Projet Labyrinthe

Tianwen GU, Hongfei ZHANG, Safidy Vonintsoa

Mars 2022

1 PARTIE THÉORIQUE

1.1 Définition

1.1.1 pseudo-labyrinthe

On considère une grille rectangulaire de taille $n \times m$. Le bord du rectangle est appelé *enceinte*, chaque case est appelée une *cellule*. Des murs peuvent être placés sur le côté des cellules. On appelle un ensemble *enceinte+murs* un *pseudo-labyrinthe*

1.1.2 labyrinthe

Pour être un labyrinthe, un pseudo-labyrinthe doit vérifier deux conditions :

(1) l'espace à l'intérieur de l'enceinte est connexe : il existe toujours un chemin entre deux cellules données,

(2) si l'on rajoute un mur où que ce soit, alors il perd sa connexité.

1.2 Questions

1.2.1 tous les pseudo-labyrinthes de taille 2 × 2

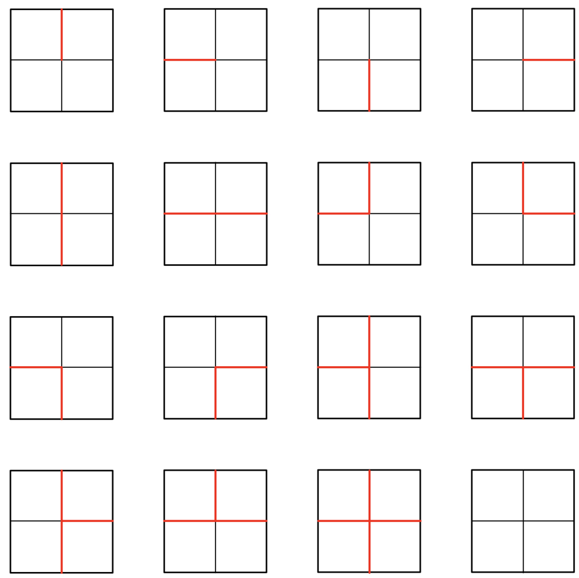

FIGURE 1 – tous les pseudo-labyrinthes de taille 2 × 2

1.2.2 Quel est le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille n × m ?

On utilise (n, m) pour représenter le nombre de colonnes et le nombre de lignes

Raisonnement : Pour les colonnes : il y $n + 1 - 2 = n - 1$ colonnes à l' intérieur des enceintes. Ainsi, il y a $m(n - 1)$murs suivants les colonnes. De même, pour les lignes : il y a $m + 1 - 2 = m - 1$ lignes à l' intérieur des enceintes. Ainsi, il y a $n(m - 1)$ murs suivants les lignes.

Donc le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille n × m est : $m(n - 1) + n(m - 1)$.

1.2.3 Si m = 1, combien existe-t-il de pseudo labyrinthe de taille n × 1 ?

première méthode Pour nombre de ligne m = 1, le nombre maximal de murs dans le pseudo-labyrinthe est $n-1$.

Alors, les pseudo-labyrinthes sont obtenus à partir de la somme des cas possibles : si on prend 0 murs parmi $n-1$, si on prend 1 mur parmi $n-1$,$\cdots$, si on prend $n-1$ murs parmi $n-1$. Donc, le nombre de pseudo-labyrinthes qui existe est égale à : $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$

deuxière méthode Pour les $n-1$ murs, on a deux choix : soit oui (il y a un mur), soit non. Le nombre de pseudo-labyrinthes est égale à $2\times\ldots\times 2(n-1)$ fois. Donc on a le nombre de pseudo-labyrinthes est égale à : 2^{n-1}

1.2.4 Observez les cas m = 2 et m = 3 et donnez la formule générale pour le nombre de pseudo labyrinthe de taille n × m en justifiant votre réponse.

Pour m = 2, Si on prend par exemple , n = 1 En comptant, le nombre de pseudo-labyrinthe est : $2 = 2^1$, or le nombre de murs maximal est $m(n-1)+n(m-1) = 2\times 0 + \times(2-1) = 1$.

De même, pour m = 3, Si on prend par exemple , n = 1 En comptant, le nombre de pseudo-labyrinthe est : $4 = 2^2$, or le nombre de murs maximal est $m(n-1)+n(m-1) = 3\times(0)+1\times(2) = 2$.

Ainsi, On remarque que la formule générale pour le nombre de pseudo labyrinthe de taille n × m est :$2^{m(n+1)+n(m-1)}$

Justification : En utilisant la deuxième méthode de la question **1.2.3** , dans un cas générale, le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille n × m est : $m(n-1)+n(m-1)$.Donc, le nombre de pseudo labyrinthe de taille n × m est :$2^{m(n+1)+n(m-1)}$

1.2.5 tous les labyrinthes de taille 3 × 2

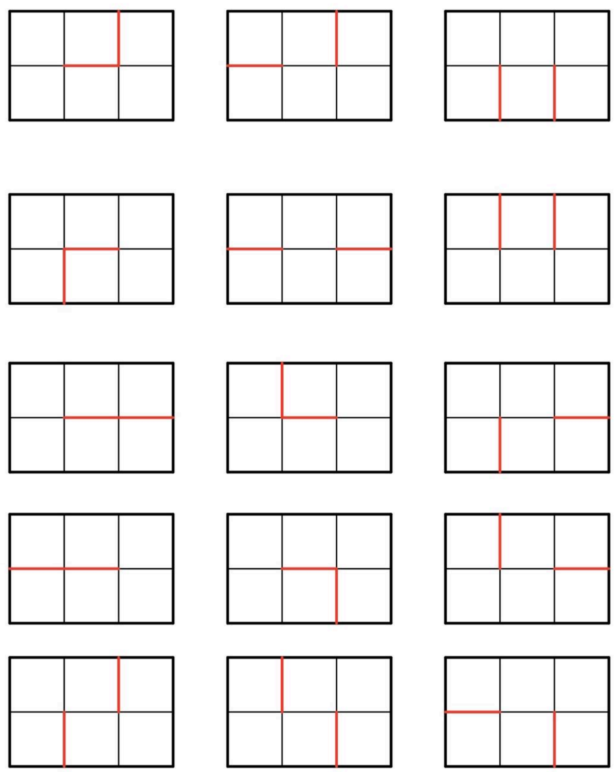

FIGURE 2 – tous les labyrinthes de taille 3 × 2

1.2.6 En comptant les murs de chacun de ces labyrinthes, que remarquez-vous ?

En regardant tous les labyrinthes de 3 × 2, on constate que tous les labyrinthes ont et n'ont que deux murs au milieu du labyrinthe.Donc nous conjecturons que pour toute taille de labyrinthe, il y a un nombre fixe de murs.

1.2.7 Soit L un labyrinthe, on suppose que la sortie se trouve dans la cellule en haut à gauche. Prouvez que si je choisis une cellule *c* quelconque de L, alors il existe un unique chemin qui va de *c* à la sortie sans passer plus d'une fois sur chacune des cases (il faut prouver que ce chemin existe et qu'il est unique).

Montrons qu'il existe un chemin entre c et la sortie. Il évident par la définition du labyrinthe(1).

Montrons que le chemin est unique : Soit L un labyrinthe. Supposons par l'absurde que il existe deux chemins qui va de *c* à la sortie sans passer plus d'une fois sur chacune des cases. Nous nommons que les deux chemins sont *c1* et *c2*, et *c1* admet plus de étapes que *c2*. Nous prenons la partie de *c1*, *c1** tel que *c1* contient de *c1** mais *c2* ne contient pas *c1**. On ajoute un mur dans *c1**. Alors chemin *c1* est bloqué. Mais chemin *c2* marche toujours. Par la définition du labyrinthe(2), nous aboutissons une contradiction, donc labyrinthe n'admet qu'une unique chemin qui va de *c* à la sortie sans passer plus d'une fois sur chacune des cases.

1.2.8 En utilisant le résultat précédent, il est possible de prouver que pour un labyrinthe de taille n × m, il existe exactement n × m − 1 bordures entre cellules qui ne sont pas des murs (on ne vous demande pas la preuve). Un pseudo-labyrinthe possédant le ”bon”nombre de murs est-il toujours un labyrinthe ? Conjecturez des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe.

Un pseudo-labyrinthe avec $n \times m - 1$ bordures qui ne sont pas des murs n'est pas nécessairement un vrai labyrinthe, c'est seulement une condition nécessaire et insuffisante pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe. Par exemple, nous pouvons avoir une ligne droite à l'intérieur remplie de murs, et le reste des murs placés au hasard, et il est évident qu'il ne s'agit pas d'un vrai labyrinthe : l'ensemble du pseudo-labyrinthe est séparé en deux parties par ce mur, et nous ne pouvons pas trouver de chemin à travers les deux extrémités du mur.

Par conséquent, nous devons trouver une condition suffisante et nécessaire pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un vrai labyrinthe. Après avoir observé de nombreux labyrinthes, nous avons conclu que, tout d'abord, le nombre de murs doit être respecté et qu'il est impossible de trouver un chemin à partir de n'importe quelle grille qui ramène à l'origine. Seul un pseudo labyrinthe qui satisfait à ces deux conditions peut être considéré comme un vrai labyrinthe.