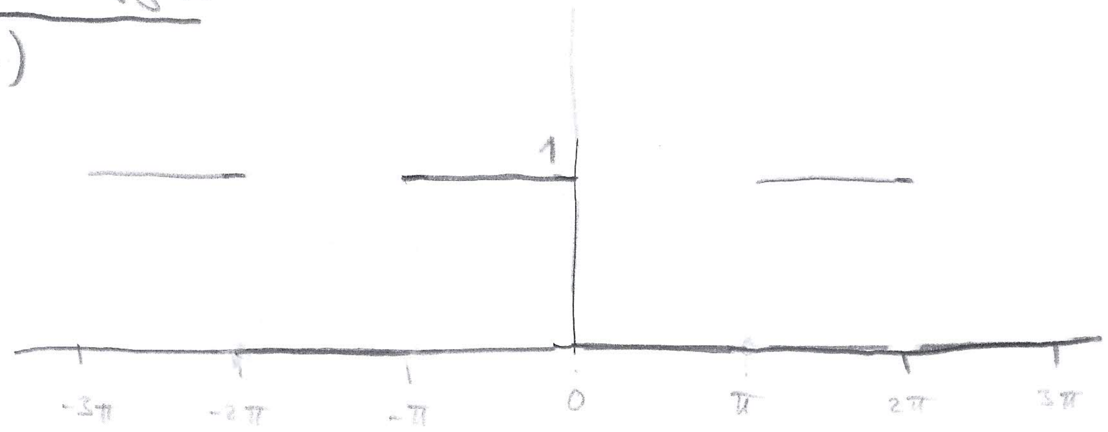
Es gilt $\det(H_f(-2/3, -4/3)_1) = -4 < 0$ und $\det(H_f(-2/3, -4/3)) = -24 + 256 > 0$. Also ist $H_f(-2/3, -4/3)$ negativ definit und bei $(-2/3, -4/3)$ ist ein Maximum.

c) $\int_0^1 \partial_2 f(e^t, t)\,dt = \int_0^1 (12te^t - 6t^2)\,dt = 12\int_0^1 te^t\,dt - 6\int_0^1 t^2\,dt$

$= 12\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right) - 6\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 12(e - e + 1) - 6\cdot\frac{1}{3} = 12 - 2 = 10$

3. Aufgabe

a)



b) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 1\,dx = \frac{\pi}{\pi} = 1$

Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n}(0-0) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{k \text{ ungerade}} \left(-\frac{2}{k\pi}\right) \sin(kx) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

c) f ist stückweise konstant, also stückweise glatt. Deshalb konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y)}{2} = \begin{cases} 0, & x \in (2n\pi, (2n+1)\pi), \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \in ((2n-1)\pi, 2n), \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & x = n\pi, \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\pi}{2}\left(\mathcal{F}_f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

4. Aufgabe

a) falsch. Sei $f(x) = x^3$. Dann gilt $f''(0) = 0$, aber

$$T_{2-1,f}(x,0) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k = 0$$

b) falsch. $f: x \mapsto |x|$ ist in -1 und 1 differenzierbar aber nicht in der 0

c) wahr. $y \equiv 0$ löst die Differentialgleichung.

d) wahr. Sei $q = \frac{n}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$z^{2m} = \left(|z|\, e^{i\frac{n}{m}\pi}\right)^{2m} = |z|^{2m} \underbrace{e^{2in\pi}}_{=1} = |z|^{2m} \in \mathbb{R}$$

5. Aufgabe

a) wahr. Gilt $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $|a_k| < C$, $k \in I$ für alle $I \subseteq \mathbb{N}$

b) falsch. $\tan$ ist nicht in $\frac{\pi}{2} + n\pi$ stetig also ist $\tan \circ f$ nicht auf $f^{-1}(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ stetig.

c) falsch. $f'(x) = x^x + x(\ln(x) + 1)x^x$.

d) wahr. Sei $f: X \to Y$ Lipschitz stetig. Dann gibt es ein $L > 0$, sodass

$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Dann gilt: $d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in X : d(x,y) \leq \delta$.

e) wahr. Mittelwertsatz

f) wahr.

g) falsch. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

h) falsch.