

1. Aufgabe

(a) Erweiterter Euklid:

Zeile m	a_m	b_m	q_m	k_m	e_m
0	$a_0 = 245$	$b_0 = 28$	$q_0 = \left\lfloor \frac{245}{28} \right\rfloor = 8$	$k_0 = -1$	$e_0 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$
1	$a_1 = 28$	$b_1 = 245 - 8 \cdot 28 = 21$	$q_1 = \left\lfloor \frac{28}{21} \right\rfloor = 1$	$k_1 = 1$	$e_1 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
2	$a_2 = 21$	$b_2 = 7$	$q_2 = 3$	$k_2 = 0$	$e_2 = 1$
3	$a_3 = 7$	$b_3 = 0$		$k_3 = 1$	$e_3 = 0$

Also ist $7 = a_3 = \text{ggT}(a, b) = a_0 \cdot k_0 + b_0 \cdot e_0$
 $= 245 \cdot (-1) + 28 \cdot 9.$

(b) Es gilt: $3x \equiv 1 \pmod{6}$

$$\Leftrightarrow \widetilde{3} \cdot \widetilde{x} = \widetilde{1} \text{ in } \mathbb{Z}_6$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{3} \cdot \widetilde{x} = \widetilde{1} \text{ in } \mathbb{Z}_6$$

Es reicht also zu testen, ob dies für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

gilt: Wegen $\widetilde{3} \cdot \widetilde{0} = \widetilde{0}$, $\widetilde{3} \cdot \widetilde{1} = \widetilde{3} \neq \widetilde{1}$, $\widetilde{3} \cdot \widetilde{2} = \widetilde{6} = \widetilde{0} \neq \widetilde{1}$,

$\widetilde{3} \cdot \widetilde{3} = \widetilde{9} = \widetilde{3} \neq \widetilde{1}$, $\widetilde{3} \cdot \widetilde{4} = \widetilde{12} = \widetilde{0} \neq \widetilde{1}$ und

$\widetilde{3} \cdot \widetilde{5} = \widetilde{15} = \widetilde{3} \neq \widetilde{1}$ gibt es kein solches $x \in \mathbb{Z}$.

2. Aufgabe

$$\begin{aligned}
 (a) \quad A &= a \cdot a^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1 \ 2 \ 1) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-1) \cdot a & 2 \cdot a & 1 \cdot a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

nach Definition des Matrixproduktes.

(b) Gauß: $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt auf

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I+III}]{2 \cdot \text{I} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Zwei Nullzeilen heißt $\dim(\ker(A)) = 2$.

Sei $x_3 = s$ und $x_2 = t$. Dann ist

$$x_1 = 2x_2 + x_3 = 2t + s, \text{ also}$$

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

(c) Wegen $\ker(A) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist $\det(A) = 0$.

Nach Homomorphiesatz ist

$$\begin{aligned} 3 &= \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(A)) + \text{Rang}(A) \\ &= 2 + \text{Rang}(A), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$\text{Rang}(A) = 1.$$

(d) Offenbar ist $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a$. Also ist

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = a\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \ker(A) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Nach (c) ist $\text{Rang}(A) = 1$, d.h. $\text{Bild}(A) = \langle \{a\} \rangle$.

Offenbar ist b kein Vielfaches von a , d.h. $b \notin \text{Bild}(A)$.

Somit ist $\{x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = b\} = \emptyset$. (Satz 3.8.3.)

(e) (i) A ist nicht orthogonal, weil ^{z.B.} $\|a\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \neq 1$.

oder die Spalten linear abhängig sind,
oder die Spalten nicht orthogonal stehen.

(ii) Ja, denn $A^T = (a \cdot a^T)^T = (a^T)^T \cdot a^T = a \cdot a^T = A$.

(iii) Wegen $\dim(\ker(A)) = 2 = \dim(E(A, 0))$ ist 0 EW von A mit Vielfachheit 2. Weiter ist

$$A \cdot a = (a \cdot a^T) a = a \cdot (a^T \cdot a) = a \cdot 6 = 6 \cdot a.$$

Also sind 0 und 6 die einzigen Eigenwerte (4)
von A. Wegen $0 \geq 0$ und $6 \geq 0$ ist A pos. semidefinit.

3. Aufgabe

(a) Es gilt $g = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Da E senkrecht
zu g und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ sein soll, wissen wir sofort,

$$\text{dass } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

die Hesse-Normalform ist. Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E, \text{ denn } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\text{und } \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 3 + 0 - 3 = 0. \text{ Also ist}$$

$$E = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \text{ weil}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Das
folgt aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

(b) Nach Satz 3.5.12. ist

$$\begin{aligned} \text{dist} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E \right) &= \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) - 0 \right| \\ &= \left| -\frac{3}{\sqrt{10}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

(c) Sei $b_1 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und (5)

$$b_3 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Dann ist}$$

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 :

In (a) haben wir bereits $(b_1 | b_2) = 0 = (b_1 | b_3)$ gesehen. Klar ist $(b_2 | b_3) = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$. Wegen $1 + 3^2 = 10$ ist die Normiertheit klar.

Bezüglich \mathcal{B} gilt

$$\phi(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$\phi(b_2) = -b_2 = 0 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$\phi(b_3) = -b_3 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + (-1) \cdot b_3.$$

$$\text{Also ist } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Standardbasis von \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } S := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \text{ eine orthogonale} \end{aligned}$$

Matrix, weil \mathcal{B} eine ONB ist. Nach Basiswechsel-formel gilt

(6)

$$M_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\phi) = S \cdot M_B^B(\phi) \cdot \underbrace{S^{-1}}_{=S^T, \text{ da } S \text{ orthogonal}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot S^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 0 & -1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8/10 & 0 & -6/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6/10 & 0 & 8/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe

(a) Falsch: Völliger Unsinn!

(b) Falsch: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (c) Wahr

(d) Wahr: 41 ist prim (e) Wahr

(f) Wahr: $|x|y| = x \cdot y$ (g) Wahr: $U = V, U' = V'$,

Dann $V/U \cong \{0\} \cong V'/U'$

(h) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Wahr: A orthogonal \Rightarrow A invertierbar

(j) Falsch: kann mehrere geben (k) Falsch: $(-1)^n$

(l) Falsch: $a_n = n$ und $b_n = n^2$