Mathe 2: Klausur #1

1. Aufgabe

(a) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n^2}$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ absolut konvergent

auf $(-r, r)$, falls $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert.

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$,

d.h. $r = 1$. Nach Satz 5.9.3. divergiert die Potenzreihe für X mit $|X| > r = 1$.

Randfall: $X = \pm 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} (\pm 1)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

konvergiert nach Beispiel aus der VL

Also: Absolute Konvergenz auf $[-1, 1]$.

(b) (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=: a_n}$ divergiert, weil $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

(nach Satz 5.5.5.)

(ii) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \operatorname{Exp}(3)$, also konvergiert die Reihe gegen e^3.

2. Aufgabe

(a) (i) $$\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{3}{x^2}\,dx \overset{\text{Stamm-}}{\underset{\text{Fkt.}}{=}} \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{3}{x}\right]_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{3}{a}-(-3)\right)$$

$$\overset{\text{Grenz-}}{\underset{\text{wertsätze}}{=}} 0+3=3.$$

(ii) $\sqrt{\cdot}$ ist stetig, $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2\neq 0$, also folgt aus den Grenzwertsätzen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Substitution $z(x):=\tan(x)$. Dann ist $z'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ und mit $f(z):=z$ gilt

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int_0^{\pi/4} z(x)\cdot z'(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f(z(x))\cdot z'(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \int_{z(0)}^{z(\pi/4)} f(z)\,dz = \int_0^1 z\,dz$$

$$= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. Aufgabe

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$ ist als Produkt von $\frac{1}{2}x^2$ und $\ln(x)$ differenzierbar mit

$$f'(x) \overset{\text{Produkt-regel}}{=} x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{x \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{ebenfalls diff.bar} \\ \text{nach Produktregel}}}$$

$$f''(x) = 1\cdot\left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right) + x \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{\ln(x) + \frac{3}{2}}_{\substack{\text{diff.bar als Summe} \\ \text{diff.barer Funktionen}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) $f(1) = 0$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{3}{2}$, $f'''(1) = 1$.

Also ist $T_{3,f}(x;1) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$$= \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

5. Aufgabe

(a) Falsch: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ ist

in Null unstetig, weil $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert.

Ebenso ist $g(x) := -f(x)$ in Null unstetig, aber

$(f+g)(x) = 0$ ist konstant Null – insbesondere stetig!

(b) Wahr: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert absolut für alle $x \in (-2,2)$ nach Voraussetzung und für $x = 1 \in (-2,2)$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ somit absolut konvergent (Satz aus VL)

(c) Wahr: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x) = \|x\|_2^2 \geq 0$ nach Definition von $\|\cdot\|_2$ und es ist $f(0) = 0$.

(d) Wahr: $f(x,y) := x^3 y$ erfüllt $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 y$ und $\partial_2 f(x,y) = x^3$. Außerdem ist f stetig diff-bar.

<u>6. Aufgabe</u>

(a) Falsch (b) Falsch (c) Falsch: $x = y = 1$ einsetzen

(d) Wahr (e) Falsch (f) Wahr: Satz 6.5.12.

(g) Wahr (h) Wahr: Monotonie, Satz 6.7.7. (a)

(i) Wahr nach Satz 6.9.12.

((j) Wahr (als AWP))

4. Aufgabe

(a) Die Funktionen sind als Verknüpfungen stetig partiell diff.barer Funktionen selbst stetig partiell diff.bar. Es gilt

$$\nabla f_1(x,y) = \left(\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{4}\right) \quad \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{4}\right) \right) \quad \text{und}$$

$$\nabla f_2(x,y) = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos(y)}{1+x^2} \quad -\frac{1}{4}\arctan(x)\cdot\sin(y) \right).$$

Für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\|\nabla f_1(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{x+y}{4}\right) + \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{x+y}{4}\right)$$

$$\overset{\cos^2 \le 1}{\le} \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}.$$

Für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\|\nabla f_2(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{16}\frac{\cos^2(y)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{16}\cdot(\arctan(x))^2\cdot\sin^2(y)$$

$$\le \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cdot\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{\le 3}$$

$$\cancel{\le}\ < \frac{1}{16} + \frac{\cancel{1+}3}{16} = \frac{\cancel{1+3}\ 4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Also, durch Wurzelziehen, $\|\nabla f_j(x,y)\| < \frac{1}{2}$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ und alle $j \in \{1,2\}$.

(b) Es gilt

$$|f_j(x,y) - f_j(\tilde{x},\tilde{y})| \leq \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_2$$

nach (a) und dem Schrankensatz Satz 6.5.18.

Also ist

$$\|F(x,y) - F(\tilde{x},\tilde{y})\|_2 = \sqrt{(f_1(x,y) - f_1(\tilde{x},\tilde{y}))^2 + (f_2(x,y) - f_2(\tilde{x},\tilde{y}))^2}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{4} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \cdot 2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{<1} \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_2 < \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_2$$

Damit ist F eine strikte Kontraktion.

(c) Gleichungssystem erfüllt $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Nach (b) ist F eine strikte Kontraktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Also hat F genau einen Fixpunkt nach dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz 5.6.22. (a). Nach obiger Äquivalenz gibt es also genau eine Lösung des Gleichungssystems.