第 9 周： P243 2(并作图），3，4，7

P243/2（并作图）：

图：略

$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}2(\bar{x}_1-3)\\2(\bar{x}_2-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$，起作用：第一个，$\nabla g_1(\bar{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}2\bar{x}_1\\2\bar{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$，$\nabla h_1(\bar{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$。

$\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}u_1-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}v_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{3}\ge 0\\ v_1=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$，因此 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 K-T 点。

P243/3：

K-T 条件：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}u_1-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u_2-\begin{pmatrix}-2(x_1-3)\\1\end{pmatrix}u_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ u_1(4-x_1-x_2)=0,u_2(x_2+7)=0,u_3(-(x_1-3)^2+x_2+1)=0\\ 4-x_1-x_2\ge 0,x_2+7\ge 0,-(x_1-3)^2+x_2+1\ge 0\\ u_1\ge 0,u_2\ge 0,u_3\ge 0\end{cases}$$

$$\overset{x_2+7>0\Rightarrow u_2=0}{\Rightarrow}\begin{cases}4+u_1+2u_3(x_1-3)=0\\ -3+u_1-u_3=0\\ u_1(4-x_1-x_2)=0,u_3(-(x_1-3)^2+x_2+1)=0\\ 4-x_1-x_2\ge 0,x_2+7\ge 0,-(x_1-3)^2+x_2+1\ge 0\\ u_1\ge 0,u_3\ge 0\end{cases}$$

当 u_1=0，则 $u_3=-3<0$

当 u_3=0，则 $u_1=-4<0$

当 $u_1,u_3>0$，则 $\begin{cases}4-x_1-x_2=0,\\ x_2+7\ge 0,\\ -(x_1-3)^2+x_2+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=16/3>0,\\ u_2=7/3>0\end{cases}$，因此 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=3\end{cases}$ 满足 K-T 条件。

P243/4：

对 $\boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$：可行，起作用：第一个约束。K-T 条件：

$\begin{cases}2(x_1-9/4)+2u_1x_1=0,\\ 2(x_2-2)-u_1=0,\end{cases}\overset{x_1=3/2,x_2=9/4}{\Rightarrow}u_1=1/2>0$，$\boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$ 是 K-T 点，原问题凸，$\boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$ 是最优解。

对 $\boldsymbol{x}^2=(9/4,2)^T$：不可行，不是最优解。

对 $\boldsymbol{x}^3=(0,2)^T$：可行，起作用：第三个约束。K-T 条件：

$$\begin{cases}2(x_1-9/4)+2u_1x_1=0,\\2(x_2-2)-u_1=0,\end{cases}\xrightarrow{x_1=0,x_2=2}\ u_1=-9/2<0$$，$\boldsymbol{x}^3=(0,2)^T$ 不是 K-T 点，不是最优解。

P244/7：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2\\ s.t.\quad x_1+x_2\ge 4\\ \qquad 2x_1+x_2\ge 5\end{cases}$$

K-T 条件：$\begin{cases}2x_1-u_1-2u_2=0\\2x_2-u_1-u_2=0\\u_1(x_1+x_2-4)=0,u_2(2x_1+x_2-5)=0\\x_1+x_2\ge 4,2x_1+x_2\ge 5\\u_1\ge 0,u_2\ge 0\end{cases}$

当 u_1=0，$u_2=0$，则 $\begin{cases}2x_1=0\\2x_2=0\\x_1+x_2\ge 4,2x_1+x_2\ge 5\end{cases}$，无解

当 u_1=0，$u_2>0$，则 $\begin{cases}2x_1-2u_2=0\\2x_2-u_2=0\\x_1+x_2\ge 4,2x_1+x_2=5\\u_2\ge 0\end{cases}$，无解

当 u_1>0，$u_2=0$，则 $\begin{cases}2x_1-u_1=0\\2x_2-u_1=0\\x_1+x_2=4,2x_1+x_2\ge 5\\u_1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=2\\u_1=4\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 是 K-T 点，原问题凸，$\boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 是最优解。

当 u_1>0，$u_2>0$，则 $\begin{cases}2x_1-u_1-2u_2=0\\2x_2-u_1-u_2=0\\x_1+x_2=4,2x_1+x_2=5\\u_1\ge 0,u_2\ge 0\end{cases}$，无解。

$\boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 唯一最优解，最优值=8，最小距离=$2\sqrt{2}$。

第 10 周：P244 5，11，P253 3，P280 1（有修改，见附件）

P244/5：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=x_1^2-x_2-3x_3\\ s.t.\quad g_1(\boldsymbol{x})=-x_1-x_2-x_3\ge 0\\ \qquad h_1(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2-x_3=0\end{cases}$$

Lagrange 函数：$L(\boldsymbol{x},u,v)=x_1^2-x_2-3x_3-u(-x_1-\ x_2-x_3)-v\ (x_1^2+2x_2-x_3)$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}L(\boldsymbol{x},u,v)=\begin{pmatrix}2x_1+u-2x_1v\\-1+u-2v\\-3+u+v\end{pmatrix}$$

K-T 条件：$\begin{cases}2x_1+u-2x_1v=0\\-1+u-2v=0\\-3+u+v=0\\u(x_1+x_2+x_3)=0\\x_1+x_2+x_3\le 0\\x_1^2+2x_2-x_3=0\\u\ge 0\end{cases}$

由方程 2、3 得 u=7/3>0，v=2/3，再由方程 1、4、6 得 $\bar{\boldsymbol{x}}$=(-7/2,-35/12,77/12)^T，此为 K-T 点。

$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2L(\bar{\boldsymbol{x}},u,v)=\begin{pmatrix}2/3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$I(\bar{\boldsymbol{x}})=\{1\}$，$G_1(\bar{\boldsymbol{x}})\cap H_0(\bar{\boldsymbol{x}})$：$\begin{cases}\nabla g_1(\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{d}=0\\\nabla h_1(\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{d}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-d_1-d_2-d_3=0\\-7d_1+2d_2-d_3=0\end{cases}$，

即 $\boldsymbol{d}=(d_1,2d_1,-3d_1)^T$

$\boldsymbol{d}^T\nabla_{\boldsymbol{x}}^2L(\bar{\boldsymbol{x}},u,v)\boldsymbol{d}=\dfrac{2}{3}d_1^2>0$，$\forall\boldsymbol{d}\in G_1(\bar{\boldsymbol{x}})\cap H_0(\bar{\boldsymbol{x}})\setminus\{\boldsymbol{0}\}$

因此 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是局部最优解。

P244/11

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}\\s.t.\quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\le 1\end{cases}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$ 是可行解，约束起作用，满足 K-T 条件：$\begin{cases}-\boldsymbol{b}+2u\bar{\boldsymbol{x}}=0\\u\ge 0\end{cases}$（$2u=\|\boldsymbol{b}\|\ge 0$），即 $\bar{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$ 是 K-T 点。

原问题凸规划，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$ 满足最优性的充分条件。

P253/3:

(1) $\gamma_k=\dfrac{1}{k}\to 0$，$\dfrac{|\gamma_{k+1}|}{|\gamma_k|}=\dfrac{k}{k+1}\to 1$，$\gamma_k=\dfrac{1}{k}\to 0$ 线性收敛。

(2) $\gamma_k=\left(\dfrac{1}{k}\right)^k\to 0$，$\dfrac{|\gamma_{k+1}|}{|\gamma_k|}=\dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\to 0$，并且 $\alpha>1$ 时 $\dfrac{|\gamma_{k+1}|}{|\gamma_k|^\alpha}=\dfrac{k^{\alpha k}}{(k+1)^{k+1}}\to\infty$，$\gamma_k=\left(\dfrac{1}{k}\right)^k\to 0$ 超线性收敛。

P280 1（有修改，见附件）

编程计算，略