Mathe 1: Klausur #2

1. Aufgabe Benutze Euklid:

(a)

Zeile m	a_m	b_m	$q_m = \lfloor \frac{a_m}{b_m} \rfloor$
0	1155	546	2
1	546	63	8
2	63	42	1
3	42	21	2
4	21	0	

$\Rightarrow \quad ggT(1155, 546) = 21$

(b) Es gilt $13 \equiv 2 \mod 11$ und $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$.

Also ist

$$13^{10} - 4^5 \equiv 2^{10} - 2^{10} \mod 11 \equiv 0 \mod 11.$$

Somit wird $13^{10} - 4^5$ von 11 geteilt.

(c) Gesucht ist x mit $x \cdot 17 \equiv 1 \mod 71$, d.h. es gibt $y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot 17 - 1 = y \cdot 71$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot 17 - y \cdot 71 = 1.$$

Wir benutzen den erweiterten Euklid, um dies zu berechnen.

Zeile m	a_m	b_m	q_m	k_m	e_m
0	71	17	4	6	$-1-4\cdot 6=-25$
1	17	3	5	-1	$1-5\cdot(-1)=6$
2	3	2	1	1	$0-1\cdot 1=-1$
3	2	1	2	0	1
4	1	0		1	0

Also ist $1 = \text{ggT}(71,17) = 6\cdot 71 + (-25)\cdot 17$.

Demnach ist $x = (-25) \bmod 71 = 46 \bmod 71$

das inverse Element.

2. Aufgabe

Induktionsanfang $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ und

$$\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 \checkmark$$

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$\overset{\text{Induktions-}}{\underset{\text{annahme}}{=}} (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= (n+1)^3 + \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4(n+1)^3 + n^2 (n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot \left(4(n+1) + n^2\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2,$$

Was zu zeigen war.

Also gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Aufgabe

(a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Linearität in 3. Zeile $= (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

2. Zeile + 3. Zeile $= (-1) \cdot \det \Big($

$$\underset{\text{nach 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} (1-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-1\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2-1\right) - 1\cdot(1-\lambda-1) + 1\cdot\left(1-(1-\lambda)\right)$$

$$= (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda)+\lambda+\lambda$$

$$= (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda)+2\lambda$$

$$= (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)+2\lambda = \lambda\cdot\left((1-\lambda)\cdot(\lambda-2)+2\right)$$

$$= \lambda\cdot(\lambda-2-\lambda^2+2\lambda+2) = \lambda\cdot(-\lambda^2+3\lambda)$$

$$= -\lambda^2\cdot(\lambda-3) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 3$ sind die Eigenwerte.

Eigenräume: Zu $\lambda_1 = 0$ lösen wir $(A - 0\cdot I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \text{I-II} \\ \text{II-III} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

~~Setz~~ Setze $x_2 = s$, $x_3 = t$, dann ist $x_1 = -s-t$.

Also ist $\ker(A - 0\cdot I) = E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir sehen $\dim(E_0(A)) = 2$.

Zu $\lambda_2 = 3$ lösen wir $(A - 3\cdot I)\cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ 2\mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sei $x_3 = s$, dann ist $-3x_2 = -3x_3 = -3s$, d.h. $x_2 = s$.

Weiter ist $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$, so dass $x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$
$= s$

folgt. Daher ist $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix}s\\s\\s\end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

(b) Wegen $\dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) = 2 + 1 = 3$ ist A nach Satz 3.11.11. (c) diagonalisierbar.

(c) Ein Eigenwert von ist 0, so dass

$\det(A) = \det(A - 0\cdot I) = 0$ gilt.

(d) Der Kern von A ist $E_0(A)$. In (a) haben wir die Basis $\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ bestimmt.

(e) Nein, weil die Matrix nur Eigenwerte größer oder gleich 0 hat. Damit ist A positiv semidefinit und es kann kein solches x existieren.

(f) Wegen $\dim(\ker(A)) = 2$ ist $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 1$ nach Dimensionsformel (Korollar 3.6.18.). Nun aber ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Somit hat das lineare GS $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Bild}(A)$ gar keine Lösung.

~~(g) Sei~~.

Alternative: Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(g) Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$x \cdot x^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a \cdot b & a \cdot c \\ a \cdot b & b^2 & b \cdot c \\ a \cdot c & b \cdot c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, d.h. $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$.
Aus $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = 1$ folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die einzigen Lösungen sind.

4. Aufgabe

1. Multiplikation: $A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$

Da $A, B \in O(n)$, wissen wir $A^{-1} = A^T$ und $B^{-1} = B^T$.

Zu zeigen ist $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^T$. Es gilt

$$(A \cdot B)^{-1} \overset{\text{Inverse}}{=} B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T \underset{\text{Satz 3.7.9. (b)}}{=} (A \cdot B)^T,$$

d.h. $A \cdot B \in O(n)$.

2. Assoziativität: Das liefert der Hinweis.

3. Neutrales Element: Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

erfüllt $I \cdot I = I$ und $I^T = I$, d.h. $I^T = I^{-1}$.

Also ist $I \in O(n)$. Weiter ist $A \cdot I = A$ für alle $A \in O(n)$.

4. Inverses Element: Nach Übungsaufgabe 3.9.10. ist A orthogonal genau dann, wenn A^T orthogonal ist. Also:

$$A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} = A^T \in O(n).$$

Somit ist $O(n)$ eine Gruppe.

$O(2)$ ist nicht abelsch: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch in $O(2)$ erfüllen $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A$.

5. Aufgabe

(a) Falsch: Sei $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) := \binom{x}{0}$ und

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Psi\binom{x}{y} := x.$$

Dann ist
$$(\Psi \circ \Phi)(x) = \Psi(\Phi(x)) = \Psi\binom{x}{0} = x \text{ bijektiv, aber}$$

Φ ist nicht surjektiv.

(b) Wahr: Es gilt

$$\|x \pm y\|^2 \overset{\text{Def.}}{=} (x \pm y \mid x \pm y)$$
$$\overset{\text{Linearität}}{=} (x \mid x \pm y) \pm (y \mid x \pm y)$$
$$\overset{\text{Linearität}}{=} (x \mid x) \pm (x \mid y) \pm (y \mid x) + (y \mid y)$$
$$\overset{\text{Symmetrie}}{=} (x \mid x) \pm (x \mid y) \pm (x \mid y) + (y \mid y)$$
$$= \|x\|^2 \pm 2(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Also ist $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x \mid y)$, was zu zeigen war (teile noch durch 4).

(c) Falsch: Gäbe es solche $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^9$, dann hätte $U_1 + U_2$ die Dimension

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$
$$= 6 + 6 - 2 = 10.$$

Es ist
$\dim(U_1+U_2) \leq 9$, weil $U_1+U_2 \subseteq \mathbb{R}^9$.

(d) Wahr: Sei λ EW von A und $v \neq 0$ EV, d.h. $A\cdot v = \lambda \cdot v$. Es ist $\lambda \neq 0$, weil A invertierbar ist (regulär heißt invertierbar). Also gilt

$$A\cdot v = \lambda\cdot v \overset{A^{-1}}{\Rightarrow} A^{-1}\cdot A\cdot v = A^{-1}\cdot\lambda\cdot v$$

$$\Rightarrow I\cdot v = \lambda\cdot A^{-1}\cdot v$$

$$\Rightarrow v = \lambda\cdot A^{-1}\cdot v$$

$$\overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{\lambda}\cdot v = A^{-1}\cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ ist EW von } A^{-1}.$$

6. Aufgabe

(a) Wahr

(b) Falsch: $X=\{0,1\}$, $Y=\{0\}$, $A=\{0\}$ und $f: X\to Y$, $f(x):=0$ liefert

$$A=\{0\}\neq\{0,1\}=f^{-1}(\{0\})=f^{-1}(f(\{0\})) = f^{-1}(f(A)).$$

(c) Wahr: $$\sum_{k=1}^{2017} i^k = \sum_{k=1}^{2016} i^k + i^{2017} = 0 + i^{2016}\cdot i = 0+1\cdot i = i.$$

(d) Falsch: $\dim(\mathbb{R}^9/U) = \dim(\mathbb{R}^9) - \dim(U) = 9-3=6$.

(e) Falsch: Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ von g ist nicht die Normale $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ von E.

(f) Falsch: $\Phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ kann beliebig gewählt werden

(g) ~~Falsch: Nur wahr für homogene Systeme~~

Wahr: $A\cdot x = b$ und $A\cdot y = b$

$$\Rightarrow A\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}y\right) = \tfrac{1}{4}A\cdot x + \tfrac{3}{4}A\cdot y$$
$$= \tfrac{1}{4}b + \tfrac{3}{4}b = b.$$

(h) Wahr: Über jedem Körper gilt

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$= 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1 \neq 0,$$ also

hat A vollen Rang.

(i) Falsch: $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A+B = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \det(A) = 1 = \underset{(-1)^2}{\det(B)},$$
$$\Rightarrow \det(A+B) = 0 \neq 2 = 1+1 = \det(A)+\det(B)$$

(j) Wahr: Für $\lambda < 0$ sind die EW $-1, \lambda, -\lambda^2$ alle kleiner 0. Also ist die Matrix negativ definit.