Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2020**
Prof. Dr. Thomas Streicher **03.09.2020**

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	16	16	18	14	10	16	90	
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz**. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Lose Blätter ohne Namen können nicht bewertet werden.

Sollten Sie **weiteres Papier** benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. Versehen Sie in diesem Fall jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Kennzeichnen Sie außerdem, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Grenzwerte und Reihen) (16 Punkte)

(a) (8 Punkte) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x).$$

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k} x^{3k}.$$

2. Aufgabe (Integralrechnung) (16 Punkte)

Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Integrale:

(a) (8 Punkte) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x,$

(b) (8 Punkte) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} x\sin 3x\,\mathrm{d}x.$

3. Aufgabe (Extremwerte in mehreren Variablen) (18 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sin x \cdot (y^2 - 1).$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen des Gradienten von f und entscheiden Sie jeweils, ob ein relatives Maximum, ein relatives Minimum oder einen Sattelpunkt vorliegt.

4. Aufgabe (Differentialgleichungen) (14 Punkte)

(a) (10 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 - \dfrac{y(t)}{t}, & t \in (0, \infty) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(5)}(t) + 4y^{(3)}(t) = 0.$$

5. Aufgabe (Banach'scher Fixpunktsatz) (10 Punkte)

Wir betrachten die Folge, welche durch $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n+2}$ definiert ist. Wir wollen zeigen, dass diese Folge konvergiert. Hierzu betrachten wir die Abbildungsvorschrift $\varphi(x) := 1 + \frac{1}{x+2}$.
Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Für $x \in [1,2]$ ist auch $\varphi(x) \in [1,2]$.

(b) (2 Punkte) Für $n \geq 0$ gilt: $1 \leq x_n \leq 2$.

Wir betrachten nun die Abbildung $\varphi : [1,2] \to [1,2],\ x \mapsto \varphi(x)$.

(c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) konvergiert, indem Sie den Banach'schen Fixpunktsatz an φ anwenden.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (x_n).

6. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 2 Punkten bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(a) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so kann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nicht den Konvergenzradius 1 haben.	○	○
(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $O(a_n) \subseteq o(a_n)$.	○	○
(c) Die Gleichung $1 = e^z$ hat unendlich viele komplexe Lösungen $z \in \mathbb{C}$.	○	○
(d) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbare Funktionen mit $Df = Dg$, dann ist $f - g$ konstant.	○	○
(e) Die Teilmenge $\{(x, y) : x^2 + y^4 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt.	○	○
(f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade, stetige Funktion, dann ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ wieder gerade.	○	○
(g) Jede stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung $y'(t) = \cos(y(t))$ löst, ist Lipschitz-stetig.	○	○
(h) Hat eine Funktion $f \in C^2(a, b)$ (für reelle Zahlen $a < b$) ein relatives Extremum im Punkt $c \in (a, b)$, so muss $f'(c) = 0$ und $f''(c) \neq 0$ gelten.	○	○