第 5 周：

P36 2/2)（补充：得最优解后求该解得检验数，判别是否满足最优性条件），**4**（选做），**P118 1/1)4)**写出初始单纯形表及对应的基可行解，判别是否为最优解。

P36 2/2)（补充：得最优解后求该解得检验数，判别是否满足最优性条件）

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

a) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_3=x_4=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(30,50,0,0)^T$，目标值-10

b) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_2=x_4=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基解 $\boldsymbol{x}^0=(5,0,25,0)^T$，目标值 15

c) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_4)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_2=x_3=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基解 $\boldsymbol{x}^0=(\text{-}15/2,0,0,25/2)^T$，不可行

d) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_4=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基解 $\boldsymbol{x}^0=(0,-10,30,0)^T$，不可行

e) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_4)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_3=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,10,0,10)^T$，目标值 110

f) $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$，$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_2=0\end{cases}$，得关于 $\boldsymbol{B}$ 的基可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,0,15,5)^T$，目标值 65

因已知该问题存在最优解，因此一定存在最优基可行解，因此 a)对应的基可行解为最优解，即最优解 $\boldsymbol{x}^*=(30,50,0,0)^T$，最优值-10。

补充：$\boldsymbol{x}^*=(30,50,0,0)^T$ 是关于 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$=$\begin{pmatrix}\text{-}1 & 1\\ 2 & \text{-}1\end{pmatrix}$的基可行解，因此 $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T$=(-2,1),$\boldsymbol{c}_N^T=(1,10),\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，检验数 $\boldsymbol{r}_N^T=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c}_N^T=$（-1,-12）$\le\boldsymbol{0}^T$，即满足最优性条件。

P36 4（选做）

分析：题目要求 $\boldsymbol{A}_1$ 满足：$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}_1$，$r(\boldsymbol{A}_1)=n$ 即 $\boldsymbol{A}_1$ 的 n 个行向量线性无关，因此先对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 进行行分块：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{A}''\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}'\\ \boldsymbol{b}''\end{pmatrix}:\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}',\boldsymbol{A}''\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{b}''$。只要 $r(\boldsymbol{A}')=n$（即列满秩），那么 $\boldsymbol{A}'$ 中就可以找到 n 个线性无关的行向量，这些行向量组成的矩阵就可以作为 $\boldsymbol{A}_1$。可以反证 $r(\boldsymbol{A}')=n$，即假设 $r(\boldsymbol{A}')<n$，则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，由此来构造 S 上两个不同点，并且 $\boldsymbol{x}^0$ 表示成这两个点的严格凸组成，那么就与 $\boldsymbol{x}^0$ 是极点矛盾了。

证明：

必要性：令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{A}''\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}'\\ \boldsymbol{b}''\end{pmatrix}:\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}',\boldsymbol{A}''\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{b}''$。下证 $r(\boldsymbol{A}')=n$。

否则 $r(\boldsymbol{A}')<n$，则存在 $\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，则当 $|\theta|>0$ 充分小时，

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}',\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y})>\boldsymbol{b}''$$

即当 $|\theta|>0$ 充分小时 $\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y}\in S$，$\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{x}^0-\theta\boldsymbol{y}$ 并且

$$\boldsymbol{x}^0=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}^0-\theta\boldsymbol{y})]$$

与 $\boldsymbol{x}^0$ 是 S 的极点矛盾，故 $r(\boldsymbol{A}')=n$。取 $\boldsymbol{A}'$ 中 n 个线性无关的行向量组成 $\boldsymbol{A}_1$，则 $\boldsymbol{A}_1$ 的秩为 n，$\boldsymbol{A}$ 中除 $\boldsymbol{A}_1$ 外余下部分记作 $\boldsymbol{A}_2$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，对应记 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^0\geq\boldsymbol{b}_2$。

充分性： 假设 $\boldsymbol{x}^0$ 不是 S 的极点，则存在 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2,\lambda\in(0,1)$，使 $\boldsymbol{x}^0=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^0=\lambda\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^2$，即

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}_1=\lambda(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1)+(1-\lambda)(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1)$$

因为 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0},\lambda>0,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1\geq\boldsymbol{0},1-\lambda>0,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1\geq\boldsymbol{0}$，因此

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_1$，与 $\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2$ 矛盾。

P118 1/1) 写出初始单纯形表及对应的基可行解，判别是否为最优解

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	右端项
x_3	1	4	1	0	80
x_4	2	3	0	1	90
检验数	9	16	0	0	0

对应的基可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,0,80,90)^T$，目标值 $z_0=0$，检验数没有都小于等于零，不是最优解。

P119 1/4) 写出初始单纯形表及对应的基可行解，判别是否为最优解

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0

对应的基可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,0,0,0,4,6,12)^T$，目标值 $z_0=0$，检验数没有都小于等于零，不是最优解。

第 6 周：

P118 1/1)4)（继续第 5 周求解），2/2）4)，6（补充:并且证明 c 与 d 的内积<0）

P118 1/1)（继续第 5 周求解）

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	右端项
x_3	1	4	1	0	80
x_4	2	3	0	1	90
检验数	9	16	0	0	0

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	右端项
x_2	1/4	1	1/4	0	20
x_4	5/4	0	-3/4	1	30
检验数	5	0	-4	0	-320

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	右端项
x_2	0	1	2/5	-1/5	14
x_1	1	0	-3/5	4/5	24
检验数	0	0	-1	-4	-440

$\boldsymbol{x}^* = (24,14,0,0)^T$， $z^* = -440$ 。

P118 1/4)（继续第 5 周求解）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	5	0	2	2	1	1	0	10
x_7	-2	0	1	3	-1	0	1	8
	-8	0	-3	1	-5	0	0	-20

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	19/3	0	4/3	0	5/3	1	-2/3	14/3
x_4	-2/3	0	1/3	1	-1/3	0	1/3	8/3
	-22/3	0	-10/3	0	-14/3	0	-1/3	-68/3

$\boldsymbol{x}^* = (0,4,0,8/3,0,14/3,0)^T$， $z^* = -68/3$ 。

P119 2/2):

$$
\begin{aligned}
&\min z = -2x_1 - x_2 \\
&s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
&\qquad -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
&\qquad 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
&\qquad x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	1	1	0	0	5
x_4	-1	1	0	1	0	0
x_5	6	2	0	0	1	21
	2	1	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2/3	1	0	-1/6	3/2
x_4	0	4/3	0	1	1/6	7/2
x_1	1	1/3	0	0	1/6	7/2
	0	1/3	0	0	-1/3	-7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	3/2	0	-1/4	9/4
x_4	0	0	-2	1	1/2	1/2

x_1	1	0	-1/2	0	1/4	11/4
	0	0	-1/2	0	-1/4	-31/4

$\boldsymbol{x}^* = (11/4, 9/4, 0, 1/2, 0)^T$， $z^* = 31/4$。

P119 2/4):

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 3x_2 + x_3 + My \\ s.t.\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + y = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\ & x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5, y \ge 0 \end{aligned}$$

	1 x_1	-3 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	M y	
1 x_3	2	-1	1	0	0	0	8
M y	2	1	0	-1	0	1	2
0 x_5	1	2	0	0	1	0	10
	2M+1	M+2	0	-M	0	0	2M+8

	1 x_1	-3 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	M y	
1 x_3	0	-2	1	1	0	-1	6
1 x_1	1	1/2	0	-1/2	0	1/2	1
0 x_5	0	3/2	0	1/2	1	-1/2	9
	0	3/2	0	1/2	0	-M-1/2	7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	-1	0	10
x_2	2	1	0	-1	0	2
x_5	-3	0	0	2	1	6
	-3	0	0	2	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5/2	0	1	0	1/2	13
x_2	1/2	1	0	0	1/2	5
x_4	-3/2	0	0	1	1/2	3
	0	0	0	0	-1	-2

$\boldsymbol{x}^* = (0, 5, 13, 3, 0)^T$， $z^* = -2$。

P120 6（补充:并且证明 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} < 0$）:

证明：令 $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_B \\ \boldsymbol{d}_N \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{d}_B = -\boldsymbol{p}_k^0 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k$， $d_k = 1, d_j = 0, j \in I_N \setminus \{k\}$，则

$$\boldsymbol{Ad}=\left(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{d_B}\\ \boldsymbol{d}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{Bd_B}+\boldsymbol{Nd}_N=-\boldsymbol{p}_k+\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}\text{，}\quad \boldsymbol{d}\geq\boldsymbol{0}$$

因此 $\boldsymbol{d}$ 是可行域的方向($\boldsymbol{d}$ 是可行域的方向当且仅当 $\boldsymbol{Ad}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{d}\geq\boldsymbol{0}$)

假设 $\boldsymbol{d}$ 不是可行域的极向，则存在可行域的不同方向 $\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2:\boldsymbol{Ad}^1=\boldsymbol{Ad}^2=0,\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2\geq\boldsymbol{0}$ 和 $a_1,a_2>0$，使 $\boldsymbol{d}=a_1\boldsymbol{d}^1+a_2\boldsymbol{d}^2$，则由 $a_1,a_2>0$ 和 $d_j^1,d_j^2\geq 0$ 得

$$0=d_j=a_1d_j^1+a_2d_j^2\Rightarrow d_j^1=d_j^2=0,\forall j\in I_N\setminus\{k\}$$

$$0=\boldsymbol{Ad}^1=\boldsymbol{Bd}_{\boldsymbol{B}}^1+d_k^1\boldsymbol{p}_k\Rightarrow\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}}^1=-d_k^1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k=d_k^1\boldsymbol{p}_k^0$$

因此 $\boldsymbol{d}^1=d_k^1\boldsymbol{d}$，同理 $\boldsymbol{d}^2=d_k^2\boldsymbol{d}$，因此 $\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2$ 同方向，矛盾。因此 $\boldsymbol{d}$ 是可行域的极向。

$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{d}_N=-\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k+c_k=-r_k<0$，故这时原问题无界。