Name: ______________________________, Matrikelnr.: ________________

Aufgabe 1: Formale Modellierung mit Symbolen, Mengen und Funktionen (20 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie das Modell eines Verwaltungssystems für den öffentlichen Nahverkehr. Das Verwaltungssystem wird für die Zuweisung von Linien im Verkehrsgebiet zu Haltestellen verwendet. Im Verkehrsgebiet verkehren Fahrzeuge von verschiedenen Fahrzeugtypen. Außerdem wird das Verwaltungssystem für die Zuweisung von verschiedenen Tarifen zu den Linien verwendet. Für die Modellierung des Verwaltungssystems werden die folgenden Symbole, Mengen und Funktionen verwendet:

FAHRZEUG	modelliert die Menge der Fahrzeuge.
FAHRZEUGTYP := $\{tram, bus, db\}$	modelliert die Menge der möglichen Fahrzeugtypen, wobei *tram* den Fahrzeugtyp Straßenbahn, *bus* den Fahrzeugtyp Bus und *db* den Fahrzeugtyp Eisenbahn modelliert.
typ-von : FAHRZEUG $\to$ FAHRZEUGTYP	modelliert für jedes Fahrzeug $f \in$ FAHRZEUG den Typ des Fahrzeugs f.
HALTESTELLE	modelliert die Menge der Haltestellen.
TARIF := $\{kurz, mittel, lang\}$	modelliert die möglichen Tarife im öffentlichen Nahverker, wobei *kurz* den Tarif für eine kurze Strecke, *mittel* den Tarif für eine mittlere Strecke und *lang* den Tarif für eine lange Strecke modelliert.
LINIE	modelliert die Menge der Verkehrslinien im Verkehrsgebiet.
hält-an : LINIE $\to \mathcal{P}$(HALTESTELLE)	modelliert für jede Linie $l \in$ LINIE die Haltestellen, an denen die Linie l hält.

Ansonsten bleiben diese Mengen und Funktionen unterspezifiziert.

► **Zur Information:** Alle vier nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in den vorigen Aufgabenstellungen deklariert wurden, auch wenn Sie diese Aufgabenteile nicht bearbeitet haben.

(4 P) (A). Modellieren Sie, ob ein Fahrzeug einen bestimmten Fahrzeugtyp hat, durch formale Definition einer Funktion fahrzeug-von-typ : (FAHRZEUG × FAHRZEUGTYP) $\to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$, die für ein Fahrzeug f und einen Fahrzeugtyp t den Wahrheitswert $\mathfrak{w}$ zurückgibt, wenn das Fahrzeug f vom Fahrzeugtyp t ist, und den Wahrheitswert $\mathfrak{f}$ zurückgibt, wenn das Fahrzeug f nicht vom Fahrzeugtyp t ist.

Antwort:

(4 P) (B). Modellieren Sie, dass zwei Fahrzeuge den selben Fahrzeugtyp haben, durch formale Definition einer Relation GLEICHER-TYP $\subseteq$ FAHRZEUG × FAHRZEUG.

Antwort:

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

(C). Modellieren Sie alle Schienenfahrzeuge durch formale Definition einer Menge SCHIENENFAHRZEUG $\subseteq$ FAHRZEUG. Fahrzeuge sind Schienenfahrzeuge, wenn Sie vom Typ Eisenbahn oder Straßenbahn sind. (6 P)

Antwort:

(D). Modellieren Sie die Zuweisung von Tarifen zu bestimmten Linien durch formale Definition einer Funktion tarif-von : LINIE $\to$ TARIF. Eine Linie hat den Tarif *kurz*, wenn sie an höchstens 5 Haltestellen hält, den Tarif *mittel*, wenn sie an mehr als 5 aber höchstens an 15 Haltestellen hält und den Tarif *lang*, wenn sie an mehr als 15 Haltestellen hält. (6 P)

Antwort:

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

Aufgabe 2: Formale Modellierung von Anforderungen (18 Punkte)

In dieser Aufgabe modellieren Sie Anforderungen an das Modell des Verwaltungssystems für den öffentlichen Nahverkehr aus Aufgabe 1, das um die folgenden Mengen und Funktionen erweitert ist:

$\mathsf{ZUSTAND} := \{\mathit{aktiv}, \mathit{inaktiv}\}$	modelliert die Menge der Zustände von Fahrzeugen, wobei *aktiv* ein Fahrzeug beschreibt, das momentan auf einer Strecke eingesetzt werden kann und *inaktiv* ein Fahrzeug beschreibt, dass momentan nicht auf einer Strecke eingesetzt werden kann.
$\mathsf{zustand\text{-}von} : \mathsf{FAHRZEUG} \to \mathsf{ZUSTAND}$	modelliert für jedes Fahrzeug f den Zustand des Fahrzeugs f.
$\mathsf{fahrzeuge\text{-}von} : \mathsf{LINIE} \to \mathcal{P}(\mathsf{FAHRZEUG})$	modelliert für jede Linie l, welche Fahrzeuge der Linie l zugewiesen sind.

Ansonsten bleiben diese Mengen und Funktionen unterspezifiziert.

► **Zur Information:** Sie können diese Aufgabe auch dann lösen, wenn Sie Aufgabe 1 nicht bearbeitet haben. Alle vier nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar. Sie dürfen in Ihrer Lösung alle Mengen, Relationen und Funktionen wiederverwenden, die in der Aufgabenstellung von Aufgabe 1 (inklusive Teilaufgaben) deklariert wurden, auch wenn Sie Aufgabe 1 nicht vollständig bearbeitet haben.

(3 P) (A). Die Anforderung „Jeder Linie sind höchstens 5 Fahrzeuge zugewiesen“ sei durch folgende Relation modelliert:

$\mathsf{ANFORDERUNG1} \subseteq (\mathsf{LINIE} \to \mathcal{P}(\mathsf{FAHRZEUG}))$

$\mathsf{fahrzeuge\text{-}von} \in \mathsf{ANFORDERUNG1}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_1 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_1 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

$\varphi_1 :=$

(4 P) (B). Die Anforderung „Jeder Linie ist mindestens ein aktives Fahrzeug zugewiesen“ sei durch folgende Relation modelliert:

$\mathsf{ANFORDERUNG2} \subseteq (\mathsf{LINIE} \to \mathcal{P}(\mathsf{FAHRZEUG}))$

$\mathsf{fahrzeuge\text{-}von} \in \mathsf{ANFORDERUNG2}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_2 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_2 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

$\varphi_2 :=$

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

(C). Die Anforderung „Jedes aktive Fahrzeug ist $\overset{\text{mindestens}}{\vee}$ einer Linie zugewiesen" sei durch folgende Relation modelliert: (5 P)

$$\mathsf{ANFORDERUNG3} \subseteq (\mathsf{LINIE} \to \mathcal{P}(\mathsf{FAHRZEUG}))$$

$\mathsf{fahrzeuge\text{-}von} \in \mathsf{ANFORDERUNG3}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_3 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_3 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

$\varphi_3 :=$

(D). Die Anforderung „Wenn einer Linie mindestens ein Schienenfahrzeug zugewiesen ist, dann sind dieser Linie nur Schienenfahrzeuge zugewiesen" sei durch folgende Relation modelliert: (6 P)

$$\mathsf{ANFORDERUNG4} \subseteq (\mathsf{LINIE} \to \mathcal{P}(\mathsf{FAHRZEUG}))$$

$\mathsf{fahrzeuge\text{-}von} \in \mathsf{ANFORDERUNG4}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel φ_4 gilt.

Definieren Sie die Formel φ_4 in Prädikatenlogik mit Hilfe von mathematischen Konzepten, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Antwort:

$\varphi_4 :=$

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

Aufgabe 3: Syntax und Semantik (14 Punkte)

In dieser Aufgabe erweitern Sie die arithmetischen Ausdrücke der Programmiersprache IMP (d.h. AExp). Folgende Wertebereiche werden verwendet:

Num	die Zahlen,
Var	die Programmvariablen,
MAExp	die arithmetischen Ausdrücke.

Der Wertebereich MAExp ist durch folgende Grammatik in BNF definiert, wobei $n \in \mathsf{Num}$ und $X \in \mathsf{Var}$:

$$a ::= n \mid X \mid (a \oplus a) \mid (a \ominus a) \mid (a \odot a) \mid \texttt{min}(a,\, a)$$

Das heißt, der Wertebereich MAExp erweitert AExp um den grau hervorgehobenen arithmetischen Ausdruck. Die Intuition des arithmetischen Ausdrucks $\texttt{min}(a_1, a_2)$ ist:

- Wenn der Wert des Ausdrucks a_1 im aktuellen Zustand kleiner als oder gleich groß wie der Wert des Ausdrucks a_2 ist, dann ist der Wert des Ausdrucks $\texttt{min}(a_1, a_2)$ im aktuellen Zustand der Wert von a_1.
- Wenn der Wert des Ausdrucks a_1 im aktuellen Zustand größer als der Wert des Ausdrucks a_2 ist, dann ist der Wert des Ausdrucks $\texttt{min}(a_1, a_2)$ im aktuellen Zustand der Wert von a_2.

► **Zur Information:** Alle zwei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

► **Zur Information:** Alle Regeln der Programmiersprache IMP finden Sie zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

(10 P) (A). **Erweitern Sie den Kalkül** für die Herleitung von Instanzen des Urteils $\langle a,\ \sigma\rangle \Downarrow n$ (siehe Beiblatt) **um Kalkülregeln**, mit denen Instanzen des Urteils $\langle \texttt{min}(a_1, a_2),\ \sigma\rangle \Downarrow n$ hergeleitet werden können. Dabei sollen die Kalkülregeln die im Aufgabentext beschriebene Intuition des neu hinzugefügten Kommandos $\texttt{min}(a_1, a_2)$ angemessen modellieren.

Sie brauchen in dieser Aufgabe **nicht** für die Angemessenheit der Kalkülregeln zu argumentieren.

Hinweis: Es existiert eine angemessene Lösung mit zwei Kalkülregeln.

Antwort:

Name: ______________________, Matrikelnr.: ____________

(B). Betrachten Sie das folgende, unvollständige Beweisprinzip der strukturellen Induktion für MAExp: (4 P)

Sei $P \subseteq \mathsf{MAExp}$ eine einstellige Relation über MAExp. Wenn folgende sechs Bedingungen gelten:

(1) $\forall n \in \mathsf{Num}: P(n)$,

(2) $\forall X \in \mathsf{Var}: P(X)$,

(3) $\forall a_1, a_2 \in \mathsf{MAExp}: P(a_1) \wedge P(a_2) \Rightarrow P((a_1 \oplus a_2))$,

(4) $\forall a_1, a_2 \in \mathsf{MAExp}: P(a_1) \wedge P(a_2) \Rightarrow P((a_1 \ominus a_2))$,

(5) $\forall a_1, a_2 \in \mathsf{MAExp}: P(a_1) \wedge P(a_2) \Rightarrow P((a_1 \odot a_2))$,

(6) (hier fehlt eine Bedingung),

dann gilt auch: $\forall a \in \mathsf{MAExp}: P(a)$.

Ergänzen Sie die fehlende Bedingung (6), so dass das Ergebnis ein vollständiges und korrektes Beweisprinzip der strukturellen Induktion für MAExp ist.

Antwort:

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

Aufgabe 4: Programmäquivalenz (15 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Äquivalenz zweier Programme. Seien

$$P_1 := \texttt{if } b \texttt{ then } c_1\texttt{;}\ c_2 \texttt{ else } c_2 \texttt{ fi}$$
$$P_2 := \texttt{if } b \texttt{ then } c_1 \texttt{ else skip fi;}\ c_2$$

wobei b eine Metavariable für boolesche Ausdrücke ist und c_1 und c_2 Metavariablen für Kommandos sind. Dann gilt:

$$P_1 \sim P_2$$

In dieser Aufgabe soll die folgende Aussage bewiesen werden, welche einen Teil des Beweises der obigen Äquivalenz darstellt:

(∗) Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und alle Grundsubstitutionen η, deren Definitionsbereich b, c_1 und c_2 einschließt, für die das Urteil

$$\langle(\texttt{if } b \texttt{ then } c_1\texttt{;}\ c_2 \texttt{ else } c_2 \texttt{ fi})\eta,\ \sigma\rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle(\texttt{if } b \texttt{ then } c_1 \texttt{ else skip fi;}\ c_2)\eta,\ \sigma\rangle \rightarrow \sigma'$$

herleitbar.

■ Vervollständigen Sie den folgenden Beweis der Aussage (∗) durch Ausfüllen der Boxen auf dieser und der folgenden Seite.

Beachten Sie, dass alle Prämissen für verwendete Regeln instanziiert werden müssen. Herleitungen für ein Urteil dürfen Sie nur dann abkürzen, wenn deren Existenz schon sichergestellt ist.

▶ **Zur Information:** Alle Regeln der Programmiersprache IMP finden Sie zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

Antwort:

Seien die Zustände $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und die Grundsubstitution η, deren Definitionsbereich b, c_1 und c_2 einschließt, beliebig, sodass es eine Herleitung von

gibt. In der Herleitung gibt es zwei Möglichkeiten für die letzte Regel: rift und riff. Wir fahren mit einer vollständigen Fallunterscheidung über diese beiden Möglichkeiten für die letzte Regel fort.

Fall rift: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle(\texttt{if } b \texttt{ then } c_1 \texttt{ else skip fi;}\ c_2)\eta,\ \sigma\rangle \rightarrow \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Name: ____________________, Matrikelnr.: __________

Fall riff: In diesem Fall muss die Herleitung folgende Form haben:

Das Urteil $\langle(\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ c_1\ \texttt{else skip fi};\ c_2)\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$ können wir nun wie folgt herleiten:

Damit ist die Aussage $(*)$ bewiesen, d.h. für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und alle Grundsubstitutionen η, deren Definitionsbereich b, c_1 und c_2 einschließt, für die das Urteil

$$\langle(\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ c_1;\ c_2\ \texttt{else}\ c_2\ \texttt{fi})\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle(\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ c_1\ \texttt{else skip fi};\ c_2)\eta,\ \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar. □

Name: ____________________, Matrikelnr.: ____________

Aufgabe 5: Prozessalgebra CSP (12 Punkte)

- **Zur Information:** Alle zwei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.
- **Zur Information:** Die Semantik der Prozessausdrücke der Sprache CSP finden Sie auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Modellierung, Spezifikation und Semantik".

(5 P) (A). Seien folgende Mengen von Ereignissen E_A und Spuren Tr_A eines Systems A gegeben.

$$E_A := \{x, y, z\}$$
$$Tr_A := \{(), (x), (x, y), (x, z)\}$$

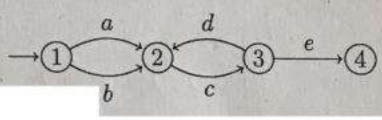
- Definieren Sie den Prozessausdruck P_A, sodass der Prozessausdruck P_A den Prozess (E_A, Tr_A) spezifiziert.

Antwort:

P_A:=

(7 P) (B). Sei folgendes Transitionssystem TS_B gegeben. Das gegebene Diagramm visualisiert das Transitionssystem TS_B.

$$TS_B := (S^B, S_0^B, E^B, \to^B),$$
$$S^B := \{1, 2, 3, 4\}$$
$$S_0^B := \{1\}$$
$$E^B := \{a, b, c, d, e\}$$
$$\to^B := \{(1, a, 2), (1, b, 2), (2, c, 3), (3, d, 2), (3, e, 4)\}$$



- Definieren Sie den Prozessbezeichner P_B durch ein Gleichungssystem aus Prozessausdrücken, sodass der Prozessausdruck P_B unter dem Gleichungssystem aus Prozessausdrücken den Prozess $(E^B, \text{E-Traces}(TS_B))$ spezifiziert.

Antwort:

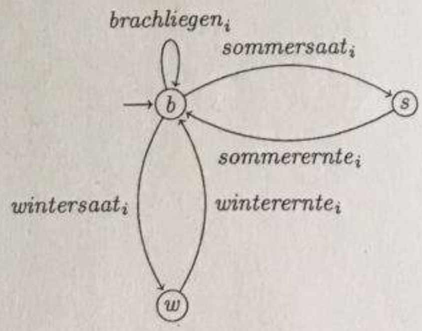
$P_B =_{E^B}$

Name: ______________________, Matrikelnr.: ____________

Aufgabe 6: Transitionssysteme und nebenläufige Ausführung (21 Punkte)

Die *Dreifelderwirtschaft* ist in der Landwirtschaft eine Methode, um den Ertrag eines Feldes zu steigern. Im ersten Jahr wird Sommergetreide gesät und geerntet. Im zweiten Jahr wird Wintergetreide gesät und geerntet. Im dritten Jahr liegt das Feld brach (d.h. das Feld wird nicht bewirtschaftet). Danach wiederholt sich der Zyklus. Bei einem Feld wird immer zuerst Sommergetreide gesät. Betrachten Sie die folgende Modellierung eines Felds i durch ein Transitionssystem $Feld(i)$.
Das nachstehende Diagramm veranschaulicht das Transitionssystem $Feld(i)$.

$$\begin{aligned}
Feld(i) &:= (S^{Feld(i)}, S_0^{Feld(i)}, E^{Feld(i)}, \rightarrow^{Feld(i)}),\\
S^{Feld(i)} &:= \{b, s, w\}\\
S_0^{Feld(i)} &:= \{b\}\\
E^{Feld(i)} &:= \{sommersaat_i, sommerernte_i,\\
&\quad\ wintersaat_i, winterernte_i,\\
&\quad\ brachliegen_i\}\\
\rightarrow^{Feld(i)} &:= \{(b, sommersaat_i, s), (b, wintersaat_i, w),\\
&\quad\ (b, brachliegen_i, b), (s, sommerernte_i, b),\\
&\quad\ (w, winterernte_i, b)\}
\end{aligned}$$



Die Ereignisse von $Feld(i)$ haben die folgenden Interpretation:

- Das Ereignis $sommersaat_i$ modelliert, dass Sommergetreide ausgesät wird.
- Das Ereignis $sommerernte_i$ modelliert, dass Sommergetreide geerntet wird.
- Das Ereignis $wintersaat_i$ modelliert, dass Wintergetreide ausgesät wird.
- Das Ereignis $winterernte_i$ modelliert, dass Wintergetreide geerntet wird.
- Das Ereignis $brachliegen_i$ modelliert, dass das Feld nicht bewirtschaftet wird.

Die Zustände von $Feld(i)$ haben die folgenden Interpretation:

- Der Zustand b modelliert, dass das Feld brach liegt.
- Der Zustand s modelliert, dass Sommergetreide auf dem Feld steht.
- Der Zustand w modelliert, dass Wintergetreide auf dem Feld steht.

Hinweis: Beachten Sie, dass wir vom Konzept der Zeit abstrahieren, d.h. Jahre werden nicht explizit modelliert.

► **Zur Information:** Alle drei nachfolgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

(4P) (A). Widerlegen Sie, dass das Modell $Feld(i)$ eines Feldes i folgende Aussage erfüllt:

„Zwischen zwei Aussaaten von Sommergetreide muss mindestens einmal Wintergetreide gesät worden sein."

Geben Sie dazu eine Ereignisspur der durch das Transitionssystems $Feld(i)$ induzierten Menge von Ereignisspuren E-Traces$(Feld(i)) \subseteq (E^{Feld(i)})^*$ an, die die Aussage verletzt.

Antwort:

Name: ____________________, Matrikelnr.: ______________

(B). Das Transitionssystem $Feld(i)$ ist kein angemessenes Modell eines Felds i im Sinne der Dreifelderwirtschaft. Vervollständigen Sie die nachfolgende Definition des Transitionssystems $Feld(i)'$, so dass $Feld(i)'$ ein Feld i im Sinne der Dreifelderwirtschaft angemessen modelliert. Begründen Sie, dass ihr vervollständigtes Transitionssystem ein in diesem Sinne angemessenes Modell ist. (11 P)

Antwort:

$$Feld(i)' := (S^{Feld(i)'}, S_0^{Feld(i)'}, E^{Feld(i)'}, \rightarrow^{Feld(i)'})$$

$$S^{Feld(i)'} := \{b, s, w\} \cup$$

$$S_0^{Feld(i)'} := \{b\}$$

$$E^{Feld(i)'} := \{sommersaat_i, sommerernte_i, wintersaat_i, winterernte_i, brachliegen_i\}$$

$$\rightarrow^{Feld(i)'} :=$$

Begründung für Angemessenheit des Modells:

Name: ______________________, Matrikelnr.: ______________

(6 P) (C). Sei das Transitionssystem $\mathit{Feld}(i)'' := (S^{\mathit{Feld}(i)''}, S_0^{\mathit{Feld}(i)''}, E^{\mathit{Feld}(i)}, \rightarrow^{\mathit{Feld}(i)''})$ eine angemessene Modellierung eines Felds i. Zur Erinnerung, es gilt:

$$\begin{aligned} E^{\mathit{Feld}(i)} \quad := \quad & \{\mathit{sommersaat}_i, \mathit{sommerernte}_i, \\ & \mathit{wintersaat}_i, \mathit{winterernte}_i, \\ & \mathit{brachliegen}_i\} \end{aligned}$$

Der Hof eines Bauern besteht aus 2 Feldern, die er bewirtschaftet. Jedes Feld wird mittels der Dreifelderwirtschaft bewirtschaftet. Bei jedem Feld wird zuerst Sommergetreide gesät.

Sie sollen den Hof des Bauern als Produktkomposition der Transitionssysteme $\mathit{Feld}(i)''$ für $i \in \{1, 2\}$ modellieren.

- Entscheiden Sie ob die synchrone Produktkomposition oder die asynchrone Produktkomposition der beiden Felder in einem angemessenen Modell des Hofs resultiert. Begründen Sie warum die gewählte Produktkomposition in einem angemessenem Modell resultiert. Begründen Sie auch warum die nicht gewählte Produktkomposition in keinem angemessenen Modell resultiert.

  Hinweis: Das Modell des Hofs in unserem Szenario ist angemessen, falls nur die parallele Bewirtschaftung beider Felder gemäß der im Aufgabentext beschriebenen Dreifelderwirtschaft möglich ist.

Antwort: