

Mathe 1: Klausur #5

①

1. Aufgabe

(a) Durch Hinsehen: $k=1$ und $e=-1$ erfüllt

$$132 \cdot 1 + 72 \cdot (-1) = 60.$$

~~Algorithmisch~~

Algorithmisch: $\text{ggT}(132, 72) \stackrel{\text{Euklid}}{=} 132 \cdot \tilde{k} + 72 \cdot \tilde{e}$
//
12

a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	\tilde{k}	\tilde{e}
132	72	1	-1	$1 - 1 \cdot (-1) = 2$
72	60	1	1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
60	12	5	0	$1 - 0 \cdot 5 = 1$
12	0		1	0

$$\Rightarrow 12 = 132 \cdot (-1) + 72 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 60 = 5 \cdot 12 = 132 \cdot (-5) + 72 \cdot 10$$

$\Rightarrow k = -5$ und $e = 10$ ist auch eine Lösung

(b) Anfang $n=0$: $2^{3n} - 1 = 2^{3 \cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0$ ist
durch 7 teilbar

Annahme: $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Schritt $n \rightarrow n+1$:

(2)

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1$$

$$= 2^{3n} \cdot 2^3 - 1$$

$$= (2^{3n} - 1 + 1) \cdot 8 - 1$$

$$= (2^{3n} - 1) \cdot 8 + 8 - 1$$

$$\underbrace{(2^{3n} - 1)}_{\substack{\text{Annahme} \\ \equiv 0 \pmod{7}}} \cdot 8 + \underbrace{8 - 1}_{= 7 \equiv 0 \pmod{7}}$$

$$= 0 + 0 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Also ist $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe

$$(a) \text{ Nach VL ist } [\Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also ist } \Phi_1(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \Phi_1(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Spiegelung Φ_2 sehen wir

$$\Phi_2(\Phi_1(e_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \Phi_2(\Phi_1(e_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also ist } [\Phi_2 \circ \Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [\phi_2 \circ \phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(3)

Klar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Also sind die Spalten von A eine ONB von \mathbb{R}^2 ,
somit ist A orthogonal. Daher ist

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

3. Aufgabe

Nicht in dieser Mathe 1

4. Aufgabe

(a) Wahr: Sei $a \in G$ und $b = \eta$. Dann gilt

$$a * a = a * \overset{\text{Annahme}}{\eta} * a = \eta * a * \eta = a, \text{ d.h.}$$

$$a = a * a * \bar{a} = a * \bar{a} = \eta.$$

(b) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat EW 1, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat EW 1,
aber $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat nicht den EW $1 \cdot 1 = 1$.

(c) Falsch: Sei $z = 1 + i$, dann ist $z + \bar{z} = 2$ und

$$z - \bar{z} = 2i, \text{ d.h. } \overline{(z + \bar{z})(z - \bar{z})} = \overline{4i} = -4i \text{ ist nicht reell.}$$

(d) Falsch: Sei $U = \{0_V\}$ und $W = V$, dann
 $= \mathbb{R}^3$

(4)

ist $U \cap W = \{0_V\}$, d.h.

$$0 = \dim(U \cap W) = \dim(U) - \dim(W)$$

$$= 0 - \dim(V) = -3 \quad \Downarrow$$

5. Aufgabe

Sei $\ker(\phi \circ \phi) = \ker(\phi)$. Weiter sei $v \in \ker(\phi) \cap \phi(V)$,
d.h. $\phi(v) = 0_V$ und es gibt $w \in V$ mit $v = \phi(w)$.

Dann gilt $0_V = \phi(v) = \phi(\phi(w))$, d.h. $w \in \ker(\phi \circ \phi)$.

Nach Annahme ist $w \in \ker(\phi) = \ker(\phi \circ \phi)$, also

ist $\phi(w) = 0_V$ ~~Also~~. Damit $\ker(\phi) \cap \phi(V) \subseteq \{0_V\}$

✓✓

gezeigt. Die Inklusion

$\{0_V\} \subseteq \ker(\phi) \cap \phi(V)$ ist

klar, weil $\ker(\phi)$ und $\phi(V)$

UVR von V sind. Also

ist $\ker(\phi) \cap \phi(V) = \{0_V\}$.

6. Aufgabe

(a) Falsch: (\mathbb{Q}, \leq) und $Y = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$ hat $\sup(Y) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Wahr (c) Falsch: $a=0=b$ (d) Wahr

(e) Falsch: $\| -x \|_2 = \|x\|_2 \neq -\|x\|_2$ (f) Wahr: $\widetilde{v+w} = \widetilde{v} + \widetilde{w}$

(g) Falsch (h) Falsch (i) Wahr (j) Nicht für diese
Mathe 1