Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Klausur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SS 2020
Donnerstag, der 03. September 2020
13:30 – 15:00 Uhr

Persönliche Daten

Bitte gut lesbar in **Druckschrift** ausfüllen:

Nachname: .... Semester: ....

Vorname: .... Studiengang: ....

Matrikelnr.: ....

Ergebnisse

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punktzahl	20	17	12	13	15	13
Punkte						

Summe	Note
90	

Wichtige Hinweise

Zu Beginn

Bitte geben Sie Ihre persönlichen Daten auf dem Kopf des Aufgabenblatts **jetzt und leserlich in Druckschrift** (Großbuchstaben) an.

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zugelassen sind 2 eigenhandlich beschriebene DIN A4 Seiten. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Taschenrechner, Mobiltelefone und andere elektronische Geräte sind auszuschalten und **nicht am Körper zu tragen** (Rucksack, o. Ä.). Ein Verstoß wird als Täuschungsversuch gewertet.

Hinweise zur Bearbeitung

Benutzen Sie für die Bearbeitung die für die jeweilige Aufgabe **vorgesehenen Kästen**.
Sollte der Platz nicht ausreichen, so verwenden Sie den **freien Platz auf der letzten Seite**.
Kennzeichen Sie **eindeutig**, wo die Aufgabe fortgeführt wird.
Bei Bedarf können Sie weiteres Papier von der Aufsicht erhalten. Versehen Sie Zusatzblätter mit Ihren persönlichen Daten und stellen Sie sicher, dass diese mit abgegeben werden.

Ratschläge

Verschaffen Sie sich zu Beginn einen Gesamtüberblick. Lesen Sie die Aufgabenstellungen bei der Bearbeitung **sorgfältig** durch.

Bewertung

In dieser Klausur können Sie maximal 90 Punkte erreichen.

Bearbeitungszeit

90 Minuten.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind, und kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Für jede richtig ausgefüllte Zeile erhalten Sie **2 Punkte**, jede nicht ausgefüllte Zeile wird mit **1 Punkt** und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile mit **0 Punkten** bewertet.

In dieser Aufgabe sind **keine** Rechnungen oder Begründungen verlangt und werden auch nicht bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(In der ganzen Aufgabe seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant 1$).

		Wahr	Falsch
(a)	Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m \lneqq n$ kann genau eine Lösung haben.	☐	☐
(b)	Drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.	☐	☐
(c)	Die Vereinigung zweier linearer Teilräume eines Vektorraums ist stets ein linearer Teilraum.	☐	☐
(d)	Es sei V ein Vektorraum und $T : V \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Für einen Vektor $x \in V$ mit $x \neq 0$ gilt stets $T(x) \neq 0$.	☐	☐
(e)	Vertauscht man bei einer quadratischen Matrix zwei Zeilen, so ändert sich deren Determinate nie.	☐	☐
(f)	Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stets $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$.	☐	☐
(g)	Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat genau dann vollen Rang, wenn $A^{\mathsf{T}}A$ vollen Rang hat.	☐	☐
(i)	Eine orthogonale Matrix ist stets symmetrisch.	☐	☐
(j)	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv semidefinit.	☐	☐
(j)	Es bezeichne $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $-1 \leqslant (v|w) \leqslant 1$ für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$.	☐	☐

Aufgabe 2 (Rechnen in den ganzen Zahlen) (17 Punkte)

(a) Geben Sie für $a = 143$ und $b = 9$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ an (unter schematischer Angabe der Rechenwege).

Geben Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(a, b) = ka + lb$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ an (mit Begründung).

Begründung:

(b) Geben Sie eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ an, sodass $9x \equiv 1 \pmod{143}$ ist (mit Begründung).

Begründung:

(c) Beweisen Sie: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten 3 Dezimalziffern von n bestehende Zahl durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion) (12 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Angabe *aller* notwendigen Schritte):
Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ ist

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n.$$

Aufgabe 4 (Kleine Rechenaufgaben) (13 Punkte)

(a) Wir betrachten die zwei Basen $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ und $\mathcal{C} := (v_2, v_1)$ des $\mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Transformationsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$ des Basiswechsels von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ an.

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) =$

(b) Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ von A.

Rechnung:

Geben Sie die Dimension des Kerns und des Bildes von $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A \cdot x$ an.

(c) Wir betrachten die komplexe Gleichung $z^6 = 64$ für $z \in \mathbb{C}$.
Es sei m die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Gleichung. Geben Sie m an.

Zeichnen Sie nun deutlich alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein, die in Abbildung 1 auf Seite 7 skizziert ist:

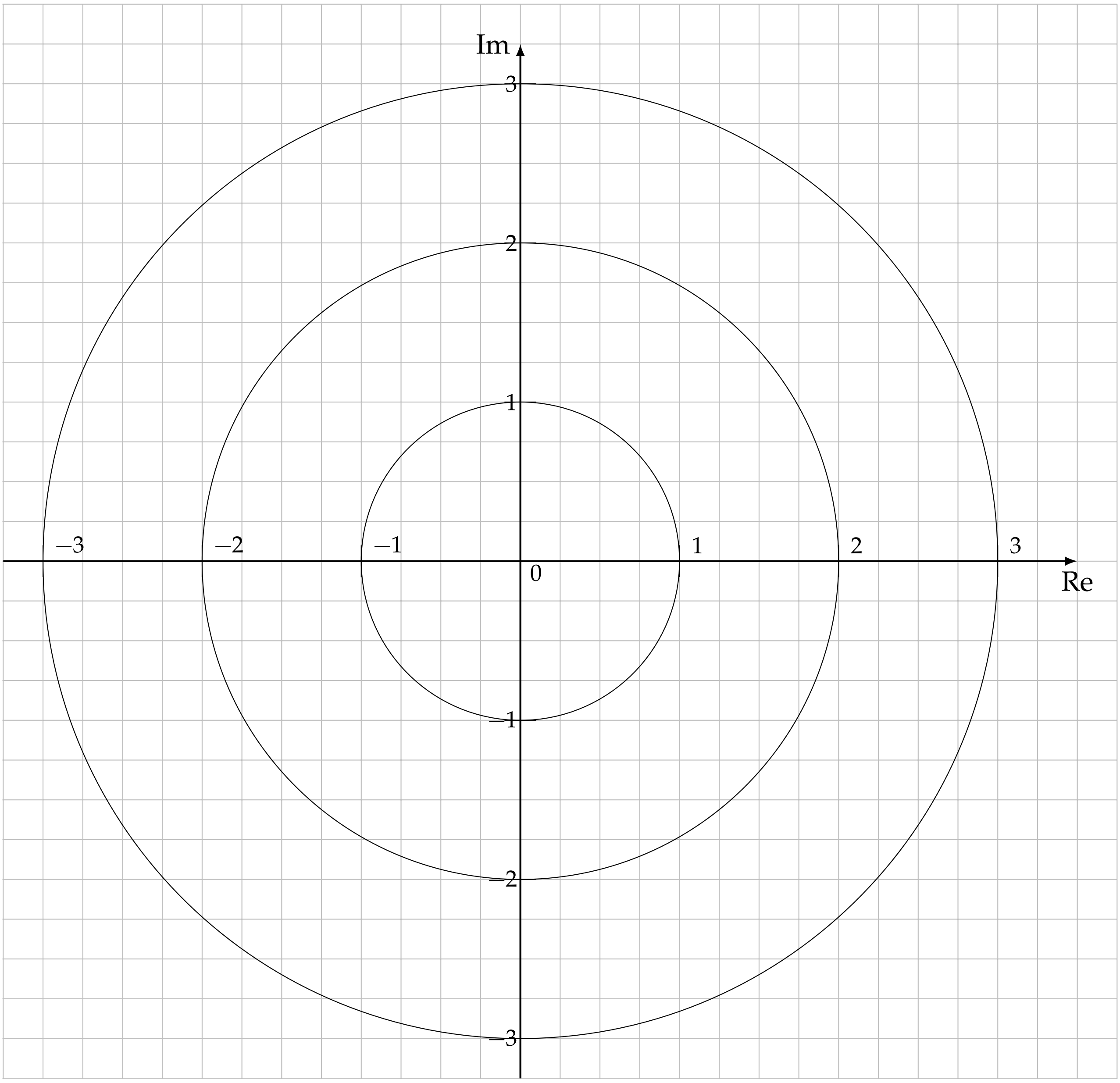


Abbildung 1: Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Gleichung $z^6 = 64$.

Aufgabe 5 (Diagonalisierbarkeit) (15 Punkte)

Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, und die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dabei identifizieren wir A mit der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, x \mapsto A \cdot x$.

(a) Geben Sie unter Angabe des Rechenwegs alle Eigenwerte von A an.

(b) Geben Sie unter Angabe der Rechenwege alle Eigenräume von A an.

(c) Geben Sie eine reelle Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.

$\mathcal{B}\ =$

(d) Geben Sie eine zu $\mathcal{B}$ (aus (c)) gehörige Diagonalmatrix $D := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A)$ an. Machen Sie dabei deutlich, welcher Diagonaleintrag zu welchem Basisvektor gehört.

$D\ =$

Aufgabe 6 (Beweisaufgabe) (13 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jede Äquivalenzrelation von einer Abbildung kommt.

(a) Sei $\varphi : A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B. Beweisen Sie, dass durch

$$x \sim_\varphi y \;:\Leftrightarrow\; \varphi(x) = \varphi(y)$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ auf A gegeben ist.

(b) Es sei a die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_\varphi$ und F der Faktorraum. Geben Sie a und F für den Fall an, dass φ konstant ist.

(c) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A mit Faktorraum F. Es sei $\varphi : A \to F$ die Abbildung, die jedem Element die zugehörige Äquivalenzklasse zuordnet. Zeigen Sie, dass $\sim = \sim_\varphi$ gilt.

- Platz für Ihre Notizen -

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind, und kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Für jede richtig ausgefüllte Zeile erhalten Sie **2 Punkte**, jede nicht ausgefüllte Zeile wird mit **1 Punkt** und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile mit **0 Punkten** bewertet.

In dieser Aufgabe sind **keine** Rechnungen oder Begründungen verlangt und werden auch nicht bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(In der ganzen Aufgabe seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant 1$).

	Wahr	Falsch
(a) Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m \lneqq n$ kann genau eine Lösung haben.	☐	☒

LGS: $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m,n\} = m < n \Rightarrow \dim(\ker(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \operatorname{rang}(A) > n - n = 0$

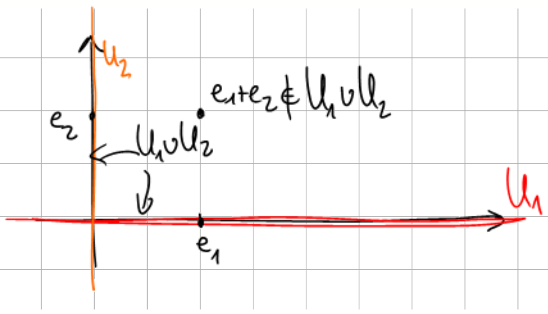
	Wahr	Falsch
(b) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.	☒	☐

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < 3 \Rightarrow$ Jede linear unabhängige Teilmenge im $\mathbb{R}^2$ besteht aus höchstens zwei Vektoren

	Wahr	Falsch
(c) Die Vereinigung zweier linearer Teilräume eines Vektorraums ist stets ein linearer Teilraum.	☐	☒

Untervektorraum

z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \langle e_1 \rangle$, $U_2 = \langle e_2 \rangle$



	Wahr	Falsch
(d) Es sei V ein Vektorraum und $T : V \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Für einen Vektor $x \in V$ mit $x \neq 0$ gilt stets $T(x) \neq 0$.	☒	☐

T linear $\Rightarrow T(0) = 0$ $\quad$ T injektiv $\Rightarrow$ Für $x \neq 0$ gilt $T(x) \neq T(0) = 0$

T linear und injektiv $\Rightarrow \ker(T) = \{0\}$

(e) Vertauscht man bei einer quadratischen Matrix zwei Zeilen, so ändert sich deren Determinate nie. ☐ ☒

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 \neq -1 = \det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(f) Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stets $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. ☐ ☒

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 \neq 0 = \det\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(g) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat genau dann vollen Rang, wenn $A^\mathsf{T} A$ vollen Rang hat. ☒ ☐

$A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ voller Rang $\iff$ A invertierbar $\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

$A^T A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ voller Rang $\iff$ A^TA invertierbar $\iff$ $\det(A^TA) = \det(A^T)\cdot\det(A)$

$= (\det(A))^2 \neq 0$

(h) Eine orthogonale Matrix ist stets symmetrisch. ☐ ☒

$$O = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$ orthogonal, jedoch nicht symmetrisch

Allgemeiner: $$O = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\sin(\varphi)\\\sin(\varphi)&\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$ orthogonal, jedoch nicht symmetrisch für $\sin(\varphi)\neq 0$.

(i) Die Matrix $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ist positiv semidefinit. ☒ ☐

1.) $\det\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{pmatrix} = (\lambda-1)^2-1 = \lambda^2-2\lambda = \lambda\cdot(\lambda-2) \Rightarrow$ Eigenwerte 0,2

2.) $\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = 0$, $\det(1) = 1 > 0$

(j) Es bezeichne $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $-1 \leqslant (v|w) \leqslant 1$ für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$. ☒ ☐

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|(v|w)| \leq \|v\|_2 \|w\|_2 = 1$ für alle Vektoren $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$

Aufgabe 2 (Rechnen in den ganzen Zahlen) (17 Punkte)

(a) Geben Sie für $a = 143$ und $b = 9$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ an (unter schematischer Angabe der Rechenwege).

Geben Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(a, b) = ka + lb$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ an (mit Begründung).

(b) Geben Sie eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ an, sodass $9x \equiv 1 \pmod{143}$ ist (mit Begründung).

(c) Beweisen Sie: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten 3 Dezimalziffern von n bestehende Zahl durch 8 teilbar ist.

(a)

a_i	b_i	a_i / b_i	k_i	l_i
143	9	15 Rest 8	-1	$1 - 15 \cdot (-1) = 16$
9	8	1 Rest 1	1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
8	1	8 Rest 0	0	$1 - 8 \cdot 0 = 1$
1	$\boxed{0}$		1	0
$\shortparallel$ ggT(143,9)	Stopp!		Start	

$\Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(143, 9) = 1$

$\Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(143, 9) = 1 = -1 \cdot 143 + 16 \cdot 9,$

d.h. $\quad k = -1, \quad l = 16$

Begründung: $k, l \in \mathbb{Z}$ werden stets durch den Erweiterten Euklidischen Algorithmus geliefert, siehe oben.

(b) $1 = -1 \cdot 143 + 16 \cdot 9 \equiv 16 \cdot 9 \mod 143$

$\Longrightarrow \quad x = 16$ tut es.

(c) Schreibe $n \in \mathbb{N}$ als $n = 1000 \cdot m + k$ für $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 999\}$.

Dann gilt $8 \mid 1000$, also

$$n \equiv k \mod 8.$$

Insbesondere ist n genau dann durch 8 teilbar, wenn k durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion) (12 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Angabe *aller* notwendigen Schritte): Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ ist

$$A(n): \quad \sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n.$$

$$\boxed{A(n+1): \sum_{k=(n+1)+1}^{2\cdot(n+1)} 2k = 3(n+1)^2 + (n+1)}$$

Induktionsanfang $(n=1)$: $A(1): \quad \sum_{k=1+1}^{2\cdot 1} 2k = \sum_{k=2}^{2} 2k = 4 = 3\cdot 1^2 + 1$ ist wahr.

Induktionshypothese: Sei $A(n): \sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}^*$

festgewähltes

Induktionsschritt: Dann gilt

$$= 2(n+1) + 2(n+2) + \ldots + 2\cdot 2n$$

$$\sum_{k=(n+1)+1}^{2\cdot(n+1)} 2k = \underbrace{\sum_{k=n+2}^{2n+2} 2k}_{= 2(n+2) + 2(n+3) + \ldots + 2(2n+1) + 2\cdot(2n+2)} = \sum_{k=n+1}^{2n} 2k - \underbrace{2(n+1)}_{\text{„}k=n+1\text{"}} + \underbrace{2(2n+1)}_{\text{„}k=2n+1\text{"}} + \underbrace{2(2n+2)}_{\text{„}k=2n+2\text{"}}$$

$$\overset{\text{I.H.}}{\underset{A(n)}{=}} 3n^2 + \underbrace{n - 2n - \cancel{2} + 4n + \cancel{2} + 4n + 4}_{= 7n+4}$$

$$= 3n^2 + 7n + 4$$

$$= \underbrace{3(n+1)^2}_{= 3n^2 + 6n + 3} + (n+1),$$

also ist $A(n+1)$ wahr.

Vollständige Induktion liefert, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr ist.

Aufgabe 4 (Kleine Rechenaufgaben) (13 Punkte)

(a) Wir betrachten die zwei Basen $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ und $\mathcal{C} := (v_2, v_1)$ des $\mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Transformationsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$ des Basiswechsels von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ an.

(b) Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ von A.

Entw. n. 2. Spalte

1) $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{16}}$

2) $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-4)\cdot 4 = \underline{\underline{16}}$

Geben Sie die Dimension des Kerns und des Bildes von $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A \cdot x$ an.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \dim(\ker(A)) = \dim(\{0\}) = \underline{\underline{0}}$, $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(A)) = \underline{\underline{3}}.$

(c) Wir betrachten die komplexe Gleichung $z^6 = 64$ für $z \in \mathbb{C}$.
Es sei m die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Gleichung. Geben Sie m an.

Zeichnen Sie nun deutlich alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein, die in Abbildung 1 auf Seite 7 skizziert ist:

$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(a)

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}}^{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Id}) = (M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1}} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}^{M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{1\cdot 3 - 2\cdot(-2)}_{= 7}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[v_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[v_2]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[v_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[v_1]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Einfacher:

$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad [v_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad [v_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) \left(= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\right) = \begin{array}{cc} [v_2]_{\mathcal{B}} & [v_1]_{\mathcal{B}} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ $\quad\quad \mathcal{C} = (v_2, v_1)$

$v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$ $\quad\quad v_1 = 0\cdot v_2 + 1\cdot v_1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad v_2 = 1\cdot v_2 + 0\cdot v_1$

$v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2$

(c) Lösungen von $z^6 = 64$: $\quad z_i = \sqrt[6]{64} \cdot e^{k\frac{\pi i}{3}}$, $k = 0, 1, \dots, 5$, $\quad \sqrt[6]{64} = 2$

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$64 = 2^6$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\shortparallel$

$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$

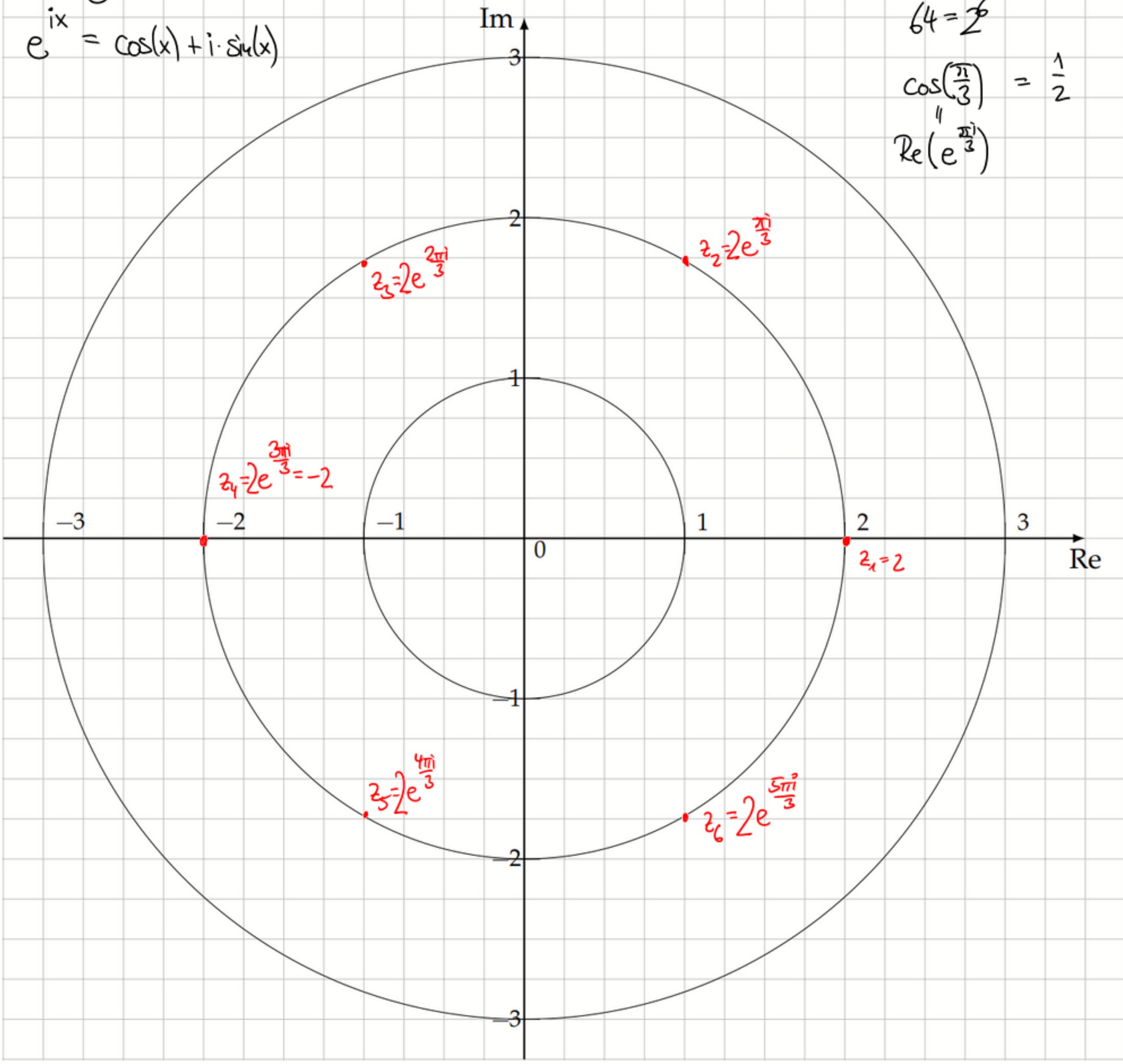


Abbildung 1: Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Gleichung $z^6 = 64$.

Aufgabe 5 (Diagonalisierbarkeit) (15 Punkte)
Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, und die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dabei identifizieren wir A mit der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, x \mapsto A \cdot x$.

(a) Geben Sie unter Angabe des Rechenwegs alle Eigenwerte von A an.

(b) Geben Sie unter Angabe der Rechenwege alle Eigenräume von A an.

(c) Geben Sie eine reelle Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.

(d) Geben Sie eine zu $\mathcal{B}$ (aus (c)) gehörige Diagonalmatrix $D := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A)$ an. Machen Sie dabei deutlich, welcher Diagonaleintrag zu welchem Basisvektor gehört.

(a)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot\big(\underbrace{(1-\lambda)^2-4}_{\text{Nullstellen } -1,\,3}\big)$$

Entw. n. 3. Spalte

$$= -(\lambda+1)^2\cdot(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $-1, 3$

(b) $\lambda = 3$: Löse $(A-3I)x = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ |:(-4) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:(-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = s \in \mathbb{R}$

1. Zeile: $x_1 - s = 0 \Leftrightarrow x_1 = s$

3. Zeile $x_3 = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Eig}(A,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda = -1$: Löse $(A+1I)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I:2 \\ - \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = s, \quad x_3 = t$

$\overset{1.\text{ Zeile}}{\Rightarrow} \quad x_1 = -s$

$$x = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(A, -1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\Downarrow A = A^T$

$A^T v_2 = \lambda_2 v_2$

$$\lambda_1 \langle v_1 | v_2 \rangle = \langle A v_1 | v_2 \rangle = \langle v_1 | A^T v_2 \rangle = \langle v_1 | \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1 | v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\langle v_1 | v_2 \rangle}_{= 0} = 0$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{zu} & \text{zu} & \text{zu} \\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Eigenwert } 3} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Eigenwert } -1}} \end{array}$$

Aufgabe 6 (Beweisaufgabe) (13 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jede Äquivalenzrelation von einer Abbildung kommt.

(a) Sei $\varphi : A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B. Beweisen Sie, dass durch

$$x \sim_\varphi y :\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ auf A gegeben ist.

Bem: 2019/2020:

$\varphi: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $\varphi((n,m)) = n-m$

(b) Es sei a die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_\varphi$ und F der Faktorraum. Geben Sie a und F für den Fall an, dass φ konstant ist.

(c) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A mit Faktorraum F. Es sei $\varphi : A \to F$ die Abbildung, die jedem Element die zugehörige Äquivalenzklasse zuordnet. Zeigen Sie, dass $\sim = \sim_\varphi$ gilt.

(a) Reflexivität:

$\forall x \in A: \quad x \sim_\varphi x$, denn $\varphi(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in A$.

Symmetrie:

$\forall x,y \in A: \quad x \sim_\varphi y \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow \varphi(y) = \varphi(x) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} y \sim_\varphi x.$

Transitivität:

$\forall x,y,z \in A: \quad x \sim_\varphi y$ und $y \sim_\varphi z \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi(y) = \varphi(z)$

$\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(z) \Longrightarrow x \sim_\varphi z.$

Also ist $\sim_\varphi$ eine Äquivalenzrelation.

(b) $\varphi = \text{const.}$, d.h. $\exists b \in B\ \forall x \in A: \varphi(x) = b \Longrightarrow \forall x,y \in A: x \sim_\varphi y$

$\Longrightarrow F = A/_{\sim_\varphi} = \{A\}$, $a = |F| = 1$

(c) $\forall x,y \in A: \quad x \sim y \underset{\text{von } \varphi}{\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}} \varphi(x) = \varphi(y)$

$\underset{\text{von } \sim_\varphi}{\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}} x \sim_\varphi y,$

also ist $\sim = \sim_\varphi$