Mathe 1: Klausur #1

1. Aufgabe

Möglichkeit #1: Durch scharfes Hinschauen erkennt man $217 \cdot 1 + 35 \cdot (-4) = 217 - 140 = 77$, d.h. $k = 1$ und $\ell = -4$ sind eine Lösung.

Möglichkeit #2: Wir wenden den Erweiterten Euklid an. Sei dazu $a_0 := 217$ und $b_0 := 35$.

Zeile m	a_m	b_m	q_m	k_m	ℓ_m
0	$a_0 = 217$	$b_0 = 35$	$q_0 = \lfloor \frac{a_0}{b_0} \rfloor = 6$	$k_0 = 1$	$\ell_0 = k_1 - q_0 \cdot \ell_1 = -6$
1	$a_1 = b_0 = 35$	$b_1 = a_0 - q_0 \cdot b_0 = 7$	$q_1 = \lfloor \frac{a_1}{b_1} \rfloor = 5$	$k_1 = 0$	$\ell_1 = 1$
2	$a_2 = b_1 = 7$	$b_2 = a_1 - q_1 \cdot b_1 = 0$		$k_2 = 1$	$\ell_2 = 0$

Nach Erweitertem Euklid ist

$$7 = ggT(217, 35) = 217 \cdot 1 + 35 \cdot (-6), \text{ d.h.}$$

$77 = 7 \cdot 11 = 217 \cdot 11 + 35 \cdot (-66)$. Somit sind $k = 11$ und $\ell = -66$ eine Lösung.

2. Aufgabe nicht für diese Mathe 1

3. Aufgabe

(a) b_1 und b_2 Basis von $\mathbb{R}^2$ genau dann, wenn b_1 und b_2 linear unabhängig (aus Dimensionsgründen ist dann $\langle \{b_1, b_2\} \rangle = \mathbb{R}^2$, d.h. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ ist Erzeugendensystem).

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\alpha - \beta = 0$ und $\alpha + \beta \cdot 0 = 0$, d.h. $\alpha = \beta$ und $\alpha = 0$. Somit ist $\alpha = \beta = 0$, d.h. b_1 und b_2 sind linear unabhängig.

(b) Nach Voraussetzung ist

$$\phi(b_1) = b_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \quad \text{und}$$

$$\phi(b_2) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2.$$

Also ist $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} | & | \\ [\phi(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\phi(b_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Nach Basiswechselformel ist $$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^2}).$$

Es gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} | & | \\ b_1 & b_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

weil $\mathcal{E}$ die Standardbasis ist. Weiter ist

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^2})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\shortparallel} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Das charakteristische Polynom von $A := M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi)$ ist

$$p_A(t) = \det(A - t \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 0 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}$$
$$= (-1-t)\cdot(1-t) - (-1)\cdot 0 = (-1-t)\cdot(1-t).$$

Die Nullstellen von p_A sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.

(d) Wir haben zwei verschiedene Eigenwerte, so dass
$m_1 = \dim(E(A,-1)) = 1$ und
$m_2 = \dim(E(A,1)) = 1$ (da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$). Weiter
ist $m_1 + m_2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Nach Satz 3.11.13.

ist A diagonalisierbar.

4. Aufgabe nicht für diese Mathe 1

5. Aufgabe

(a) Falsch: Es ist $3 = 3$, d.h. $\neq$ ist nicht reflexiv.

(b) Wahr: Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann gibt es $x \in A \cap B$ mit $y = f(x)$. Dann ist auch $y = f(x)$ in $f(A)$ und $f(B)$ enthalten, d.h. $y \in f(A) \cap f(B)$.

(c) Falsch: Sei $(G, *, n) = (\mathbb{Z}_2, +, \tilde{0})$. Dann ist $\tilde{1} + \tilde{1} = \widetilde{1+1} = \tilde{2} = \tilde{0} = n$, d.h. $g := \tilde{1}$ ist ein Element mit $g = g^\#$ und $g \neq n$.

(d) Falsch: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal impliziert, dass Spalten von A eine Orthonormalbasis sind. Insbesondere sind die Spalten linear unabhängig, d.h. $\det(A) \neq 0$. Wäre 0 Eigenwert von A, so müsste

$$\det(A) = \det(A - 0 \cdot I_n) = 0 \text{ gelten,}$$

ein Widerspruch zu $\det(A) \neq 0$. Also kann 0 kein Eigenwert von A gewesen sein.

6. Aufgabe

(a) Wahr:

(b) Wahr: Aus $f(g^{\#_G}) = f(g)^{\#_H}$ folgt die Gleichung durch nochmaliges invertieren in H.

(c) Falsch: $z = i$ wählen, dann $-1 = z^2 \neq 1 = |z|^2$

(d) Wahr: Satz 3.5.10. für $d = 0$.

(e) Falsch: Wähle $U = V$

(f) Falsch: $(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B$ und für $n \geq 2$ gibt es A, B mit $A\cdot B \neq B\cdot A$.

(g) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(h) Wahr: Nach Satz 3.8.4.(b) ist $\ker(A) \neq \{0\}$, also ist $\det(A) = 0$.

(i) Wahr: Satz 3.6.19.

(j) Wahr: Definition von V/U