Mathe 2: Klausur #2

1. Aufgabe

(a) $\lim_{x\to 0}(e^x-1) \overset{e \text{ stetig}}{=} 0$ und $\lim_{x\to 0}(x+1)^2 = 1 \neq 0$

nach Grenzwertsätzen. Also gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(x+1)^2} \overset{GWS}{=} \frac{\lim_{x\to 0}(e^x-1)}{\lim_{x\to 0}(x+1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

(b) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4\cdot n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = \frac{1}{4}E(x^2)$.

Da die Exponentialreihe für alle $x\in\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auch diese Reihe für alle $x\in\mathbb{R}$. Der Konvergenzradius ist somit $r=+\infty$.

Alternative: Sei $x\in\mathbb{R}$ und $a_n := \frac{x^{2n}}{4\cdot n!}$.

Dann gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{2n+2}}{4\cdot(n+1)!}\cdot\frac{4\cdot n!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(n+1)}$, d.h.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4\cdot n!}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

(c) Siehe (b): $f(x) = \frac{1}{4} E(x^2)$.

(d) Taylorreihe von Potenzreihe ist die Potenzreihe selbst $\rightsquigarrow$ also ist

$$T_{4,f}(x; 0) = \sum_{n=0}^{2} \frac{x^{2n}}{4 \cdot n!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4.$$

2. Aufgabe

Schritt 1: f ist stetig partiell diff.bar (Summe solcher Funktionen) mit

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2-3 & 3-3z^2 \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Notwendig ist

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x=0,\ 3y^2=3,\ 3=3z^2$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind die kritischen Punkte

Schritt 3: f ist 2-mal stetig partiell diff.bar (klar, da nur Polynome auftauchen) mit

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix}.$$

Schritt 4: Sei $A_j := H_f(p_j)$ für $j \in \{1,2,3,4\}$.

Dann gilt:

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, 6, -6$ $\rightsquigarrow$ verschiedene Vorzeichen

$\rightsquigarrow$ indefinit

$\rightsquigarrow$ KEIN Extremum

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, 6, 6$ $\rightsquigarrow$ alle EW positiv

$\rightsquigarrow$ positiv definit

$\Rightarrow$ lokales Minimum

mit $f(p_2) = -4$.

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, -6, -6$ $\rightsquigarrow$ verschiedene Vorzeichen

$\rightsquigarrow$ indefinit

$\rightsquigarrow$ kein Extremum

$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & +6 \end{pmatrix}$ hat EW $2, -6, 6$ $\rightsquigarrow$ verschiedene Vorzeichen

$\rightsquigarrow$ indefinit

$\rightsquigarrow$ kein Extremum.

f hat nur in p_2 ein lokales Minimum.

<u>3. Aufgabe</u> (Mathe 1, Klausur #2, 2. Aufgabe)

(a) Es gilt $a_n = \dfrac{4n^3 - 5n^2 - 2}{2n(n+1)^2} = \dfrac{4n^3 - 5n^2 - 2}{2n^3 + 4n^2 + 2n}$

$$= \frac{\cancel{n^3}(4 - 5/n - 2/n^3)}{\cancel{n^3}(2 + 4/n + 2/n^2)}.$$

Bekanntlich ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, also folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{GWS}{=} \frac{4}{2} = 2.$$

(b) Es ist $b_n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Wir wissen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, so dass aus den Grenzwertsätzen folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e^2$.

4. Aufgabe

(a) f ist $\overset{\text{stetig}}{\text{diff-bar}}$, weil $\sin(x)$ und $\arctan(x)$ es sind. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\right), \text{ d.h.}$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{4}\left|\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{4}\left(|\cos(x)| + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}.$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ξ zwischen x und y mit

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi), \quad x \neq y.$$

Also ist $|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot |x-y|$.

Damit ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikte Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau ein x_* mit $f(x_*) = x_*$.

(c) Nach Satz 5.6.22. ist $x_{n+1} := f(x_n)$ eine solche Folge.

5. Aufgabe

(a) Wahr: Für $z \neq 0$ ist $z \cdot \bar{z} = |z|^2 > 0$ eine positive reelle Zahl, d.h. $\arg(z \cdot \bar{z}) = 0$.

(b) Falsch: Gäbe es eine solche Funktion, so müsste $x = \partial_{21} f(x,y) = \partial_{12} f(x,y) = 0$ sein, ~~ein Widerspruch zu~~ nach Satz 6.4.15.

(c) Wahr: f ist gerade, denn

$$f(-x) = (-x)\cdot \sin(-x) = (-x)\cdot(-\sin(x)) = x\cdot\sin(x) = f(x).$$

Nach Satz 6.9.9. ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Falsch: Sei $f = g = 1$, $b = d = 2$ und $a = c = 1$.

Dann gilt

$$1 = \frac{b-a}{d-c} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_c^d g(x)\,dx} = \int_{a/c}^{b/d} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{b}{d} - \frac{a}{c} = 1 - 1 = 0,$$

ein Widerspruch.

6. Aufgabe

(a) Falsch (b) Wahr (c) Falsch: $f(x) := x^3$

(d) Falsch: (e) Falsch: $f(x) := x$, $g(x) := -1$

(f) Wahr (g) Falsch (h) Wahr

(i) Wahr