TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KỸ THUẬT MÁY TÍNH

IT012 – TỔ CHỨC VÀ CẤU TRÚC MÁY TÍNH II

CHƯƠNG 3
ĐẠI SỐ BOOLEAN

Nội dung

1. Đại số Boolean
2. Biểu diễn hàm Boolean
3. Tối ưu luận lý
4. Phương pháp Karnaugh
5. Câu hỏi và Bài tập

1. Đại số Boolean (1/5) – Định nghĩa

- Đại số Boolean (luận lý nhị phân) là một cấu trúc đại số liên quan đến việc thao tác với các biến luận lý nhị phân (biến lận lý)
  - ➢Biến luận lý chỉ mang 2 giá trị: 0 và 1, cao và thấp, đúng và sai, …
  - ➢Thao tác luận lý: AND (·, &), OR (+, |), NOT (~, ¯)
- Ví dụ: A và B là 2 biến luận lý nhị phân:
  - ➢$A \cdot B = A \mathbin{\&} B = AND(A, B) = AB$
  - ➢$A + B = A \mid B = OR(A, B)$
  - ➢$\sim A = \overline{A}$

1. Đại số Boolean (2/5) – Định nghĩa

- Một tập B khác rỗng cùng với các thao tác (phép toán) AND ($\cdot$), OR ($+$) và NOT ($\overline{\ }$) được gọi là một đại số Boolean nếu các tiên đề sau đây được thỏa mãn với mọi $x, y, z \notin B$
  - Tiên đề 1: Cấu trúc đóng với các phép toán $\cdot$ và $+$.Nếu $x, y \in B$ thì: $(x + y) \in B$ và $x \cdot y \in B$
  - Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa. Tồn tại 2 phần tử trung hòa khác nhau thuộc B, ký hiệu là 0 và 1 sao cho:
    - ✓ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
    - ✓ $x + 0 = 0 + x = x$

1. Đại số Boolean (3/5) – Định nghĩa

- Tiên đề 3: Tính giao hoán
  - ✓ $x \cdot y = y \cdot x$
  - ✓ $x + y = y + x$
- Tiên đề 4: Tính phân phối
  - ✓ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  - ✓ $x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$
- Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù. Với mọi $x \in B$, tồn tại duy nhất $\overline{x} \in B$ sao cho:
  - ✓ $x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = 0$
  - ✓ $x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$

  $\overline{x}$ được gọi là phần tử bù của x
- Tiên đề 6: Tồn tại ít nhất 2 phần tử x, y $\in$ B sao cho x $\neq y$

1. Đại số Boolean (4/5) – Hàm Boolean

- Kết hợp các biến, hằng số, toán tử, dấu ngoặc tạo thành một **Biểu thức Boolean**.
  - Ví dụ: $x + yz$
- Kết hợp theo thứ tự: 1 tên hàm, 1 dấu bằng và cuối cùng là 1 biểu thức Boolean sẽ cho chúng ta được một **Hàm Boolean (Hàm Boolean Dạng chuẩn)**
  - Ví dụ: $f(x, y, z) = x + yz$

1. Đại số Boolean (5/7) – Bảng chân trị

- **Bảng chân trị** (hay còn gọi là bảng tổ hợp) thể hiện mối quan hệ giữa giá trị của một hàm Boolean và các biến của hàm đó
  - 2^n hàng (n là số biến)
  - n+1 cột

$$f(x, y, z) = x + yz$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Giá trị của hàm tương ứng với mỗi tổ hợp các biến

Liệt kê tất cả các tổ hợp có thể

3. Đại số Boolean (2/2) – Dạng chính tắc

- Dạng chính tắc là dạng biểu diễn hàm Boolean bằng tổng của các minterm khiến hàm Boolean có giá trị 1 (1-minterm) hoặc tích của các maxterm khiến hàm Boolean có giá trị 0 (0-maxterm)

Biến			**Minterm**		**Maxterm**	
x	**y**	**z**	**Biểu thức**	**Ký hiệu**	**Biểu thức**	**Ký hiệu**
0	0	0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	m_1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	m_2	$x+\bar{y}+z$	M_2
0	1	1	$\bar{x}\,y\,z$	m_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1	0	0	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_4	$\bar{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\,\bar{y}\,z$	m_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1	1	0	$x\,y\,\bar{z}$	m_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7

x	**y**	**z**	**f**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$= \sum m\,(1, 3, 4, 6, 7)$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,z + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,\bar{z} + x\,y\,z$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z)\,(x + \bar{y} + z)\,(\bar{x} + y + \bar{z})$$

$$= \prod\,(0, 2, 5)$$

1. Đại số Boolean (4/5) – Tính đối ngẫu

- Biểu thức: $x + yz$
- Hàm: $f(x, y, z) = x + yz$
- Nếu một biểu thức Boolean là đúng thì biểu thức đối ngẫu của nó cũng đúng:
  - $0 \leftrightarrow 1$
  - AND $\leftrightarrow$ OR
- Ví dụ:
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ đối ngẫu $x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$
  - $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$ đối ngẫu $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$

1. Đại số Boolean (5/5) – Định lý

- Định lý 1: Tính lũy đẳng
  - $x + x = x$
  - $x \cdot x = x$
- Định lý 2: Tính nuốt
  - $x + 1 = 1$
  - $x \cdot 0 = 0$
- Định lý 3: Tính hấp thụ
  - $x + x \cdot y = x$
  - $x(x + y) = x$
- Định lý 4: Tính phủ định của phủ định:
  - $\overline{\overline{x}} = x$
- Định lý 5: Tính kết hợp
  - $x + (y + z) = (x + y) + z$
  - $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$
- Định lý 6: Định lý De-Morgan
  - $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
  - $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

2. Tối ưu luận lý (1/2)

- Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa
  - $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - $x + 0 = 0 + x = x$
- Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù
  - $x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = 0$
  - $x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$

Tối ưu luận lý là làm giảm số lượng tổng/tích hoặc số lượng biến hoặc phần bù của nó trong mỗi tổng/tích

- Định lý 1: Tính lũy đẳng
  - $x + x = x$
  - $x \cdot x = x$
- Định lý 2: Tính nuốt
  - $x + 1 = 1$
  - $x \cdot 0 = 0$
- Định lý 3: Tính hấp thụ
  - $x + x \cdot y = x$
  - $x(x + y) = x$

2. Tối ưu luận lý (2/2)

$f(x, y, z) = x + y\bar{z} + xy$

$f(x, y, z) = (x + y)(\bar{z} + x + y)$

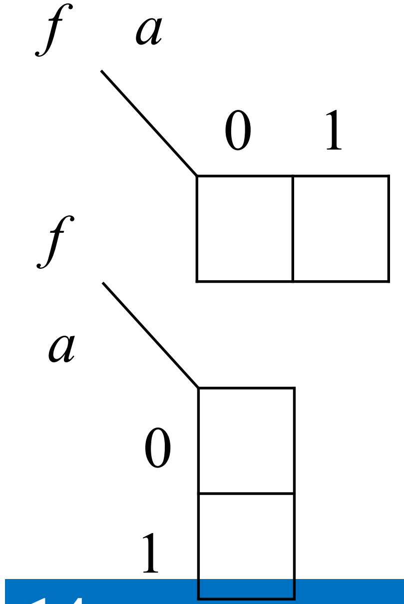
- Có nhiều định lý và tiên đề
  - ➢Nên sử dụng định lý nào? Tiên đề nào?
- Biểu thức đã tối ưu hay chưa?
  - ➢Làm sao để phán đoán là biểu thức chưa tối ưu?

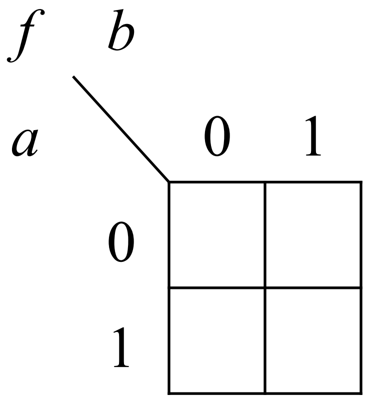
4. Phương pháp Karnaugh (1/6) – Cơ sở

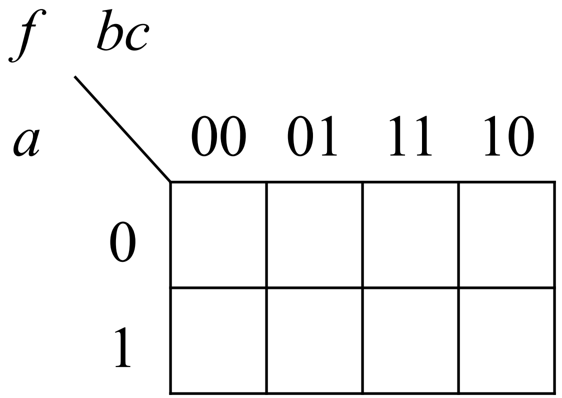
- K-map là phương pháp tối ưu luận lý bằng hình học trực quan dựa trên các tính chất của đại số Boolean:
  - ➢ $xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x \cdot 1 = x$
    - ✓ Tổng của hai tích khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau
      - Tổng của 2 1-minterm khác nhau đúng 1 bit?
  - ➢ $(x + y)(x + \bar{y}) = x + y\bar{y} = x + 0 = x$
    - ✓ Tích của hai tổng khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau
      - Tích của 2 0-maxterm khác nhau đúng 1 bit?

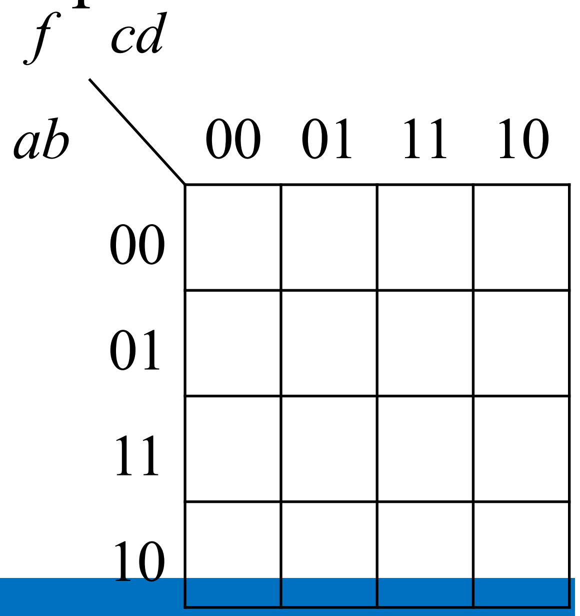
4. Phương pháp Karnaugh (2/6) – Cấu trúc

- K-map là mảng 2 chiều các ô
  - ➢Số lượng ô = 2^n (n là số biến)
  - ➢Số lượng ô trên mỗi chiều = 2^i (i là số biến được gán trên mỗi chiều)
  - ➢Mỗi ô được gán 1 tổ hợp theo mã Gray: 2 chuỗi bit liên tiếp khác nhau 1 bit









4. Phương pháp Karnaugh (3/6) – Cấu trúc

x	y	z	f
0	0	0	m_0/M_0
0	0	1	m_1/M_1
0	1	0	m_2/M_2
0	1	1	m_3/M_3
1	0	0	m_4/M_4
1	0	1	m_5/M_5
1	1	0	m_6/M_6
1	1	1	m_7/M_7

f \ x \ yz	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

f \ x \ yz	00	01	11	10
0	M_0	M_1	M_3	M_2
1	M_4	M_5	M_7	M_6

4. Phương pháp Karnaugh (4/6) – Nguyên tắc

- Gom các nhóm 2^k ô liền kề với $k \geq 0$
  - ➢ k là số biến được tối ưu trong mỗi nhóm
  - ➢ Gom các 1-minterm -> Tổng các tích có giá trị 1
  - ➢ Gom các 0-maxterm -> Tích các tổng có giá trị 0
- Số lần gom phải ít nhất
  - ➢ Số tích/tổng của biểu thức cuối cùng là ít nhất
- Mỗi nhóm phải có ít nhất 1 ô không thuộc các nhóm khác
  - ➢ Tránh trường hợp dư thừa các tích/tổng mà các nhóm khác đã bao phủ

4. Phương pháp Karnaugh (5/6)

$F(x, y, z) = \sum m(1, 3, 4, 7)$

$F(a, b, c) = \prod M(1, 4, 5, 6)$

F yz

x \ yz	00	01	11	10
0		1	1	
1	1		1	

$F(x, y, z) = \bar{x}z + yz + x\bar{y}\,\bar{z}$

F bc

a \ bc	00	01	11	10
0		0		
1	0	0		0

$F(a, b, c) = (b + \bar{c})(\bar{a} + c)$

4. Phương pháp Karnaugh (6/6)

$$f(x, y, z) = x + \bar{x}yz$$

f $\;x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

$$F(x, y, z) = x + yz$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}(x + y + \bar{z})$$

f $\;x \backslash yz$	00	01	11	10
0		0		
1	0	0	0	0

$$F(x, y, z) = \bar{x}(y + \bar{z})$$

Quiz

- $F(A, B, C, D) = A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}BCD + CD$

F $AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

6. Câu hỏi và Bài tập (1/2)

- Trình bày sự khác nhau giữa số học nhị phân và luận lý nhị phân (đại số Boolean)?
- Chứng minh 6 định lý của đại số Boolean?
- Trình bày các phương pháp biểu diễn một hàm Boolean? Ưu và nhược điểm của mỗi phương pháp là gì?
- Tối ưu luận lý bằng phương pháp đại số Boolean:
  - $F(A, B, C) = AB + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
  - $F(X, Y, Z) = (X + Y)(X + \overline{Y})(X + Y + Z)$

6. Câu hỏi và Bài tập (2/2)

- Lập bảng chân trị và sau đó tối ưu luận lý bằng phương pháp K-map cho các hàm luận lý sau:
  - $F(A,B,C,D) = \sum m(1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 15)$
  - $K(W,X,Y,Z) = (W + X)(\overline{W} + X + Y)(W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})(X + \overline{Y} + Z)$
- Sử dụng K-map để tìm các 1-mintermvà 0-maxterm và sau đó tối ưu luận lý các hàm Boolean sau:
  - $F(A, B, C, D) = A\overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}C + CD$
  - $F(A, B, C, D) = (A + B + C)(\overline{A} + B)(B + C + D)$