1. Aufgabe (20 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = 2x^2 - xz - z^3 + y^2 + 3.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

(b) Hat die Einschränkung von f auf die Menge $K := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ein globales Maximum?

(c) Geben Sie das Taylorpolynom ersten Grades von f um den Ursprung als Entwicklungspunkt an.

2. Aufgabe (19 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{y(t)} \sin(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

und geben Sie das Existenzintervall der Lösung an.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^2 \frac{\cos(xy)}{y} \,\mathrm{d}y, \qquad x > 0.$$

3. Aufgabe (16 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ dieser Potenzreihe.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (-\varrho, \varrho)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) =: f(x).$$

(c) Geben Sie $f^{(2014)}(0)$ an.

(d) Konvergiert die Potenzreihe auch an einem der Randpunkte des Konvergenzintervalls?

4. Aufgabe (9 Punkte)

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Begründen Sie warum diese auf ganz $\mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitungsfunktion.

Hinweis: Ein Verweis auf Bemerkung 5.5.4 im Skript reicht hier nicht!

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$.

(b) Die Funktion $f(x) = |x|^3$, $x \in [-\pi, \pi]$, hat als Fourierreihe eine reine Cosinusreihe, d.h. die Fourierreihe hat die Form $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die die Grenzwerte $\lim_{x\to 0+} f(x)$ und $\lim_{x\to 0-} f(x)$ existieren und gilt zusätzlich $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)$, so ist f stetig in Null.

(d) Für alle $x, y \geq 1$ gilt $|\ln(x) - \ln(y)| \leq |x - y|$.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, dann ist auch $f + g$ monoton wachsend.	☐	☐
(b)	Die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist 2π-periodisch.	☐	☐
(c)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.	☐	☐
(d)	Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/4\}$ ist beschränkt.	☐	☐
(e)	Der Tangens ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte und beschränkte Funktion	☐	☐
(f)	Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig.	☐	☐
(g)	Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so konvergiert die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f.	☐	☐
(h)	Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(y) > 0$.	☐	☐
(i)	Es gibt eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x, y) = (xy, y^2)$.	☐	☐
(j)	Eine Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot \cos(x)$ ist $F(x) = x^2 \cdot \sin(x)$.	☐	☐