第 13 周：P331 16,17,18, P392 3/1)（最优步长，迭代 2 次，判别最后得到的点是否最优解）

P331/16：

（1） $\boldsymbol{p}^1,\cdots,\boldsymbol{p}^n$ 线性无关，可作为 R^n 的基，因此 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{p}^i$，因此 $j=1,\cdots,n$ 时，

$$(\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n \alpha_i (\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i \overset{(\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i=0,i\neq j\text{时}}{=} \alpha_j (\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^j \Rightarrow \alpha_j=\frac{(\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{p}^j)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^j},$$

因此 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}\boldsymbol{p}^i$。

（2）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，$\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，则 $\boldsymbol{e}_j=\sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}\boldsymbol{p}^i=\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{p}^i)^T}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}\boldsymbol{a}_j$，因此

$$\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{p}^i)^T}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{p}^i)^T}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}\boldsymbol{A}$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{p}^i)^T}{(\boldsymbol{p}^i)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^i}$。

P331/17：

$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 K-T 点，因此，$\begin{cases}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{u}=0\\ \boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b})=0\\ \boldsymbol{u}\geq 0,\bar{\boldsymbol{x}}\geq \boldsymbol{b}\end{cases}\overset{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}}{\Rightarrow}\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b})=0$，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{A}$-共轭的。

P331/18：

$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2x_1\\6x_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$正定，$f$是凸函数。

k=1：$\boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{d}^1=-\boldsymbol{H}_1\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{d}^1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\lambda_1=-\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^T\boldsymbol{d}^1}{(\boldsymbol{d}^1)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{d}^1}=\frac{5}{13}$，

$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^1+\lambda_1\boldsymbol{d}^1=\begin{pmatrix}18/13\\-3/13\end{pmatrix}$。

k=2：$\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}18/13\\-3/13\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{pmatrix}36/13\\-18/13\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}^1=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1=\frac{5}{13}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}^1=\nabla f(\boldsymbol{x}^2)-\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\frac{10}{13}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_1+\frac{\boldsymbol{p}^1(\boldsymbol{p}^1)^T}{(\boldsymbol{p}^1)^T\boldsymbol{q}^1}-\frac{\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{q}^1(\boldsymbol{q}^1)^T\boldsymbol{H}_1}{(\boldsymbol{q}^1)^T\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{q}^1}=\frac{1}{650}\begin{pmatrix}493&-28\\-28&113\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{d}^2=-\boldsymbol{H}_2\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\frac{18}{650}\frac{169}{13}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{d}^2=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_2=-\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^2)^T\boldsymbol{d}^2}{(\boldsymbol{d}^2)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{d}^2}=\frac{3}{13}$，$\boldsymbol{x}^3=\boldsymbol{x}^2+\lambda_2\boldsymbol{d}^2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$。

k=3：$\boldsymbol{x}^3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^3)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}^3$ 是平稳点。又 f 是凸函数，因此 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^3$ 是最优解。

P392/3(1)：

$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2x_1-34\\8x_2-32\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$，原问题为凸规划。

k=1：$\boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}-32\\-16\end{pmatrix}$，起作用约束：2

确定方向：$\begin{cases}\min -32d_1-16d_2\\ s.t.\quad d_2\le 0\\ \qquad -1\le d_1,d_2\le 1\end{cases}$，得最优解$\boldsymbol{d}^1=(1,0)^T$，最优值$z_1=-32<0$。

确定步长：$\boldsymbol{x}^1+\lambda\boldsymbol{d}^1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\2\end{pmatrix}$ 满足约束 1、3、4，故 $2+2\lambda+2\le 6\Rightarrow\lambda\le 1=\lambda_{\max}$。

$\lambda_1=\min\left\{-\dfrac{\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^T\boldsymbol{d}^1}{(\boldsymbol{d}^1)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{d}^1},1\right\}=\min\{16,1\}=1$，$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^1+\lambda_1\boldsymbol{d}^1=(2,2)^T$。

k=2：$\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{pmatrix}-30\\-16\end{pmatrix}$，起作用约束：1,2

确定方向：$\begin{cases}\min -30d_1-16d_2\\ s.t.\quad 2d_1+d_2\le 0\\ \qquad\qquad d_2\le 0\\ \qquad -1\le d_1,d_2\le 1\end{cases}$，得最优解$\boldsymbol{d}^2=(0,0)^T$，最优值$z_2=0$。

$\boldsymbol{x}^2=(2,2)^T$是 K-T 点。因原问题为凸规划，$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^2=(2,2)^T$是最优解。

第 14 周：P392 4/1)（最优步长，迭代 2 次，判别最后得到的点是否最优解）, 6/1)（可视为 2 个变量，最优步长，迭代 2 次，判别最后得到的点是否最优解），8

P392/4(1):

$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2(x_1-3)(4-x_2)\\-(x_1-3)^2\end{pmatrix}$，$A_1=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&0\\0&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$

k=1：$\boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$，起作用约束：1,3

确定方向：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ 可逆，$P_{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}^1=-P_{\boldsymbol{M}}\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\boldsymbol{0}$，

$\boldsymbol{u}^1=\begin{pmatrix}u_1\\u_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T)^{-1}\boldsymbol{M}\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ 去掉第 2 行，$\bar{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}-1&-1\end{pmatrix}$，

$P_{\bar{\boldsymbol{M}}}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{d}^1=-P_{\bar{\boldsymbol{M}}}\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$。

确定步长：$\boldsymbol{x}^1+\lambda\boldsymbol{d}^1=\begin{pmatrix}1+2\lambda\\2-2\lambda\end{pmatrix}$ 满足约束 2,4,5，故 $\begin{cases}1+2\lambda\le 2\\1+2\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\le 1/2=\lambda_{\max}\\1-2\lambda\ge 0\end{cases}$，

$\min\limits_{0\le\lambda\le 1/2} f(\boldsymbol{x}^1+\lambda\boldsymbol{d}^1)=8(\lambda+2)(\lambda-1)^2\Rightarrow\lambda_1=1/2$，$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^1+\lambda_1\boldsymbol{d}^1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

k=2：$\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$，起作用约束：1、2

确定方向：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ 可逆，$P_{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}^2=-P_{\boldsymbol{M}}\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\boldsymbol{0}$。

$\boldsymbol{u}^1=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T)^{-1}\boldsymbol{M}\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=(1\ \ 5)^T\ge\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{x}^2=(2,1)^T$ 是 KT 点，并且满足二阶充分条件，因此 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^2=(2,1)^T$ 是局部最优解。

P393/6(1)：

问题：$\begin{cases}\min x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1+3x_2\\ s.t.\quad x_1+x_2\le 3\\ \qquad x_1+5x_2\le 6\\ \qquad x_1,x_2\ge 0\end{cases}$

$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2x_1-x_2-2\\-x_1+2x_2+3\end{pmatrix}$，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$正定

k=1：$\boldsymbol{x}^1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

确定方向：$\begin{cases}\min 2x_1+x_2\\ s.t.\quad x_1+x_2\le 3\\ \qquad x_1+5x_2\le 6\\ \qquad x_1,x_2\ge 0\end{cases}$，最优极点解 $\boldsymbol{y}^1=(0,0)^T$。于是 $\boldsymbol{d}^1=\boldsymbol{y}^1-\boldsymbol{x}^1=(-2,0)^T$，

$z_1=\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^T\boldsymbol{d}^1=-4<0$。

确定步长：$\lambda_1=\min\left\{-\dfrac{\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^T\boldsymbol{d}^1}{(\boldsymbol{d}^1)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{d}^1},1\right\}=\min\{1/2,1\}=1/2$，$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^1+\lambda_1\boldsymbol{d}^1=(1,0)^T$。

k=2：$\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，

确定方向：$\begin{cases}\min 2x_2\\ s.t.\quad x_1+x_2\le 3\\ \qquad x_1+5x_2\le 6\\ \qquad x_1,x_2\ge 0\end{cases}$，最优极点解 $\boldsymbol{y}^2=(0,0)^T$。于是 $\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{y}^2-\boldsymbol{x}^2=(-1,0)^T$，

$z_2=\nabla f(\boldsymbol{x}^2)^T\boldsymbol{d}^2=0$，$\boldsymbol{x}^2=(1,0)^T$ 是 K-T 点，原问题凸，所以 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^2=(1,0)^T$ 是最优解。

P393/8：

必要性：若 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是原问题的 K-T 点，则

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) - \sum\limits_{i \in I(\hat{\boldsymbol{x}})} u_i \nabla g_i(\hat{\boldsymbol{x}}) - \sum\limits_{j=1,\cdots,l} v_j \nabla h_j(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \\ u_i \ge 0, \forall i \in I(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{cases} \quad (1)$$

有解，由择一性知

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0 \\ -\nabla g_i(\hat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} \le 0, i \in I(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ -\nabla h_j(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0, j = 1, \cdots, l \end{cases} \quad (2)$$

无解。***d=0*** 是如下问题：

$$\begin{cases} \min \nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} \\ s.t. -\nabla g_i(\hat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} \le 0, i \in I(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ \quad -\nabla h_j(\hat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} = 0, j = 1, \cdots, l \\ \quad -1 \le d_j \le 1, j = 1, \cdots, n \end{cases} \quad (3)$$

的可行解，其目标值=0，因此（3）的最优值≤0。若（3）的最优值<0，则（2）有解，矛盾，因此（3）的最优值=0。

充分性：若（3）的最优值=0，则（2）无解，由择一性知（1）有解，即 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是原问题 K-T 点。