Math 2 SoSe 2019)

1) a) ○
⊗ $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$ (Satz 5.5.19)
○

b)

	konv	div
1	○	⊗
2	⊗	○

c) · $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{1+a^k}$ ist divergent:

Begründung: $\lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{1+a^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^k}+1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$

Also ist $\frac{a^k}{1+a^k}$ keine Nullfolge.

· $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k$

Da $\left(\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k$$

konvergent (Leibniz-Kriterium).

2) a) Für $\lambda = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $\lambda \neq 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) konvergent, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ für alle $n > N$ gilt. Also gilt auch:

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda|\,|a_n - a| \leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

b) Da $0 \notin J$ folgt aus der Stetigkeit von f, dass $f(I) \subset (-\infty, 0)$ oder $f(I) \subset (0, \infty)$

1. Fall: $f(I) \subset (0,\infty)$: Es gilt $|f| = f$. Weiter ist $\ln \circ |f| = \ln \circ f$ stetig differenzierbar und es gilt nach Kettenregel

$$(\ln \circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt die Aussage.

2. Fall: $f(I) \subset (-\infty, 0)$: Dieser Fall geht analog mit $|f| = -f$

3) Hierfür kann man den Satz von L'Hospital verwenden, denn es gilt:

(i) Die Funktionen f und g sind stetig diffbar.

(ii) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) \in \{0, \infty\}$

(iii) Der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

Beweis: Zu (i) und (ii): Die Funktionen f und g sind beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} n!\, x^{k-n} & , n \leq k \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

$$g^{(n)}(x) = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zu (iii): Induktiv zeigen wir: $\underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{f^{(k-n)}(x)}{g^{(k-n)}(x)} = 0}_{A_n}$ für alle $n \in \{0, 1, \dots, k\}$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{k!}{e^x} = 0$$

Induktionshypothese: Angenommen A_n gilt für ein $n \in \{0, \dots, k-1\}$

Induktionsschritt: Nach IH existiert $\lim_{x \to \infty} \frac{f^{(k-n)}(x)}{g^{(k-n)}(x)}$

außerdem sind $f^{(k-n-1)}$ und $g^{(k-n-1)}$ stetig diffbar mit

$\lim_{x \to \infty} f^{(k-n-1)}(x) = \lim_{x \to \infty} g^{(k-n-1)}(x) = \infty$.

Der Satz von L'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f^{(k-n-1)}(x)}{g^{(k-n-1)}(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f^{(k-n)}(x)}{g^{(k-n)}(x)} \overset{IH}{=} 0$$

Insbesondere haben wir im Beweis von (iii) gezeigt, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ gilt.}$$

4) Hier kann man den Banachschen Fixpunktsatz verwenden, denn

(i) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ist ein vollständiger metrischer Raum

(ii) M ist nichtleer und abgeschlossen

(iii) Die Funktion f ist eine strikte Kontraktion und eine Selbstabbildung.

Beweis: (i) und (ii) sind klar.

Zu (iii): Wir zeigen erst, dass f eine Selbstabbildung ist. Es gilt:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}}_{f(x)} \le \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Also ist f Selbstabbildung.

Weiter gilt: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$. Also gilt nach Mittelwertsatz: (f stetig diffbar)

$$|f(x) - f(y)| \le |f'(\xi)|\,|x-y|$$

für ein $\xi \in [\min(x,y), \max(x,y)] \subset [1,2]$

Außerdem gilt: $f'(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, sodass

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$$

Damit ist f strikte Kontraktion und Banachscher Fixpunktsatz liefert die gesuchte Aussage.

5) a) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Z.: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Induktionsanfang: Es gilt $f^{0}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ für $n=0$

Induktionshypothese: Die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $f^{(n+1)}(x) = (f^{n})'(x) \overset{IH}{\underset{\text{Quotientenregel}}{=}} n! \cdot \frac{-1}{(1-x)^{(n+1)2}} \cdot (n+1)(1-x)^{n} \cdot (-1)$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{(n+1)+1}}$$

Damit folgt die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

b) $T_{3,f}(x, x_0) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3}$

$f'(x) = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$ $\quad f''(x) = \boxed{\frac{2}{(1-x)^3}}$, $\quad f^{(3)}(x) = \boxed{\frac{6}{(1-x)^4}}$

$f^{(n)}(x) = \boxed{\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$

$x_0 = \boxed{-1}$ da $f(x_0) = \frac{1}{2}$ oder $f''(x_0) = \frac{1}{8}$

$$D_{3,f}(x, \boxed{-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\boxed{4}}\left(\boxed{x+1}\right) + \frac{1}{8}\left(\boxed{x+1}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\boxed{x+1}\right)^3$$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

Es gilt:

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x^2+y^2)\cdot 2x - 4x,\ 2(x^2+y^2)2y + 4y\right)$$
$$= \left(4x(x^2+y^2-1),\ 4y(x^2+y^2+1)\right)$$

Aus $0 = \nabla f(x,y)$ folgt also wegen $x^2+y^2+1>0$ direkt $y_0 = 0$. Daraus folgt $x_0 = 0$ oder $x^2-1=0$. Also $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

Die drei kritischen Punkte sind also $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$.

Es gilt:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2-1)+8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+y^2+1)+8y^2 \end{pmatrix}$$

$(x_0, y_0) = (-1, 0)$: $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 4(1-1)+8 & 0 \\ 0 & 4(1+1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Also sind beide EW 8 und positiv. Also ist $H_f(-1,0)$ pos. definit und es liegt ein lokales Minimum vor in $(-1,0)$

$(x_0, y_0) = (0,0)$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

hat die EW 4 und -4 $\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0,0)$.

$(x_0, y_0) = (1,0)$: $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4(1-1)+8 & 0 \\ 0 & 4(1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ lokales Minimum in $(1,0)$.

7) $\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t) \end{cases}$

Sei $v(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Dann gilt $v'(t) = A \cdot v(t)$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt: $p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$

Also sind 2 und -1 EW von A.

$E_2(A) = (A - 2I|0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) = \langle \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \} \rangle$

$E_{-1}(A) = (A + I|0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \rangle$

Also ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 2 und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW -1.

Damit ist

$\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t},\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right\}$ ein Fundamentalsystem.

b) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$t \mapsto c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ -c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$