Klausur: Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WiSe 22/23
16.03.2023

Name .... | Matrikelnummer ....

Vorname .... | Studiengang ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note
Punktzahl	9	9	6	4	5	5	6	9	53	
erreichte Punktzahl										

Wichtige Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **leserlich in Blockschrift (Grobuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **8 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. **Bitte lösen Sie nicht die Tackernadel**. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte**, wie beispielsweise Kugelschreiber. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. Aufgabe (Wahr oder Falsch) (9 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Aussage wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Aussage wird mit 0 Punkten bewertet.

		Wahr	Falsch
1.	Angenommen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{\vert a_{n+1}\vert}{\vert a_n\vert}$ existiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\vert a_{n+1}\vert}{\vert a_n\vert} = 1$.	☐	☐
2.	Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von M kompakt.	☐	☐
3.	Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist Lipschitz-stetig.	☐	☐
4.	Sei $f : [0, 2023] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.	☐	☐
5.	Jede total differenzierbare Funktion ist stetig partiell differenzierbar.	☐	☐
6.	Jede integrierbare Funktion ist stetig.	☐	☐
7.	Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$.	☐	☐
8.	Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und seien y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung $y' = A \cdot y$. Dann ist $y(t) = 8y_1(t) + 2023y_2(t)$ ebenfalls eine Lösung von $y' = A \cdot y$.	☐	☐
9.	Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$, $t \in I$. Wenn f stetig ist, hat das Problem eine eindeutige Lösung.	☐	☐

2. Aufgabe (Fill-in) (9 Punkte)

Füllen Sie die leeren Kästen aus. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. (In Teil c) gibt es für jede richtige Antwort 0,5 Punkte. In allen anderen Teilen gibt es pro richtige Antwort einen Punkt. Falsche oder fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet.)

(a) Geben Sie eine Folge (a_n) an, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

$a_n =$

(b) Gegeben sei die Menge $M = (0,1) \cup [2,3] \cup \{4\}$. Geben Sie das Innere von M an.

$M^\circ =$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x < 1 \\ x, & \text{für } x \in [1,2] \\ \frac{1}{x^2}, & \text{für } x > 2 \end{cases}$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren. Schreiben Sie "existiert nicht" in das Antwortfeld, wenn ein Grenzwert nicht existiert.

$\lim_{x\to 1} f(x) =$	$\lim_{x\to 2-} f(x) =$
$\lim_{x\to 2} f(x) =$	$\lim_{x\to \infty} f(x) =$

(d) Geben Sie das richtige Ergebnis in der Form $a + ib$ an mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$2023e^{2023\pi i} =$	$\left\lvert e^{\frac{107}{3}\pi i} \right\rvert =$

(e) Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\int_{-1}^{1} \lvert x\rvert \, dx =$	$\int_{-1}^{1} x^{2023} \, dx =$
$\int_{0}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) \cdot 2x \, dx =$	

3. Aufgabe (Reihen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^n$$

4. Aufgabe (Grenzwerte) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\sin(x)} = -1.$$

5. Aufgabe (Taylorapproximation) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f in 0 an (also $T_{2,f}(x;0)$).

(b) Zeigen Sie, dass $\left|\cos\left(\frac{1}{8}\right) - T_{2,f}\left(\frac{1}{8};0\right)\right| \leq \frac{1}{3072}$. (*Hinweis:* $3072 = 6 \cdot 8^3$)

6. Aufgabe (Extremwertbetrachtung in mehreren Variablen) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y + \frac{1}{y}.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.

(b) Geben Sie die Hessematrix $H_f(x, y)$ an.

(c) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und entscheiden Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

7. Aufgabe (Differentialgleichung) (6 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= 2t \cdot e^{-y(t)}, \qquad t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Sollten Sie informell rechnen, verifizieren Sie die errechnete Lösung durch eine Probe.

8. Aufgabe (Beweisen/widerlegen) (9 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils 0,5 Punkte und für die richtige Begründung jeweils 2,5 Punkte.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergent.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

(c) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wenn $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, dann ist f ungerade.

Weiterer Platz für Nebenrechnungen:

Weiterer Platz für Nebenrechnungen: