P209 1. 4. 6. 9

1. 设线性方程组
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

(1) 考察用雅可比迭代法，高斯-塞德尔迭代法解此方程组的收敛性

(2) 用雅可比迭代法、高斯-塞德尔迭代法解此方程组，要求

当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止

解：(1) 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\2&-3&10\end{bmatrix}$ 是严格对角占优矩阵，

∴ 使用 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代法都收敛。

(2) ① 使用 Jacobi 迭代法

$$D=\begin{bmatrix}5&&\\&4&\\&&10\end{bmatrix}\quad L=-\begin{bmatrix}0&&\\-1&0&\\2&-3&0\end{bmatrix}\quad U=-\begin{bmatrix}0&2&1\\&0&2\\&&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&0&2\\2&-3&0\end{bmatrix}\right)=-\begin{bmatrix}0&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&0\end{bmatrix}$$

$$f_J=D^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-12\\20\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{5}\\5\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$\therefore x^{k+1}=B_Jx^k+f_J$$

$$\therefore \begin{cases} x_1^{k+1}=-\frac{2}{5}x_2^k-\frac{1}{5}x_3^k-\frac{12}{5} \\ x_2^{k+1}=\frac{1}{4}x_1^k-\frac{1}{2}x_3^k+5 \\ x_3^{k+1}=-\frac{1}{5}x_1^k+\frac{3}{10}x_2^k+\frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代到17次可以满足精度.

有 $x^{(17)}=(-4.0000186,\ 2.9999915,\ 2.0000012)^T$.

② Gauss-Seidel 迭代法

$$D=\begin{bmatrix}5&&\\&4&\\&&10\end{bmatrix}\quad L=-\begin{bmatrix}0&&\\-1&0&\\2&-3&0\end{bmatrix}\quad U=-\begin{bmatrix}0&2&1\\&0&2\\&&0\end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{k}+(D-L)^{-1}b$$

$$=\begin{bmatrix}5&0&0\\-1&4&0\\2&-3&10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}x^{k}+\begin{bmatrix}5&0&0\\-1&4&0\\2&-3&10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-12\\20\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\\frac{1}{20}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{40}&\frac{3}{40}&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}x^{k}+\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\\frac{1}{20}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{40}&\frac{3}{40}&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-12\\20\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\0&-\frac{1}{10}&-\frac{11}{20}\\0&\frac{1}{20}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}x^{k}+\begin{bmatrix}-\frac{12}{5}\\\frac{22}{5}\\\frac{21}{10}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x_1^{k+1}=-\frac{2}{5}x_2^{k}-\frac{1}{5}x_3^{k}-\frac{12}{5}\\x_2^{k+1}=\frac{1}{4}x_1^{k+1}-\frac{1}{2}x_3^{k}+5\\x_3^{k+1}=-\frac{1}{5}x_1^{k+1}+\frac{3}{10}x_2^{k+1}+\frac{3}{10}.\end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$. 迭代到8次可以满足精度

$x^{(8)}=(-4.0000186,\ 2.9999915,\ 2.0000012)^T$

4. 设 $A=\begin{bmatrix}10 & a & 0\\ b & 10 & b\\ 0 & a & 5\end{bmatrix}$，$\det A\neq 0$，用 a,b 表示解线性方程组 $Ax=f$ 的雅可比迭代与高斯-塞德尔迭代收敛的充要条件.

解：$\det A = 500+0+0-0-5ab-10ab = 500-15ab\neq 0 \quad \therefore ab\neq \frac{100}{3}$

$D=\begin{bmatrix}10 & & \\ & 10 & \\ & & 5\end{bmatrix}$ $L=-\begin{bmatrix}0 & & \\ b & 0 & \\ 0 & a & 0\end{bmatrix}$ $U=-\begin{bmatrix}0 & a & 0\\ & 0 & b\\ & & 0\end{bmatrix}$

$\therefore B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & & \\ & \frac{1}{10} & \\ & & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -a & 0\\ -b & 0 & -b\\ 0 & -a & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{a}{10} & 0\\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10}\\ 0 & -\frac{a}{5} & 0\end{bmatrix}$.

$|\lambda E-B_J| = \begin{vmatrix}\lambda & \frac{a}{10} & 0\\ \frac{b}{10} & \lambda & \frac{b}{10}\\ 0 & \frac{a}{5} & \lambda\end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-\frac{3ab}{100}) \quad \therefore \rho(B_J)=\frac{\sqrt{3|ab|}}{10}$.

$\rho(B_J)=\frac{\sqrt{3|ab|}}{10}<1 \quad \therefore |ab|<\frac{100}{3} \quad \therefore$ Jacobi 迭代收敛的充要条件为 $|ab|<\frac{100}{3}$

$B_{G\text{-}S} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix}10 & & \\ b & 10 & \\ 0 & a & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -a & 0\\ 0 & 0 & -b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{a}{10} & 0\\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10}\\ 0 & -\frac{a^2b}{500} & \frac{ab}{50}\end{bmatrix}$

$\therefore |\lambda E-B_{G\text{-}S}| = \begin{vmatrix}\lambda & \frac{a}{10} & 0\\ 0 & \lambda-\frac{ab}{100} & \frac{b}{10}\\ 0 & \frac{a^2b}{500} & \lambda-\frac{ab}{50}\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-\frac{3ab}{100}) \quad \therefore \rho(B_{G\text{-}S})=\frac{3|ab|}{10}$

$\rho(B_{G\text{-}S})=\frac{3|ab|}{10}<1 \quad \therefore |ab|<\frac{100}{3}$

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代收敛的充要条件为 $|ab|<\frac{100}{3}$.

扫描全能王 创建

6 用雅可比迭代与高斯-塞德尔迭代解线性方程组 $Ax=b$，证明若取 $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$，则两种方法均收敛，试比较哪种方法收敛快？

解. $D=\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$ $L=-\begin{bmatrix}0&&\\0&0&\\-2&1&0\end{bmatrix}$ $U=-\begin{bmatrix}0&0&-2\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$

$\therefore B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

$|\lambda E-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\frac{2}{3}\\0&\lambda&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-\frac{11}{12})$ $\therefore \rho(B_J)=\sqrt{\frac{11}{12}}<1$

$\therefore$ Jacobi 迭代法收敛

$B_{G-S}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\-2&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{11}{12}\end{bmatrix}$

$|\lambda E-B_{G-S}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\frac{2}{3}\\0&\lambda&\frac{1}{2}\\0&0&\lambda-\frac{11}{12}\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-\frac{11}{12})$ $\therefore \rho(B_{G-S})=\frac{11}{12}<1$

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代法也收敛。

又 $\because \rho(B_J)=\sqrt{\frac{11}{12}}>\frac{11}{12}=\rho(B_{G-S})$ $\therefore$ Gauss-Seidel迭代法收敛更快

9 设有线性方程组 $Ax=b$，其中 A 为对称正定阵，迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+w(b-Ax^{(k)}),\quad k=0,1,2,\cdots$$

试证明当 $0<w<\frac{2}{\beta}$ 时上述迭代法收敛（其中 $0<\alpha\le\lambda(A)\le\beta$）

证：迭代公式可写为 $x^{(k+1)}=(I-wA)x^{(k)}+wb,\ k=0,1,2,\cdots$

$\therefore$ 迭代矩阵 $B=I-wA$．特征值为 $\mu=1-w\lambda(A)$．

$\because 0<\alpha\le\lambda(A)\le\beta$ $\quad\therefore\quad 1-w\beta\le\mu=1-w\lambda(A)\le1-w\alpha$．

又 $\because 0<w<\frac{2}{\beta}$ $\quad\therefore\quad 1-2<\mu<1-0$ 即 $|\mu|<1$

$\therefore\ \rho(B)<1$ $\quad\therefore$ 该迭代法在 $0<w<\frac{2}{\beta}$ 时收敛．