Mathe 2 : Klausur #2

1. Aufgabe

(a) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+42} = \sum_{m=42}^{\infty} \underbrace{(-1)^{m-42}}_{=: a_m} x^m$.

Weiter ist $\sqrt[m]{|a_m|} = \sqrt[m]{|(-1)^{m-42}|} = \sqrt[m]{1} = 1$,

d.h. der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $r = \dfrac{1}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} = \dfrac{1}{1} = 1$. Also

konvergiert die Reihe für alle $x \in (-1,1)$.

Für $x = \pm 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pm 1)^{n+42} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (\pm 1)^n \cdot \underbrace{(\pm 1)^{42}}_{=1,}$$

da 42 gerade

Nun ist $\left((-1)^n \cdot (\pm 1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so dass Divergenz für x mit $|x| \geq 1$ vorliegt.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} (x-1)^n$ ist Potenzreihe mit

$a_n = \frac{(-4)^n}{n}$ (man müsste ab $n=1$ summieren um hier nicht durch 0 zu teilen...) ②

und Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Der Konvergenz-radius ist nach Hadamard

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-4)^n}{n}\right|}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n}}} \overset{\text{Wurzel-}}{\underset{\text{gesetze}}{=}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4^n}}{\sqrt[n]{n}}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}}} \overset{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1}{\underset{\text{und GWS}}{=}} \frac{1}{\frac{4}{1}} = \frac{1}{4}.$$

Somit liegt Konvergenz vor auf

$$\left(x_0 - \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right),$$

Divergenz auf $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

Für $x = \frac{3}{4}$ ist $(x-1)^n = \left(\frac{3}{4} - 1\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$$= \frac{1^n}{(-4)^n} = \frac{1}{(-4)^n}, \text{ d.h.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-4)^n}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{(-4)^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist die harmonische Reihe und somit divergent.

Für $x = \frac{5}{4}$ ist $(x-1)^n = \left(\frac{5}{4}-1\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$,

so dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{4^n}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{4^n}}$

als alternierende harmonische Reihe konvergiert.

Also: Konvergenz auf $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Achtung: Alternative Lösung auf letzter Seite!

Doch nicht... Nachtrag ~~morgen~~ kommt.

(c) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{e=1}^{n}\frac{1}{e}\cdot x^n\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{e=1}^{n}\frac{1}{e}\right)}_{=:a_n} \cdot x^n.$$

Wir benutzen das Quotientenkriterium Satz 5.9.10. um den Konvergenzradius zu bestimmen.

Wir nutzen noch folgende Tatsache aus:

$\boxed{\text{Ist } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bestimmt divergent gegen } +\infty, \text{ so ist } \left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine Nullfolge.} \quad (*)}$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $C := \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \geq C$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt somit $b_n \geq C = \frac{1}{\varepsilon} \overset{\varepsilon > 0}{\underset{b_n > 0}{\Leftrightarrow}} \varepsilon \geq \frac{1}{b_n}$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein.

$\lrcorner$

Es gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n \cdot (n+1)}$.

Die Folge $b_n := a_n(n+1)$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die harmonische Reihe ist. Nach $(*)$ und GWS ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 + 0 = 1$, d.h.

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{1} = 1$$

ist der Konvergenzradius. Somit liegt Konvergenz auf $(-1,1)$ vor und Divergenz auf $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Für $x = \pm 1$ ist $a_n \cdot x^n = a_n \cdot (\pm 1)^n$ keine Nullfolge, d.h. Konvergenz <u>nur</u> auf $(-1,1)$.

2. Aufgabe

(a)

(a_1) Auf $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \}$ gilt

$f(x,y) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + y$. Auf U ist diese Funktion als Summe / Produkt / Verknüpfung stetig partiell diff-barer Fkt. diff-bar.

Nach den Ableitungsregeln gilt somit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 0$$

$$\overset{\text{Prod.regel}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + y\right) = 1.$$

(a_2) Es gilt

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right) + y - 0}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\cos\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{y}{h}\right)$$

Dieser Grenzwert existiert bekanntlich nicht: (6)

Für $y \neq 0$ ist $\lim_{h\to 0} \left|\frac{y}{h}\right| = \pm\infty$, für $y=0$ existiert

$\lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{1}{h}\right)$ nicht (wie $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x\to 0$ aus

Treffpunkt # 7, Beispiel 1).

Andererseits ist

$$\partial_y f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

(b) Notwendig: $\nabla g(x_0,y_0) \overset{!}{=} (0\ \ 0)$, damit Extremum existiert. Es gilt, da g als Produkt stetig partiell diff-barer Fkt auch solch eine Fkt. ist, folgendes:

$$\nabla g(x_0,y_0) = (y_0\ \ x_0) \overset{!}{=} (0\ \ 0), \text{ d.h.}$$

$x_0 = 0 = y_0$.

Hinreichend: Weiter ist $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für jedes

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ indefinit, denn $\det(H_g(x,y)) = -1 < 0$.
Insbesondere ist $H_g(0,0)$ indefinit.

Also hat g kein Extremum in $(0,0)$. Auf der offenen Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ kann g keine weiteren Extrema besitzen.

3. Aufgabe

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal diff.bar $\Rightarrow f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar

$\Rightarrow f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

$K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Rightarrow$ K beschränkt, d.h. es gibt $R > 0$ mit $K \subseteq [-R, R] =: I$. Die Menge I ist selbst kompakt. Auf I hat $|f'|$ als ~~Seien nun~~ stetige Fkt. ein Maximum, d.h.

$$L := \max_{x \in I} |f'(x)| \text{ existiert.}$$

Für $x, y \in K \subseteq I$ existiert $\xi \in I$ zwischen x und y mit $f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y-x)$. Also ist

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y-x| \leq L \cdot |y-x|,$$

so dass f auf K Lipschitz-stetig ist.

4. Aufgabe

(a) Sei $f(\tau, \eta) := \eta \cdot \sin(\tau)$. Für alle $\tau \in I$ und alle $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(\tau, \eta_1) - f(\tau, \eta_2)|$$

$$= |\eta_1 \cdot \sin(\tau) - \eta_2 \cdot \sin(\tau)| = |(\eta_1 - \eta_2) \cdot \sin(\tau)|$$

$$= |\eta_1 - \eta_2| \cdot |\sin(\tau)| \leq |\eta_1 - \eta_2| \cdot 1 .$$

Somit ist f stetig und Lipschitz-stetig bzgl. η. Also hat das AWP nach Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung.

(b) Schmiermethode:

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot (y(t))^2$$

$$\text{„}\Leftrightarrow\text{"} \quad \frac{1}{(y(t))^2} \, dy = t \, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\eta^2} \, d\eta = \tau \, d\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{y(0)=1}^{y(t)} \frac{1}{\eta^2} \, d\eta = \int_0^t \tau \, d\tau$$

~~Aufg~~ Linke Seite:

$$\int_1^{y(t)} \frac{1}{\eta^2}\, d\eta = \left[-\frac{1}{\eta}\right]_1^{y(t)} = -\frac{1}{y(t)} + 1$$

Rechte Seite: $\int_0^t \tau\, d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2$

Also: $-\frac{1}{y(t)} + 1 = \frac{1}{2}t^2$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{y(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}t^2}}$$

Probe: $y(0) = \frac{1}{1-0} = 1$ ✓

$$y'(t) = \frac{0\cdot(1-\frac{1}{2}t^2) - 1\cdot(-t)}{(1-\frac{1}{2}t^2)^2} = \cancel{t\,(y(t))^2}$$

$$= \frac{t}{(1-\frac{1}{2}t^2)^2} = t\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2}t^2)^2} = t\cdot(y(t))^2.$$

(c) Wir berechnen $e^{A\cdot t}$, weil A nicht diagonalisierbar ist. Grund für letztere Eigenschaft: Der Eigenwert $\lambda = 0$ hat die Vielfachheit 3, aber

$\ker(A - 0 \cdot I) = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$ ist 1-dimensional. Also gibt es keine Basis aus Eigenvektoren.

Dem Hinweis folgend berechnen wir A^n:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^1 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } n \geq 3 =: n_0,$$

Also ist

$$\begin{aligned} e^{At} &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \\ &= \frac{A^0 \cdot t^0}{0!} + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 2t \\ 0 & 0 & 4t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.3.11. sind die Spalten von e^{At} ein Fundamentalsystem, d.h.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t+2t^2 \\ 4t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ ist ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A \cdot y(t)$.

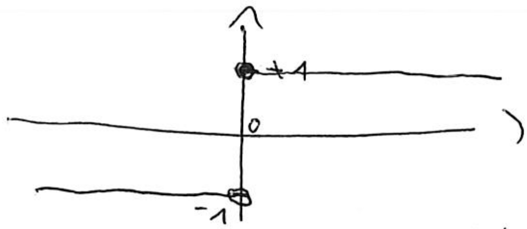
5. Aufgabe

(a) Wahr

(b) Falsch: Siehe ~~Bsp 6.7~~ Bsp. 6.7.6. (b),

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(c) Falsch:

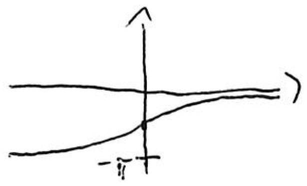


(d) Wahr: f diff-bar $\Rightarrow$ f stetig $\overset{\text{Satz 6.7.10.}}{\Rightarrow}$ f integrierbar

(e) Wahr: u und v stetig $\Rightarrow \frac{1}{2}(u+v) = f$ und $\frac{1}{2}(u-v) = g$ sind stetig

(f) Wahr: Negation des Satzes vom Maximum

(g) Falsch: Wähle $f(x) := \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$



(h) Wahr: Satz 6.1.15.

(i) Falsch: Die Taylorreihe von f ist f selbst, da f Polynom ist und Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

(j) Falsch: $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ ist nicht abgeschlossen