Mathe 2: Klausur #3

1. Aufgabe

(a) Offenbar ist f 2-mal stetig partiell diff.bar (Summe und Produkte solcher Funktionen). Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x,y,z) &= 4x - z^2 \\ \partial_2 f(x,y,z) &= 2y + z \\ \partial_3 f(x,y,z) &= -2zx + y \end{aligned}\right\} \quad \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x - z^2 \\ 2y+z \\ -2zx+y \end{pmatrix}$$

$$\partial_{11} f(x,y,z) = 4, \quad \partial_{22} f(x,y,z) = 2, \quad \partial_{33} f(x,y,z) = -2x$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_{12} f(x,y,z) &= 0 = \partial_{21} f(x,y,z) \\ \partial_{13} f(x,y,z) &= -2z = \partial_{31} f(x,y,z) \\ \partial_{23} f(x,y,z) &= 1 = \partial_{32} f(x,y,z) \end{aligned}\right\} \text{ jeweils nach Satz von Schwarz}$$

Also ist $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2z \\ 0 & 2 & 1 \\ -2z & 1 & -2x \end{pmatrix}$.

(b) Notwendig: $\nabla f(x,y,z) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 4x &= z^2 \\ -2y &= z \\ y &= 2x \cdot z \end{aligned}$$

Fall $z=0$: Dann ist $x = \frac{1}{4} z^2 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ und

$y = 2 \cdot x \cdot z = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Fall $z \neq 0$: Einsetzen der dritten in die zweite Gleichung ergibt $-4xz = z \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} -4x = 1$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Also ist $z^2 = -1$, was nicht sein kann, da $z^2 \geq 0$.

Somit ist $(0,0,0)$ der einzige kritische Punkt von f.

Hinreichend: $A = H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat als

Hauptminoren $\det(4) > 0$, $\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 > 0$ und

$\det(A) = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$. Damit ist

A indefinit, so dass in $(0,0,0)$ kein lokales Minimum oder Maximum vorliegt.

(c) Als Summe ~~von~~ Produkten stetiger Funktionen ist f stetig. Weiter ist M kompakt: Für $(x,y,z) \in M$ gilt $\|(x,y,z)^T\|_2 \leq 1$, d.h. M ist beschränkt. Nach Bsp. 5.6.10. (b) ist M auch abgeschlossen. Eine stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge stets ein globales Maximum an (Satz vom Maximum).

2. Aufgabe

(a) Es gilt

$$f'(x) = -x^{-2},$$
$$f''(x) = 2 \cdot x^{-3},$$
$$f'''(x) = -3! \cdot x^{-4},$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$ für alle

$n \in \mathbb{N}$ (einfache Induktion).

Folglich ist $f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n! \cdot 1^{-(n+1)} = (-1)^n \cdot n!$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$T_f(x;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{=:a_n} \cdot (x-1)^n$$

(b) Es gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, d.h. $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$

ist der Konvergenzradius nach Hadamard.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \underset{\substack{\text{Reihe} \\ |1-x| = |x-1| < 1}}{\overset{\text{geom.}}{=}} \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f(x),$$

d.h. $T_f(x;1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < 1$.

Also wird f durch ihre Taylorreihe dargestellt auf $(0,2)$.

3. Aufgabe

(a) Für $0 < a < 1$ und x mit $a \leq x \leq 1$ gilt

$$\sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot (1) \leq \sqrt{x} \cdot (1 + x^2)$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Aus Monotonie des Integrals folgt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x^2)} \, dx \leq \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Für $1 < b < \infty$ und x mit $1 \leq x \leq b$ gilt

$$1 + x^2 = (1 + x^2) \cdot \underbrace{1}_{\leq \sqrt{x}} \overset{x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1}{\leq} (1+x^2) \cdot \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Monotonie des Integrals impliziert

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x^2)} \, dx \leq \int_1^b \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

(b) Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

$$= \lim_{a \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0} \left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} \right]$$

$$\overset{\sqrt{\cdot} \text{ stetig und GWS}}{=} 2$$

Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\overset{\text{Stamm. fkt.}}{=} \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan(x)\Big]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan(b) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}}\Big]$$

$$\underset{\text{und GWS}}{\overset{\arctan(b)\xrightarrow{b\to+\infty}\frac{\pi}{2}}{=}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x^2)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x^2)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x^2)}\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{Sandwich}\\ \text{und (b)}}}{\overset{\text{(a) und}}{\leq}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\leq 2 + \frac{\pi}{4} < 2 + \frac{4}{4} = 3$$

und wegen $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \geq 0$ ist $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x^2)}\,dx \geq 0$.

4. Aufgabe

(a) Falsch: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & x\neq 0, \end{cases}$

ist eine Funktion mit $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0) = 1$.

Also ist f unstetig in 0.

(b) Wahr: $U := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ gerade} \}$ ist nicht leer, weil $f(x) := \cos(x)$ in U liegt. Seien $f, g \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(-x) = \lambda \cdot f(-x) + \mu \cdot g(-x)$$
$$\overset{f,g \in U}{=} \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x),$$

d.h. $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in U$.

(c) Wahr: Sei $g(t) := \frac{1}{t}$ und $h(\eta) := 1 + \eta^2$. Dann sind g und h stetig (auf $(0, \infty)$ zum Bsp.) und es ist $y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$, d.h. es liegt eine DGL in getrennten Veränderlichen vor. Wegen $h(y(1)) = h(0) = 1 \neq 0$ existiert eine eindeutige Lösung nach Satz 7.2.2.

(d) Falsch: Sei $f(x) := \sin(x)$ und $g(x) := 1$. Dann ist $b_1 = 1$, $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n = 0$ für $n \geq 2$ sowie $c_0 = 2$, $c_n = 0 = d_n$ für $n \geq 1$. Dann ist $(f \cdot g)(x) = \sin(x)$ eine Fourierreihe, die nicht nur 0 als Koeffizienten besitzen (das käme bei

$$\frac{a_0 \cdot c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n \cos(nx) + b_n d_n \cdot \sin(nx))$$ heraus).

5. Aufgabe

Sei $x \geq 0$. Dann gilt

$$f(x) - f(0) \overset{\text{Haupt-}}{\underset{\text{satz}}{=}} \int_0^x f'(t)\,dt \quad \left(\text{anwendbar, da } f \text{ stetig diffbar}\right).$$

Dann ist

$$|f(x)-f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \overset{\text{Satz 6.7.7 (d)}}{\leq} \int_0^x |f'(t)|\,dt$$

$$\overset{\text{Voraussetzung}}{\underset{\text{+Monotonie}}{\leq}} \int_0^x 1+t\,dt = x + \frac{x^2}{2}.$$

Also gilt $\displaystyle 0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)-f(0)|}{x^3} \leq \frac{\lim_{x\to\infty} x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}\right) \overset{\text{GWS}}{=} 0 + 0 = 0, \text{ d.h.}$$

$\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x^3} = 0.$ Da $f(0)$ fest, gilt $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{f(0)}{x^3} = 0.$

Nach GWS existiert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x^3} + \frac{f(0)}{x^3}\right)$$

$$\overset{\text{GWS}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x^3} + \lim_{x\to\infty}\frac{f(0)}{x^3}$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

6. Aufgabe

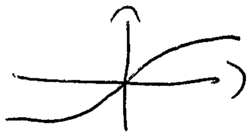
(a) Falsch: $f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) := 0$

(b) Wahr

(c) Falsch: Diese DGL hat eine diff-bare Lösung

(d) Wahr: Superpositionsprinzip

(e) Falsch:



(f) Wahr: $\partial_{12} f(x,y) = y \neq x = \partial_{21} f(x,y)$ für $y=1$ und $x=0$

(g) Wahr: $z = r \cdot e^{i \arg(z)} = r \cdot e^{i \arg(w) + \pi} = r \cdot e^{i \arg(w)} \cdot (-1)$

$w = s \cdot e^{i \arg(w)}$

Also wegen $s \neq 0$ ist $z = \underbrace{\frac{r}{s} \cdot (-1)}_{=:\lambda} \cdot \underbrace{s \cdot e^{i \arg(w)}}_{=w}$

$= \lambda \cdot w.$

(h) Wahr: $1 \in (-3,3)$