Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2012
06.09.2012

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	13	12	10	18	7	60			
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben sei die komplexe 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie $\det(A^{2012})$.

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\text{(i)}\quad a_n = \frac{15n^3 - 7n + 1}{n(3n^2 - 7)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad\qquad \text{(ii)}\quad b_n = i^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-3}{n+5} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)^n}$$

(c) Bestimmen Sie den Reihenwert von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Aufgabe (18 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar.

(b) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $M \neq \emptyset$ und es seien $a, b \in M$ mit zugehörigen Äquivalenzklassen $\tilde{a}, \tilde{b} \in M/_\sim$. Dann gilt

$$\exists x \in \tilde{a} \cap \tilde{b} \iff \tilde{a} = \tilde{b}.$$

(c) Jede Gruppe besitzt eine abelsche Untergruppe.

(d) Es sei F der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Abbildung $\Phi : F \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(f) = f(0)$ ist linear.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Gilt $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(f) Es seien V ein K-Vektorraum, sowie U_1 und U_2 Untervektorräume von V mit Basen $\mathscr{B}_1$ bzw. $\mathscr{B}_2$. Dann ist $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$ eine Basis des Untervektorraums $U_1 \cap U_2$.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear, so dass $2\Phi - \Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ gilt. Zeigen Sie

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ Eigenwert von } \Phi\} = \{1\}.$$