

【文章编号】 1004-1540(2006)01-0040-04

# 不同雷诺数下方柱绕流的数值模拟

刘 宇, 苏中地

(中国计量学院 计量技术工程学院, 浙江 杭州 310018)

**【摘 要】** 在不同雷诺数条件下, 对流体绕经方形柱体的流动进行了数值模拟, 计算雷诺数分别为  $100, 1 \times 10^3, 1 \times 10^4$  和  $2.2 \times 10^4$ . 当  $Re=100$  时, 直接采用  $N-S$  方程进行计算; 当  $Re=1 \times 10^3, 1 \times 10^4$  和  $2.2 \times 10^4$  时, 则引入  $k-\epsilon$  湍流模型进行计算. 应用 Galerkin 有限元法对控制方程进行离散和求解, 利用分离时间步长法处理控制方程中的非线性项. 模拟计算得出了在不同雷诺数下的卡门涡街脱落形态. 方柱后尾涡的形态会随雷诺数的变化而产生一定的变化. 当雷诺数较低时, 尾涡会拖得比较长, 随着雷诺数的增加, 尾涡长度会随之缩短. 计算得到了方柱的受力系数和 Strouhal 数. 将计算结果与文献上的实验和计算结果进行了比较, 两者吻合较好.

**【关键词】** 雷诺数; Galerkin 有限元法; 卡门涡街; 受力系数; Strouhal 数

**【中图分类号】** O357.5

**【文献标识码】** A

## Numerical simulation of flow around square cylinders at different Reynolds numbers

LIU Yu, SU Zhong-di

(College of Metrological Technology & Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Flow around a square cylinder is numerically simulated at different Reynolds numbers. The Reynolds numbers of computation are selected to be  $100, 1 \times 10^3, 1 \times 10^4$  and  $2.2 \times 10^4$ . For the lower Reynolds number,  $Re = 100$ ,  $N-S$  equations are directly used in the simulation. For the higher Reynolds numbers,  $Re = 1 \times 10^3, 1 \times 10^4$  and  $2.2 \times 10^4$ , a  $k-\epsilon$  based model of turbulence is applied to solve the turbulent problem. Variational form of the numerical system is discretized with the Galerkin finite element method and non-linear coupling terms in the equations are treated separately at different fractional time steps, by an operator-splitting time-stepping method. The shedding modes of the Karman vortex streets after the cylinder at different Reynolds numbers were calculated out. When the Reynolds number is smaller, the forming length of the vortex in the near wake of the cylinder is longer. Increased Reynolds number results in shortened forming length. The force coefficients and the Strouhal number are calculated out and compared with the previous experimental and numerical data. These results are in good agreement.

**Key words:** Reynolds number; Galerkin finite element method; Karman vortex streets; force coefficients; Strouhal number

**【收稿日期】** 2005-12-26

**【作者简介】** 刘 宇(1981—), 男, 辽宁葫芦岛人, 硕士研究生. 主要研究方向为计算流体力学.

钝体绕流问题广泛存在于桥梁工程、海洋工程、兵器工业工程和现代宇航工程等工程科学领域中。例如,海洋平台、斜拉桥、原子能反应堆中的换热器等都存在类似的流体与结构相互作用的情况。当流体以一定的速度流过柱形钝头物体时,会在物体尾部形成规则的旋涡脱落,即著名的卡门涡街。方柱是一种典型的钝头柱体,关于方柱绕流问题的研究一直是流体力学领域的热点问题之一。关于方柱绕流问题的实验研究也已进行得相当广泛,有很多作者通过实验的方式对方柱绕流流场和柱体受力情况进行了测量,如 Lyn *et al*<sup>[1]</sup>, Norberg<sup>[2]</sup>, Bearman & Obasaju<sup>[3]</sup> 等。大量的实验数据为我们提供了重要的对比依据。

数值模拟是解决钝体绕流问题的一种有效手段,许多作者用数值的方法研究了方柱绕流问题,可诸见于文献[4~12]。王广超<sup>[4]</sup>等采用非均匀格子 Boltzmann 方法模拟了雷诺数为 100 的方柱绕流流场,模拟得到了方柱后的卡门涡街脱落现象。Saha *et al*<sup>[5]</sup>则在二维模拟的基础上,进一步对低雷诺数下的方柱绕流进行了三维数值模拟。随着雷诺数的增大,流态将从层流变为湍流,于是各种不同的湍流模型被应用于流场的计算。 $k-\epsilon$  模型就是一种常用的湍流模型。基于 RNG  $k-\epsilon$  湍流模型,王远成和吴文远<sup>[6]</sup>对高雷诺数下钝体绕流进行了数值模拟,较好地模拟出了方柱后的涡街脱落。另外,大涡模拟 (Large-Eddy Simulation, LES) 和分离涡模拟 (Detached-eddy simulation DES) 也在近几年被相当广泛地应用于湍流模拟。Sohankar *et al*<sup>[7]</sup>对绕流雷诺数为  $2.2 \times 10^4$  的方柱绕流流场进行了大涡模拟,并对应用不同模型的计算结果进行了比较。Lo *et al*<sup>[8]</sup>应用 DES 湍流模型,数值研究了高雷诺数下的圆柱和方柱的绕流流场,计算雷诺数分别为  $1.4 \times 10^5$ ,  $3.6 \times 10^6$  和  $2.2 \times 10^4$ 。前人的计算结果都较好地反映了方柱绕流流场在相应的计算雷诺数下的流动特性,但往往都是在单个雷诺数下的计算,不能反映流场随雷诺数的变化规律。笔者将力求在不同的雷诺数下更全面地反映方柱绕流的特性,进而考察方柱绕流流场随雷诺数的变化规律。

笔者对雷诺数分别为 100,  $1 \times 10^3$ ,  $1 \times 10^4$  和  $2.2 \times 10^4$  的方柱绕流情况进行了数值模拟。计算

得到了绕流的速度场以及柱体上的受力参数。总结了方柱后的涡脱落形式和流场的动力学参数随雷诺数的变化规律,并将计算结果与前人的实验和计算结果进行了对比。

## 1 计算方法

计算区域为一  $60D \times 20D$  的矩形区域,如图 1 所示。上游长度为  $10D$ ,下游长度为  $50D$ 。流向速度和垂向速度分别定义为  $u$  和  $v$ 。

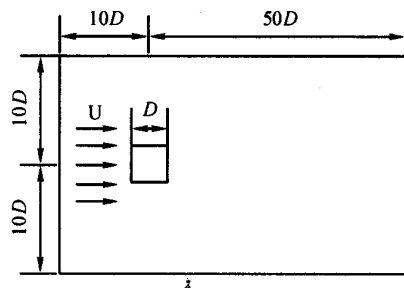


图1 计算模型

各边界条件分别为:

入口:给定无量纲速度,  $u = 1, v = 0$ 。

出口:给定无量纲压力  $p = 0$ ,速度采用  $\partial u / \partial x = 0, \partial v / \partial x = 0$ 。

固壁:采用无滑移边界条件,即  $u = 0, v = 0$ 。

上下边界:  $u = 1, v = 0$ 。

不可压缩牛顿流体运动的控制方程 N-S 方程可表示为:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

式(2)中  $\rho$  是流体的密度,  $\nu$  是流体的运动粘性系数。以上方程无量纲化后,引入雷诺数  $Re = UD/\nu$ ,  $U$  是流动的特征速度,  $D$  为流动的特征长度,即方柱的边长。

处理湍流问题时,引入平均 N-S 方程,将瞬时速度分解为平均速度与脉动速度之和,  $u_i = U_i + u'_i$ 。则得到如下的控制方程:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_i} \right) \quad (4)$$

采用  $k-\epsilon$  湍流模型来模拟高雷诺数下的绕流, 引入湍动能  $k$  和耗散比  $\epsilon$  的概念:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad (5)$$

$$\epsilon = \nu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 \quad (6)$$

$k$  和  $\epsilon$  的方程:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = G - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} G - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (8)$$

式(7)、(8)中,  $\nu_t$  称为流体的湍流运动粘性系数,  $G$  为湍流生成项.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^3}{\epsilon} \quad (9)$$

$$G = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

式(4)中的  $\overline{u_i' u_j'}$  可用  $k$  和  $\nu_t$  表示:

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

方程(7)、(8)、(9)中的各系数的取值为:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{\epsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\epsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$  和  $\sigma_\epsilon = 1.3$ .

采用 Galerkin 有限元法对上述各式进行离散, 利用分离时间步长法处理式中的非线性项进行. 计算采用六结点三角形非均匀网格, 方柱壁面附近采用较密集的网格, 最小网格间距为  $D/30$ . 总网格数在 49 000 以上, 此时可确保计算公差在 0.5% 以内.

## 2 计算结果与讨论

分别对雷诺数为 100,  $1 \times 10^3$ ,  $1 \times 10^4$  和  $2.2 \times 10^4$  时的情况进行了计算. 当  $Re = 100$  时, 直接采用  $N-S$  方程进行计算; 当  $Re = 1 \times 10^3$ ,  $1 \times 10^4$  和  $2.2 \times 10^4$  时, 则引入  $k-\epsilon$  湍流模型进行计算. 下面给出不同雷诺数下的计算结果.

图2给出了计算得到的涡线图. 在4个不同的雷诺数下, 都会在柱体的尾部出现规则的旋涡脱落, 尾涡交替的甩在方柱上下两侧的壁面上, 这就是著名的卡门涡街. 同时我们可以发现, 方柱后尾涡的形态会随雷诺数的变化而产生一定的变化. 当雷诺数较低时 ( $Re = 100$ ), 尾涡会拖得比较

长, 在方柱下游较远处才形成规则的涡街脱落; 随着雷诺数的增加 ( $Re = 1 \times 10^3, 1 \times 10^4, 2.2 \times 10^4$ ), 尾涡长度会随之变短, 从而在近壁区域就会出现规则的卡门涡街脱落.

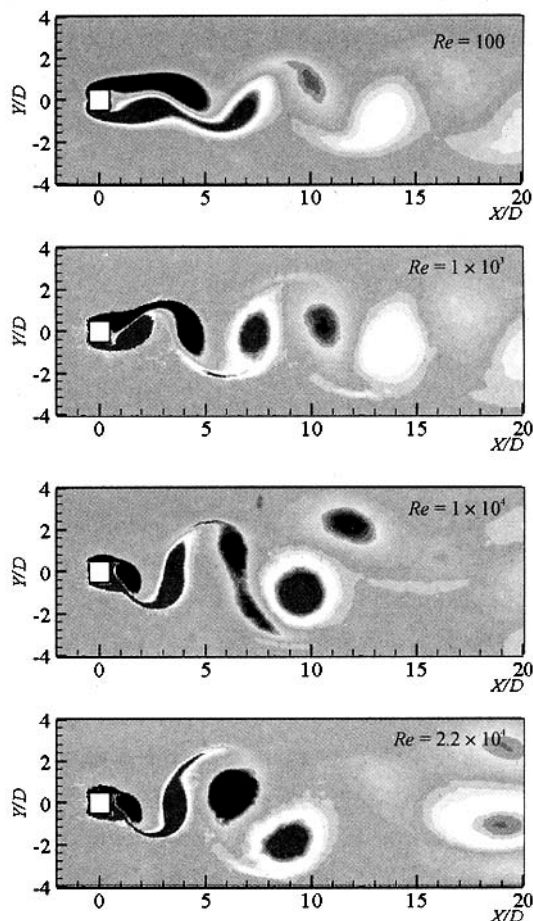


图2 不同雷诺数下的涡线图

计算得到了方柱上的阻力系数和升力系数. 阻力系数  $C_D$  与升力系数  $C_L$  的定义分别为:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho L^2 U^2}, \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho L^2 U^2} \quad (12)$$

式(12)中  $F_D$  和  $F_L$  分别为方柱所受的阻力和升力. 由于方柱后涡街脱落的存在, 使得方柱所受的阻力和升力都随时间脉动. 这里我们主要考察时间平均阻力系数  $\overline{C_D}$  和升力系数的均方差  $C_{L, RMS}$ . 另外还有一个重要的参数 Strouhal 数, 定义为:  $St = fD/U$ , 其中  $f$  为涡街脱落频率, 可见  $St$  即为方柱上涡街脱落的无量纲频率. 将升力系数的时域

过程作 Fourier 变换即可求得  $St$ . 计算得到的不同雷诺数下的各参数见表 1.

表 1 计算得到的一些方柱绕流参数

$Re$	$\overline{C_D}$	$C_{L\text{ RMS}}$	$St$
100	1.296	0.120	0.132
$1 \times 10^3$	1.774	0.942	0.133
$1 \times 10^4$	2.032	1.311	0.130
$2.2 \times 10^4$	2.192	1.380	0.127

将本次计算结果与前人的实验和计算的结果进行对比,并作出各绕流参数随雷诺数的变化曲线. 不同雷诺数下的时间平均阻力系数的变化曲线如图 3 所示.  $\overline{C_D}$  的模拟结果与前人的实验和计算结果基本一致. 由曲线变化趋势可知,在  $100 \leq Re \leq 2.2 \times 10^4$  的范围内,方柱的时间平均阻力系数随着雷诺数的增加而增加. 不同雷诺数下升力系数均方差的变化曲线如图 4 所示. 升力系数均方差同样随雷诺数的增大而增大,而且增长幅度较大,从  $Re = 100$  时的 0.120 变为  $Re = 2.2 \times 10^4$  时的 1.380. 可见,当流态逐渐由层流变为湍流后,流场的脉动将大幅度地增强.  $C_{L\text{ RMS}}$  的模拟结果在低雷诺数下与前人的实验和计算结果十分吻合,在高雷诺数下稍有差异,但主体曲线的走势吻合得较好. Strouhal 数随雷诺数的变化曲线如图 5 所示. 计算得到的 4 个不同雷诺数下的  $St$  差异不大,均在 0.13 左右,  $St$  的模拟结果与前人的实验和二维计算的结果基本一致,但低雷诺数下的计算结果与 Saha *et al*<sup>[5]</sup> 的三维模拟结果存在一定的差异,可见绕流的三维特性尚不能被轻易忽略.

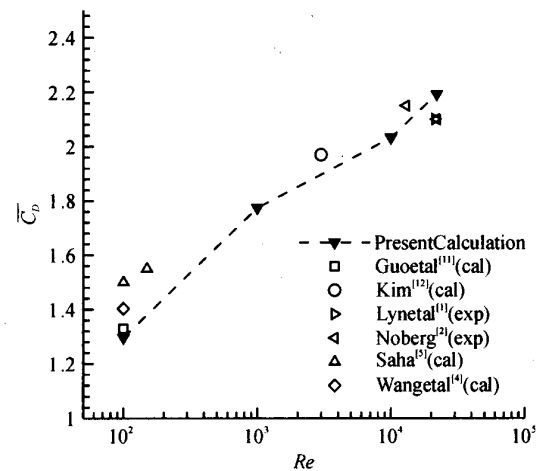


图 3 不同雷诺数下的时间平均阻力系数的变化曲线

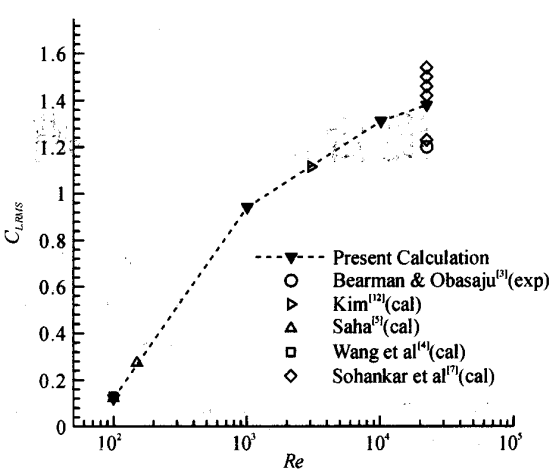


图 4 不同雷诺数下升力系数均方差的变化曲线

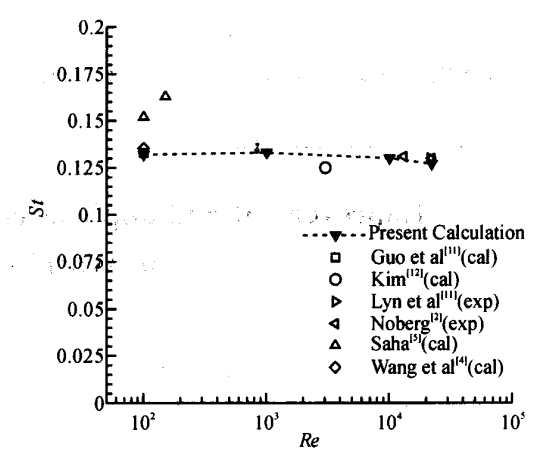


图 5 不同雷诺数下  $St$  的变化曲线

3 结束语

本文采用 Galerkin 有限元法对不同雷诺数下的方柱绕流进行了二维数值模拟. 成功的模拟出了不同雷诺数下方柱后的涡街脱落形态. 计算得到了不同工况下的流场动力学参数,并总结了绕流流态和各流场动力学参数随雷诺数的变化规律. 将计算结果与前人实验和计算的结果进行了对比,两者基本吻合. 由于二维计算忽略了流动的三维特性,使得模拟结果仍与真实的流动情况存在一定的差异. 但成功的二维模拟工作仍能在某种程度上满足实际工程问题的需要,并为进一步的三维模拟奠定了基础.

(下转第 49 页)

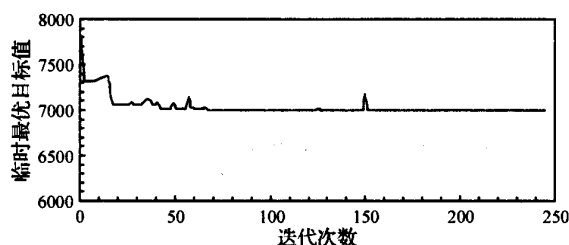


图4 例3寻优进程曲线

### 3 结 论

在总结前人工作的基础上,结合自己的编程实践,根据海洋工程优化问题的特点,提出了混合离散变量模拟退火算法(ASFHDV),在计算时不需要目标函数的梯度信息,也不要求函数值是正数(遗传算法<sup>[9]</sup>等启发式算法有此要求);为提高算法的性能,在普通模拟退火算法基础上增加了记忆和返回搜索功能;对离散变量的处理比较灵活,不必区分均匀和非均匀离散变量,操作简单;对约束的处理通过惩罚函数进行,在混合离散变

量优化问题中的应用比较简单易行,可在海洋工程实际中加以推广。

### 【参 考 文 献】

- [1] 陈立周. 工程离散变量优化设计方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989: 170—184.
- [2] 朱朝艳, 韩英仕, 张旭. 离散变量结构优化设计的研究进展与展望[J]. 辽宁工学院学报, 2001, 21(6): 38—39.
- [3] 孙文俊, 郭昌贵. 码头结构布局优化及其离散复合形算法[J]. 河海大学学报, 1997, 25(5): 18—23.
- [4] 康立山, 谢云, 尤矢勇, 等. 非数值并行算法·模拟退火算法[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 22—56.
- [5] 吴剑国, 赵莉萍, 王建华. 工程结构混合离散变量优化的模拟退火方法[J]. 工程力学, 1997, 14(3): 138—144.
- [6] 李文勇, 李泉水. 基于模拟退火的全局优化算法[J]. 桂林电子工业学院学报, 2001(2): 33—37.
- [7] 王晨曦. 工程结构的混合离散变量优化设计[J]. 长安大学学报, 2002, 122(15): 61—64.
- [8] 胡山鹰, 陈丙珍, 何小荣. 连续变量问题全局优化的模拟退火算法[J]. 系统工程理论与实践, 1995(9): 73—80.
- [9] 吴剑国, 徐昌文. 船舶结构混合变量优化的遗传算法[J]. 中国造船, 1998(1): 57—65.

(上接第43页)

### 【参 考 文 献】

- [1] LYN D A, RODI W. Phase-averaged turbulence measurements in the separated shear region of flow around a square cylinder [A]. Proc 23rd Cong Int. Ass Hydraulic Research [C]. 1989: 21—25, 85—92.
- [2] NORBERG C. Flow around rectangular cylinders: pressure forces and wake frequencies [J]. J Wind Eng Ind Aerodyne, 1993, 49: 187—196.
- [3] BEARMAN P W, OBASAJU E D. An experimental study of pressure fluctuation on fixed and oscillating square-section cylinders [J]. J Fluid Mech, 1982, 25: 481—494.
- [4] 王广超, 施保昌, 邓滨. 非均匀格子 Boltzmann 方法模拟方柱绕流[J]. 应用基础与工程科学学报, 2003, 11(4): 335—344.
- [5] SAHA A K, BISWAS G, MURALIDHAR K. Three-dimensional study of flow past a square cylinder at low Reynolds numbers [J]. Int J Heat Fluid Flow, 2003, 24: 54—66.
- [6] 王远成, 吴文远. 基于 RNG  $k-\epsilon$  湍流模型钝体绕流的数值模拟[J]. 上海理工大学学报, 2004, 26(6): 519—523.
- [7] SOHANKAR A, DAVIDSON L, NORBERG C. Large eddy simulation of flow past a square cylinder: comparison of different subgrid scale models [J]. J Fluids Eng, 2000, 122: 39—47.
- [8] LO S C, HOFFMANN K A, DIETIKER J F. Numerical investigation of high Reynolds number flows over square and circular cylinders [J]. J Thermophys Heat Transfer, 2005, 19(1): 72—80.
- [9] TAYLOR I, VEZZA M. Prediction of unsteady flow around square and rectangular section cylinders using a discrete vortex method [J]. J Wind Eng Ind Aerodyne, 1999, 82: 247—269.
- [10] LI C W, WANG L L. An immersed boundary finite difference method for LES of flow around bluff shapes [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2004, 46: 85—107.
- [11] GUO W B, SHI B C, WANG N C, et al. Lattice-BGK simulation of a two-dimensional channel flow around a square cylinder [J]. Chin Phys, 2003, 12(1): 67—74.
- [12] KIM D H, YANG K S, SENDA M. Large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder confined in a channel [J]. Computers & Fluids, 2004, 33: 81—96.