DATE

P316. 2、3、4、5(1)、6、8、9

2. 用改进欧拉法和梯形法解初值问题

$$y' = x^2 + x - y, \quad y(0) = 0.$$

取步长 $h=0.1$，计算到 $x=0.5$，并与准确值 $y = -e^{-x} + x^2 - x + 1$ 相比较.

解：当 $x=0.5$ 时，准确值 $y = -e^{-0.5} + 0.5^2 - 0.5 + 1 \approx 0.143469340$

改进欧拉法：$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$

将 $f(x,y) = x^2 + x - y$ 带入，则 $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - y_n - h(x_n^2 + x_n - y_n)]$

$$= (1 - h + \frac{h^2}{2})y_n + \frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n) + (1+x_{n+1})x_{n+1}]$$

将 $x_0 = 0$，$y_0 = 0$，$\overset{x_1=0.1}{\text{代入}}$，得 $y_1 = 0.0055$

同理，可得 $y_2 = 0.0219275$，$y_3 = 0.050144388$.

$y_4 = 0.090930671$，$y_5 = 0.144992257$.

与准确值的误差为 $|y - y_5| = 0.15522917 \times 10^{-2}$

梯形法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

$\therefore y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - y_{n+1}]$

$\therefore y_{n+1} = \frac{2-h}{h+2}y_n + \frac{h}{h+2}[x_n(1+x_n) + x_{n+1}(1+x_{n+1})]$

将 $x_0 = 0$，$y_0 = 1$，$x_1 = 0.1$ 代入，得 $y_1 = 0.005238095$

同理，可得. $y_2 = 0.021405896$，$y_3 = 0.049367239$

$y_4 = 0.089903692$，$y_5 = 0.143722388$

与准确值的误差为 $|y - y_5| = 0.253048 \times 10^{-3}$

3. 用梯形法解初值问题 $\begin{cases} y'+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$. 证明其近似解为 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$，并证明当 $h\to 0$ 时，它收敛于原初值问题的准确解 $y=e^{-x}$。

解：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$.

将 $f(x,y)=-y$ 代入，有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[-y_n-y_{n+1}]$

$\therefore y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1}=\cdots=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1}y_0=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1}$.

$\therefore$ 用梯形公式求得的近似解为 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$.

以 h 为步长，经过 n 步之后的 x 为 nh. $\therefore n=\frac{x}{h}$.

当 $h\to 0$ 时，近似值 $\lim\limits_{h\to 0} y_n=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}}\right]^{\frac{2h}{2+h}\cdot\frac{x}{h}}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(e^{-1}\right)^{\frac{2h}{2+h}\frac{x}{h}}=e^{-x}$ $\therefore$ 收敛于准确解 $y=e^{-x}$.

4. 利用欧拉方法计算积分 $\int_0^x e^{t^2}dt$ 在点 $x=0.5, 1, 1.5, 2$ 的近似值。

解：令 $y=\int_0^x e^{t^2}dt$ 则 $y'=e^{x^2}$ 且 $y(0)=0$.

令步长 $h=0.5$. 根据欧拉方法的公式：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+0.5e^{x_n^2}$

$\therefore y(0.5)=y_1=y_0+0.5e^{x_0^2}=0.5$

$y(1)=y_2=y_1+0.5e^{x_1^2}=1.1420127$,

$y(1.5)=y_3=y_2+0.5e^{x_2^2}=2.5011536$,

$y(2)=y_4=y_3+0.5e^{x_3^2}=7.2450215$

DATE

5. 取 $h=0.2$，用四阶经典的龙格-库塔方法求解下列初值问题

$$\begin{cases} y'=x+y, & 0<x<1 \\ y(0)=1. \end{cases}$$

解：四阶 Rung-kutta 算法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$

其中 $K_1=f(x_n,y_n)=x_n+y_n$

$K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)=x_n+\frac{h}{2}+y_n+\frac{h}{2}(x_n+y_n)=\frac{h}{2}+(1+\frac{h}{2})(x_n+y_n)$

$K_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2)=x_n+\frac{h}{2}+y_n+\frac{h}{2}[\frac{h}{2}+(1+\frac{h}{2})(x_n+y_n)]=(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4})+(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4})(x_n+y_n)$

$K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)=(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{4})+(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{4})(x_n+y_n)]$.

$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$

$=y_n+\frac{h}{6}[(3h+h^2+\frac{h^3}{4})+(6+3h+h^2+\frac{h^3}{4})(x_n+y_n)]$

又 $h=0.2$ $\therefore y_{n+1}=0.2214x_n+1.2214y_n+0.0214$.

将 $x_0=0, y_0=1$ 代入，得 $y_1=1.2428$.

同理，得 $y_2=1.58363592$，$y_3=2.044212912688$

$y_4=2.65104165$ $y_5=3.436502$

$\because 0<x<1$ $\therefore$ 只计算到 $x_4=0.8$，$y_4=2.65104165$

6. 证明对任意参数 t，下列龙格-库塔公式是二阶的。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

证：将 K_2，K_3 进行二元 Taylor 级数展开

$$K_2 = f(x_n, y_n) + thf_x(x_n, y_n) + thf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)$$

$$K_3 = f(x_n, y_n) + (1-t)hf_x(x_n, y_n) + (1-t)hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3)$$

$$= y_n + \frac{h}{2}[2f(x_n, y_n) + hf_x(x_n, y_n) + hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)]$$

$$\therefore \varphi(\cdot) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f_x(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)$$

而 $\Delta(\cdot) = y'(x_n) + \frac{h}{2}y''(x_n)$

$$= f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}[f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n))]$$

$$\therefore \varphi(\cdot) - \Delta(\cdot) = O(h^2)$$

$\therefore$ 该龙格-库塔公式是二阶的。

8. 求隐式中点公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$ 的绝对稳定区间。

解：模型问题 $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $Re(\lambda) > 0$

$y_{n+1}=y_n+h\lambda\cdot\frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})$ $\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}y_n+\frac{h\lambda}{2}y_{n+1}$

$\therefore y_{n+1}=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}y_n$ $(h\lambda\neq 2)$

要使之绝对稳定，则 $|\varepsilon_{n+1}|=\left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right||\varepsilon_n|\leq|\varepsilon_n|$

$\therefore \left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right|\leq 1 \Rightarrow h\lambda<0,\ 2-h\lambda>0$

$\therefore h\lambda-2\leq 2+h\lambda\leq 2-h\lambda$ 或 $h\lambda-2\leq -2-h\lambda\leq 2-h\lambda$

$\therefore h>0$

$\therefore$ 绝对稳定区间为 $(0,\infty)$

9 对于初值问题 $y'=-100(y-x^2)+2x$，$y(0)=1$.

(1) 用欧拉法求解，步长 h 取什么范围的值，才能使计算稳定.

(2) 若用四阶龙格-库塔法计算，步长 h 如何选取？

(3) 若用梯形公式计算，步长 h 有无限制.

解：(1) 用欧拉法求解 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h\lambda y_n=(1+h\lambda)y_n$

要使计算稳定，则 $|\varepsilon_{n+1}|=|(1+h\lambda)\varepsilon_n|\leq|\varepsilon_n|$ 即 $|1+h\lambda|\leq 1$

而此题中 λ 取 -100 $\therefore |1-100h|\leq 1$ $0<h\leq 0.2$

$\therefore h$ 取 $(0,0.2]$ 时，计算稳定.

(2). 由于四阶龙格-库塔法的绝对稳定域为 $0<h<-2.78/\lambda$.

而此题中 λ 为 -100 $\therefore$ 步长 h 应满足 $0<h<-0.0278$

(3) 对梯形公式，$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

根据模型问题，可得 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(\lambda y_n+\lambda y_{n+1})$

$\therefore y_{n+1}=\dfrac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}y_n$. 要使之稳定，

则有 $\left|\dfrac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right|<1$ 解得，$0<h<\infty$

∴梯形法是A-稳定的，对步长h无限制。