第 7 周： P163 1/2),3,6(c 改为 c^T，c^T 改为 c），7/1)

P163 1/2):

原问题：$\begin{cases} \min -4x_1-5x_2-7x_3+\ x_4 \\ s.t.\quad x_1+\ x_2+2x_3-\ x_4\ge 1 \\ \quad -2x_1+6x_2-3x_3-\ x_4\ge 3 \\ \quad x_1+4x_2+3x_3+2x_4=-5 \\ \quad x_1,x_2,x_4\ge 0 \end{cases}$，对偶问题：$\begin{cases} \max w_1+3w_2-5w_3 \\ s.t.\quad w_1-2w_2+\ w_3\le -4 \\ \quad w_1+6w_2+4w_3\le -5 \\ \quad 2w_1-3w_2+3w_3=-7 \\ \quad -w_1-\ w_2+2w_3\le 1 \\ \quad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

P163/3:

(1)对偶问题：$\begin{cases} \min -2w_1-7w_2 \\ s.t.\quad w_1+\ w_2=10 \\ \quad w_2\le 7 \\ \quad -6w_1+5w_2\le 30 \\ \quad w_1-\ w_2\le 2 \\ \quad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

(2)作图（略），由图解法得最优解 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$，最优值 $z^*=-55$。在 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$，第 3、4 约束松，并且 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$>0，因此$\begin{cases} x_3=0,x_4=0 \\ x_1\quad -6x_3-x_4=-2 \\ x_1+x_2+5x_3-x_4=-7 \end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{x}^*=(-2,-5,0,0)^T$ 可行，因此 $\boldsymbol{x}^*=(-2,-5,0,0)^T$ 是原问题最优解，最优值 $z^*=-55$。

P164/6: (**c** 改为 $\boldsymbol{c}^T$，$\boldsymbol{c}^T$ 改为 $\boldsymbol{c}$)

原问题$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \quad \boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0} \end{cases}$，即$\begin{cases} \min \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} \\ s.t.\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \quad \boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0} \end{cases}$，对偶问题$\begin{cases} \max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{w} \\ s.t.\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{w}\le \boldsymbol{b} \end{cases}$。

$\boldsymbol{x}^0$ 是原问题的可行解，则 $\boldsymbol{x}^0$ 是对偶问题的可行解，并且原问题和对偶问题在 $\boldsymbol{x}^0$ 的目标值均为 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^0$。由对偶理论，$\boldsymbol{x}^0$ 是原问题的最优解。

P164 7/(1):

$$\begin{cases} \min 4x_1+6x_2+18x_3 \\ s.t.\quad x_1\quad +3x_3\ge 3 \\ \quad 6x_2+2x_3\ge 5 \\ \quad x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min 4x_1+6x_2+18x_3 \\ s.t.\ -x_1\quad -3x_3+x_4\quad =-3 \\ \quad -6x_2-2x_3\quad -x_5=-5 \\ \quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
	-4	-6	-18	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	-4	0	-6	0	-6	30

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1/3	0	1	-1/3	0	1
x_2	-2/3	1	0	2/3	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

原问题 $\boldsymbol{x}^*=(0,3,1)^T$，$z^*=36$。

第 8 周：P243 1,P392 1/2)3)，2（其中“一个”改为“所有”）

P243 1:

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{x_1+x_2}{3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2}，\text{则}\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{3-x_1^2-2x_1x_2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^2}\\ \dfrac{3-x_2^2-2x_1x_2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^2}\end{pmatrix}=0\Rightarrow \boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix};$$

$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}-1/9 & -1/18\\ -1/18 & -1/9\end{pmatrix}$负定，$\boldsymbol{x}^1$不是极小点，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{pmatrix}1/9 & 1/18\\ 1/18 & 1/9\end{pmatrix}$正定，$\boldsymbol{x}^2$是局部极小点。

P392 1/2):

$\bar{\boldsymbol{x}}\in S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le \boldsymbol{b},\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le \boldsymbol{b},\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e},x_j\ge 0,j=1,\cdots,n\}$，则

$$D(S,\bar{\boldsymbol{x}})=\{\boldsymbol{d}\mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{d}\le \boldsymbol{0},\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0},d_j\ge 0,\forall j:\bar{x}_j=0\}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}:\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}}<\boldsymbol{b}_2$。

P392/1(3):

$\bar{\boldsymbol{x}}\in S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{b},x_j\ge 0,j=1,\cdots,n\}$，则

$$D(S,\bar{\boldsymbol{x}})=\{\boldsymbol{d}\mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{d}\ge \boldsymbol{0},d_j\ge 0,\forall j:\bar{x}_j=0\}，$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}: \boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}}>\boldsymbol{b}_2$。

P392 2：其中"一个"改为"所有"

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2x_1+x_2-6\\ x_1+4x_2-2\\ -12\end{pmatrix}，\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$半正定，f 是凸函数。

$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$：$\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}-3\\3\\-12\end{pmatrix}$，起作用约束：$x_3\ge 0$

可行下降方向充要条件：$\begin{cases}-3d_1+3d_2-12d_3<0\\ d_1+d_2+d_3=0\\ d_3\ge 0\end{cases}$

注：若可微函数 f 是凸函数，则 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处下降方向充要条件是 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T\bar{\boldsymbol{d}}<0$。

证明：（必要性）设 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处下降方向，假设 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T\bar{\boldsymbol{d}}\ge 0$，则

$$f(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\bar{\boldsymbol{d}})\ge f(\bar{\boldsymbol{x}})+\lambda\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T\bar{\boldsymbol{d}}\ge f(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall\lambda>0$$

与 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处下降方向矛盾。

（充分性）设 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T\bar{\boldsymbol{d}}<0$，则知 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处下降方向。