Mathe 2: Klausur #4

1. Aufgabe

(a) (i) Es gilt $\lim_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 1 - 1 = 0$ nach GWS

und Stetigkeit von cos. Weiter ist $\cos(x) - 1$ diff.

bar mit $(\cos(x) - 1)' = -\sin(x)$. Wir dürfen also

L'Hopital anwenden und erhalten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{1} \underset{\sin \text{ stetig}}{\overset{\sin(0)=0}{=}} 0$$

(ii) Es gilt $\dfrac{3x^3 - 7x^2 - 1}{(x-1)^3} = \dfrac{\cancel{x^3}\left(3 - \frac{7}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3}$.

Wegen $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ist $\lim_{x \to \infty} \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \overset{GWS}{=} 3$ und

$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \overset{GWS}{=} 1^3 = 1$. Also ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 7x^2 - 1}{(x-1)^3} \overset{GWS}{=} \frac{3}{1} = 3.$$

(iii) Es ist $\lim_{x \to 2} (x-2) = 0$ und $\lim_{x \to 2} \ln(x) = \ln(2) \neq 0$.

Also ist $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\ln(x)} \overset{GWS}{=} \dfrac{0}{2} = 0$.

(b) Sei $a_n := \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Dann ist nach Bem. 5.3.10. (e)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e,$$

d.h. $r = \frac{1}{e}$ ist der Konvergenzradius.

(c) Nein, nach Ordnungsaxiomen ist

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1^{n^2} = 1.$$ Also ist

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ keine Nullfolge, was notwendig für Konvergenz einer Reihe ist.

2. Aufgabe

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} \overset{\text{geom.}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Also ist $T_{3,f}(x;0) = x + x^2 + x^3$.

(b) Sei $g(t) := \sin(t)$ und $h(\eta) := e^{\eta}$. Dann ist

$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$, d.h. es liegt eine DGL in getrennten Veränderlichen vor. Weiter gilt

$h(y(0)) = h(0) = e^0 = 1 \neq 0$. Sei

$$G(t) := \int_0^t \sin(\tau)\,d\tau = \left[-\cos(\tau)\right]_0^t = 1 - \cos(t)$$ und

$$H(y) := \int_0^y \frac{1}{e^{\eta}}\,d\eta = \int_0^y e^{-\eta}\,d\eta = \left[-e^{-\eta}\right]_0^y = 1 - e^{-y}.$$

Dann ist $H^{-1}(t) = \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$, denn

$$(H^{-1} \circ H)(y) = \ln\left(\frac{1}{e^{-y}}\right) = y$$ und

$$(H \circ H^{-1})(t) = 1 - e^{-\ln(1/(1-t))} = 1 - (1-t) = t.$$

Nach Satz 7.2.2. ist

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)) = \ln\left(\frac{1}{\cos(t)}\right)$$ die eindeutige Lösung.

3. Aufgabe

(a) Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{2^{4\cdot u\cdot v}}{u}$$ nach Hauptsatz und

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \int_1^u \frac{\partial}{\partial v} \frac{2^{4tv}}{t}\,dt = \int_1^u \frac{\partial}{\partial v} \frac{e^{\ln(2)\cdot 4\cdot t\cdot v}}{t}\,dt$$

$$= \int_1^u \ln(2)\cdot 4\cdot \cancel{t}\cdot \frac{2^{4\cdot t\cdot v}}{\cancel{t}}\,dt$$

$$= \int_1^u \ln(2)\cdot 4\, e^{\ln(2)\cdot 4\cdot t\cdot v}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{v}\, 2^{4\cdot t\cdot v}\right]_1^u = \frac{1}{v}\left(2^{4\cdot u\cdot v} - 2^{4\cdot v}\right)$$

nach Parameterintegral.

(b) Sei $g : (0,\infty) \to (0,\infty)\times(0,\infty)$, $g(x) := (x,x)$.

Nach Kettenregel ist (denn $f = F\circ g$)

$$f'(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x,x) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(x,x)\right)\cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2^{4\cdot x^2}}{x} + \frac{1}{x}\left(2^{4\cdot x^2} - 2^{4\cdot x}\right) = \frac{1}{x}\left(2\cdot 2^{4x^2} - 2^{4x}\right).$$

(c) $f'(x)=0 \overset{x>0}{\iff} 2^{4x^2+1} = 2^{4x}$

$$\iff 4x^2+1 = 4x$$

$$\iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $\frac{1}{2}$ der einzige kritische Punkt von f.

4. Aufgabe

(a) Wahr: Sei $z = e^{i\varphi}$, denn $z^4 = i \Rightarrow |z|^4 = 1$
$\Rightarrow |z| = 1.$

Dann ist $z^4 = e^{i4\varphi} = i$, also $4\varphi_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\iff \varphi_k = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k.$

Dies sind vier verschiedene Lösungen. Davon ist keine reell, weil $z^4 \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$.

(b) Wahr: Es gilt $f(-x) = |-x| \cdot (-x) = -|x| \cdot x = -f(x)$.
Also ist f ungerade und nach Satz 6.9.9. ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Falsch: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, $a := 1$ und $b := 2$.
Dann ist $f'(x) = 1$, d.h. $f'(a) = f'(b)$. Es ist jedoch $f(\xi) > 0$ für alle $\xi \in [a,b]$.

(d) Wahr: Sei $g(\tau) := 1$ und $h(\eta) := \arctan(\eta)$. Dann ist $y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$, g und h sind stetig, sowie $h(y(0)) = h(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq 0$. Nach Satz 7.2.2.

(Trennung der Variablen!) existiert eine eindeutige Lösung.

5. Aufgabe

(a) Seien $x, h \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt $f(x+h) \leq f(x) \cdot f(h)$. Weiter ist

$$f(x) = f(x+h+(-h)) \overset{\text{Voraussetzung}}{\leq} f(x+h) \cdot f(-h)$$

$$\overset{f(-h)>0}{\Rightarrow} \quad \frac{f(x)}{f(-h)} \leq f(x+h).$$

Damit gilt $\frac{f(x)}{f(-h)} \leq f(x+h) \leq f(x) \cdot f(h)$ für alle $x, h \in \mathbb{R}$.

(b) Nach (a) ist

$$f(x+h) - f(x) \leq f(x) \cdot f(h) - f(x)$$
$$= f(x) \cdot (f(h) - 1) \xrightarrow[\text{f stetig in } 0]{h \to 0} 0$$

und

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{f(x)}{f(-h)} - f(x)$$
$$= f(x) \cdot \left(\frac{1}{f(-h)} - 1 \right)$$
$$\xrightarrow[\text{f stetig in } 0]{h \to 0} f(x) \cdot (1-1) = 0.$$

Also ist $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

6. Aufgabe

(a) Falsch: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat $r=1$, aber für $x=\pm 1$ liegt keine Konvergenz vor.

(b) Falsch: Verschiedene Vorzeichen der Eigenwerte

(c) Wahr: Satz 6.5.8.

(d) Wahr: f stetig, B kompakt und Satz vom Maximum

(e) Wahr: Satz 5.8.4.

(f) Falsch: $a=0$, $b=1$, $f(x)=g(x)=x$

(g) Wahr

(h) Wahr:

(i) Wahr: Folgt aus Grenzwertsätzen

(j) Falsch: $f(x):=1-x \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$, aber $f'(x)=-1<0$.