Mathe 2: Klausur # 1

1. Aufgabe

(a) (i) Es gilt

$$\frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5} = \frac{\sqrt{n^2(3+\frac{2}{n^2})}}{n\cdot(2+\frac{5}{n})} = \frac{\cancel{\sqrt{n^2}}\cdot\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}{\cancel{n}\cdot(2+\frac{5}{n})}.$$

Bekanntlich ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, also ist nach GWS

$\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n^2})=3$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{5}{n})=2$. Da $\sqrt{\cdot}$

stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}=\sqrt{3}$. Nach GWS

ist somit $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) Die Funktionen $x\mapsto\sin(x)$ und $x\mapsto\ln(x+1)$ sind stetig diff.bar mit $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=0=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)$.

Wir dürfen also den Satz von L'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\ln(x+1)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{\frac{d}{dx}\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1/(x+1)} \overset{\text{GWS.}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$

(cos ist stetig!) und $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$.

(b) Klar ist f gerade, also ist

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cdot \cos(x)\, dx$$

NR: $v(x) = \sin(x)$

$u'(x) = 1$

$$\overset{x\geq 0}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underset{=u(x)}{x} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=: v'(x)}\, dx$$

$$\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \frac{2}{\pi}\cdot \left([u(x)\cdot v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)\cdot v(x)\, dx \right)$$

$$\overset{v(0)=v(\pi)=0}{=} \frac{2}{\pi}\cdot \left(0 + \int_0^\pi -\sin(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot [\cos(x)]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{-4}{\pi}.$$

2. Aufgabe

(a) f ist mindestens 2-mal stetig partiell diff.bar, weil f Summe / Produkt solcher Funktionen ist. Somit dürfen wir alle Differentiationsregeln benutzen und erhalten

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x(y-1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2-y\end{aligned}\right\} \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(y-1) \\ x^2-y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) &= 2(y-1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) &= -1\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 2x \underset{\nearrow}{\overset{!}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\end{aligned}\right\} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz

(b) Notwendig: $\nabla f(x,y) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x(y-1) = 0 &\Leftrightarrow x=0 \text{ oder } y=1 \\ x^2-y=0 &\Leftrightarrow x^2=y \end{aligned}$$

Ist $x=0$, so muss $y=0$ sein. Ist $x \neq 0$, so ist $y=1=x^2$, d.h. $x=\pm 1$. Also sind

$(x_1,y_1)=(0,0)$
$(x_2,y_2)=(1,1)$
$(x_3,y_3)=(-1,1)$

die kritischen Punkte von f.

Hinreichend:

$A_1 = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat EW $-2 < 0$ und $-1 < 0$,

also ist A_1 negativ definit und f hat lokales Maximum in $(0,0)$

$A_{2/3} = H_f(\pm 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat

$\det(A_{2/3}) = -4 < 0$, also ist $A_{2/3}$ indefinit.

Somit liegt in $(\pm 1, 1)$ kein lokales Extremum vor.

(c) Da f stetig partiell diff.bar ist, muss f stetig sein. Weiter ist K kompakt: K ist abgeschlossen nach Bsp. 5.6.10. (b) und beschränkt, weil $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \overset{x^2+y^2 \leq 1}{\leq} 1$ für alle $(x,y) \in K$ gilt. Nach Satz vom Maximum existiert $\max\limits_{(x,y)\in K} |f(x,y)|$.

3. Aufgabe

Nach Mittelwertsatz gibt es ξ mit $0 < x \leq \xi \leq y$, so dass $\frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} = \ln'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ gilt.

$(*)$

Weiter ist

$$1 - \frac{x}{y} = \frac{y}{y} - \frac{x}{y} = \frac{y-x}{y} \quad \text{und}$$

$$\frac{y}{x} - 1 = \frac{y}{x} - \frac{x}{x} = \frac{y-x}{x}. \quad \text{Somit ist}$$

$$1 - \frac{x}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{x}\right) \overset{\text{Logarithmus-}}{\underset{\text{gesetz}}{=}} \ln(y) - \ln(x) \leq \frac{y}{x} - 1$$

äquivalent zu $\frac{1}{y} \leq \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} \leq \frac{1}{x}$.

Wegen $x \leq \xi$ und $\xi \leq y$ ist $\frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{\xi}$.

Mit $(*)$ folgt $\frac{1}{y} \leq \underbrace{\frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x}}_{= \frac{1}{\xi}} \leq \frac{1}{x}$,

was äquivalent zur Ungleichung ist ($y - x > 0$ wird hier benutzt!).

4. Aufgabe

(a) Falsch: Wähle $a_n = \frac{1}{(-3)^n}$, dann hat

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}} = 3,$$ aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{(-3)^n}} \cdot \cancel{(-3)^n}$$ konvergiert nicht,

weil die Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

(b) Wahr: g ungerade $\Rightarrow$ g' gerade, denn

$$g'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-x-h)-g(-x)}{-h}$$

$$\overset{g \text{ ungerade}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-g(x+h)+g(x)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x).$$

Also ist $(f\cdot g')(-x) = f(-x)\cdot g'(-x)$

$$\underset{g' \text{ gerade}}{\overset{f \text{ ungerade}}{=}} -f(x)\cdot g'(x)$$

$$= -(f\cdot g')(x),$$

was zu zeigen war.

Alternative: Es ist $g(-x) = -g(x)$ und somit ist nach Kettenregel $(-1) \cdot g'(-x) = -g'(x)$, d.h. $g'(-x) = g'(x)$ ist eine gerade Funktion.

(c) Wahr: g ist stetig, also folgt die Aussage direkt aus dem Hauptsatz.

5. Aufgabe

(a) Wahr: GWS

(b) Falsch: Wähle f konstant, dann ist $f \circ g$ konstant, insbesondere stetig.

(c) Wahr: $i^{2016} = (i^4)^{504} = 1^{504} = 1$

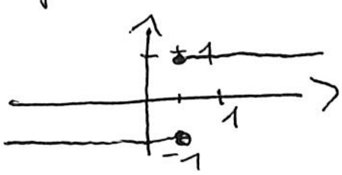
(d) Wahr: $1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$$\overset{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}{=} \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(e) Wahr: Siehe Definition, $a(t) := -\sin(t)$, $b(t) := \cos(t)$.

(f) Falsch: Beispiel 6.4.12. im Skript

(g) Falsch:



(h) Falsch: Wähle $f(x) = g(x) = x$, dann wäre $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ↯