

Mathe 1: Klausur #1

1

1. Aufgabe

Reflexiv: Sei $a \in G$, dann ist $a^{-1} * a = n \in H$, weil $H \cup G$ ist. Also ist $a \sim a$.

Symmetrisch: Seien $a, b \in G$ mit $a \sim b$, d.h.

$a^{-1} * b \in H$. Allgemein gilt:

$$1. (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

$$2. (x^{-1})^{-1} = x$$

Daraus folgt $(a^{-1} * b)^{-1} \in H$ (da $H \cup G$)

1. //

$$b^{-1} * (a^{-1})^{-1}$$

2. //

$$b^{-1} * a$$

Transitiv: Seien $a, b, c \in G$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h.

es gilt $a^{-1} * b \in H$ und $b^{-1} * c \in H$. Da $H \cup G$ ist,

gilt $(a^{-1} * b) * (b^{-1} * c) \in H$

Assoziativ.

$$= a^{-1} * (b * b^{-1}) * c$$

$$= a^{-1} * n * c = a^{-1} * c. \text{ Also ist } a \sim c.$$

2. Aufgabe

(2)

$$(a) p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung
nach 3. Spalte

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2-\lambda \\ -7 & 3 \end{pmatrix} + (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-6 - 7 \cdot (2-\lambda)) + (4-\lambda) \cdot ((-5-\lambda) \cdot (2-\lambda) + 6)$$

$$= 2 \cdot (-6 + 14 - 7\lambda)$$

$$+ (4-\lambda) \cdot (-10 - 2\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 6)$$

$$= 16 - 14\lambda + (4-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 3\lambda - 4)$$

$$= \underbrace{16 - 14\lambda} + \underbrace{4\lambda^2} + \underbrace{12\lambda} - \underbrace{16 - 13\lambda^2} + \underbrace{4\lambda}$$

$$= 2\lambda + \lambda^2 - 13 = -1 \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2)$$

$$= -1 \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1)$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ sind die Eigenwerte von A

(b) Invertierbar: Wegen $\lambda_1 = 0$ ist A nicht invertierbar.

(Allgemein gilt: A inv. $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ nach Satz 3.10.9. und EW $0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.)

(3)

Diagonalisierbar: Drei verschiedene EW und
 A ist (3×3) -Matrix \Rightarrow diagonalisierbar nach
Satz 3.11.11. (c).

Positiv definit: Eigentlich nur für symmetrische
Matrix A definiert. Nicht alle EW sind positiv,
also ist A nicht positiv definit.

Orthogonal: A orthogonal $\Rightarrow |\lambda| = 1$ oder
 A invertierbar.

Beides ist falsch, also ist A
nicht orthogonal.

(c) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn
 $Ax = b$ lösbar ist und $\ker(A) = \{0\}$ gilt.
(siehe Satz 3.8.4. (b))

Wegen $\lambda_1 = 0$ ist $\ker(A) \neq \{0\}$, so dass
für keine Wahl von $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutige Lösbar-
keit gegeben ist.

(d) Aus $\det(B \cdot C) = \det(B) \cdot \det(C)$ folgt
 $\det(B^n) = (\det(B))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

weiter
Also ist $\det(A+I) = \det(A - (-1)I) = 0$, (4)

weil (-1) nach (a) ein EW von A ist.

Es folgt

$$\begin{aligned}\det((A+I)^{2015}) &= (\det(A+I))^{2015} \\ &= 0^{2015} = 0.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

(a) Es gilt

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\phi) \cdot \overbrace{M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_3}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1' & b_2' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} c_1' & c_2' & c_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Extrarechnung } (*)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Extrarechnung (*):

5

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim) \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ \text{II} \\ \text{II} + \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{I} - \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim) \begin{array}{l} \text{I} \\ -\text{II} \\ \frac{1}{2}(\text{II} + \text{III}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\sim) \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ \text{II} + \text{III} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\sim) \begin{array}{l} \text{I} - \text{III} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

(6)

(b) Es gilt:

$$1. [\phi(v)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^e(\phi) \cdot [v]_e$$

$$2. [v]_e = M_e^{\varepsilon_3}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot [v]_{\varepsilon_3}$$

Also ist

$$[\phi(v)]_{\mathcal{B}} \stackrel{1. \text{ und } 2.}{=} M_{\mathcal{B}}^e(\phi) \cdot M_e^{\varepsilon_3}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot [v]_{\varepsilon_3}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe

(a) Wahr

(b) Falsch: Supremum wäre $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (c) Falsch: $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) := x$ und

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) := x^2$$

(d) Falsch: $U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0, 0)^T : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$

und $U_2 = \left\{ (0, 0, 0, 0, 0, x_6, x_7, x_8)^T : x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \right\}$ (7)

sind UVR ^{von \mathbb{R}^8} mit $\dim(U_1) = 5$, $\dim(U_2) = 3$,

aber $U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist 0-dimensional.

(g) Falsch: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, aber

$$\det(A) = (-1)^2 = 1 > 0.$$

(h) Wahr: Wähle $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Wahr: A orthogonal $\Rightarrow A^T = A^{-1}$ und

$$\text{somit } A \cdot A^T = I \text{ und } \det(A \cdot A^T) = \det(I) = 1 \neq 0.$$

(j) Wahr