DATE

P48. 1、4、6、7、8、13、14、16

1. 当 $x=1,-1,2$ 时，$f(x)=0,-3,4$，求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

(1) 用单项式基底

解：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$。

则有 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\4\end{bmatrix}$。解得 $\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

∴用单项式基底求得的 $f(x)=-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}x^2$。

(2) 用拉格朗日插值基底

解：$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2}y_kl_k(x)=0l_0(x)-3l_1(x)+4l_2(x)=-3l_1(x)+4l_2(x)$

$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)\times(-1-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{6}=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

$l_2(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)\times(2+1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{3}=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}$

∴ $P_2(x)=-3l_1(x)+4l_2(x)=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$

(3) 用牛顿基底

解：$N_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$f[x_0]=0$，$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{-3-0}{-1-1}=\frac{3}{2}$

$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{4-(-3)}{2-(-1)}=\frac{7}{3}$，

$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{7}{3}-\frac{3}{2}}{2-1}=\frac{5}{6}$

∴ $N_2(x)=0+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x+1)=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$

综上，从3种方法得到的结果来看，这3种方法得到的多项式是相同的。

扫描全能王 创建

DATE

4. 设 x_j 为互异节点 $(j=0,1,\cdots,n)$ 求证:

(1) $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \quad (k=0,1,\cdots,n)$.

证: 令 $f(x)=x^k$, 若插值节点为 $x_j \ (j=0,1,\cdots n)$,

则 $f(x)$ 的 n 次插值多项式可以表示为 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$

$\because$ 插值余项 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\because k=0,1,\cdots,n \quad \therefore k<n+1 \quad \therefore f^{(n+1)}(\xi)=0$

$\therefore R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0$, 即 $f(x)=L_n(x)$

$\therefore$ 有 $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k$, $(k=0,1,\cdots,n)$

(2) $\sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k l_j(x) \equiv 0$, $(k=0,1,\cdots,n)$.

证: ~~∵ $(x_j-x)^k = \sum_{i=0}^{n} C_k^i x$~~ $\because (x_j-x)^k=\sum_{i=0}^{n} C_k^i x_j^i (-x)^{k-i}$

$\therefore \sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k l_j(x) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} C_k^i x_j^i (-x)^{k-i} l_j(x)$

$= \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i} \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x)\right)$

由(1)知, $\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x) \equiv x^i$, $i=0,1,\cdots n$

$\therefore \sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k l_j(x) = \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i} \cdot x^i = (x-x)^k = 0$

$\therefore \sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k l_j(x) \equiv 0$, $(k=0,1,\cdots,n)$

扫描全能王 创建

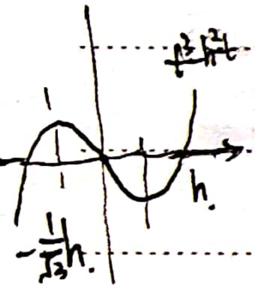
6. 在 $-4\le x\le 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问使用函数表的步长 h 应取多少？

解：采用分段二次插值，设其中一段的插值节点为 x_{i-1}, x_i, x_{i+1}，

则在该段上的插值余项为 $R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$，

$\because$ 是等距节点，$\therefore x_{i-1}+h=x_i=x_{i+1}-h$，

$\therefore R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_i+h)(x-x_i)(x-x_i-h)$，



$\because f^{(3)}(\xi)\le e^4$，$(x-x_i+h)(x-x_i)(x-x_i-h)=(x-x_i)^3-h^2(x-x_i)$，

令 $t=x-x_i$，则 $t^3-h^2t\le\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3$，当 $t=-\frac{1}{\sqrt{3}}h$ 时取得，$(-h<t<h)$

$\therefore |R_2(x)|\le\frac{1}{6}e^4\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3$，

$\because$ 截断误差不超过 10^{-6}，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$ $\quad\therefore h\le 0.0065$。

7. 证明 n 阶均差有下列性质

(1) 若 $F(x)=cf(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

证：$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

同理，$F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

扫描全能王 创建

$\because F(x)=cf(x)$ $\therefore F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{cf(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$=c\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}\right]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

$\therefore F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 得证

(2) 若 $F(x)=f(x)+g(x)$ 则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$.

证: $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$\because F(x)=f(x)+g(x)$

$\therefore F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)+g(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_n)}+\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_n)}$

$=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

$\therefore F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 得证

8. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$. 求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$

解. 构造一个函数 $\varphi(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)(t-x_0)\cdots(t-x_{j-1})(t-x_{j+1})\cdots(t-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}-f(t)$

$\therefore \varphi^{(n)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}-f^{(n)}(t)$

$\because \varphi(t)$ 有 $x_0,x_1,\cdots x_n$ 这 $n+1$ 个根. $\therefore \varphi^{(n)}(t)$ 必有根

假设 $\varphi^{(n)}(t)$ 的根为 ξ

则有 $\phi^{(n)}(\xi)=\sum_{j=0}^{n}\dfrac{n!f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}-f^{(n)}(\xi)=0$

$\therefore \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=\sum_{j=0}^{n}\dfrac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}=f[x_0,x_1,\cdots x_n]$

$\because f(x)=x^7+x^4+3x+1$

$\therefore f[x_0,x_1,\cdots x_7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\dfrac{7!}{7!}=1$、 其中 $x_i=2^i$，$i=0,\cdots,7$

$f[x_0,x_1,\cdots x_8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=\dfrac{0}{8!}=0$ 其中 $x_i=2^i$，$i=0,\cdots,8$

13. 求次数小于等于3的多项式 $P(x)$，使满足条件

$P(x_0)=f(x_0)$ $P'(x_0)=f'(x_0)$、 $P''(x_0)=f''(x_0)$ $P(x_1)=f(x_1)$

解：设 $P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+a(x-x_0)^3$

满足 $P(x_0)=f(x_0)$ $P'(x_0)=f'(x_0)$ $P''(x_0)=f''(x_0)$

根据 $P(x_1)=f(x_1)$ 求待定系数 a

$P(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2+a(x_1-x_0)^3=f(x_1)$

$\therefore a=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)-f'(x_0)(x_1-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2}{(x_1-x_0)^3}$

$\therefore$ 满足条件的 $P(x)$ 可以写成 $P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+a(x-x_0)^3$

其中 $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)-f'(x_0)(x_1-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2}{(x_1-x_0)^3}$

扫描全能王 创建

14 求次数小于等于3的多项式 $P(x)$，使其满足条件

$P(0)=0$，$P'(0)=1$，$P(1)=1$，$P'(1)=2$.

解：设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则 $P'(x)=b+2cx+3dx^2$，

将条件代入，有 $a=0$，$b=1$，$a+b+c+d=1$，$b+2c+3d=2$

$\therefore a=0$，$b=1$，$c=-1$，$d=1$

即 $P(x)=x-x^2+x^3$ 满足条件.

16 求一个次数不高于4次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0$

$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$.

解：$x_0=0$，$y_0=0$，$x_1=1$，$y_1=1$，$m_0=0$，$m_1=1$

$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1} y_j\alpha_j(x)+\sum_{j=0}^{1} m_j\beta_j(x)=\alpha_1(x)+\beta_1(x)$

其中 $\alpha_i(x)=(1-2(x-x_i)l_i'(x_i))l_i^2(x)$，$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$

$\cancel{l_0(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}=-x(x-1)}$ $\cancel{l_1(x)=\frac{x-}{x_1-x_0}}$

$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=-x+1$ $l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=x$

$\therefore \alpha_1(x)=(1-2(x-1)\cdot 1)\cdot x^2=3x^2-2x^3$

$\beta_1(x)=(x-1)\cdot x^2=x^3-x^2$

$\therefore H_3(x)=\alpha_1(x)+\beta_1(x)=-x^3+2x^2$

设 $P(x)=H_3(x)+A(x-x_0)^2(x-x_1)^2=Ax^2(x-1)^2-x^3+2x^2$

令 $P(2)=1$，则 $A\times 4\times 1^2-8+8=1$ $\therefore A=\frac{1}{4}$

$\therefore P(x)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2-x^3+2x^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$ 满足条件.

扫描全能王 创建