Klausur zur „Mathematik II für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2011/12
08.03.2012

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	13	11	9	12	7	8	60			
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (13 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2x + yz$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y,z)$ und $H_f(x,y,z)$.

(b) Berechnen Sie die kritischen Punkte von f und finden Sie alle lokalen Extrema von f.

(c) Hat f ein globales Maximum auf $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)^T\|_2 \leq 1\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (11 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt 1.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (a).

(c) Wird f in der Nähe des Entwicklungspunktes durch die Taylorreihe dargestellt? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Aufgabe (9 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $0 < a < 1 < b < \infty$ gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \leq \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Weisen Sie nach, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

existieren und bestimmen Sie deren Werte.

(c) Das doppelt uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

ist konvergent (Das dürfen Sie ohne Beweis verwenden). Zeigen Sie, dass sein Wert zwischen Null und Drei liegt.

Hinweise: Es gilt $\tan(\pi/4) = 1$ und $\pi \leq 4$.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ existieren mit $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$, so ist f stetig in x_0.

(b) Die Menge $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ gerade}\}$ ist ein Untervektorraum des Raums aller reellen Funktionen.

(c) Das Anfangswertproblem $y'(t) = \dfrac{1 + y(t)^2}{t}, \quad y(1) = 0$, ist eindeutig lösbar.

(d) Es seien $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit Fourierreihen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, beziehungsweise $\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx))$. Dann ist die Fourierreihe des Produktes fg gegeben durch $\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n \cos(nx) + b_n d_n \sin(nx))$.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $|f'(x)| \leq 1 + x$ für alle $x \geq 0$. Zeigen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien $n, m \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.	☐	☐
(b)	Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktionen und ist f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig, sowie g in x_0 unstetig, so ist auch $f + g$ in x_0 unstetig.	☐	☐
(c)	Es gibt keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \lvert x \rvert$.	☐	☐
(d)	Sind $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung, so ist auch $y_1 - y_2$ eine Lösung derselben Gleichung.	☐	☐
(e)	Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist periodisch.	☐	☐
(f)	Es gibt keine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x, y) = (xy, xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(g)	Sind $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\arg(z) = \arg(w) + \pi$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $z = \lambda w$.	☐	☐
(h)	Hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den Konvergenzradius 3, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.	☐	☐