Klausur
„Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

SoSe 2018
06.09.2018

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
mögliche Punkte	7	7	20	6	10	10	60	
erreichte Punkte								

Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Druckschrift** aus. Versehen Sie **alle Blätter** mit **Ihrem Namen** und **Ihrer Matrikelnummer**.

Sie benötigen kein eigenes Papier. Sollte der Platz unter den Aufgaben Ihnen nicht genügen, können Sie die Seiten am Ende der Klausur verwenden. Kennzeichnen Sie deutlich, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Als Hilfsmittel ist lediglich **ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** bzw. **zwei DIN A4 Seiten** zugelassen.

Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Ein Verstoß hiergegen wird als Täuschungsversuch gewertet.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Bedenken Sie: Wo nicht anders explizit angegeben, sind **alle Ergebnisse zu begründen**, etwa durch eine Rechnung. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Die Aufgaben beginnen auf der nächsten Seite.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (Teilbarkeit) (7 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ mit der Darstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i,$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle $i \in \{0, \dots, k\}$. Hierbei stellen die a_i die Ziffern der Zahl n dar. Zeigen Sie, dass

$$3|n \Leftrightarrow 3|\sum_{i=0}^{k} a_i$$

gilt, dass also die Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Wir benutzen die Modulo-Rechenregeln und zeigen

$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3$. Es gilt

$$= \left(\sum \left(a_i 10^i\right) \bmod 3\right) \bmod 3$$

$$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i\right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \underbrace{(10 \bmod 3)}_{(3\cdot 3+1) \bmod 3}{}^{i}\right) \bmod 3$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3$$

Also gilt $3|n \Leftrightarrow 0 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3 = n \bmod 3$

$$\Leftrightarrow 3 \,\Big|\, \sum_{i=0}^{k} a_i$$

2. Aufgabe (Vollständige Induktion) (7 Punkte)

Sei $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ und seien $M, N \subset \mathbb{N}_0$ mit $|N| = n \in \mathbb{N}_0$ und $|M| = n + m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n:

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass jede Abbildung $f : M \to N$ nicht injektiv ist.

Hinweis: Halten Sie unbedingt den Formalismus der vollständigen Induktion ein.

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für $n=0$ ist die Aussage trivial, da $M \neq \emptyset$ und $N = \emptyset$.

Induktionsanfang

Sei $n=1$. Dann hat M mindest zwei Elemente $m_1 \neq m_2$.
Es gilt $f(m_1) = f(m_2)$, da N nur ein Element hat.
Also ist f nicht inj.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Für ein beliebiges aber fixes n gilt die Aussage bereits

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage für $n+1$. Dann gilt $N = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

1. Fall "a_{n+1} wird mehr als 1-Mal getroffen" $|f^{-1}(a_{n+1})| \geq 2$

Dann gibt es zwei Element $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in f^{-1}(a_{n+1})$.
D.h. $f(m_1) = f(m_2) = a_{n+1}$. Also ist f nicht inj.

2. Fall "a_{n+1} wird nicht getroffen" $|f^{-1}(a_{n+1})| = 0$

Dann ist $f: M \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Fkt. und nach (IV) nicht inj.

3. Fall "a_{n+1} wird genau 1-Mal getroffen" $|f^{-1}(a_{n+1})| = 1$

Dann ist $f: M \setminus \{f^{-1}(a_{n+1})\} \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Fkt und nach (IV) nicht inj.

3. Aufgabe (Lineare Algebra) (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix. (9,5 P.)

(b) Geben Sie den Kern, das Bild und den Rang der Matrix an. (3 P.)

(c) Ist die Matrix invertierbar? (1 P.)

(d) Ist die Matrix diagonalisierbar? (3 P.)
Wenn ja, geben Sie eine Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, sodass $D = S^{-1}AS$ gilt.
Hinweis: Sie müssen die Matrix S^{-1} nicht berechnen. Eine Angabe der Matrizen D und S genügt.

(e) Geben Sie die Eigenwerte von A^2 an. (1 P.)

(f) Bestimmen Sie die **Anzahl** der Lösungen des linearen Gleichungssystems (2,5 P.)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

a.) $p_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\left((1-t)^2 - 1\right)$

$= (1-t)(1-2t+t^2-1) = (1-t)(-2t+t^2)$

$= t(1-t)(t-2).$

Also sind $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die EW von A.

$$E_0(A) = \{ x : (Ax \mid 0) \}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 1&1&1&0\\ 0&1&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ II-III \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)$$

(Sei $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = -s$ und $x_1 = 0$. Daher ist)

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ -s\\ s\end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

$$E_1(A) = \{ x : ((A-I)x \mid 0) \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right).$$ Sei $x_3 = s$

Dann gilt $x_2 = 0$, $x_1 = -s$. Daher ist

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s\\ 0\\ s\end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

$$E_2(A) = \{ x : ((A-2I)x \mid 0) \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1&0&0&0\\ 1&-1&1&0\\ 0&1&-1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} -I \\ II+I \\ III \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&1&-1&0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ -II \\ II+III \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&-1&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right).$$ Sei $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = s$ und $x_1 = 0$

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ s\\ s\end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

b.) $\mathrm{Ke}(A) = E_0(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ nach a.)

$\mathrm{Bild}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$,

also $\mathrm{rg}(A) = 2$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ off. lin. unab. sind.

c.) Nein, da 0 ein EW ist.

d.) Ja, da es drei verschiedene EW gibt, gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = S^{-1} A S \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e.) $0, 1, 4$, nach Satz...

Da für λ EW von A mit v EV. gilt $A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$

f.) Wir wollen alle $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$

$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \; 3 = 1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow \alpha = 2.$$

Also liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ nur für $\alpha = 2$ im Bild. Also ist $A x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ nur für $\alpha = 2$ lösbar. Es gilt

$\left\{ x : A x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Ke}(A) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also hat $A x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{unendlich viele} \\ \text{keine} \end{matrix} \right\}$ Lösungen für $\left\{ \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \alpha \neq 2 \end{matrix} \right.$

4. Aufgabe (Σ-Algebren und Relationen) (6 Punkte)

Sei $\Sigma := (S, F, \mathrm{ar})$ eine einsortige Signatur (S besteht aus genau einer Sorte), A und B einsortige Σ-Algebren zur Signatur Σ und $h : A \to B$ ein Σ-Homomorphismus. Wir betrachten die Relation

$x \sim y$

$$x \ker(h) y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$$

auf der Σ-Algebra A. Zeigen Sie, dass $\ker(h)$ eine Kongruenz auf A ist.

ZZ 1) $\ker(h)$ definiert Äquivalenzrelation auf A_s $\forall s \in S$

2) $\forall f \in A_f$, $\mathrm{ar}(f) = (s_1 \ldots s_n, s)$ gilt $\forall x_1, \ldots, y_n \in A_{s_1}, \ldots y \in A_{s_n}$

$x_1 \ker(h) y_1, \ldots, x_n \ker(h) y_n$

$\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \ker(h) f(y_1, \ldots, y_n)$

Zu 1). Reflexivität: $\forall x \in A_s$, $s \in S$ gilt

$h(x) = h(x)$ (offensichtlich)

Symmetrie: $\forall x, y \in A_s$, $s \in S$ gilt

$h(x) = h(y) \Rightarrow h(y) = h(x)$ (offensichtlich)

Transitivität: $\forall x, y, z \in A_s$, $s \in S$ gilt:

$h(x) = h(y)$ und $h(y) = h(z) \Rightarrow h(x) = h(z)$ (offensichtlich)

Zu 2) Sei $f^A \in A_f$ mit $\mathrm{ar}(f) = (s_1 \ldots s_n, s)$ und

$x_1, y_1 \in A_{s_1}, \ldots, x_n, y_n \in A_{s_n}$ mit

(*) $h(x_1) = h(y_1), \ldots, h(x_n) = h(y_n)$

Wollen zeigen Def. Hom.

$$h\left(f^{A}(x_1,\dots,x_n)\right) \stackrel{!}{=} f^{B}(h(x_1),\dots,h(x_n)) \stackrel{(*)}{=\!=} f^{B}(h(y_1),\dots,h(y_n))$$

$$= h\left(f^{A}(y_1,\dots,y_n)\right)$$

Def Hom.

5. Aufgabe (Beweisen und Widerlegen) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sollten Sie ein Gegenbeispiel angeben, müssen Sie zudem zeigen, dass dies ein Gegenbeispiel ist.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils 0,5 und für die richtige Begründung jeweils 2 Punkte.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix. Dann gilt $\det(A) = 1$.

(b) Seien X, Y Ringe und $\varphi : X \to Y$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist φ injektiv.

(c) Die Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto ||x|| := \max\{|x_i|, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ ist eine Norm.

(d) Sei

$$F_+ := \{(c_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : c_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_+$. Ist $a_n \in O(b_n)$, dann gilt $\exists C > 0 : \frac{a_n}{b_n} \le C$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.}$$

a.) falsch
$n = 2$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist offensichtlich orthogonal

$AA^T = I$, aber $\det(A) = -1 \neq 1$

b.) Falsch: $\varphi \; \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\varphi(x) = 0$ ist offensichtlich

Gruppenhom. Außerdem gilt

$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0 = \varphi(x \cdot y) \; \forall x, y \in \mathbb{Z}_2$. Aber

φ ist offensichtlich nicht injektiv.

c.) Richtig

Def.: $\|x\|=0 \Rightarrow \max\{|x_i| : i\in\{1,\dots n\}\}=0$

$\Rightarrow |x_i|=0 \;\forall\, i\in\{1,\dots,n\} \Rightarrow x=0$

(außerdem gilt $\|0\| = \max\{|0|\}=0$)

Hom.: $\|\lambda x\| = \max\{|\lambda x_i| \; i\in\{1,\dots,n\}\}$

$= |\lambda| \max\{|x_i| : i\in\{1,\dots,n\}\} = |\lambda| \|x\|$

Dreiecksungl.: $\|x+y\| = \max\{|x_i+y_i| : i\in\{1,\dots,n\}\}$

$\leq \max\{|x_i|+|y_i| : i\in\{1,\dots n\}\}$

$\leq \max\{|x_i| \,|\, i\in\dots\} + \max\{|y_i| : i\in\dots\}$

$= \|x\| + \|y\|$

d.) Falsch. Sei $b_n \equiv 2$ und $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Dann sind $(a_n),(b_n) \in F_+$ und $a_n \leq 1\cdot b_n$,

also auch $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ aber

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ divergiert offensichtlich

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.

Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 1 Punkt und eine fehlerhaft oder gar nicht ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

		wahr	falsch
(a)	Die Aussagen $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und $(A \Leftrightarrow B)$ sind äquivalent.	☒	☐
	$A = B = \emptyset$		
(b)	Seien A und B Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $A \neq B$.	☐	☒
(c)	Seien $a, n \in \mathbb{N}^\star := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann gilt $a^n \equiv a \pmod{n}$.	☐	☒
	$n = 4$, $a = 2$		
(d)	Seien $x, y \in \mathbb{Z}_{91}$. Dann gilt: $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.	☐	☒
	$7 \cdot 13$		
(e)	Sei $S \subset \mathbb{C}$ mit $S := \{s \in \mathbb{C} : \lvert s \rvert = 1\}$ und $\cdot_{\mathbb{C}}$ die Multiplikation zweier komplexer Zahlen. Dann ist $(S, \cdot_{\mathbb{C}})$ eine Gruppe.	☒	☐
(f)	Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren mit $v, w \neq (0,0,0)$. Dann ist $\{v, w, v \times w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.	☒	☐
(g)	Jede orthogonale symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist selbstinvers.	☒	☐
	$AA = AA^T = I$		
(h)	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: B$ ist positiv definit. $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐	☒
(i)	Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) < n$. Dann besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung.	☐	☒
	$b \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Bild}(A) \neq \emptyset$		
(j)	Sei $(\cdot\vert\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert$ die von $(\cdot\vert\cdot)$ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$ und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann gilt $\lvert(v\vert w)\rvert = \lvert\lvert v \rvert\rvert \cdot \lvert\lvert w \rvert\rvert$.	☒	☐

$w = \lambda v$

$$|(v|w)| = |(v|\lambda v)| = |\lambda (v|v)| = |\lambda \, \|v\| \, \|v\|| = |\, \|v\| \, \|\lambda v\| \,| = \|v\| \, \|w\|$$