## 第 15 周作业：P413 1/4),2,3/2),4/2)( 其中 G(x,r)=x1x2-rln(-2x1+x2+3)）)

**P413/1(4)：**

$$F(x_1,x_2,\sigma)=\begin{cases} x_1^2+x_2^2 & 2x_1+x_2\le 2, x_2\ge 1 \\ x_1^2+x_2^2+\sigma(2x_1+x_2-2)^2 & 2x_1+x_2>2, x_2\ge 1 \\ x_1^2+x_2^2+\sigma(x_2-1)^2 & 2x_1+x_2\le 2, x_2<1 \\ x_1^2+x_2^2+\sigma(2x_1+x_2-2)^2+\sigma(x_2-1)^2 & 2x_1+x_2>2, x_2<1 \end{cases}$$ 为凸函数。

当 $2x_1+x_2\le 2, x_2\ge 1$ 时，$\nabla F(x_1,x_2,\sigma)=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}\ne 0$。

当 $2x_1+x_2>2, x_2\ge 1$ 时，

$$\nabla F(x_1,x_2,\sigma)=\begin{pmatrix}2x_1+4\sigma(2x_1+x_2-2)\\2x_2+2\sigma(2x_1+x_2-2)\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{4\sigma}{1+5\sigma}\\x_2=\dfrac{2\sigma}{1+5\sigma}\end{cases}$$，不满足 $2x_1+x_2>2$。

当 $2x_1+x_2\le 2, x_2<1$ 时，

$$\nabla F(x_1,x_2,\sigma)=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2+2\sigma(x_2-1)\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\end{cases}$$，满足 $2x_1+x_2\le 2, x_2<1$。

当 $2x_1+x_2>2, x_2<1$ 时，

$$\nabla F(x_1,x_2,\sigma)=\begin{pmatrix}2x_1+4\sigma(2x_1+x_2-2)\\2x_2+2\sigma(2x_1+x_2-2)+2\sigma(x_2-1)\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{4\sigma+2\sigma^2}{1+6\sigma+4\sigma^2}\\x_2=\dfrac{3\sigma+4\sigma^2}{1+6\sigma+4\sigma^2}\end{cases}$$，不满足 $2x_1+x_2>2$。

得 $\min F(x_1,x_2,\sigma)$ 的最优解 $\begin{cases}x_1(\sigma)=0\\x_2(\sigma)=\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\to 1\end{cases}$，得 $\boldsymbol{x}^*=(0,1)^T$

**P413/2：**

（1）$x_2=1-x_1$，$\min f(x_1)=x_1^3+(1-x_1)^3\Rightarrow x_1^*=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{x}^*=(1/2,1/2)^T$。

（2）$\min F(x_1,x_2,\sigma)=x_1^3+x_2^3+\sigma(x_1+x_2-1)^2$ 无最优解，所以不能通过求解 $\min F(x_1,x_2,\sigma)$ 得到原问题最优解。

**P413/3(2)：**

$$\min_{(x>0)} G(x,r)=(x+1)^2-r\ln x$$

$$\frac{dG}{dx}=2(x+1)-\frac{r}{x}=0\Rightarrow x(r)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2r+1})\to 0$$，所以 $x^*=0$。

**P413/4(2)：**

$G(\boldsymbol{x},r)=x_1x_2-r\ln(-2x_1+x_2+3),\quad -2x_1+x_2+3$时，

$$\nabla_x G(\boldsymbol{x},r)=\begin{pmatrix} x_2-r\dfrac{-2}{-2x_1+x_2+3} \\ x_1-r\dfrac{1}{-2x_1+x_2+3} \end{pmatrix}=0 \Rightarrow x(r)=\begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{9-16r}}{8} \\ -\dfrac{3+\sqrt{9-16r}}{4}2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$