Mathe 1: Klausur #4

1. Aufgabe

(a) Charakteristisches Polynom berechnen:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda)+1\big) + 1$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (1-\lambda) + 1$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\big)$$

$$= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3+1)$$

$$= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)^2 = (2-\lambda)^3.$$

Also sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ die EW von A.

Eigenvektoren: $(A-2I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \ker(A-2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor.

(b) A ist nicht diagonalisierbar, weil A keine Basis aus Eigenvektoren besitzt (siehe (a), nur ein linear anabhängiger EV!).

(c) $\det(A^{2012}) \overset{\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)}{=} (\underbrace{\det(A)}_{=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3})^{2012} = (2\cdot 2\cdot 2)^{2012}$

$= (2^3)^{2012} = 2^{6036}$.

2. Aufgabe

Nicht in dieser Mathe 1.

3. Aufgabe

Anfang $n=0$: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Schritt $n \to n+1$: Es gilt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \underset{\text{und Def. } A}{\overset{\text{Annahme}}{=}} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NR: $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{NR}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

Also ist die Aussage wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Aufgabe

(a) Es gilt $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n \equiv 1^n \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$, also ist $3^{2n}+7 \equiv 1+7 \pmod 8 \equiv 8 \bmod 8 \equiv 0 \pmod 8$. Folglich ist $3^{2n}+7$ durch 8 teilbar, d.h. die Aussage ist wahr.

(b) Wahr: $\tilde{a} = \tilde{b} \Rightarrow \exists x \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$ ist klar.

Umgekehrt gilt: $\exists x \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$

$$\Leftrightarrow \tilde{a} \cap \tilde{b} \neq \emptyset$$

$$\overset{\text{Negation von Satz 1.3.12.}}{\Rightarrow} \tilde{a} = \tilde{b}.$$

(c) Wahr: Wähle $U = \{n\}$. Dann ist U abelsch wegen $n = g * h = h * g$ für alle $g, h \in U$. In der VL wurde gezeigt, dass U Untergruppe ist.

(d) Wahr! Seien $f, g \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\Phi(f+g) \overset{\text{Def. }\Phi}{=} (f+g)(0) \overset{\text{Def. }F}{=} f(0) + g(0) \overset{\text{Def. }\Phi}{=} \Phi(f) + \Phi(g)$$

und

$$\Phi(\lambda \cdot f) \overset{\text{Def. }\Phi}{=} (\lambda \cdot f)(0) \overset{\text{Def. }F}{=} \lambda \cdot f(0) \overset{\text{Def. }\Phi}{=} \lambda \cdot \Phi(f),$$

d.h. Φ ist linear.

(e) Nicht in dieser Mathe 1.

(f) Falsch: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$U_1 = U_2 = \mathbb{R}^2 \text{ mit Basen}$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 \neq \langle \emptyset \rangle = \langle \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \rangle$.

5. Aufgabe

Sei λ EW von ϕ. Dann gibt es $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit

$\phi(v) = \lambda \cdot v$. Also ist

$$v = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}(v) \overset{\text{Annahme}}{=} 2\phi(v) - (\phi \circ \phi)(v)$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \phi(\phi(v))$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \phi(\lambda \cdot v)$$

$$\overset{\phi \text{ linear}}{=} 2 \cdot \lambda \cdot v - \lambda \cdot \phi(v)$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \lambda \cdot \lambda \cdot v = (2\lambda - \lambda^2) v$$

$$\overset{v \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = 2\lambda - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = 1 \pm 0 = 1.$$

Somit ist $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ EW von } \phi\} = \{1\}$.