**Universidad Nacional Autónoma de México**

****

**Facultad de Ingeniería**

**Geofísica matemática y computacional**

**Transferencia de calor en 1D utilizando diferencias finitas**

**López Garrido Josué**

**Martínez Pérez José Antonio**

**Rodriguez Mendoza Alban Alexis**

Derivado de estudios sobre termodinámica se sabe que el intercambio de energía ocurre debido a interacciones de un sistema con su alrededor. Estas interacciones son conocidas como *“trabajo”* y *“calor”*. Sin embargo, la termodinámica se ocupa de los estados finales del proceso durante el cual se produce una interacción y no proporciona información sobre la naturaleza de la interacción o la tasa de tiempo a la que ocurre.

En esta ocasión se trabajará con la transferencia de calor en un cuerpo en el que se presentan diferentes condiciones.

Pero primero definiremos que es la transferencia de calor. La transferencia de calor es la energía térmica que se transmite a través del espacio que divide a dos temperaturas diferentes. Mientras exista una diferencia de temperaturas en un medio o entre medios diferentes, la transferencia de calor ocurrirá.

Existen tres diferentes formas en las que puede transferirse el calor.

La primera de ellas se conoce como *“conducción”*. Este se refiere a la transferencia de calor que ocurre a través del medio en el que se presentan diferentes temperaturas*. E*ste tipo de transferencia se da en cuerpos sólidos o líquidos.

La segunda forma se conoce como *“convección”.* Este se refiere a la transferencia que ocurre entre una superficie y un fluido en movimiento debido a la diferencia de temperaturas.

La tercera forma se conoce como *“radiación térmica”.* Esta es generada a través de la transferencia de calor debido a ondas electromagnéticas.

Para motivos del siguiente proyecto, nos enfocaremos en la transferencia de calor por conducción.

**Descripción del modelo conceptual**

Cuando se habla de conducción se piensa inmediatamente en conceptos a nivel atómico y actividad molecular, debido a que los procesos que ocurren a este nivel sostienen este modo de transferencia de calor. La conducción ocurre cuando se transfiere energía desde las partículas con mayor energía hacia las partículas de menor energía, siempre y cuando existan interacciones entre ambas.

Las altas temperaturas están asociadas con las moléculas de mayor energía. Cuando las moléculas vecinas colisionan entre sí, ocurre la transferencia de energía. En presencia de un gradiente de temperatura la energía se transfiere por conducción en la dirección en la que la temperatura va decreciendo

El proceso de transferencia de calor puede ser cuantificado usando en términos apropiados las ecuaciones de cambio. Estas ecuaciones son usadas para determinar la cantidad de energía que se transfiere por unidad de tiempo. Para la conducción de calor, la ecuación de cambio es conocida como *“Ley de Fourier”.* Para un plano unidimensional, la distribución de temperaturas *T(x)* puede ser expresada como:

El flujo de calor es el calor transferido en la dirección x por unidad de área perpendicular al a dirección en la que ocurre la transferencia, y es proporcional al gradiente de temperatura *dT/dx* en esa dirección. El parámetro es una propiedad de transferencia conocido como conductividad térmica (W/m K) y es característico de cada material. El signo negativo es una consecuencia de que el calor se transfiere en la dirección en la que la temperatura decrece.

Bajo condiciones de estado estacionario, el gradiente de temperatura puede expresarse como:

Y, por tanto, el flujo de calor sería:

**Descripción del modelo matemático general de conducción de calor en estado estacionario**

Para obtener un modelo matemático para nuestro sistema partiremos de la ecuación fundamental del modelado de sistemas termodinámicos y de transferencia de calor.

Esta ecuación involucra balances de energía tanto interna como cinética. La ecuación anterior, podemos dividirla entre obteniendo:

Si se considera un caso especial de isotropía de esfuerzos ocurre que:

Donde es la matriz identidad y p (x, y) es una función escalar de la presión. Usando notación índice se puede escribir como:

Sabiendo que la energía cinética se transforma en energía interna, se puede expresar lo siguiente:

De acuerdo con la ecuación de continuidad se tiene que:

Sustituyendo en la ecuación (5)

Y al reescribirla:

Para algunos procesos termodinámicos, se asume una presión constante (proceso isobárico) por lo que la densidad y la energía interna dependen únicamente de la temperatura, esto es rho(T) y U(Y), por lo que la ecuación (..) se puede escribir como:

Que a su vez se puede escribir como:

o

Donde cp es el calor específico a presión constante definido como:

Para obtener el modelo completo para la temperatura es necesario expresar el vector q en términos de la distribución de la temperatura, definido con ayuda de la Ley de Fourier.

Sustituyendo en la ecuación (13)

Esta ecuación describe la transferencia de calor en cualquier medio. Como en nuestro caso consideramos un estado estacionario (independiente del tiempo) la ecuación se modifica como:

Y si se considera que la conductividad térmica es constante se tiene que:

Donde y representa una fuente o sumidero de energía calorífica.

**Descripción del modelo numérico**

Nuestro modelo numérico está basado en el modelo matemático previamente descrito, y nos permite obtener el comportamiento del sistema para diferentes condiciones de operación y diferentes parámetros de diseño, el modelo numérico se encarga de la reestructuración y discretización de las ecuaciones que gobiernan el sistema para después ser resueltas de manera computacional.

Se planeta un modelo determinístico, estático y de tiempo discreto, es decir, entradas fijas producen las mismas salidas, no contempla al tiempo como factor determinante para la evolución del sistema y los cambios de estados del sistema se dan en momentos discretos dado que se procesará computacionalmente.

*Consideraciones generales.*

El estudio de todo fenómeno físico puede realizarse planteando el problema como un Problema de Valor de Contorno Inicial (PVCI), en el que se emplean las ecuaciones que caracterizan el estado y comportamiento del fenómeno, que son unas ecuaciones en deriva

das parciales, y unas condiciones iniciales y de contorno que caracterizan los límites del problema y su evolución temporal

En la actualidad los métodos mas empleados para este fin son:

* Método de diferencias finitas. (MDF)
* Método de elementos finitos. (MEF)
* Método de los elementos de contorno (MEC)
* Método de los volúmenes finitos. (MVF)

El método de diferencias finitas trata de crear una aproximación de la temperatura para un punto determinado en un tiempo determinado, es decir, para todo el

dominio espacio-temporal.

Una vez claro el dominio en el que se va a estudiar la ecuación de calor, se discretizara. Hecho esto, será posible encontrar una aproximación de ut y ∆u, a poder ser del mismo

orden, para hallar la temperatura en el dominio discretizado dado. La temperatura

resultante acaba dependiendo de la de los puntos más próximos, que coincide con

la idea intuitiva que se tiene de conducción o del flujo de temperatura en un dominio.

En los casos que se revisan los métodos convergerán a una solución y darán lugara sistemas lineales que se solucionaran con métodos básicos.

Conociendo las hipótesis del problema de Dirichlet, es decir la temperatura en la

frontera y una condición inicial de la temperatura sobre todo el dominio, se propone

utilizarlas para encontrar la temperatura para cada punto de un dominio.

Si es una función de con derivadas finitas y continuas, entonces por el teorema de Taylor se tiene que:

y

Al sumar (17) y (18) obtenemos:

Donde denota los términos que contienen potencias de h de orden 4 o mayor. Asumiendo que estos términos son pequeños en relación con las potencias menores de h, se sigue que:

con un error de orden .

La ecuación (20) aproxima la pendiente de la tangente en el punto () mediante la pendiente de una recta que pasa por los puntos y .

Esta aproximación se conoce como aproximación por diferencia central. También se puede aproximar la pendiente de la tangente en por la pendiente de la recta que pasa por los puntos y , obteniendo la aproximación por diferencias regresivas:

o por la pendiente de la recta que pasa por los puntos y , obteniendo la aproximación por diferencias progresivas