Mathe 2: Klausur #5

1. Aufgabe

(a) Klar: f ist 2-mal stetig partiell diff.bar, weil Polynome und Summen davon es sind.

Es gilt $\nabla f(x,y,z) = (4x - z \quad 2y \quad -x - 3z^2)$

und $$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -6z \end{pmatrix}.$$

Notwendiges Kriterium:

$$\nabla f(x,y,z) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = z \quad \text{und} \quad 2y = 0 \quad \text{und} \quad 3z^2 = -x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = z \quad \text{und} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = -3z^2$$

Setze $x = -3z^2$ in $4x = z$ ein und erhalte

$$z = 4(-3z^2) = -12z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 12z^2 + z = 0 \Leftrightarrow z(12z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = -\frac{1}{12}$$

Also sind wegen $x = \frac{1}{4}z$ die kritischen Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1/48 \\ 0 \\ -1/12 \end{pmatrix}.$$

Hinreichendes Kriterium: $A_j = H_f(p_j)$ für $j \in \{1,2\}$ ②

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ hat charakteristisches Polynom

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{nach 2. Zeile}}{=}} (2-\lambda)\cdot\big((4-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1\big)$$

$$= \underbrace{(2-\lambda)}_{\substack{=0 \\ \Leftrightarrow \lambda_3 = 2}} \cdot \underbrace{(\lambda^2 - 4\lambda - 1)}_{\substack{=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2+1} \\ = 2 \pm \sqrt{5}}}$$

Es gilt $\lambda_1 = 2+\sqrt{5} > 0$ und $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$, also ist A_1 indefinit. Damit hat f kein Extremum in p_1.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ hat die Unterminoren

$4 = \det(4) > 0$, $8 = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$ und

$$\det(A_2) \overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{nach 2. Zeile}}{=}} 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\cdot(2-1) = 2 > 0.$$

Also ist A_2 nach Satz 3.11.22. (a) positiv definit.

Somit hat f in p_2 ein relatives Minimum.

(b) Die Menge

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$$

$$= \overline{B_1(0)}$$

ist nach VL kompakt. Weiter ist f stetig, weil f stetig partiell diff.bar ist. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge hat f ein globales Maximum auf (nach Satz vom Maximum).

(c) Nach (a) ist $\nabla f(0,0,0) = (0 \ 0 \ 0)$, also gilt

$$T_{1,f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= f(0,0,0) = 3.$$

2. Aufgabe

(a) Variablen sind getrennt: für $g(\tau) := \sin(\tau)$ und $h(\eta) := e^{\eta}$ gilt $y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$.

Lösung mit Schmiermethode:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = e^{y(t)} \cdot \sin(t)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-y}\, dy = \sin(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y(0)=0}^{y(t)} e^{-y}\, dy = \int_{t_0=0}^{t} \sin(\tau)\, d\tau$$

Integrale ausrechnen:

$$\int_0^{y(t)} e^{-y}\,dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{y(t)} = -e^{-y(t)} + 1$$

und $$\int_0^t \sin(\tau)\,d\tau = \left[-\cos(\tau)\right]_0^t = -\cos(t) + 1$$

Also ist $-e^{-y(t)} + 1 = -\cos(t) + 1$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-y(t)} = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad -y(t) = \ln(\cos(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = -\ln(\cos(t)) = \ln\left(\frac{1}{\cos(t)}\right).$$

Probe: $y(0) = -\ln(\cos(0)) = -\ln(1) = 0$,

$$y'(t) = -\sin(t) \cdot -\frac{1}{\cos(t)} = \sin(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(t)}}_{= e^{y(t)}}$$

$$= \sin(t) \cdot e^{y(t)} \quad \checkmark$$

Das Existenzintervall $I = (a,b)$ muss erfüllen

$0 \in I$ und $\cos(t) > 0$ für alle $t \in I$

$\Leftrightarrow$ $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Damit ist $y: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $y(t) := \ln\left(\frac{1}{\cos(t)}\right)$

die Lösung des AWP.

3. Aufgabe

(a) Sei $P(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=: a_n} x^n$. Nach Hadamard

ist $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1}$

der Konvergenzradius von P.

(b) Es gilt $f'(x) = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$

$$\underset{\text{+ geom. Reihe}}{\overset{x\in(-1,1)}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Nach Ableitung für Potenzreihen ist

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

für alle $x \in (-1,1)$ (siehe 6.1.22. (c)).

Also gilt $f'(x) = P'(x)$ für alle $x \in (-1,1)$

$$\overset{\text{Satz 6.2.2 (c)}}{\Rightarrow} \quad f(x) = P(x) + C \quad \text{für alle } x \in (-1,1)$$

Wegen $f(0) = -\ln(1) = 0 = P(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0^n$ ist

$C = 0$, d.h. $f(x) = P(x)$ für alle $x \in (-1,1)$.

(c) Für P gilt nach Bsp. 6.1.22. (c)

$$f(x) = P(x) \overset{f(0)=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n .$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{f^{(2014)}(0)}{2014!} = \frac{1}{2014} \Leftrightarrow f^{(2014)}(0) = 2013!$$

(d) $x=1$: $P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist harmonische Reihe, divergiert

also

$x=-1$: $P(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ ist alternierende harmonische Reihe, konvergiert also nach Bsp. aus VL

4. Aufgabe

Sei $D\phi(x_0) := \phi$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und $r(x) := 0$. Dann gilt

$$\phi(x) = \phi(x_0 - x_0 + x) = \phi(x_0 + (x - x_0))$$

$$\overset{\phi \text{ linear}}{=} \phi(x_0) + \phi(x - x_0) + 0$$

$$= \phi(x_0) + D\phi(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x).$$

Weiter ist $\lim_{x \to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} \overset{r(x)=0}{=} 0$, also ist ϕ total diff.bar mit Ableitung $D\phi(x_0) = \phi$.

5. Aufgabe

(a) Falsch: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ liefern konvergente Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nach dem Leibniz-Kriterium, aber

die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ divergiert.

(b) Wahr: f ist gerade, denn $f(-x) = |-x|^3 = |x|^3 = f(x)$.

Nach Satz 6.9.9. hat die Fourierreihe die Gestalt $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

(c) Falsch: $f(x) := \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in Null,

aber $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$ (Bsp. aus VL).

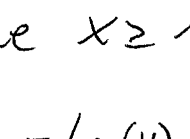
(d) Wahr: Sei $f(x) := \ln(x)$. Dann gilt $f'(x) = \frac{1}{x} \leq 1$

für alle $x \geq 1$. Nach Schrankensatz ist

$|\ln(x) - \ln(y)| = |f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot |x-y|$ für alle $x, y \geq 1$.

6. Aufgabe

(a) Wahr (b) Falsch: $f(\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2} + 2\pi)$ (c) Wahr

(d) Falsch:  (e) Falsch (f) Falsch: Gegenbsp. in VL

(g) Wahr: Satz aus VL (h) Falsch: $f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$

(i) Falsch: $\partial_{21} f(x,y) = x \neq 0 = \partial_{12} f(x,y)$ für $x \neq 0$ (j) Falsch: $F'(\pi) = \pi^2 \cdot \cos(\pi) \neq 2\pi \cdot \cos(\pi)$