

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Aufgabe 1: Formale Modellierung mit Symbolen, Mengen und Funktionen (17 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie ein Ticketsystem zum Projektmanagement. Im Ticketsystem werden mehrere Tickets verwaltet. Diese Tickets sind Gruppen von Mitarbeitern zugewiesen, haben eine bestimmte Priorität und können von Mitarbeitern mit Nachrichten kommentiert werden. Für die Modellierung des Ticketsystems werden die folgenden Symbole, Mengen und Funktionen verwendet:

TICKET

PRIORITÄT := {hoch, mittel, niedrig}

priorität-von : TICKET \rightarrow PRIORITÄT

MITARBEITER

ADMIN \subseteq MITARBEITER

NACHRICHT

KOMMENTAR = MITARBEITER \times NACHRICHT

kommentare-zu : TICKET \rightarrow KOMMENTAR*

modelliert die Menge der Tickets.

modelliert die Menge der möglichen Prioritäten eines Tickets, wobei *hoch* die höchste Priorität, *mittel* die mittlere Priorität und *niedrig* die geringste Priorität modelliert.

modelliert für jedes Ticket $t \in$ TICKET die Priorität des Tickets t .

modelliert die Menge der Mitarbeiter.

modelliert die Menge der Mitarbeiter, die Administratoren im Ticketsystem sind.

modelliert die Menge möglicher Nachrichten, die zu einem Ticket verfasst werden können.

modelliert die Menge der möglichen Kommentare (m, n) , wobei m der Autor des Kommentars und n die Nachricht des Kommentars ist.

modelliert für jedes Ticket $t \in$ TICKET die Kommentare, die zum Ticket t bisher verfasst wurden.

Ansonsten bleiben diese Mengen und Funktionen unterspezifiziert.

- **Notationskonvention:** Als Notationskonvention steht die Schreibweise (x, xs) abkürzend für die Folge (x, x_1, \dots, x_n) wenn $xs = (x_1, \dots, x_n)$ gilt.
- **Zur Information:** Alle fünf nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in den vorigen Aufgabenstellungen deklariert wurden, auch wenn Sie diese Aufgabenteile nicht bearbeitet haben.
- (A). Definieren Sie formal eine Funktion *ist-hoch* : TICKET \rightarrow {w, f}, die für ein Ticket t den Wahrheitswert *w* zurückgibt, wenn die Priorität dieses Tickets *hoch* ist, und für ein Ticket t den Wahrheitswert *f* zurückgibt, wenn die Priorität dieses Tickets nicht *hoch* ist.

Antwort:

- (B). Definieren Sie formal die Menge aller Tickets $\text{TICKET}_{\text{hoch}} \subseteq \text{TICKET}$, die die Priorität *hoch* haben.

Antwort:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

- (C). Modellieren Sie die Beziehung, dass zwei Tickets die gleiche Priorität haben, formal durch eine Relation (3P)
GLEICHE-PRIORITÄT.

Antwort:

- (D). Definieren Sie formal eine rekursive Funktion $\text{kommentare-von} : (\text{MITARBEITER} \times \text{KOMMENTAR}^*) \rightarrow \text{KOMMENTAR}^*$, die für einen gegebenen Mitarbeiter m und eine gegebene Folge von Kommentaren ks die Folge aller Kommentare von m in ks zurückgibt. (5P)

Antwort:

- (E). Definieren Sie formal eine Funktion $\text{admins-in} : \text{KOMMENTAR}^* \rightarrow \mathcal{P}(\text{ADMIN})$, die für eine Folge von Kommentaren ks die Menge aller Administratoren zurückgibt, die mindestens einen Kommentar in der gegebenen Folge von Kommentaren ks abgegeben haben. (5P)

Antwort:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Aufgabe 2: Formale Modellierung von Anforderungen (15 Punkte)

In dieser Aufgabe modellieren Sie Anforderungen an das Ticketsystem aus Aufgabe 1, das um die folgende zusätzliche Funktion erweitert ist:

$\text{zugewiesen-zu} : \text{TICKET} \rightarrow \mathcal{P}(\text{MITARBEITER})$ modelliert für jedes Ticket $t \in \text{TICKET}$ die Menge der Mitarbeiter, die zu diesem Ticket zugewiesen ist. Falls $\text{zugewiesen-zu}(t) = \emptyset$ gilt, dann ist dem Ticket t kein Mitarbeiter zugewiesen.

- **Notationskonvention:** Als Notationskonvention steht die Schreibweise (x, xs) abkürzend für die Folge (x, x_1, \dots, x_n) wenn $xs = (x_1, \dots, x_n)$ gilt.
- **Zur Information:** Sie können diese Aufgabe auch dann lösen, wenn Sie Aufgabe 1 nicht bearbeitet haben. Alle vier nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung alle Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in der Aufgabenstellung von Aufgabe 1 (inklusive Teilaufgaben) deklariert wurden, auch wenn Sie Aufgabe 1 nicht vollständig bearbeitet haben.

- (3P) (A). Die Anforderung „Jeder Mitarbeiter ist mindestens einem Ticket zugewiesen.“ sei durch folgende Relation modelliert:

$$\text{ANFORDERUNG1} \subseteq (\text{TICKET} \rightarrow \mathcal{P}(\text{MITARBEITER}))$$

$\text{zugewiesen-zu} \in \text{ANFORDERUNG1}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_1 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_1 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

- (3P) (B). Die Anforderung „Höchstens ein Administrator ist einem Ticket zugewiesen.“ sei durch folgende Relation modelliert:

$$\text{ANFORDERUNG2} \subseteq (\text{TICKET} \rightarrow \mathcal{P}(\text{MITARBEITER}))$$

$\text{zugewiesen-zu} \in \text{ANFORDERUNG2}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_2 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_2 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

- (C). Die Anforderung „Jedes Ticket mit der Priorität *hoch* ist mindestens einem Administrator oder mindestens zwei Mitarbeitern, die keine Administratoren sind, zugewiesen.“ sei durch folgende Relation modelliert: (5P)

$ANFORDERUNG3 \subseteq (TICKET \rightarrow \mathcal{P}(MITARBEITER))$

zugewiesen-zu $\in ANFORDERUNG3$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_3 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_3 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

- (D). Die Anforderung „Falls ein Administrator einem Ticket zugewiesen ist und ein Mitarbeiter sowohl diesem Ticket als auch einem zweiten Ticket zugewiesen ist, dann ist der Administrator auch diesem zweiten Ticket zugeordnet.“ sei durch folgende Relation modelliert: (4P)

$ANFORDERUNG4 \subseteq (TICKET \rightarrow \mathcal{P}(MITARBEITER))$

zugewiesen-zu $\in ANFORDERUNG4$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_4 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_4 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Aufgabe 3: Syntax und Semantik (16 Punkte)

In dieser Aufgabe erweitern Sie die Programmiersprache IMP um die Möglichkeit, die Auswertung von Schleifen auch innerhalb des Schleifenkörpers abzubrechen. Folgende Wertebereiche werden verwendet:

Num	die Zahlen,	AExp	die arithmetischen Ausdrücke,
Bool	die Wahrheitswerte,	BExp	die Booleschen Ausdrücke,
Var	die Programmvariablen,	LCom	die Kommandos.

Syntax Die neue Sprache BIMP erweitert IMP um die im Folgenden **grau** hervorgehobenen Kommandos. Der Wertebereich LCom ist durch folgende BNF definiert (wobei $a \in \text{AExp}$, $b \in \text{BExp}$, $c \in \text{LCom}$ und $X \in \text{Var}$):

$c ::= \text{skip} \mid X := a \mid c; c \mid \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c \text{ fi} \mid \text{while } b \text{ do } c \text{ od} \mid \text{break} \mid \text{continue}$

Die Auswertung der Kommandos **break** und **continue** entspricht der folgenden Intuition: Wird **break** innerhalb einer Schleife ausgeführt, terminiert die Schleife im aktuellen Zustand. Wird **continue** innerhalb einer Schleife ausgeführt, wird der aktuelle Schleifendurchlauf abgebrochen und die gesamte Schleife im aktuellen Zustand erneut ausgeführt.

Urteile Die Semantik der Sprache BIMP wird mit Hilfe des Urteils $\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ aus der operationellen Semantik von IMP und des neuen Urteils $\langle c, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$ mit $c \in \text{LCom}$, $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $m \in \{\text{next}, \text{stop}\}$ definiert. Dabei modelliert das Urteil $\langle c, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$, dass die im Zustand σ gestartete Ausführung des Kommandos c mit Zustand σ' abbricht. Durch $m = \text{stop}$ wird signalisiert, dass die umschließende Schleife terminieren soll; durch $m = \text{next}$ wird signalisiert, dass die umschließende Schleife erneut ausgeführt werden soll.

Kalküle In den folgenden zwei Aufgabenteilen sollen die Kalküle für das Urteil $\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ und für das neue Urteil $\langle c, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$ so vervollständigt werden, dass die Kalküle folgende Intuition der beiden neuen Kommandos angemessen modellieren:

- Wird **break** innerhalb einer Schleife ausgeführt, terminiert die Schleife im aktuellen Zustand.
- Wird **continue** innerhalb einer Schleife ausgeführt, wird der aktuelle Schleifendurchlauf abgebrochen und die gesamte Schleife im aktuellen Zustand erneut ausgeführt.

Der Kalkül für $\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ enthält alle Regeln aus der operationellen Semantik von IMP (siehe Beiblatt). Außerdem sind folgende Kalkülregeln für die Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle c, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$ vorgegeben:

$$\begin{array}{ll}
 \text{lr,1} \frac{\langle c_1, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle} & \text{lr,2} \frac{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \langle c_2, \sigma' \rangle \uparrow \langle m, \sigma'' \rangle}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma'' \rangle} \\
 \text{lrift} \frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{true} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle} & \text{lriff} \frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{false} \quad \langle c_2, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle}
 \end{array}$$

Folgende Kalkülregeln sollen in den Aufgabenteilen ergänzt werden:

- (A). Eine Kalkülregel für $\langle \text{break}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$. Eine weitere Kalkülregel für $\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ im Fall, dass die Schleife durch Ausführung von **break** im Schleifenkörper abgebrochen wird.
- (B). Eine Kalkülregel für $\langle \text{continue}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$. Eine weitere Kalkülregel für $\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ im Fall, dass die Schleife durch Ausführung von **continue** im Schleifenkörper abgebrochen wird und die gesamte Schleife erneut ausgeführt wird.

Die erweiterten Kalküle sollen obige Intuition von **break** und **continue** angemessen modellieren, Sie brauchen in dieser Aufgabe aber nicht für die Angemessenheit der erweiterten Kalküle zu argumentieren.

- **Zur Information:** Alle zwei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie finden alle Kalkülregeln zur operationellen Semantik von IMP zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik“.

Name: _____, Matrikelnr.: _____

- (A). Definieren Sie eine Kalkülregel zur Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle \text{break}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$. Definieren Sie eine weitere Kalkülregel zur Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ im Fall, dass die Schleife durch die Ausführung von `break` im Schleifenkörper abgebrochen wird und im aktuellen Zustand terminiert. (7P)

Die erweiterten Kalküle sollen die zuvor beschriebene Intuition von `break` angemessen modellieren. Sie brauchen in dieser Teilaufgabe aber nicht für die Angemessenheit der erweiterten Kalküle zu argumentieren.

Antwort:

$\langle \text{break}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$

$\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$

Name: _____, Matrikelnr.: _____

(9 P)

(B). Definieren Sie eine Kalkülregel zur Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle \text{continue}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$. Definieren Sie eine weitere Kalkülregel zur Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ im Fall, dass die Schleife durch die Ausführung von `continue` im Schleifenkörper abgebrochen wird und die gesamte Schleife erneut ausgeführt wird.

Die erweiterten Kalküle sollen die zuvor beschriebene Intuition von `continue` angemessen modellieren, Sie brauchen in dieser Teilaufgabe aber nicht für die Angemessenheit der erweiterten Kalküle zu argumentieren.

Antwort:

$\langle \text{continue}, \sigma \rangle \uparrow \langle m, \sigma' \rangle$

$\langle \text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Aufgabe 4: Programmäquivalenz (13 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Äquivalenz zweier Programme. Seien

$$P_1 := \text{if } b_1 \text{ then if } b_2 \text{ then } c \text{ else skip fi else skip fi}$$

$$P_2 := \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi}$$

wobei b_1 und b_2 Metavariablen für Boolesche Ausdrücke sind und c eine Metavariablen für Kommandos ist. Dann kann man zeigen, dass:

$$P_1 \sim P_2$$

In dieser Aufgabe soll die folgende Aussage bewiesen werden, welche einen Teil des Beweises der obigen Äquivalenz darstellt:

- (*) Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und alle Grundsubstitutionen η , deren Definitionsbereich b_1, b_2 und c einschließt, für die das Urteil

$$\langle\langle \text{if } b_1 \text{ then if } b_2 \text{ then } c \text{ else skip fi else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle\langle \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar.

- Vervollständigen Sie den folgenden Beweis der Aussage (*) durch Ausfüllen der Boxen auf dieser und der nächsten Seite.

Beachten Sie, dass alle Prämissen für verwendete Regeln instanziiert werden müssen. Herleitungen für ein Urteil dürfen Sie nur dann abkürzen, wenn deren Existenz schon sichergestellt ist.

- **Zur Information:** Alle Regeln der operationellen Semantik von IMP finden Sie zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik“.

Antwort:

Seien die Zustände $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und die Grundsubstitution η , deren Definitionsbereich b_1, b_2 und c einschließt, beliebig, sodass es eine Herleitung von

gibt. In dieser Herleitung gibt es zwei Möglichkeiten für die letzte Regel: *riff* und *rift*. Wir fahren mit einer vollständigen Fallunterscheidung über diese beiden Möglichkeiten für die letzte Regel fort.

Fall riff: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle\langle \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Fall **rft**: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

In der Herleitung gibt es zwei Möglichkeiten für die letzte Regel: **rft** und **rff**. Wir fahren mit einer vollständigen Fallunterscheidung über diese beiden Möglichkeiten für die letzte Regel fort.

Fall **rft**: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle\langle \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Fall **rff**: Diesen Fall müssen Sie nicht vervollständigen. Im Folgenden wird angenommen, dass für diesen Fall das Urteil $\langle\langle \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ herleitbar ist.

Damit ist die Aussage (*) bewiesen, d.h. für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und alle Grundsubstitutionen η , deren Definitionsbereich b_1, b_2 und c einschließt, für die das Urteil

$$\langle\langle \text{if } b_1 \text{ then if } b_2 \text{ then } c \text{ else skip fi else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle\langle \text{if } (b_1 \text{ and } b_2) \text{ then } c \text{ else skip fi} \rangle \eta, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar.

□

Name: _____, Matrikelnr.: _____

Aufgabe 5: Transitionssysteme & CSP (14 Punkte)

► **Zur Information:** Alle zwei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie finden die Syntax von CSP, die Semantik von CSP und die dazugehörige Intuition zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik“.

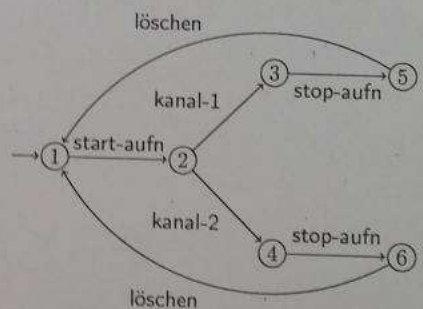
- (6 P) (A). In dieser Aufgabe betrachten Sie ein Transitionssystem. Es modelliert einen Video- bzw. Festplattenrecorder. Der Video- bzw. Festplattenrecorder kann zwei verschiedene Kanäle aufnehmen: Kanal 1 und Kanal 2. In beiden Fällen wird die Aufnahme gestartet, ein Kanal ausgewählt und die Aufnahme beendet. Aufnahmen können gelöscht werden. Bevor eine neue Aufnahme gestartet wird, muss, falls bereits eine Aufnahme vorhanden ist, die vorhandene Aufnahme gelöscht werden.

Das Transitionssystem $TS5A$ modelliert den Video- bzw. Festplattenrecorder. Dabei modelliert

- das Ereignis `start-aufn` das Starten einer Aufnahme,
- das Ereignis `kanal-1` die Auswahl von Kanal 1,
- das Ereignis `kanal-2` die Auswahl von Kanal 2,
- das Ereignis `stop-aufn` das Beenden einer Aufnahme und
- das Ereignis `löschen` das Löschen einer Aufnahme.

Das gegebene Diagramm veranschaulicht das Transitionssystem $TS5A$.

$TS5A := (S5A, S5A_0, E5A, \rightarrow_{5A}),$
 $S5A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
 $S5A_0 := \{1\},$
 $E5A := \{\text{start-aufn, kanal-1, kanal-2, stop-aufn, löschen}\},$
 $\rightarrow_{5A} := \{(1, \text{start-aufn}, 2), (2, \text{kanal-1}, 3), (2, \text{kanal-2}, 4), (3, \text{stop-aufn}, 5), (4, \text{stop-aufn}, 6), (5, \text{löschen}, 1), (6, \text{löschen}, 1)\}$



■ Widerlegen Sie folgende Aussage:

„Wenn eine Aufnahme beendet wird, muss irgendwann zuvor eine Aufnahme gelöscht worden sein.“

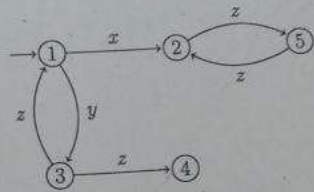
Geben Sie dazu eine Spur des Transitionssystems $TS5A$ an, die die Aussage verletzt.

Antwort:

Name: _____, Matrikelnr.: _____

- (B). Es sei folgendes Transitionssystem $TS5B$ gegeben. Das gegebene Diagramm visualisiert das Transitionssystem $TS5B$. (8 P)

$$\begin{aligned} TS5B &:= (S5B, S5B_0, E5B, \rightarrow_{5B}), \\ S5B &:= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ S5B_0 &:= \{1\}, \\ E5B &:= \{x, y, z\}, \\ \rightarrow_{5B} &:= \{(1, x, 2), (2, z, 5), (5, z, 2), \\ &\quad (1, y, 3), (3, z, 1), (3, z, 4)\} \end{aligned}$$



- Sei $P5B$ ein Prozessbezeichner. Geben Sie ein Gleichungssystem an, sodass der Prozessausdruck $P5B$ unter diesem Gleichungssystem den Prozess $(E5B, E\text{-Traces}(TS5B))$ spezifiziert.

Antwort: