Klausur zur „Mathematik II für Informatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2011
08.09.2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	12	9	13	8	8	10	60			
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (12 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \arctan(xy)$.

(a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um Maximalstellen, Minimalstellen oder Sattelpunkte handelt.

(c) Geben Sie das Taylorpolynom erster Ordnung von f um die Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ an, d.h. den Ausdruck

$$f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)((x,y)^T - (x_0, y_0)^T).$$

Hinweis: Es gilt $\tan(\pi/4) = 1$.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ 1, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe aus (a) eine konvergente Reihe ist und bestimmen Sie für alle diese x den Reihenwert.

3. Aufgabe (13 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme

(a) $y'(t) = -\sin(t)e^{-y(t)}, \qquad y(\pi/2) = 0.$

(b) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -3.$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils einen Punkt.

(a) Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar, so ist auch $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar.

(b) Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist f auf B beschränkt.

(c) $(1+i)^{64}$ ist reell.

(d) Ist $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$, so gibt es ein nichtleeres Intervall $I \subseteq [a, b]$ mit $x_0 \in I$ und $f(y) > f(x_0)/2$ für alle $y \in I$.

(b) Ist $\int_a^b f(x)^2 \, dx = 0$, so ist f konstant Null.

(c) Durch

$$(f \mid g) := \int_a^b f(x)g(x) \, dx, \quad f, g \in C([a, b]),$$

ist auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C([a, b])$ ein Skalarprodukt gegeben, d.h. es gilt

i. $\forall f \in C([a, b]) : (f \mid f) \geq 0$ und $((f \mid f) = 0 \Longrightarrow f = 0)$,

ii. $\forall f, g \in C([a, b]) : (f \mid g) = (g \mid f)$,

iii. $\forall f, g, h \in C([a, b]) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha f + \beta g \mid h) = \alpha(f \mid h) + \beta(g \mid h)$.

Hinweis: Bearbeiten Sie die Aufgaben in der Reihenfolge (c), (b), (a), wobei Sie jeweils annehmen, dass die vorhergehenden Teile schon gezeigt sind.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 2, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.	☐	☐
(b)	Sind $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $m \in \mathbb{N}^*$, so ist $f := (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls stetig.	☐	☐
(c)	Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^2(I)$, so ist f' stetig auf I.	☐	☐
(d)	Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(e)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt $\int_0^x f'(s) \, ds = f(x)$ für alle $x \geq 0$.	☐	☐
(f)	Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und gilt $\partial_1 f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f konstant.	☐	☐
(g)	Jedes Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.	☐	☐
(h)	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien monoton wachsende Funktionen. Dann ist auch $fg : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.	☐	☐
(i)	$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Richtungsableitungen in x_0 existieren.	☐	☐
(j)	Jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ wird durch ihre Taylorreihe um Null dargestellt.	☐	☐