Mathe 2: Klausur #4

1. Aufgabe

(a) (i) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}}{2x(1+\frac{3}{2x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{2x\ (1+\frac{3}{2x})}$$

$$\overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{1+\frac{3}{2x}} \underset{\text{und } \sqrt{\cdot} \text{ stetig}}{\overset{\text{GWS}}{=}} \frac{1}{1} = 1.$$

(ii) Zähler und Nenner sind beliebig oft stetig diff.bar. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos^2(x)-1} \underset{\text{Hospital}}{\overset{\text{Typ } \frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\underset{\text{Hospital}}{\overset{\text{Typ } \frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2\cos^2(x)+2\sin^2(x)} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{2}{-2} = -1.$$

(iii) Für $x_n = n$ ist $\cos(\pi x_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$ divergent, so dass dieser Grenzwert nicht existiert.

(b) Sei $a_n := \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^n \xrightarrow[\text{und Vorlesung}]{n\to\infty} e$, d.h.

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{e}$$ ist der Konvergenzradius.

2. Aufgabe

(a) Als Summe und Produkt 2-mal stetig partiell diffb. Funktionen ist f selbst solch eine Funktion. Aus den Ableitungsregeln folgt:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= \left(3x^2 + 6y^2 - 12 \quad 12xy - 6y^2 \right)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12y \\ 12y & 12x - 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial \cancel{y} \partial \cancel{x}}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \cancel{y} \partial \cancel{x}}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(b) Notwendig: $\nabla f(x,y) \stackrel{!}{=} (0 \quad 0)$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 6y^2 - 12 = 0 \text{ und } 12xy - 6y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 6y^2 = 12 \text{ und } (12x - 6y) \cdot y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 6y^2 = 12 \text{ und } 12x - 6y = 0 \text{ oder } y = 0$$

1\. Fall: $y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6 \cdot 0^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

Also sind $(2,0)$ und $(-2,0)$ kritische Punkte.

2\. Fall: $y \neq 0 \Rightarrow 12x = 6y \Rightarrow y = 2x$. Einsetzen in erste Gleichung ergibt $3x^2 + 6(2x)^2 = 12$, was äquivalent ist zu $3x^2 + 24x^2 = 12$

$$\Leftrightarrow \quad 27x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{2}{3}.$$

Damit sind wegen $y = 2x$ dann $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ und $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ weitere kritische Punkte.

Hinreichend: Es gilt

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix},$$

d.h. $H_f(2,0)$ hat die EW 12 und 24 und ist positiv definit. Dagegen hat $H_f(-2,0)$ die EW -12 und -24, so dass $H_f(-2,0)$ negativ definit ist.

Weiter ist

$$\det\left(H_f\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} \pm 6 \cdot \frac{2}{3} & \pm 12 \cdot \frac{4}{3} \\ \pm 12 \cdot \frac{4}{3} & \pm\left(12 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{4}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \pm 4 & \pm 16 \\ \pm 16 & \mp 8 \end{pmatrix} = -32 - 16^2 < 0, \text{ d.h.}$$

$H_f\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right)$ ist indefinit. Es folgt:

lokales Minimum in $(2,0)$

" Maximum in $(-2,0)$

Sattelpunkte in $\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right)$

(c) Nach (a) ist $\partial_2 f(x,y) = 12xy - 6y^2$, d.h.

$\partial_2 f(e^t, t) = 12e^t t - 6t^2$. Es folgt

$$\int_0^1 \partial_2 f(e^t,t)\,dt = \int_0^1 12e^t \cdot t - 6t^2\,dt$$

$$= 12\int_0^1 \underbrace{e^t}_{=u'} \cdot \underbrace{t}_{=v}\,dt - \int_0^1 6t^2\,dt$$

$$\overset{\text{partielle Integration}}{=} 12\cdot\left([u(t)\cdot v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)\cdot v'(t)\,dt\right) - \left[2t^3\right]_0^1$$

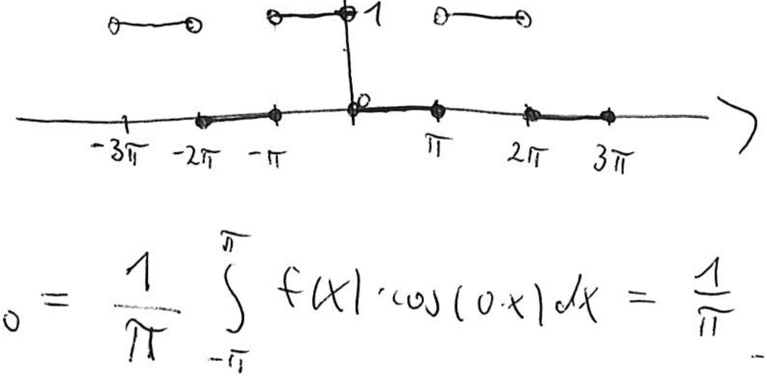
$$= 12\cdot\left([e^t\cdot t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right) - [2-0]$$

$$= 12\cdot\left([e-0] - [e^t]_0^1\right) - 2$$

$$= 12\cdot(e - e + 1) - 2 = 12 - 2 = 10.$$

3. Aufgabe

(a)



(b) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(0\cdot x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot 1\,dx = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} \overset{\sin(n\cdot\pi)=0}{\underset{\sin(0)=0}{=}} 0.$$

Für $n \geq 1$ erhalten wir

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 1 \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cos(\pi n) \right) = \frac{1}{\pi n} \left(\cos(\pi n) - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{-2}{\pi n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also ist die Fourierreihe von f gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{=0} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

$$\overset{b_{2k}=0}{\underset{b_{2k+1}=\frac{-2}{\pi(2k+1)}}{=}} \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x).$$

(c) Da f stückweise glatt ist, konvergiert die Fourierreihe für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Unstetigkeitspunkte sind $A = \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Auf $\mathbb{R} \setminus A$ konvergiert die Reihe gegen die 2π-periodische Fortsetzung, auf jeweils gegen $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.

Genauer: Der Grenzwert ist $F(x)$ ist

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{falls } x \in ((2k+1)\pi, 2k\pi) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \pi n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(d) Nach (c) gilt

$$0 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{= (-1)^k}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \text{ d.h.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Aufgabe

(a) Falsch: Wähle $f(x) := x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$ und $f'(0) = 0$. Weiter ist $T_{0,f}(x;0) = \sum_{n=0}^{0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$= f(0) \cdot x^0 = 0 \neq f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Falsch: Die Betragsfunktion $f(x) := |x|$ ist ein Gegenbeispiel.

(c) Wahr: Es gilt $p(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0$.

Also ist für $y(t) := 0$ auch

$$0 = y'(t) = p(y(t)) = p(0) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Damit hat $y'(t) = p(y(t))$ eine konstante Lösung.

(d) Wahr: Da $k \in \mathbb{Z}$ erlaubt ist, wählen wir

$k = 0$ und erhalten $z^0 = 1 \in \mathbb{R}$.

Ist $k = 0$ nicht erlaubt, so ist die Aussage immer noch wahr. Sei $\varphi = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\arg(z^s) = s \cdot \arg(z) = s \cdot \frac{r}{s} \cdot \pi = r \cdot \pi, \text{ d.h. } z^s \in \mathbb{R}.$$

5. Aufgabe

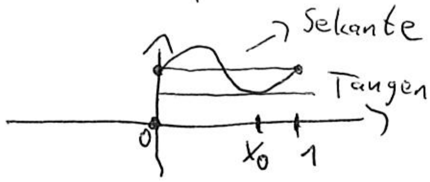
(a) Wahr: Klar

(b) Falsch: $\tan \circ f$ ist gar nicht definiert

(c) Falsch: $(x^x)' = \left(e^{x \cdot \ln(x)}\right)' = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$

(d) Wahr: Satz 5.7.23.

(e) Wahr: Folgt aus MWS Satz 6.2.1., der nur diff-bar als Voraussetzung hat.



(f) Wahr Satz 6.5.6. (g) Falsch: $a_n = \frac{1}{n+1} \sim$ harmonische Reihe

(h) Falsch: Konvergenzbereich ist ein Intervall