1. Aufgabe (12 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Reihen sämtliche $x \in \mathbb{R}$ an für welche diese jeweils konvergieren.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{n+42}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n}(x-1)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\cdot x^n\right)$

2. Aufgabe (13 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } x = 0 \\ x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + y & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a_1) Geben Sie die partiellen Ableitungen von f an für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$.

(a_2) Existieren auch die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0,y)$ bzw. $\partial_y f(0,y)$, für beliebige $y \in \mathbb{R}$? Wenn ja, geben Sie diese an.

(b) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = x \cdot y$. Zeigen Sie, dass g kein Extremum auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ besitzt.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig auf K ist.

4. Aufgabe (15 Punkte)

(a) Sei I ein abgeschlossenes Intervall mit $\pi \in I$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \cdot \sin(t), \quad t \in I \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: *Verwenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf.*

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t \cdot (y(t))^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

mittels Trennung der Variablen.

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y'(t) = A \cdot y(t)$ an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: *Es gibt ein kleines $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Matrix A^n eine Nullmatrix ist.*

5. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede korrekte Antwort wird 1 Punkt vergeben. Es gibt keine Minuspunkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie **eindeutig**, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

	Aussage	Wahr	Falsch
(a)	Eine reelle Zahl x kann nicht gleichzeitig ein innerer Punkt sowie ein Randpunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ sein.	☐	☐
(b)	Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist f integrierbar.	☐	☐
(c)	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$. Gilt für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $\lim_{n\to\infty} \lvert f(x_n)\rvert = 1$, so ist f stetig in 0.	☐	☐
(d)	Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f integrierbar.	☐	☐
(e)	Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Weiter definieren wir $u(x) = f(x) + g(x)$ und $v(x) = f(x) - g(x)$. Sind die Funktionen u und v stetig, so sind auch f und g stetig.	☐	☐
(f)	Besitzt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kein globales Maximum, so ist f nicht stetig.	☐	☐
(g)	Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(y) > 0$.	☐	☐
(h)	Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist f differenzierbar auf $(-r, r)$.	☐	☐
(i)	Sei $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$, dann ist die Taylorreihe von f, mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gegeben durch $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$.	☐	☐
(j)	Für $I = [0, 1)$ gilt: $\mathbb{R} \setminus I$ ist abgeschlossen.	☐	☐