Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2014
04.09.2014

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	20	14	22	10	16	20	102		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (20 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Begründe anhand der Eigenwerte aus (a) welche der folgenden Eigenschaften die Matrix A hat und welche nicht: invertierbar, diagonalisierbar, positiv definit, orthogonal.

(c) Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar?

(d) Berechnen Sie $\det\big((A-I)^{2014}\big)$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe muss außer in Teil (a) nirgends gerechnet werden.

2. Aufgabe (14 Punkte)

Wir betrachten die Folge $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}, \qquad n \geq 2.$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n = \frac{n!-1}{n!}$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(b) Begründen Sie damit, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 2}$ eine konvergente Folge ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

3. Aufgabe (22 Punkte)

Es seien $\mathscr{E}_2$ und $\mathscr{E}_3$ jeweils die Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x-2y+z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathscr{E}_2}^{\mathscr{E}_3}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Standardbasen.

(b) Bestimmen Sie den Kern $\ker(\Phi)$ und das Bild $\Phi(\mathbb{R}^3)$ von Φ. Ist Φ injektiv und/oder surjektiv?

(c) Nun betrachten wir die Basis $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass $\{\Phi(b_2), \Phi(b_3)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(d) Geben Sie eine Basis $\mathscr{C}$ des $\mathbb{R}^2$ an, so dass die Abbildungsmatrix $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und U_1, U_2 seien Untergruppen von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $g \in U_1 \setminus U_2$, so ist auch das inverse Element $g^{\#} \in U_1 \setminus U_2$.

(b) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, so ist die Matrix $A^T \cdot A$ symmetrisch und positiv semidefinit.

Hinweis: Übungsaufgabe 3.7.10 im Skript kann ohne Beweis verwendet werden.

(b) Ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V \neq \{0\}$, so ist auch $< \cdot|\cdot >$ mit $< x|y >:= (x+y|x-y)$ ein Skalarprodukt auf V.

(c) Sind p, q verschiedene Primzahlen, so gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ap + bq = 1$.

(d) Seien A, B, C drei Mengen, sowie $f : A \to B$ surjektiv und $g : B \to C$ injektiv. Dann ist $g \circ f$ injektiv.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit a teilt b und a teilt c. Dann gilt auch a teilt $b \cdot c$.	☐	☐
(b)	In jedem Ring R ist für gegebene $a, b \in R$ die Gleichung $ax = b$ eindeutig lösbar.	☐	☐
(c)	Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V mit $\dim(U_1) = 5$ und $\dim(U_2) = 3$, so ist $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V mit $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$.	☐	☐
(d)	Ist U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V, so ist die kanonische Abbildung $\nu : V \to V/U$ surjektiv.	☐	☐
(e)	Die Transpositionabbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Phi(A) = A^T$ ist eine lineare Abbildung.	☐	☐
(f)	Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\dfrac{\overline{\overline{z}}(z+\overline{z})}{z^2 \cdot \overline{z}}$ eine reelle Zahl.	☐	☐
(g)	Für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.	☐	☐
(h)	Sei U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V und seien $\tilde{a}, \tilde{b} \in V/U$. Dann gibt es immer Elemente $a \in \tilde{a}$, $b \in \tilde{b}$ und $u \in U$ mit $a = b + u$.	☐	☐
(i)	Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\ell}{k} = \binom{2\ell}{2k}$.	☐	☐
(j)	Jede reelle Folge, die einen Häufungspunkt hat, ist konvergent.	☐	☐