Klausur zur „Mathematik I für Informatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WiSe 2020/21
11.03.2021

Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Bearbeitungszeit: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Die vorwiegend kurzen Aufgaben enthalten klare Anweisungen, was jeweils verlangt ist.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und ggf. verlangte Begründung besonderer Wert gelegt.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie **alle schriftlichen Unterlagen** verwenden.
- **Selbständigkeitserklärung** beachten (s.u.).
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.
- **Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.
- **Viel Erfolg!**

Selbständigkeitserklärung

Mit der Teilnahme verpflichte ich mich zur eigenständigen Bearbeitung ohne fremde Hilfe und zu strikter Fairness. Mir ist bekannt dass Hinweise auf regelwidriges Verhalten ebenso wie Nichtbeachten der technischen Vorgaben dazu führen können, dass die Prüfungsleistung als nicht bestanden und ggf. als Betrugsversuch gewertet wird.

Ich habe mich vergewissert, dass ich zur Teilnahme an der Klausur zugelassen bin. Hiermit bestätige ich, darüber belehrt worden zu sein, dass meine Teilnahme an der Online-Prüfung in Mathe 1 für Inf WiSe 20/21 nur unter dem Vorbehalt der nachträglichen Bestätigung meiner Zulassung zu dieser Prüfung erfolgt.

Ich bestätige meine Zustimmung zu den allgemeinen Bestimmungen sowie zu diesen speziellen Hinweisen zur eigenständigen Bearbeitung sowie die Richtigkeit der gemachten Angaben zur Person.

1. Aufgabe (Wahr oder Falsch) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei U ein Vektorraum und seien V, W Untervektorräume von U. Dann ist auch die Menge $V \cup W$ mit der Addition und skalaren Multiplikation von U ein Untervektorraum.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Existiert eine Lösung $v \neq 0$ des Gleichungssystems $Av = 0$, so hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

(c) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Dann existiert eine Matrix $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $AB = BA = I$, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichne.

(d) Sei R ein Ring und $a, b \in R$. Wenn $ab = 0$, dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$.

(e) Jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V ist eine Basis eines Untervektorraums von V.

(f) Sei V ein Vektorraum und seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(V)$ zwei lineare Abbildungen. Dann gilt $\Phi \circ \Psi = 0$ genau dann wenn $\Psi(V) \subseteq \ker(\Phi)$.

(g) Sei U ein 4-dimensionaler Vektorraum und seien $V, W \subseteq U$ Untervektorräume mit $\dim(V) = 3$ und $\dim(W) = 2$. Dann gilt $\dim(V \cap W) > 0$.

(h) Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

2. Aufgabe (Matrixdarstellung) (12 Punkte)

Es sei $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Punktspiegelung am Ursprung und $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion auf die Ursprungsgerade $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$.

(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\Phi_2 \circ \Phi_1$ bezüglich der Standardbasis.

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $(\Phi_2 \circ \Phi_1)^{2021}$ bezüglich der Standardbasis.

3. Aufgabe (Induktion) (12 Punkte)

Sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie mittels Induktion durch $n \in \mathbb{N}$, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

4. Aufgabe (Diagonalisierung) (16 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -12 & 2 \\ 3 & 11 & -1 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
Tipp: Zur Berechnung der entsprechenden Determinante versuchen Sie nach der dritten Zeile zu entwicklen und dabei $(3-\lambda)$ auszuklammern.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.
Hinweis: Sie brauchen die inverse Matrix S^{-1} nicht zu berechnen.

5. Aufgabe (Gruppen) (12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir definieren die Menge

$$G_n := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\det(A)| = 1 \}.$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass G_n mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.
Tipp: Sie dürfen bekannte Rechenregeln für Matrizen verwenden.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge

$$H_n := \{ A \in G_n : \det(A) = 1 \}$$

eine Untergruppe von G_n ist.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K_n := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ ist orthogonal} \}$$

eine Untergruppe von G_n ist.

(d) (2 Punkte) Geben Sie eine Matrix in $K_2 \setminus H_2$ an.

6. Aufgabe (Universelle Algebra) (7 Punkte)

(a) (3 Punkte) Sei $\Sigma = (S, F, \mathrm{ar})$ eine Signatur und A eine Σ-Algebra. Für Kongruenzrelationen $R = (R_s)_{s\in S}$ und $R' = (R'_s)_{s\in S}$ definieren wir eine Familie von Relationen durch

$$R'' := (R_s \cap R'_s)_{s\in S}.$$

Zeigen Sie, dass R'' ebenfalls eine Kongruenzrelation auf A ist.

(b) (4 Punkte) Wir definieren eine Signatur $\Sigma = (S, F, \mathrm{ar})$ durch

$$S = \{s\},\ F = \{c, f\},\ \mathrm{ar}(c) = (\varepsilon, s),\ \mathrm{ar}(f) = (s, s).$$

Zeigen Sie, dass die Termalgebra $T(\Sigma)$ isomorph ist zur Σ-Algebra $\mathcal{N}$ definiert durch

$$\mathcal{N}_s := \mathbb{N},\ c^{\mathcal{N}} = 0,\ f^{\mathcal{N}}(n) := n+1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$