Complementi di Algebra 1

Evan Chen

4 ottobre 2022

Indice

§1 Insiemi di generatori

Definizione 1.1. Dati un gruppo G e $x_1, \ldots, x_n$ elementi di G, chiamiamo **sottogruppo generato** da $x_1, \ldots, x_n$ il più piccolo sottogruppo $\langle x_1, \ldots x_n \rangle$ di G contenente $x_1, \ldots, x_n$, cioè

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq H}} H$$

Osservazione 1.2 — La definizione è ben posta, infatti l'intersezione avviene su una famiglia non vuota di insiemi dal momento che G è un sottogruppo di G contenente $x_1, \ldots, x_n$. Inoltre l'intersezione non è vuota in quanto contiene almeno l'identità e gli elementi $x_1, \ldots, x_n$.

La definizione data non dà informazioni su come sono fatti gli elementi di $\langle x_1, dots, x_n \rangle$, cerchiamo quindi di caratterizzare in modo diverso tale sottogruppo. In quanto sottogruppo, $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ deve contenere tutti i prodotti finiti, in qualsiasi ordine, delle potenze di $x_1, \ldots, x_n$, cioè deve contenere l'insieme

$$\{g_1^{\pm 1}, \ldots, g_r^{\pm 1} \mid r \in, g_i \in \{x_1, \ldots, x_n\} \; \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}$$