第 3 周

P24/5（用凸集分离定理）：

（I） $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x} \in R^n$

（II） $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{z} \in R^l$

证明：

若(I)有解 $\overline{\boldsymbol{x}}$，即 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} \le \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}} > 0$，(II)有解 $\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{y}} \\ \overline{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{y}} \ge \boldsymbol{0}$，则

$$0 = \overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^T\overline{\boldsymbol{y}} + (\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{x}})^T\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}} < 0$$

矛盾，所以(I)和(II)不同时有解。

设(II)无解。记 $S = \{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{z} \in R^l\}$，则 $\boldsymbol{c} \notin S$，并且 S 是闭凸锥。由凸集（与凸锥）分离定理，存在 $\boldsymbol{p} \in R^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，使

$$(\boldsymbol{Ap})^T\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{Bp})^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{z}) \le 0 < \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}, \forall \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{z} \in R^l \quad （1）$$

由（1）得 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} > 0$。

将 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ 代入（1）得

$$(\boldsymbol{Ap})^T\boldsymbol{y} \le 0, \forall \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$ 的分量可任意大，得到 $\boldsymbol{Ap} \le \boldsymbol{0}$（否则，假若 $\boldsymbol{Ap}$ 的第 i 个分量 $(\boldsymbol{Ap})_i > 0$，则取 $\boldsymbol{y}$ 的第 i 个分量 $y_i \to +\infty$，其余分量=0，那么由上式 $0 \ge (\boldsymbol{Ap})^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{Ap})_i y_i \to +\infty$，矛盾）。

将 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 代入（1）得

$$(\boldsymbol{Bp})^T\boldsymbol{z} \le 0, \forall \boldsymbol{z} \in R^l$$

由 $\boldsymbol{z}$ 的分量任意性，得到 $\boldsymbol{Bp} = \boldsymbol{0}$（否则，假若 $\boldsymbol{Bp}$ 的第 i 个分量 $(\boldsymbol{Bp})_i \ne 0$，不妨设 $(\boldsymbol{Bp})_i > 0$，则取 $\boldsymbol{z}$ 的第 i 个分量 $z_i \to +\infty$，其余分量=0，那么由上式 $0 \ge (\boldsymbol{Bp})^T\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{Bp})_i z_i \to +\infty$，矛盾）。

由此知 $\boldsymbol{p}$ 是(I)的解，即(I)存在解。

P24/6：

（I） $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x} \in R^n$

（II） $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in R^m$

证明：

方法一：用择一性定理

系统（I）等价于 $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x} \in R^n$，即 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x} \in R^n$。由 Farkas 定理知，与(I)对应的择一性系统为

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \in R^m$$

即 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in R^m$，即(II)。

方法二：用凸集分离定理

若(I)有解 $\overline{\boldsymbol{x}}$，即 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} \le \boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}} > 0$，(II)有解 $\overline{\boldsymbol{y}}$，即 $\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{y}} \ge \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{y}} \ge \boldsymbol{0}$，则

$$0 \le \bar{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}^T\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})^T\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}<0$$

矛盾，所以(I)和(II)不同时有解。

设(II)无解。记 $S=\{\boldsymbol{z}\in R^n \mid \boldsymbol{z}\le \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\in R^m\}$，则 $\boldsymbol{c}\notin S$，并且 S 是闭凸锥。由凸集（与凸锥）分离定理，存在 $\boldsymbol{p}\in R^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$，使

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}\le 0<\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p},\forall\boldsymbol{z}\in S \tag{1}$$

由（1）得 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}>0$。

当 $\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\in S$，代入（1）得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y})\le 0,\forall\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$ 的分量可任意大，得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}\le\boldsymbol{0}$（否则，假若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ 的第 i 个分量 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})_i>0$，则取 $\boldsymbol{y}$ 的第 i 个分量 $y_i\to+\infty$，其余分量=0，那么由上式 $0\ge(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})_i y_i\to+\infty$，矛盾）。

当 $\boldsymbol{y}$=$\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{z}\le\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$=$\boldsymbol{0}\in S$，代入（1）得

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}\le 0,\forall\boldsymbol{z}\le\boldsymbol{0}$$

由(1)中 $\boldsymbol{z}$ 的分量可任意小，得到 $\boldsymbol{p}\ge\boldsymbol{0}$（否则，假若 $\boldsymbol{p}$ 的第 i 个分量 $\boldsymbol{p}_i<0$，则取 $\boldsymbol{z}$ 的第 i 个分量 $z_i\to-\infty$，其余分量=0，那么由上式 $0\ge\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}=\boldsymbol{p}_i z_i\to+\infty$，矛盾）。

由此知 $\boldsymbol{p}$ 是(I)的解，即(I)存在解。

P24/8:

证明:

$$\begin{cases}x_1+3x_2<0\\3x_1-x_2<0\\17x_1+11x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_2<0\\3x_1-x_2<0\\-17x_1-11x_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}<0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\\-17&-11\end{pmatrix}$。与（1）择一的系统为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1+3y_2-17y_3=0\\3y_1-y_2-11y_3=0\\y_1,y_2,y_3\ge 0,\text{不全为零}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1{=}5y_3\\y_2{=}4y_3\\y_3>0\end{cases} \tag{2}$$

因为（2）有解，因此（1）无解。

第 4 周:

补充题 5:

证明: 任取 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in(0,1)$，记 $\bar{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda\boldsymbol{x}^2)$。

若 $f_1(\bar{\boldsymbol{x}})\le f_2(\bar{\boldsymbol{x}})$，则

$$\begin{aligned}&\max\{f_1,f_2\}(\bar{\boldsymbol{x}})=\max\{f_1(\bar{\boldsymbol{x}}),f_2(\bar{\boldsymbol{x}})\}=f_2(\bar{\boldsymbol{x}})\le\lambda f_2(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f_2(\boldsymbol{x}^2)\\&\le\lambda\max\{f_1(\boldsymbol{x}^1),f_2(\boldsymbol{x}^1)\}+(1-\lambda)\max\{f_1(\boldsymbol{x}^2),f_2(\boldsymbol{x}^2)\}\\&=\lambda\max\{f_1,f_2\}(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)\max\{f_1,f_2\}(\boldsymbol{x}^2)\end{aligned}$$

若 $f_1(\bar{\boldsymbol{x}})>f_2(\bar{\boldsymbol{x}})$，则同理可证

$$\max\{f_1,f_2\}(\bar{\boldsymbol{x}})\le\lambda\max\{f_1,f_2\}(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)\max\{f_1,f_2\}(\boldsymbol{x}^2)$$

因此 $\max\{f_1,f_2\}$ 是 S 上的凸函数.

补充题 6：

证明：（必要性）设 f 是 S 上的凸函数。任取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\y^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^2\\y^2\end{pmatrix}\in epi(f),\lambda\in(0,1)$，则

$$\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,y^1\ge f(\boldsymbol{x}^1),y^2\ge f(\boldsymbol{x}^2)$$

记 $\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}\\\bar{y}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\y^1\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^2\\y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\\\lambda y^1+(1-\lambda)y^2\end{pmatrix}$，则由 S 是凸集和 f 是 S 上的凸函数得

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\in S\\&\bar{y}=\lambda y^1+(1-\lambda)y^2\ge\lambda f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}^2)\ge f(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2))=f(\bar{\boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

即 $\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}\\\bar{y}\end{pmatrix}\in epi(f)$。因此，$epi(f)$ 是凸集。

（充分性）设 $epi(f)$ 是凸集。任取 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in(0,1)$，显然

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\f(\boldsymbol{x}^1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^2\\f(\boldsymbol{x}^2)\end{pmatrix}\in epi(f)$$

由 $epi(f)$ 是凸集知 $\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\f(\boldsymbol{x}^1)\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^2\\f(\boldsymbol{x}^2)\end{pmatrix}\in epi(f)$，即

$$\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\\\lambda f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}^2)\end{pmatrix}\in epi(f)$$

由 $epi(f)$ 定义得 $\lambda f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}^2)\ge f(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2)$。因此，$f$ 是 S 上的凸函数。

P24/9(1)： $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$

解： $\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1-2x_2+1\\-2x_1+2x_2+1\end{pmatrix}$，$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ 半正定但非正定，因此 f 凸函数但非严格凸函数。

P24/9(3)： $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2+e^{x_1+x_2}$

解： $\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2(x_1-x_2)+4x_2+e^{x_1+x_2}\\2(x_2-x_1)+4x_1+e^{x_1+x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x_1+x_2)+e^{x_1+x_2}\\2(x_1+x_2)+e^{x_1+x_2}\end{pmatrix}$，

$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2}\\2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2}\end{pmatrix}=(2+e^{x_1+x_2})\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$半正定，$f$凸函数。

P25/13:

证明:（反证）设 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in R^n$ 处具有全局极大值，假设存在 $\boldsymbol{x}^1\in R^n$，使 $f(\bar{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^1)$。取 $\boldsymbol{x}^2=2\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^1\in R^n$，则 $\bar{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)$。

若 $f(\boldsymbol{x}^2)>f(\boldsymbol{x}^1)$，则 $f(\bar{\boldsymbol{x}})\le\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2))<f(\boldsymbol{x}^2)$，与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是极大点矛盾。

若 $f(\boldsymbol{x}^2)\le f(\boldsymbol{x}^1)$，则 $f(\bar{\boldsymbol{x}})\le\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2))\le f(\boldsymbol{x}^1)$，与假设 $f(\bar{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^1)$ 矛盾。

因此，$f(\boldsymbol{x})=f(\bar{\boldsymbol{x}}),\forall\boldsymbol{x}\in R^n$，即 $f(\boldsymbol{x})$ 是常数。

P25/15:

证明:（反证）设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in R^n$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的严格局部极小点，即存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的 δ-邻域 $N(\bar{\boldsymbol{x}},\delta)$，使

$$f(\boldsymbol{x})>f(\bar{\boldsymbol{x}}),\forall\boldsymbol{x}\in S\bigcap N(\bar{\boldsymbol{x}},\delta)\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}\tag{1}$$

假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的严格全局极小点，则存在 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in S\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$，使 $f(\tilde{\boldsymbol{x}})\le f(\bar{\boldsymbol{x}})$。因为 f 是 S 上的拟凸函数，所以对任意的 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda\tilde{\boldsymbol{x}}+(1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}})\le\max\{f(\tilde{\boldsymbol{x}}),f(\bar{\boldsymbol{x}})\}=f(\bar{\boldsymbol{x}})\tag{2}$$

由于当 $\lambda>0$ 充分小时，$\lambda\tilde{\boldsymbol{x}}+(1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}}\in S\bigcap N(\bar{\boldsymbol{x}},\delta)\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$，由此知(2)与(1)矛盾。证毕。

P25/16:

证明: 设 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$。任取 $\boldsymbol{x}\in S$，由知，$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})=0$，根据 f 是伪凸函数得

$$f(\boldsymbol{x})-f(\bar{\boldsymbol{x}})\ge 0$$

由此知 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的全局极小点。证毕。

P35/1(2): 略

P35/1(4): 略