作业 P238：2、3、4、7(1)(2)、9、14、15

2. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式.

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代公式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$.

(2) $x^3=1+x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$.

(3) $x^2=\frac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

试分析各种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解：(1) 令 $\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}$. 则 $\varphi'(x)=-\frac{2}{x^3}$. $\therefore |\varphi'(x_0)|=\left|-\frac{2}{1.5^3}\right|=\frac{16}{27}<1$.

$\therefore$ 该迭代方法局部收敛.

(2) 令 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$. 则 $\varphi'(x)=\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$.

$\therefore |\varphi'(x_0)|=\left|\frac{2}{3}\times1.5\times(1+1.5^2)^{-\frac{2}{3}}\right|=\sqrt[3]{\frac{16}{169}}<1$.

$\therefore$ 该迭代方法局部收敛.

(3) 令 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. 则 $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$. $\therefore |\varphi'(x_0)|=\left|-\frac{1}{2}\times0.5^{-\frac{3}{2}}\right|=\sqrt{2}>1$

$\therefore$ 该迭代方法发散.

取第一种公式.则 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$. 初值 $x_0=1.5$，则 $x_1=1+\frac{1}{1.5^2}=1.444444$

$x_2=1+\frac{1}{1.444444^2}=1.479290$ $x_3=1+\frac{1}{1.479290^2}=1.456976$

$x_4=1.471081$ $x_5=1.462090$，$x_6=1.467791$，$x_7=1.464164$

$x_8=1.466467$ $x_9=1.465003$ $x_{10}=1.465932$

具有4位有效数字的近似根可取 $x^*=x_{10}=1.465932$

3. 比较求 $e^x+10x-2=0$ 的根到三位小数所需的计算量.

(1) 在区间[0,1]内用二分法.

(2) 用迭代法 $x_{k+1}=(2-e^{x_k})/10$. 取初值 $x_0=0$

解: (1) 使用二分法. 令 $f(x)=e^x+10x-2$. 则

$f(0)=-1$, $f(1)=e+8$. ∴ 有根区间为 $[0,1]$

$f(0.5)=e^{0.5}+3>0$ 有根区间为 $[0,0.5]$.

$f(0.25)=e^{0.25}+0.5>0$. 有根区间为 $[0,0.25]$.

$f(0.125)=e^{0.125}-0.75>0$. ∴有根区间为 $[0,0.125]$

$f(\frac{1}{16})=e^{\frac{1}{16}}-\frac{13}{8}=-0.5605<0$. ∴有根区间为 $[\frac{1}{16},\frac{1}{8}]$

$f(\frac{3}{32})=e^{\frac{3}{32}}-\frac{17}{16}=0.03578>0$. ∴有根区间为 $[\frac{1}{16},\frac{3}{32}]$

$f(\frac{5}{64})=e^{\frac{5}{64}}-\frac{39}{32}=-0.13749<0$. ∴有根区间为 $[\frac{5}{64},\frac{3}{32}]$

$f(\frac{11}{128})=e^{\frac{11}{128}}-\frac{73}{64}=-0.05089<0$. ∴有根区间为 $[\frac{11}{128},\frac{3}{32}]$

$f(\frac{23}{256})=e^{\frac{23}{256}}-\frac{141}{128}=-0.007559<0$. ∴有根区间为 $[\frac{23}{256},\frac{3}{32}]$

$f(\frac{47}{512})=e^{\frac{47}{512}}-\frac{277}{256}=0.01411>0$. ∴有根区间为 $[\frac{23}{256},\frac{47}{512}]$

$\cancel{\frac{23}{256}=0.089843}$ $\cancel{\frac{93}{1024}=0.090820}$

$\frac{23}{256}=0.089843$ $\frac{47}{512}=0.091796$ $\frac{93}{1024}=0.090820$

$f(\frac{93}{1024})=e^{\frac{93}{1024}}-\frac{559}{512}=0.003275>0$ ∴有根区间为 $[\frac{23}{256},\frac{93}{1024}]$

又 $\frac{185}{2048}=0.090332$ 与 $\frac{93}{1024}=0.090820$ 的前3位小数一样

∴ $x^*=0.090332$. 共进行了10次二分.

(2) 使用迭代法 $x_{k+1}=\frac{2-e^{x_k}}{10}$ 初值 $x_0=0$.

则 $x_1=\frac{2-e^0}{10}=0.1$，$x_2=\frac{2-e^{0.1}}{10}=0.089483$

$x_3=\frac{2-e^{0.089483}}{10}=0.090639$　　$x_4=\frac{2-e^{0.090639}}{10}=0.090513$

$\therefore x^*=x_4=0.090513$　共迭代4次

综上，使用二分法需进行10次二分，而迭代法只需迭代4次。

4. 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在且 $0<m\le f'(x)\le M$，证明对于范围 $0<\lambda<\frac{2}{M}$ 内的任意定数 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*。

证：迭代过程为 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ $\therefore$ 可令 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$

$\therefore \varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$　$\because 0<m\le f'(x)\le M$ 且 $0<\lambda<\frac{2}{M}$

$\therefore -1<\varphi'(x)<1$　即 $|\varphi'(x)|<1$ $\therefore$ 该迭代过程必定收敛

7. 用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根，根的准确值 $x^*=1.87938524\cdots$，要求计算结果准确到四位有效数字。

(1) 牛顿法　　(2) 用弦截法，取 $x_0=2$，$x_1=1.9$

解：(1) 根据牛顿法的公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k-1}{3x_k^2-3}=\frac{2x_k^3+1}{3x_k^2-3}$

有 $x_1=\frac{2\times2^3+1}{3\times2^2-3}=\frac{17}{9}=1.888889$，$x_2=\frac{2\times(\frac{17}{9})^3+1}{3\times(\frac{17}{9})^2-3}=\frac{10555}{5616}=1.879452$

$\because$ 根的准确值为 $x^*=1.87938524\cdots$ 已经准确到4位有效数字

$\therefore$ 迭代停止，取 $\tilde{x}=1.879452$

(2) 根据弦截法公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$

$=x_k-\frac{(x_k^3-3x_k-1)(x_k-x_{k-1})}{(x_k^3-3x_k-1)-(x_{k-1}^3-3x_{k-1}-1)}=\frac{x_kx_{k-1}(x_k+x_{k-1})+1}{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2-3}$

$\because x_0=2,\ x_1=1.9$ $\therefore$ 有 $x_3=\dfrac{1.9\times2\times(1.9+2)+1}{1.9^2+1.9\times2+2^2-3}=\dfrac{1582}{841}=1.881094$

$$x_4=\frac{\frac{1582}{841}\times1.9\times(\frac{1582}{841}+1.9)+1}{(\frac{1582}{841})^2+\frac{1582}{841}\times1.9+1.9^2-3}=\frac{1026542442}{546204321}=1.879411$$

计算结果已准确到 4位有效数字 $\therefore$ 迭代终止

取 $\hat{x}=1.879411$.

9. 研究求$\sqrt{a}$的牛顿公式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$, $x_0>0$

证明对一切 $k=1,2,\cdots$, $x_k\geq\sqrt{a}$ 且序列 $x_1,x_2,\cdots$ 是递减的

证: $\because x_0>0$, $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$ $\therefore x_k$ 必定大于0.

等式两边同减$\sqrt{a}$, 则有 $x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})-\sqrt{a}=\dfrac{x_k^2+a-2\sqrt{a}x_k}{2x_k}$

$=\dfrac{(x_k-\sqrt{a})^2}{2x_k}\geq0$ $\therefore$ 对于一切 $k=1,2,\cdots$ $x_k\geq\sqrt{a}$.

又 $x_{k+1}-x_k=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})-x_k=\dfrac{a-x_k^2}{2x_k}$ $\because x_k\geq\sqrt{a}$ $\therefore a-x_k^2\leq0$

$\therefore x_{k+1}-x_k=\dfrac{a-x_k^2}{2x_k}\leq0$ $\therefore$ 序列 $x_1,x_2,\cdots$ 是递减的

14. 应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$, 分别导出求$\sqrt[n]{a}$的迭代公式, 并求 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$

解: ① 对于 $f(x)=x^n-a=0$ 根据牛顿法公式有 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$=x_k-\dfrac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\dfrac{(n-1)x_k^n+a}{nx_k^{n-1}}=\dfrac{n-1}{n}x_k+\dfrac{a}{nx_k^{n-1}}$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2=\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-\frac{n-1}{n}x_k-\frac{a}{nx_k^{n-1}})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$

$\overset{\text{洛必达}}{=}\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(n-1)(a-x_k^n)}{-2(\sqrt[n]{a}-x_k)nx_k^n}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{-n(n-1)x_k^{n-1}}{-2n[n\sqrt[n]{a}x_k^{n-1}-(n+1)x_k^n]}$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(n-1)}{2[n\sqrt[n]{a}-(n+1)x_k]} \quad \because \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{a}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} (\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2 = \frac{n-1}{2[n\sqrt[n]{a}-(n+1)\sqrt[n]{a}]} = \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}}$$

② 对于 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$ 根据牛顿法公式有 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$= x_k - \frac{1-\frac{a}{x_k^n}}{n\frac{a}{x_k^{n+1}}} = x_k - \frac{x_k^{n+1}-ax_k}{na} = \frac{(n+1)ax_k - x_k^{n+1}}{na}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} (\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-\frac{(n+1)ax_k-x_k^{n+1}}{na}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{na\sqrt[n]{a}-(n+1)ax_k+x_k^{n+1}}{na(\sqrt[n]{a}-x_k)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{-(n+1)a+(n+1)x_k^n}{-2na(\sqrt[n]{a}-x_k)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{n(n+1)x_k^{n-1}}{2na} = \frac{(n+1)a^{\frac{n-1}{n}}}{2a} = \frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}.$$

15 证明迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.

假定初值 x_0 充分靠近根 x^*. 求 $\lim_{k\to\infty} (\sqrt{a}-x_{k+1})/(\sqrt{a}-x_k)^3$.

解: 令 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$. 则 $\varphi(\sqrt{a})=\frac{\sqrt{a}\cdot 4a}{4a}=\sqrt{a}\neq 0$

$$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-6x^2(x^2+3a)}{(3x^2+a)^2}. \quad \varphi'(\sqrt{a})=\frac{6a\times 4a-6a\times 4a}{(4a)^2}=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{3(4x^3-12ax)(3x^2+a)^2-3(x^4-6ax^2+3a^2)\cdot 12x\cdot(3x^2+a)}{(3x^2+a)^4}$$

$$= \frac{3\times(4x^3-12ax)}{(3x^2+a)^2} - \frac{36(x^4-6ax^2+3a^2)\cdot x}{(3x^2+a)^3} \qquad \varphi''(\sqrt{a})=0$$

$$\varphi'''(x)=\frac{3\times(12x^2-12a)(3x^2+a)^2-3\times(4x^3-12ax)12x(3x^2+a)}{(3x^2+a)^4} - \frac{36(5x^4-18ax^2+3a^2)(3x^2+a)^3-36(x^5-6ax^3\ldots)}{(3x^2+a)^6}$$

$\varphi'''(\sqrt{a})\neq 0 \quad \therefore x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}(3x_k^2+a)-(x_k^3+3ax_k)}{(\sqrt{a}-x_k)^3\cdot(3x_k^2+a)}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{a}-x_k)^3}{(\sqrt{a}-x_k)^3(3x_k^2+a)}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3x_k^2+a}=\frac{1}{3(\sqrt{a})^2+a}=\frac{1}{4a}$$