Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Kord Eickmeyer

SoSe 2021
09.09.2021

Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Bearbeitungszeit: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Die vorwiegend kurzen Aufgaben enthalten klare Anweisungen, was jeweils verlangt ist.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründung besonderer Wert gelegt.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie **persönliche handschriftliche Unterlagen** im Umfang von vier DIN A4 Seiten verwenden.
- **Selbständigkeitserklärung** beachten (s.u.).
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.
- **Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.
- **Viel Erfolg!**

Selbständigkeitserklärung

Mit der Teilnahme verpflichte ich mich zur eigenständigen Bearbeitung ohne fremde Hilfe und zu strikter Fairness. Mir ist bekannt, dass Hinweise auf regelwidriges Verhalten ebenso wie Nichtbeachten der technischen Vorgaben dazu führen können, dass die Prüfungsleistung als nicht bestanden und ggf. als Betrugsversuch gewertet wird.

Ich habe mich vergewissert, dass ich zur Teilnahme an der Klausur zugelassen bin. Hiermit bestätige ich, darüber belehrt worden zu sein, dass meine Teilnahme an der Online-Prüfung in Mathe II für Inf SoSe 2021 nur unter dem Vorbehalt der nachträglichen Bestätigung meiner Zulassung zu dieser Prüfung erfolgt.

Ich bestätige meine Zustimmung zu den allgemeinen Bestimmungen sowie zu diesen speziellen Hinweisen zur eigenständigen Bearbeitung sowie die Richtigkeit der gemachten Angaben zur Person.

Name, Datum, Unterschrift

1. Aufgabe (Polardarstellung) (10 Punkte)

Geben Sie im folgenden den Winkel in der Polardarstellung stets im Bereich $(-\pi, \pi]$ an.

(a) Gegeben seien $z_1 := \sqrt{3} + i$ und $z_2 := \frac{1}{1+i}$. Geben Sie z_1, z_2 und $z_2 z_1$ in Polarkoordinaten an. Bestimmen Sie außerdem $|z_1 z_2^{-1}|$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen von $z^3 - 1$ in Polardarstellung und in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (Häufungspunkte von Folgen und Mengen) (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge. Dabei sei

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{2^{1/n^2}(n^2-1)}{n^2-n}\right)^n, & n \text{ gerade} \\ \exp\left(\left(\frac{-n}{n+1}\right)^2\right), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die dritte binomische Formel: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

(b) Betrachten Sie die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit

$$b_n := \cos\left(\frac{1}{n} + n\pi\right)$$

Geben Sie zwei verschiedene Häufungspunkte der Folge an und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um Häufungspunkte handelt. Ist die Menge der Folgenglieder $M := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt?

3. Aufgabe (Potenzreihen) (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$$

konvergiert. Untersuchen Sie insbesondere auch den Rand des Konvergenzintervalls.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über k, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \text{ für } z \in \mathbb{R},\ |z| < 1.$$

Hinweis: Im Induktionsschritt bietet es sich an, auf beiden Seiten der Gleichung zu differenzieren. Dabei ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius R differenzierbar auf $(-R, R)$. Die Ableitung hat die Reihendarstellung $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ und besitzt wieder den Konvergenzradius R.

4. Aufgabe (Binomialkoeffizienten) (10 Punkte)

Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ sei die Menge $M_{n,k}$ definiert durch

$$M_{n,k} := \{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 + \cdots + a_k = n\}.$$

Beispielsweise enthält $M_{10,3}$ unter anderem das Element $(3, 0, 7)$, da $3 + 0 + 7 = 10$ gilt. Die Anzahl der Elemente von $M_{n,k}$ bezeichnen wir mit

$$m_{n,k} := |M_{n,k}|.$$

(a) Geben Sie die Mengen $M_{n,k}$ und die Zahlen $m_{n,k}$ für alle Kombinationen von $n \in \{0, 1, 2\}$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ an.

(b) Ein Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in M_{n,k}$ können wir als Zeichenkette $0^{a_1}10^{a_2}1\ldots10^{a_k} \in \{0,1\}^*$ kodieren, wobei 0^a für a aufeinander folgende Nullen steht. Z.B. erhalten wir die Zeichenkette 000110000000 für das Tupel $(3, 0, 7) \in M_{10,3}$. Geben Sie alle Zeichenketten an, die Elemente der Menge $M_{2,3}$ kodieren.

(c) Benutzen Sie die Kodierung in Zeichenketten aus der vorigen Teilaufgabe, um eine Formel für $m_{n,k}$ zu finden. Berechnen Sie mit Ihrer Formel die Zahl $m_{10,3}$.

5. Aufgabe (Stetigkeit und Extremwerte) (10 Punkte)

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sowie die Funktion f mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \ln(x)$$

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x)$ und $\lim_{x\to\infty} x^n \ln(x)$.

(b) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion f. Folgern Sie, dass $f(x) \geq -\frac{1}{ne}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Hinweis: Kombinieren Sie die Aufgabenteile a) und c).

6. Aufgabe (Integration) (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen der gegebenen Funktion, das heißt alle Funktionen F und G, welche auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind mit $F' = f$, beziehungsweise $G' = g$.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}e^x + x\cos(\pi x)$

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie die gefundenen Stammfunktionen zur Probe nochmals ableiten.