P135 1, 4, 5, 6, 8(1), 10, 13.

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

解：分别取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入，得

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1 = \int_{-h}^{h} 1dx = 2h \\ A_{-1}(-h)+A_0\cdot 0+A_1\cdot h = \int_{-h}^{h} xdx = 0 \\ A_{-1}(-h)^2+A_0\cdot 0^2+A_1\cdot h^2 = \int_{-h}^{h} x^2dx = \frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$ 解得： $$\begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{3}h \\ A_0=\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{1}{3}h \end{cases}$$

取 $f(x)=x^3$，则 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3dx = 0$

$A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h) = 0$ 满足 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$

取 $f(x)=x^4$，则 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4dx = \frac{2}{5}h^5$

而 $A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$，不满足 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$

∴ 具有3次代数精度

(2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

解：分别取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入，得

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1 = \int_{-2h}^{2h} 1dx = 4h \\ A_{-1}(-h)+A_0\cdot 0+A_1\cdot h = \int_{-2h}^{2h} xdx = 0 \\ A_{-1}(-h)^2+A_0\cdot 0^2+A_1\cdot h^2 = \int_{-2h}^{2h} x^2dx = \frac{16}{3}h^3 \end{cases}$$ 解得： $$\begin{cases} A_{-1}=\frac{8}{3}h \\ A_0=-\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{8}{3}h \end{cases}$$

取 $f(x)=x^3$，则 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^3dx = 0$

$A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h) = 0$，满足 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$

取 $f(x)=x^4$，则 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5}h^5$.

而此时 $A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=\frac{16}{3}h^5 \neq \frac{64}{5}h^5$

∴ 具有3次代数精度

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = [f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$.

解：分别取 $f(x)=x, x^2$，代入，得.

$$\begin{cases}(-1+2x_1+3x_2)/3 = \int_{-1}^{1} x dx = 0 \\ (1+2x_1^2+3x_2^2)/3 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\end{cases}$$ 解之得 $$\begin{cases}x_1=-0.2899 \\ x_2=0.5266\end{cases}$$ 或 $$\begin{cases}x_1=0.6899 \\ x_2=0.1266\end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$

而 $[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3 \neq 0$.

∴ 具有2次代数精度.

(4) $\int_0^h f(x)dx \approx h[f(0)+f(h)]/2 + ah^2[f'(0)-f'(h)]$

解：$f(x)=1$ 时，有 $\int_0^h f(x)dx = h = h\cdot[f(0)+f(h)]/2 + ah^2[f'(0)-f'(h)]$

$f(x)=x$ 时，有 $\int_0^h f(x)dx = \frac{1}{2}h^2 = h\cdot[0+h]/2 + ah^2\cdot[1-1]$

$f(x)=x^2$ 时，有 $\int_0^h f(x)dx = \frac{1}{3}h^3 = h\cdot[0+h^2]/2 + ah^2[0-2h] = \frac{1}{2}h^3 - 2ah^3$.

∴ 有 $a=\frac{1}{12}$.

$f(x)=x^3$ 时，有 $\int_0^h f(x)dx = \frac{1}{4}h^4$，右 $= h[0+h^3]/2 + \frac{1}{12}h^2[0-3h^2] = \frac{1}{4}h^4$

∴ 满足 $\int_0^h f(x)dx = h[f(0)+f(h)]/2 + ah^2[f'(0)-f'(h)]$

$f(x)=x^4$ 时，有 $\int_0^h f(x)dx = \frac{1}{5}h^5$，右 $= h[0+h^4]/2 + \frac{1}{12}h^2[0-4h^3] = \frac{1}{6}h^5$

$\frac{1}{5}h^5 \neq \frac{1}{6}h^5$ 不满足等式.

∴ 具有3次代数精度.

4. 用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差.

解: 根据辛普森公式, 可得

$$I_2(f)=\frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{1-0}{6}\left[e^0+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}\right]\approx 0.63233$$

误差 $|E_2(f)|=\left|-\frac{e^{-\eta}}{2880}(1-0)^5\right|=\frac{e^{-\eta}}{2880}\leq\frac{1}{2880}\approx 3.4722\times10^{-4}$.

5. 推导下列三种矩形求积公式.

(1). $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$.

解: 根据微分中值定理有 $f'(\eta)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\eta\in(a,x)$

即 $f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a)$.

对两边求积分, 有 $\int_a^b f(x)dx=f(a)(b-a)+f'(\eta)\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)-f'(\eta)\cdot a(b-a)$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2$. 得证.

(2) $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$.

解: 根据微分中值定理有 $f'(\eta)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, $\eta\in(x,b)$

即 $f(x)=f(b)+f'(\eta)(x-b)$

对两边求积分. 有 $\int_a^b f(x)dx=f(b)(b-a)+f'(\eta)\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)-f'(\eta)\cdot b(b-a)$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2$ 得证.

(3) $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$

解: 根据微分中值定理有 $f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$.

对两边求积分, 有 $\int_a^b f(x)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\Big|_a^b+\frac{f''(\eta)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$. 得证

6. 若用复合梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，问区间 $[0,1]$ 应分多少份才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$？若改用辛普森公式，要达到同样的精度，区间 $[0,1]$ 应分多少等分？

解：(1) 复合梯形：

根据复合梯形的余项公式，有 $E_n(f)=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)h^2=-\frac{e^\eta}{12}h^2$

$\therefore |E_n(f)|=\frac{e^\eta}{12}h^2\le\frac{e}{12}h^2$ 要使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$，

则 $\frac{e}{12}h^2\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$ $h\le\sqrt{\frac{6}{e}\times10^{-5}}$

$\therefore n>\sqrt{\frac{e}{6}\times10^{5}}\approx212.85$ $\therefore$ 应等分 213 份。

(2) 复合辛普森：

根据复合辛普森的余项公式，有 $E_n(f)=-\frac{f^{(4)}(\eta)}{180}(b-a)(\frac{h}{2})^4=\frac{-e^\eta}{2880}h^4$

$\therefore |E_n(f)|=\frac{e^\eta}{2880}h^4\le\frac{e}{2880}h^4$，要使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$

则 $\frac{e}{2880}h^4\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$ $h\le\sqrt[4]{\frac{1440}{e}\times10^{-5}}$

$\therefore n>\sqrt[4]{\frac{e}{1440}\times10^{5}}\approx3.71$ $\therefore$ 应等分 4 份。

8. 用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过 10^{-5}。

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$

解：$T_0^0=\frac{1-0}{2}(e^{-1}+e^0)\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\approx0.7717433$

$T_0^1=\frac{1}{2}\times\frac{1-0}{2}[e^0+2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}]\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\approx0.7280699$

$T_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{1-0}{4}[e^0+2(e^{-\frac{1}{4}}+e^{-\frac{1}{2}}+e^{-\frac{3}{4}})+e^{-1}]\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\approx0.7169828$

~~$T_0^3=\frac{1}{2}\times\frac{1-0}{8}$~~ 精确解 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x}\Big|_1^0\approx0.7132717$

扫描全能王 创建

∴ $T_1^0 = \frac{4T_0^1 - T_0^0}{3} \approx 0.7135121$，不满足误差不超过$10^{-5}$

~~$\frac{16T_0^2 - T_0^1}{15}$~~ $T_1^1 = \frac{4T_0^2 - T_0^1}{3} \approx 0.7132871$，不满足

$T_2^0 = \frac{16T_1^1 - T_1^0}{15} \approx 0.7132721$，满足误差不超过$10^{-5}$

∴ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x} dx \approx 0.7132721$.

10 试构造高斯型求积公式 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

解：先变量代换，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)}} f(\frac{1}{2}(t+1))\frac{1}{2}dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)}} F(t)dt$

在$[-1,1]$上构造带权$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2(x+1)}}$的正交多项式。

$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x) = x - \frac{\int_{-1}^1 x\frac{1}{\sqrt{2(x+1)}}dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2(x+1)}}dx} = x - \frac{1}{3}$.

$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{(\rho(x)x^2, 1)}{(\rho(x), 1)} - \frac{(\rho(x)x^2, x)}{(\rho(x)x, x)} =$

∴ $\varphi_2(x)$的零点为 $x_0=0.1156$，$x_1=0.7416$，即为高斯点。

将 $f(x)=1, x$ 代入求积公式，有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = A_0 + A_1 = 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x dx = A_0(0.1156) + A_1(0.7416) = \frac{2}{3}$$

解得 $A_0=1.273$ $A_1=0.727$

∴ 两点高斯求积公式为 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx 1.273 f(0.1156) + 0.727 f(0.7416)$.

13 证明等式 $n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$

试依据 $n\sin\frac{\pi}{n}$ $(n=3,6,12)$ 的值，用外推法求 π 的近似值。

解：令 $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$，$\because$ $\sin x$ 可展开为 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$

$\therefore f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}=n\left[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5-\cdots\right]$

$=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$ 得证

当 $n=3$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n}\approx2.598076=f_0(3)$

当 $n=6$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n}\approx3.000000=f_0(6)$

当 $n=12$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n}\approx3.105829=f_0(12)$

根据外推法，$f_1(6)=\frac{4f_0(6)-f_0(3)}{3}\approx3.133975$

~~$f_2(6)$~~ = $f_1(12)=\frac{4f_0(12)-f_0(6)}{3}\approx3.141105$

$f_2(12)=\frac{16f_1(12)-f_1(6)}{15}\approx3.141580$

$\therefore$ 依据 $n=3,6,12$ 的值求出 π 的近似值为 3.141580