第 1 周：

补充题 1：

解：设 $x_i=\begin{cases}1，投资第i个项目\\0，不投资第i个项目\end{cases}$，$i=1,\cdots,5$，则（以万元为单位）

利润作为目标：

$$\begin{aligned}&\max 0.1x_1+0.08x_2+0.12x_3+0.1x_4+0.18x_5\\&s.t.\quad 2.5x_1+x_2+3x_3+2x_4+3.5x_5\le 10\\&\qquad x_i\in\{0,1\},i=1,\cdots,5\end{aligned}$$

投资回报率作为目标：

$$\begin{aligned}&\max \frac{0.1x_1+0.08x_2+0.12x_3+0.1x_4+0.18x_5}{2.5x_1+x_2+3x_3+2x_4+3.5x_5}\\&s.t.\quad 2.5x_1+x_2+3x_3+2x_4+3.5x_5\le 10\\&\qquad x_i\in\{0,1\},i=1,\cdots,5\end{aligned}$$

补充题 2：

解：设 x_i—第 i 个季度的生产量，z_i：第 i 个季度末的库存量，$i=1,\cdots,4$，则

$$\begin{aligned}&\min\sum_{i=1}^{4}(f_i(x_i)+p_iz_i)\\&s.t.\quad z_i=z_{i-1}+x_i-c_i,i=1,\cdots,4\\&\qquad z_0=0\\&\qquad 0\le x_i\le b_i，z_i\ge 0,i=1,\cdots,4\end{aligned}$$

补充题 3：

解：设 x_{1ij}—酒店提供从第 i 天入住到第 j 天的 k 类房间数，　$1\le i\le j\le 7$，$k=\begin{cases}1，标准间\\2，商务间\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}&\max\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=i}^{7}R_{kij}x_{kij}\\&s.t.\quad 0\le x_{kij}\le d_{kij},k=1,2,1\le i\le j\le 7\\&\qquad\sum_{i,j:i\le l\le j}x_{kij}\le c_{kl},k=1,2,l=1,\cdots,7\end{aligned}$$

第 2 周：

P23/1(2):

证明：设 $\boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}x_1^1\\x_2^1\end{pmatrix},\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\end{pmatrix}\in S,\lambda\in[0,1]$，即

$$x_2^1\ge|x_1^1|,x_2^2\ge|x_1^2|$$

记 $\bar{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}\lambda x_1^1+(1-\lambda)x_1^2\\ \lambda x_2^1+(1-\lambda)x_2^2\end{pmatrix}$，由上式得（第 1 式乘$\lambda$加上第 2 式乘（1-$\lambda$）：

$$\bar{x}_2=\lambda x_2^1+(1-\lambda)x_2^2\ge\lambda|x_1^1|+(1-\lambda)|x_1^2|\ge|\lambda x_1^1+(1-\lambda)x_1^2|=|\bar{x}_1|$$

即 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 。因此，S 是凸集。

P23/1(3):

证明： $S=\{(x_1,x_2)^T\mid x_1^2+x_2^2\le 10\}=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T\mid\|\boldsymbol{x}\|\le\sqrt{10}\right\}$。

设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in[0,1]$，即 $\|\boldsymbol{x}^1\|\le\sqrt{10},\|\boldsymbol{x}^2\|\le\sqrt{10},\lambda\in[0,1]$，则

$$\|\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\|\le\lambda\|\boldsymbol{x}^1\|+(1-\lambda)\|\boldsymbol{x}^2\|\le\lambda\sqrt{10}+(1-\lambda)\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

因此 $\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\in S$ ，即 S 是凸集。

P24/2:

若 C 是凸集，则 $S=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\in C\right\}$ 是凸集。若 C 是锥，则 $S=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\in C\right\}$ 是锥。

证明：若 C 是凸集，设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in[0,1]$，则存在 $\boldsymbol{\rho}^1,\boldsymbol{\rho}^2\in C:\boldsymbol{x}^1=A\boldsymbol{\rho}^1,\boldsymbol{x}^2=A\boldsymbol{\rho}^2$ 。因为 C 是凸集，因此 $\boldsymbol{\rho}\triangleq\lambda\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}^2\in C$，得

$$\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2=\lambda A\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)A\boldsymbol{\rho}^2=A(\lambda\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}^2)=A\boldsymbol{\rho}\in S$$

因此 S 是凸集。

若 C 是锥，设 $\boldsymbol{x}\in S,\alpha\ge 0$，则存在 $\boldsymbol{\rho}\in C:\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{\rho}$ 。因为 C 是锥，因此 $\lambda\boldsymbol{\rho}\in C$，得

$$\alpha\boldsymbol{x}=\alpha A\boldsymbol{\rho}=A(\alpha\boldsymbol{\rho})\in S$$

因此 S 是锥。

P24/4:

证明：用归纳法。若 k=1,2，则由 $\boldsymbol{x}^i\in S,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i\in S$ 。

假设 k=m 时，由 $\boldsymbol{x}^i\in S,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}^i\in S$ 。

现设 k=m+1。

当 $\lambda_{m+1}=1$，则 $\lambda_i=0,i=1,\cdots m$， $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\boldsymbol{x}^i=\boldsymbol{x}^{m+1}\in S$；

当 $\lambda_{m+1}<1$，则

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\boldsymbol{x}^i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}^i+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1}=(1-\lambda_{m+1})\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1}=(1-\lambda_{m+1})\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i$ 。因为

$$\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\ge 0,\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}=\frac{1}{1-\lambda_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=\frac{1}{1-\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1})=1$$

因此由归纳假设知 $\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i\in S$，因此由 S 是凸集得

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\boldsymbol{x}^i=(1-\lambda_{m+1})\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1}\in S$$

由归纳法得结论对任意 k 成立。

补充题 4： 设 $S\subset R^n$ 非空，则 S 的凸包

$$convS=\left\{\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{x}^i\in S,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots,k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,k\text{正整数}\right\}$$

证明： 记 $\tilde{S}=\left\{\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{x}^i\in S,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots,k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,k\text{正整数}\right\}$，则要证 $convS=\tilde{S}$。

显然 $S\subset\tilde{S}$ 并易证 $\tilde{S}$ 是凸集，即 $\tilde{S}$ 是包含 S 的凸集，而 $convS$ 是包含 S 的最小凸集，因此 $convS\subset\tilde{S}$。

反之，设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\tilde{S}$，即存在正整数 k 和 $\boldsymbol{x}^i\in S,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots,k,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，使 $\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i$。因为 $\boldsymbol{x}^i\in S\subset convS,i=1,\cdots,k$，并且 $convS$ 是凸集，因此 $\boldsymbol{x}^i,i=1,\cdots,k$ 的凸组合 $\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i\in convS$。因此，$\tilde{S}\subset convS$。

由此得知 $convS=\tilde{S}$。