

# 炉温曲线的数学模型及求解

沈继红<sup>1</sup>, 蔡志杰<sup>2</sup>, 李晓乐<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工程大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

2. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433)

**摘要:** 针对 2020 年全国大学生数学建模竞赛 A 题——炉温曲线, 在一些简化假设下给出了电路板在回焊炉中进行自动焊接时的炉温曲线的数学模型, 求出了给定温度设置下的最大过炉速度, 讨论了两种最优曲线的温度和过炉速度设置. 最后对学生竞赛论文中的一些情况进行了评述.

**关键词:** 自动焊接; 炉温曲线; 目标优化

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2021)01-0062-11

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2021.01.08

## 1 问题背景及问题提出

在集成电路等电子产品生产中, 需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中, 通过加热, 将电子元件自动焊接到电路板上. 在这个生产过程中, 让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度, 对产品质量至关重要. 目前, 这方面的许多工作是通过实验测试来进行控制和调整的.

回焊炉内部设置若干个小温区, 它们从功能上可分成 4 个大温区: 预热区、恒温区、回流区和冷却区, 如图 1 所示. 电路板两侧搭在传送带上匀速进入炉内进行加热焊接.

某回焊炉内有 11 个小温区及炉前区域和炉后区域(图 1), 每个小温区长度为 30.5 cm, 相邻小温区之间有 5 cm 的间隙, 炉前区域和炉后区域长度均为 25 cm.

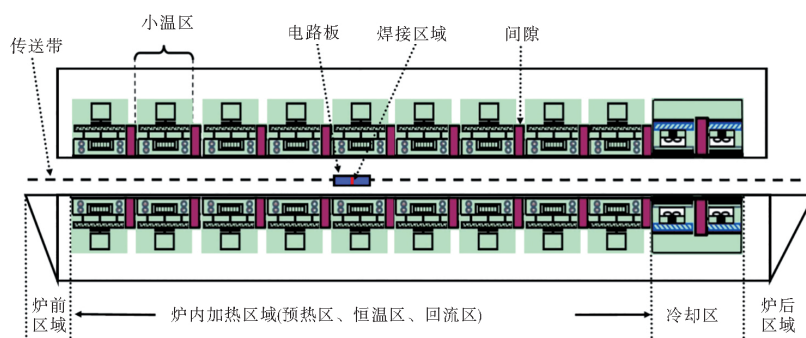


图 1 回焊炉截面示意图

回焊炉启动后, 炉内空气温度会在短时间内达到稳定, 此后, 回焊炉方可进行焊接工作. 炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙不做特殊的温度控制, 其温度与相邻温区的温度有关, 各温区边界附近的温度也可能受到相邻温区温度的影响. 另外, 生产车间的温度保持在 25 °C.

收稿日期: 2021-02-20

通讯作者: 沈继红, E-mail: 750509924@qq.com

引用格式: 沈继红, 蔡志杰, 李晓乐. 炉温曲线的数学模型及求解[J]. 数学建模及其应用, 2021, 10(1): 62-72.

SHEN J H, CAI ZH J, LI X L. Mathematical model and solution of furnace temperature curve (in Chinese) [J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2021, 10(1): 62-72.

在设定各温区的温度和传送带的过炉速度后，可以通过温度传感器测试某些位置上焊接区域中心的温度，称之为炉温曲线(即焊接区域中心温度曲线)。附件是某次实验中炉温曲线的数据，各温区设定的温度分别为 175 ℃(小温区 1~5)、195 ℃(小温区 6)、235 ℃(小温区 7)、255 ℃(小温区 8~9)及 25 ℃(小温区 10~11)；传送带的过炉速度为 70 cm/min；焊接区域的厚度为 0.15 mm. 温度传感器在焊接区域中心的温度达到 30 ℃时开始工作，电路板进入回焊炉开始计时。

实际生产时可以通过调节各温区的设定温度和传送带的过炉速度来控制产品质量。在上述实验设定温度的基础上，各小温区设定温度可以进行±10 ℃范围内的调整。调整时要求小温区 1~5 中的温度保持一致，小温区 8~9 中的温度保持一致，小温区 10~11中的温度保持 25 ℃。传送带的过炉速度调节范围为 65~100 cm/min。

表 1 制程界限		
界限名称	最低值	最高值
温度上升斜率/(℃/s)	0	3
温度下降斜率/(℃/s)	-3	0
温度上升过程中在 150~190 ℃的时间/s	60	120
温度大于 217 ℃的时间/s	40	90
峰值温度/℃	240	250

在回焊炉电路板焊接生产中，炉温曲线应满足一定的要求，称为制程界限(表 1)。

2020 年全国大学生数学建模竞赛 A 题<sup>[1]</sup>旨在引导学生通过机理模型来研究回焊炉自动焊接工艺的炉温曲线控制，深入浅出地给出了如下 4 个问题。

问题 1 请对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。假设传送带过炉速度为 78 cm/min，各温区温度的设定值分别为 173 ℃(小温区 1~5)、198 ℃(小温区 6)、230 ℃(小温区 7)和 257 ℃(小温区 8~9)，请给出焊接区域中心的温度变化情况，列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并将每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在提供的result.csv中。

问题 2 假设各温区温度的设定值分别为 182 ℃(小温区 1~5)、203 ℃(小温区 6)、237 ℃(小温区 7)、254 ℃(小温区 8~9)，请确定允许的最大传送带过炉速度。

问题 3 在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217 ℃的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过 217 ℃到峰值温度所覆盖的面积(图 2 中阴影部分)最小。请确定在此要求下的最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。

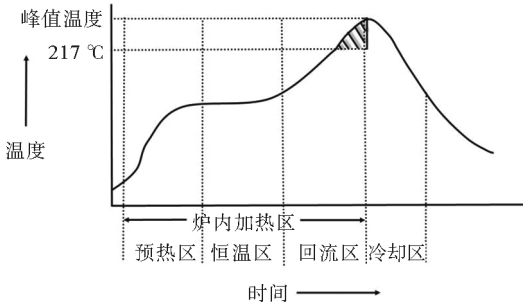


图 2 炉温曲线示意图

问题 4 在焊接过程中，除满足制程界限外，还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217 ℃的炉温曲线应尽量对称(图 2)。请结合问题 3，进一步给出最优炉温曲线，以及各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。

2 模型与结果

题目要求通过建模来绘制给定过炉速度和温度设置下的炉温曲线、在设定温度下的最大过炉速度以及寻找最优炉温曲线的温度和过炉速度设定。题目涉及单目标优化和多目标优化，其中正确绘制回焊炉炉温曲线是基础。

2.1 回焊炉工作要点

- 传送带的速度可调节，工作时保持匀速；
- 有四段可以设置不同的温度的温区，冷却区吹室温风；
- 回焊炉在开始工作后短时间内炉内温度达到稳定；
- 回焊炉垂直方向以传送带为中心上下对称。

2.2 模型假设

- 回焊炉的温度只考虑沿传送带前进方向的变化，在垂直于前进方向的平面上温度不变。

- 炉温曲线反映的是焊接区域中心点的温度变化.

### 2.3 热传导数学模型

焊接区域的温度变化可由下面一维的热传导方程的初边值问题来描述:

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & (x, t) \in (x_l, x_r) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_T, & x \in (x_l, x_r), \\ -\beta u_x(x_l) + u(x_l) = g(vt), & t \in (0, +\infty), \\ \beta u_x(x_r) + u(x_r) = g(vt), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

其中:

•  $u(x, t)$  表示焊接区域中距上表面  $x - x_l$  处, 在距回焊炉入口  $vt$  处( $t$  时刻)的温度,  $v$  是传送带速度.

•  $u_T$  表示初始时刻焊接区域的温度分布, 这里取为室温  $25^\circ\text{C}$ .

•  $g(vt)$  是温度场, 表示回焊炉内部, 沿传送带运动方向, 距回焊炉入口  $vt$  处( $t$  时刻)的温度.

•  $a$  表示焊接区域的传热属性, 计算公式为  $a = K/(c\rho)$ ,  $K$  是导热系数,  $c$  是比热容,  $\rho$  为密度.

•  $\beta$  是与焊接区域与炉内气体的换热速度相关的参数, 越小表示换热越快, 可以是 0, 等于 0 后变成第一类边界条件.

模型难点: 温度场  $g(vt)$  需要根据实际情况合理假设, 焊接区域的传热属性  $a$ 、换热速度相关的参数  $\beta$  需要根据附件的数据和数学模型反演.

### 2.4 一维热传导方程的数值离散格式

将区域  $I = (x_l, x_r)$  均匀剖分为  $J$  份, 步长  $h = (x_r - x_l)/J$ , 节点  $x_l = x_0, x_1, \dots, x_J = x_r$ ,  $x_i = x_0 + ih$ . 记  $u_i = u(x_i, t)$ ,  $(u_i)_t = u_t(x_i, t)$ .

空间半离散的有限差分格式如下:

$$\begin{cases} (u_i)_t = a\delta_x^2 u_i + O(h^2), & i = 1, 2, \dots, J-1, \\ u_i(0) = u_T(x_i), & i = 0, 1, \dots, J, \\ -\beta u_x|_{x=x_0} + u_0 = g(vt), \\ \beta u_x|_{x=x_J} + u_J = g(vt), \end{cases}$$

其中:  $\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ ;  $u_x|_{x=x_0} = \frac{u_1 - u_0}{h} + O(h)$ ;  $u_x|_{x=x_J} = \frac{u_J - u_{J-1}}{h} + O(h)$ .

在边界条件中舍去高阶量  $O(h)$ , 可得

$$u_0 = \frac{\beta}{h+\beta} u_1 + \frac{h}{h+\beta} g(vt), \quad u_J = \frac{\beta}{h+\beta} u_{J-1} + \frac{h}{h+\beta} g(vt).$$

这样可得半离散格式的矩阵形式

$$\mathbf{U}_t = \frac{a}{h^2} (\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}),$$

其中:  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_{J-1})^T$ ;  $\mathbf{U}_t = \frac{d\mathbf{U}}{dt}$ ;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{\beta}{h+\beta} & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 + \frac{\beta}{h+\beta} \end{pmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{h}{h+\beta} g(vt) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{h}{h+\beta} g(vt) \end{pmatrix}_{(J-1) \times 1}.$$

时间离散采用向后欧拉法, 得到全离散格式如下

$$\frac{1}{\tau} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) = \frac{a}{h^2} (\mathbf{A}^{n+1} \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{B}^{n+1}),$$

整理得

$$\left(\frac{1}{\tau}I - \frac{a}{h^2}A^{n+1}\right)U^{n+1} = \frac{1}{\tau}U^n + \frac{a}{h^2}B^{n+1},$$

其中,  $I$  是  $J-1$  阶单位阵.

## 2.5 温度场 $g(y)$ 的确定

温度场  $g(y)$  是指回焊炉稳定后在距离回焊炉入口  $y$  处传送带附近的空气的温度, 其只与小温区风扇设定温度相关. 为简化模型, 从焊接需求来看, 可从以下几条来确定温度场  $g(y)$ :

- $g(y)$  在各小温区处大部分区域等于小温区设定温度, 在临近小温区边界 5 cm 的区域及小温区之间的间隙内, 受到周围温区的温度影响呈线性过渡;

- $g(y)$  从入口至第一个小温区 5 cm 处之间的这一段, 是由室温线性过渡到第一个小温区的设定温度;

- 在冷却区右端至出口  $g(y)$  为室温.

## 2.6 热传导系数 $a$ 和换热参数 $\beta$ 的确定办法

热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  是随着焊接区域温度的变化而变化的. 为简单起见, 认为热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  随着温度场的变化而变化, 作以下近似假设:

- 热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  在各小温区处大部分区域等于常数, 在临近小温区边界 5 cm 的区域及小温区之间的间隙内呈线性过渡;

- 从入口至加热区之间, 这一段的热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  与第一个小温区内相同;

- 从冷却区右端至出口处, 这一段的热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  与冷却区内的相同;

- 由于小温区一共有 4 种温度设定且温度设定变化范围不大, 在温度设置改变后假定热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  不再变化.

依据附件的数据和上述假定可以反算出热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  在 4 段加热温区和冷却区的数值分别是

$$a = (4.91 \times 10^{-11}; 5.53 \times 10^{-11}; 7.54 \times 10^{-11}; 5.32 \times 10^{-11}; 2.78 \times 10^{-11}),$$

$$\beta = (2.54 \times 10^{-6}; 3.90 \times 10^{-7}; 4.55 \times 10^{-7}; 5.05 \times 10^{-7}; 6.86 \times 10^{-6}).$$

在这样的热传导系数  $a$  和换热参数  $\beta$  以及温度场  $g(y)$  的设定下, 计算出的炉温曲线与附件的数据对比见图 3, 可以看出两者吻合得非常好.

## 3 问题的求解

先引进以下记号:

- 加热区域设定温度(共 4 种)定义为  $\text{Tem} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ , 其调控范围为  $\text{Tem} \in A = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) | k_1 \in [165, 185], k_2 \in [185, 205], k_3 \in [225, 245], k_4 \in [245, 265]\}$ ,  $k_i$  的单位为  $^{\circ}\text{C}$ ;
- 传送带速度定义为  $v$ , 其调控范围是  $v \in [65, 100]$ , 单位是  $\text{cm/min}$ ;
- 焊接区域中点的“时间-温度”定义为  $u_m(t)$ , 其中,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ,  $u_m$  的单位为摄氏度,  $t \in [0, L/v]$ ,  $L$  为回焊炉总长度;

- $u_m(t)$  和  $(\text{Tem}, v)$  的映射关系记为  $M_p: (\text{Tem}, v) \rightarrow u_m(t)$ ;

- 制程界限(记为  $H$  条件)即炉温曲线  $u_m(t)$ , 满足下面的 4 个条件:

- 1)  $|du_m(t)/dt| \leq 3$ ;
- 2)  $t_2 - t_1 \in [60, 120]$ , 其中,  $t_1, t_2$  分别是第一次使得  $u_m(t_1) = 150$  和  $u_m(t_2) = 190$  成立的时刻;
- 3)  $t_4 - t_3 \in [40, 90]$ , 其中,  $t_3, t_4$  ( $t_3 \leq t_4$ ) 是方程  $u_m(t) = 217$  的两个根;
- 4)  $\max_t u_m(t) \in [240, 250]$ .

- 曲线族  $\mathcal{U}$

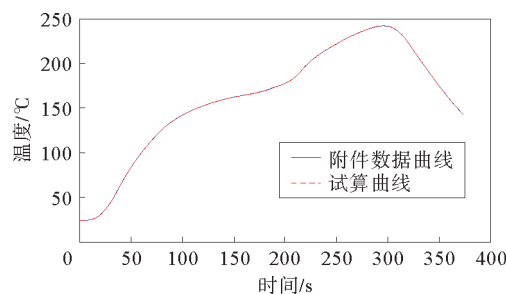


图 3 试算曲线与原始数据对比图

$\mathcal{U} = \{u_m(t) \mid u_m(t) \text{ 满足 H 条件, 且 } u_m(t) = M_p(\text{Tem}, v), \text{ 其中, } \text{Tem} \in A, v \in [65, 100]\}$ .

显然, 曲线族  $\mathcal{U}$  包含了在温度和速度调控范围内, 并且满足制程界限 H 条件的所有炉温曲线.

### 3.1 问题 1 的求解

在上述温度场和相关系数的确定方案下, 很容易求解出问题 1, 即传送带过炉速度为 78 cm/min, 各温区温度的设定值分别为 173 °C (小温区 1~5)、198 °C (小温区 6)、230 °C (小温区 7) 和 257 °C (小温区 8~9) 的炉温曲线计算结果, 其中炉温曲线如图 4 虚线所示.

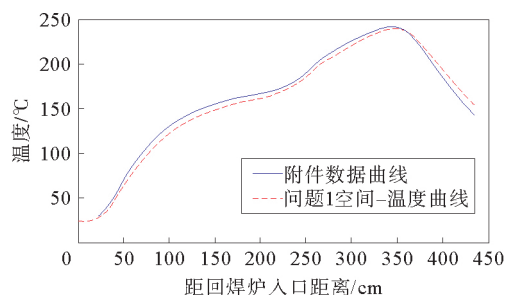


图 4 问题 1 的炉温曲线与附件的数据对比

小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度依次是: 130.267 9 °C、167.654 0 °C、189.475 5 °C 和 223.546 8 °C.

### 3.2 问题 2 的求解

数学模型为

$$\max_{M_p(\text{Tem}^*, v) \in \mathcal{U}} v,$$

其中,  $\text{Tem}^* = (182, 203, 237, 254)$ .

在上述温度场和相关系数的确定方案下, 各温区温度的设定值分别为 182 °C (小温区 1~5)、203 °C (小温区 6)、237 °C (小温区 7)、254 °C (小温区 8~9), 求传送带最大过炉速度时, 可将速度按 0.01 cm/min 的步长遍历即可找到.

求得的最大过炉速度为 78.98 cm/min.

### 3.3 问题 3 和问题 4 的求解

问题 3 对于炉温曲线  $u_m(t)$ , 设其在  $t = t_q$  时刻取得最大值, 则“尖端区”覆盖的面积的最优曲线”为

$$u_m^*(t) = \arg \min_{u_m(t) \in \mathcal{U}} \int_{t_3}^{t_q} u_m(t) dt.$$

问题 4 中炉温曲线成镜像对称关系的“最优曲线”的“镜像对称误差”可写为

$$\varepsilon = \|u_m(t) - u_m(2t_q - t)\|_{L_p}, \quad t \in [t_q, t_4],$$

其中,  $\|\cdot\|_{L_p}$  可选择为  $\|\cdot\|_{L_1}$ 、 $\|\cdot\|_{L_2}$  和  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

问题 4 还要考虑问题 3 所提出的尖端区域面积最小的情况. 事实上这是两个目标函数的规划问题. 最简单的想法是两个目标函数加权相加, 考虑到面积和对称误差量纲不同, 可以进行归一化处理后相加, 然后挑选出加和最小的炉温曲线. 因此问题 4 最终可转化为求解以下的规划问题:

$$u_m^*(t) = \arg \min_{u_m(t) \in \mathcal{U}} P_4(u_m(t)), \quad t \in [t_q, t_4],$$

其中:

$$P_4(u_m(t)) = \frac{1}{S_b - S_a} \left( \int_{t_3}^{t_q} u_m(t) dt - S_a \right) + \frac{1}{E_b - E_a} (\|u_m(t) - u_m(2t_q - t)\|_{L_p} - E_a);$$

$$S_a = \min_{u_m(t) \in \mathcal{U}} \int_{t_3}^{t_q} u_m(t) dt;$$

$$S_b = \max_{u_m(t) \in \mathcal{U}} \int_{t_3}^{t_q} u_m(t) dt;$$

$$E_a = \min_{u_m(t) \in \mathcal{U}} \|u_m(t) - u_m(2t_q - t)\|_{L_p}, \quad t \in [t_q, t_4];$$

$$E_b = \max_{u_m(t) \in \mathcal{U}} \| u_m(t) - u_m(2t_q - t) \|_{L_p}, t \in [t_q, t_4].$$

备注：由于  $t_q$  并不一定是  $t_3$  和  $t_4$  的中点，因此上述  $t$  的取值范围还可以是  $t \in [t_3, t_q]$ 。

3.4 问题 3 和问题 4 的数值求解办法

实际上，问题 3 和问题 4 的求解困难很大程度上是制程界限 H 条件带来的——为了判断是否满足制程界限 H，只能将炉温曲线以某种方式求解出来，这就涉及到偏微分方程的求解。而由于边界条件和方程中的系数是分段线性的，解析解很困难，在温度与速度的设置下解析求解最优曲线同样困难。因此，可行的办法是：以某种方式“遍历”所有的温度与速度的设置，计算并挑选出符合制程界限的所有炉温曲线即曲线族  $\mathcal{U}$ ，在  $\mathcal{U}$  中计算出最优曲线。

上述过程的关键在于如何合理地“遍历”所有的温度与速度设置。这种“遍历”实际上是对温度与速度设置空间的一种“采样”算法，当然均匀采样会是首选，但这会使得采样点的个数随着空间的维数指数增长。

下面给出一种通过“混沌迭代”进行“混沌采样”的办法，实现近似的“遍历”。下面的这种迭代格式在给定初值  $x_1 \in (0, 1)$  后可以生成  $(0, 1)$  之间的一个混沌序列  $\{x_k\}_{k=1}^M: x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k)$ 。

在得到一个长度为  $M$  的混沌序列  $\{x_k\}_{k=1}^M$  后，经过简单的线性变换后可将其映射到区间  $(a, b)$  的一个混沌序列  $\{y_k\}_{k=1}^M$ ，其中， $y_k = (b - a)x_k + a$ 。基于此，可以生成一种  $M$  种温度速度设置的“混沌采样”结果，也即  $M$  条炉温曲线，从而在有限的时间内求解出问题 3 和问题 4。

关于  $M$  的设置， $M$  越大结果越好，但计算量也会增大。以计算问题 3 的最优曲线为例，给出如下解法：

- 1) 给定  $M_0 = m_0$ ，计算出最优曲线对应的面积  $S_0$ ；
- 2) 令  $M_1 = M_0 + d$ ，计算出最优曲线对应的面积  $S_1$ ，并计算  $S_0$  和  $S_1$  的相对误差  $|S_0 - S_1|/S_1$ ；
- 3) 若相对误差小于 5%，则认为 2) 中面积为  $S_1$ ，对应的曲线即为最优曲线；
- 4) 若相对误差大于 5%，则令  $M_0 = M_1$ ，然后重复 1)、2) 直至 3) 成立。

问题 4 的“最优曲线”的求解与上述过程类似，不再赘述。

3.5 “10 000 条混沌遍历”法求解问题 3 和问题 4

计算 3 000+3 500 条混沌采样曲线大概用时 5.71 min。

设定  $M_0 = 3\ 000$  和  $M_1 = 3\ 500$  对应的问题 3 和问题 4 的相对误差分别是 1.29% 和 1.35%。为了使得结果更加精确，并且计算时间控制在 10 min 左右，可以用 10 000 条混沌采样来计算问题 3 和问题 4。实际用时 12.75 min。

表 2—表 4 给出了 10 000 条混沌采样下问题 3 尖端区面积和问题 4 综合指标分别最小的前 5 个温度速度设置。从表 2 可以看出问题 3 和问题 4 为同一条最优曲线(图 5)，且它对应的温度和速度设置为：178.38 °C(小温区 1~5)、185.89 °C(小温区 6)、225.22 °C(小温区 7)、264.91 °C(小温区 8~9)，传送带过炉速度为 86.79 cm/min。此时，问题 3 的最小面积为 467.8918 s·°C，问题 4 的最小综合指标为 0，对应的镜像误差 2 范数为 18.059 8。

表 2 问题 3 尖端区面积最小的 5 个温度速度设置表

区域温度/°C				速度 /(cm/min)	面积 /(s·°C)	综合指标	镜像误差 2	镜像误差∞
178.38	185.89	225.22	264.91	86.79	467.891 8	0.000 0	18.059 8	8.411 3
175.00	205.00	225.01	264.95	89.59	469.884 7	0.006 9	18.190 6	8.475 0
179.13	185.01	240.28	264.97	94.28	472.258 4	0.014 3	18.318 4	8.527 4
173.58	188.50	231.49	265.00	89.15	475.709 7	0.028 4	18.614 4	8.605 7
183.06	190.89	240.77	264.68	96.38	477.662 2	0.039 0	18.865 9	8.754 6

表 3 问题 4 综合指标最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
178.38	185.89	225.22	264.91	86.79	467.891 8	0.000 0	18.059 8	8.411 3
175.00	205.00	225.01	264.95	89.59	469.884 7	0.006 9	18.190 6	8.475 0
179.13	185.01	240.28	264.97	94.28	472.258 4	0.014 3	18.318 4	8.527 4
173.58	188.50	231.49	265.00	89.15	475.709 7	0.028 4	18.614 4	8.605 7
183.06	190.89	240.77	264.68	96.38	477.662 2	0.039 0	18.865 9	8.754 6

表 4 问题 4 镜像误差<sub>2</sub>范数最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
178.38	185.89	225.22	264.91	86.79	467.891 8	0.000 0	18.059 8	8.411 3
175.00	205.00	225.01	264.95	89.59	469.884 7	0.006 9	18.190 6	8.475 0
179.13	185.01	240.28	264.97	94.28	472.258 4	0.014 3	18.318 4	8.527 4
173.58	188.50	231.49	265.00	89.15	475.709 7	0.028 4	18.614 4	8.605 7
183.06	190.89	240.77	264.68	96.38	477.662 2	0.039 0	18.865 9	8.754 6

### 3.6 “粗细网格遍历”法求解问题 3 和问题 4

所谓“粗细网格遍历”就是温度和速度在“大步长下”遍历全部设置，根据计算结果在大步长下“最优曲线”的温度和速度设置附近，加细步长，以找到最优曲线。

首先设置温度遍历步长为 5℃，速度遍历步长为 5 cm/min，得到“大步长全局遍历”的结果，程序运行时间 6.62 min，如表 5—表 7 所示。

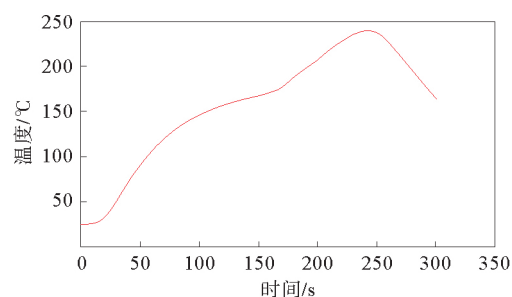


图 5 “10 000 条混沌”遍历下问题 3 和问题 4 的最优曲线

表 5 问题 3 尖端区面积最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
185.00	195.00	225.00	265.00	90.00	473.987 9	0.019 8	18.615 9	8.609 6
175.00	195.00	230.00	265.00	90.00	476.347 9	0.027 2	18.729 7	8.650 5
185.00	205.00	230.00	265.00	95.00	477.649 0	0.094 9	20.779 9	9.327 0
180.00	190.00	230.00	265.00	90.00	480.083 0	0.067 6	19.807 9	9.014 6
175.00	185.00	225.00	265.00	85.00	480.724 6	0.010 7	17.998 6	8.424 8

表 6 问题 4 综合指标最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
175.00	185.00	225.00	265.00	85.00	480.724 6	0.010 7	17.998 6	8.424 8
185.00	195.00	225.00	265.00	90.00	473.987 9	0.019 8	18.615 9	8.609 6
175.00	195.00	230.00	265.00	90.00	476.347 9	0.027 2	18.729 7	8.650 5
170.00	195.00	225.00	265.00	85.00	497.522 0	0.064 3	18.837 8	8.747 8
180.00	190.00	230.00	265.00	90.00	480.083 0	0.067 6	19.807 9	9.014 6

表 7 问题 4 镜像误差 2 范数最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 2	镜像误差∞
175.00	185.00	225.00	265.00	85.00	480.724 6	0.010 7	17.998 6	8.424 8
185.00	195.00	225.00	265.00	90.00	473.987 9	0.019 8	18.615 9	8.609 6
175.00	195.00	230.00	265.00	90.00	476.347 9	0.027 2	18.729 7	8.650 5
170.00	195.00	225.00	265.00	85.00	497.522 0	0.064 3	18.837 8	8.747 8
180.00	190.00	230.00	265.00	90.00	480.083 0	0.067 6	19.807 9	9.014 6

大步长下，问题 3 对应的最小面积为 473. 987 9，温度设置为(185, 195, 225, 265)，速度设置为 90. 然后在此速度和温度附近用小步长搜索，温度遍历方式为±2℃，步长 1℃，速度±2 cm/min，步长 1 cm/min，程序运行 0. 72 min，搜索的结果见表 8—表 10.

表 8 问题 3 尖端区面积最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 2	镜像误差∞
185.00	194.00	227.00	265.00	91.00	468.710 9	0.012 5	18.650 9	8.621 2
183.00	194.00	226.00	265.00	90.00	470.587 5	0.009 0	18.448 5	8.544 5
185.00	197.00	226.00	265.00	91.00	470.762 2	0.019 1	18.754 8	8.661 9
183.00	197.00	227.00	265.00	91.00	471.049 9	0.020 0	18.768 6	8.666 5
184.00	193.00	226.00	265.00	90.00	471.314 5	0.011 3	18.484 2	8.558 2

表 9 问题 4 综合指标最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 2	镜像误差∞
183.00	194.00	226.00	265.00	90.00	470.587 5	0.009 0	18.448 5	8.544 5
184.00	193.00	226.00	265.00	90.00	471.314 5	0.011 3	18.484 2	8.558 2
185.00	194.00	227.00	265.00	91.00	468.710 9	0.012 5	18.650 9	8.621 2
183.00	197.00	225.00	265.00	90.00	472.534 0	0.015 2	18.544 5	8.582 0
184.00	196.00	225.00	265.00	90.00	473.261 0	0.017 5	18.580 2	8.595 8

表 10 问题 4 镜像误差 2 范数最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 2	镜像误差∞
183.00	195.00	225.00	264.00	88.00	478.320 8	0.020 0	18.407 7	8.640 4
184.00	194.00	225.00	264.00	88.00	478.936 7	0.021 9	18.438 1	8.652 2
183.00	194.00	226.00	265.00	90.00	470.587 5	0.009 0	18.448 5	8.544 5
185.00	193.00	225.00	264.00	88.00	479.552 7	0.023 9	18.468 4	8.663 9
184.00	193.00	226.00	265.00	90.00	471.314 5	0.011 3	18.484 2	8.558 2

大步长下，问题 4 对应的最小“综合指标”为 0. 010 7，温度设置为(175, 185, 225, 265)，速度设置为 85. 同样地，在此速度和温度附近用小步长搜索，即温度遍历方式为±2℃，步长 1℃，速度±2 cm/min，步长为 1 cm/min，且温度和速度在题设的可调控范围内，搜索的结果见表 11—表 13.



表 11 问题 3 尖端区面积最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
174.00	187.00	225.00	265.00	86.00	468.315 2	-0.013 9	17.846 6	8.332 1
175.00	186.00	225.00	265.00	86.00	468.785 0	-0.012 4	17.870 6	8.341 3
176.00	185.00	225.00	265.00	86.00	469.254 8	-0.010 9	17.894 7	8.350 6
176.00	187.00	226.00	265.00	87.00	469.503 0	0.019 4	18.827 6	8.653 5
173.00	186.00	226.00	265.00	86.00	469.952 4	-0.008 6	17.929 9	8.363 8

表 12 问题 4 综合指标最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
174.00	187.00	225.00	265.00	86.00	468.315 2	-0.013 9	17.846 6	8.332 1
175.00	186.00	225.00	265.00	86.00	468.785 0	-0.012 4	17.870 6	8.341 3
176.00	185.00	225.00	265.00	86.00	469.254 8	-0.010 9	17.894 7	8.350 6
173.00	186.00	226.00	265.00	86.00	469.952 4	-0.008 6	17.929 9	8.363 8
174.00	185.00	226.00	265.00	86.00	470.422 2	-0.007 1	17.954 0	8.373 1

表 13 问题 4 镜像误差<sub>2</sub>范数最小的 5 个温度速度设置

区域温度/℃				速度 /(cm/min)	面积 /(s·℃)	综合指标	镜像误差 <sub>2</sub>	镜像误差 <sub>∞</sub>
174.00	187.00	225.00	265.00	86.00	468.315 2	-0.013 9	17.846 6	8.332 1
175.00	186.00	225.00	265.00	86.00	468.785 0	-0.012 4	17.870 6	8.341 3
176.00	185.00	225.00	265.00	86.00	469.254 8	-0.010 9	17.894 7	8.350 6
173.00	186.00	226.00	265.00	86.00	469.952 4	-0.008 6	17.929 9	8.363 8
174.00	185.00	226.00	265.00	86.00	470.422 2	-0.007 1	17.954 0	8.373 1

备注：在计算表 8—表 12 中的综合指标时，使用的是大步长下的，即计算表 5—表 7 时用到的  $S_a=473.98$ ,  $S_b=1102.88$ ,  $E_a=17.9986$ ,  $E_b=49.2226$ . 这是为了使得表 8—表 12 中的“综合指标”能与表 5—表 7 中的综合指标“对齐”. 因此，表 8—表 10 中的综合指标出现了负数.

从表 5—表 12 可以看出，“粗细网格遍历”法下，问题 3 的最优曲线，对应的温度和速度设置为 185℃(小温区 1~5)、194℃(小温区 6)、227℃(小温区 7)、265℃(小温区 8~9)，传送带过炉速度为 91 cm/min. 此时问题 3 的最小面积为 468.7109 s·℃.

图 6 给出了“粗细网格遍历”法下问题 3 的最优曲线.

“粗细网格遍历”法下，问题 4 的最优曲线，对应的温度和速度设置为：174℃(小温区 1~5)、187℃(小温区 6)、225℃(小温区 7)、265℃(小温区 8~9)，传送带过炉速度为 86 cm/min. 此时问题 3 的最小面积为 468.3152 s·℃，问题 4 的最小综合指标为 -0.0139，此时镜像误差的 2 范数为 17.8466.

图 7 给出了“粗细网格遍历”法下问题 4 的最优曲线.

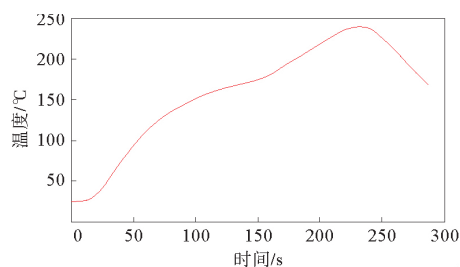


图 6 “粗细步长”遍历下问题 3 的最优曲线

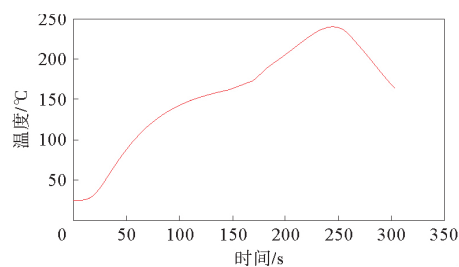


图 7 “粗细步长”遍历下问题 4 的最优曲线

## 4 竞赛论文的评述

2020年全国大学生数学建模竞赛A题来源于工程领域的实际问题,涉及电路板自动焊接过程中回焊炉的温区温度及过炉速度设置的关键技术.题目要求对回焊炉自动焊接的过程进行建模分析,讨论实际焊接需求——高效率(过炉速度最大)和高质量(两种最优炉温曲线)焊接的回焊炉参数(炉内加热区的温度和传送带过炉速度)的设置方式.主要考察学生对实际物理过程的简化及建模仿真能力,以及对单目标、双目标优化问题的求解能力.

下面给出建模的要点以及学生论文<sup>[2]</sup>中常见的错误或者好的思路.

### 1) 焊接区域的温度假设

评阅时发现在参赛论文中,回焊炉稳定后焊接区域的温度变化有以下两种不太合理的假设:①不考虑温度的过渡,认为焊接区域的温度是风扇的吹风温度;②将焊接区域温度和焊接元件一起建模来求解,如对流扩散方程模型(事实上这个模型并不准确),这会将问题复杂化.

### 2) 边界条件

参赛论文的炉温曲线物理模型多采用热传导模型来描述,但在边界条件的设置上,部分论文设置为第一类边界条件和第二类边界条件,这实际上并不准确,第三类边界条件才更贴合实际的物理过程.

### 3) 差分求解

对建立的热传导初边值问题模型的求解,有很多数值方法,差分法是常见的求解方法.理论分析不难得出显示差分格式是条件稳定的,此稳定性条件与要反演的参数有关.由于并不知道参数(实际上很小)的大小,这为显示差分方法的使用带来了隐患,而容易证明隐式差分格式是无条件稳定的,因此可用隐式格式反演出参数,确定参数后可用显示格式,以加快计算时间.

### 4) 解析解

热传导方程的初边值问题可用分离变量法来求解,但这是有限制条件的,变化的参数(位置的函数)导致了此法不能使用,Fourier变换求解解析解同样不适用.

### 5) 参数检验

温度的测量会有误差,反演算法也会带来误差,因此反演出的参数也会有误差.参数误差对炉温曲线是否有影响,影响有多大,这里给出一个检验方法以供参考:对测量的温度值加上一定水平的随机误差,计算得到新的系数,然后通过优化模型求得后面几个问题的最优值,观察最优值变化是否很大.

### 6) 牛顿冷却定律模型(常微分方程模型)

用“牛顿冷却定律模型”来建模炉温曲线也是合理的.由于锡膏厚度为0.15 mm,尺寸很小,可以将它看作一个温度分布均匀的半径为 $r=0.75$  mm的球体来处理.记 $t$ 时刻锡膏的温度和回焊炉空气温度分别为 $T(t)$ 和 $W(t)$ ,设锡膏的质量为 $m$ ,比热为 $c$ ,锡膏与空气之间的热传导率为 $k$ .考虑在 $[t, t+\Delta t]$ 内锡膏温度变化与锡膏吸热之间的关系得到

$$cm(T(t+\Delta t)-T(t))=4\pi r^2 k(W(t)-T(t))\Delta t,$$

从而得到常微分方程模型

$$dT(t)/dt=\alpha(W(t)-T(t)), T(t_0)=T_0, \alpha=\frac{4\pi r^2 k}{cm}.$$

### 7) 制程界限

部分论文在是否符合制程界限的判断上出错,如温度在上升过程中处于150~190℃的时间介于60~120 s,往往忽略了是温度上升过程而写成整个温度介于150~190℃的时间.

### 8) 间端区面积

部分论文将第3问的面积理解为温度大于217℃的面积,这是与题不符的.

### 9) 双目标优化的目标函数设置

在第4问中将曲线的镜像对称程度用一个合理的目标函数来刻画是一个重要的考察点.将尖端区面积和镜像误差进行合理的加权相加,是一种处理双目标规划的解决方案.由于面积和对称程度不是

同一量纲, 故需“去量纲加权相加”.

## 5 有待进一步深入研究的问题

回焊炉预热完成后焊接区域温度场是假设出来的, 具有一定的合理性, 但并没有测量数据来直接支撑这一假设. 在整个模型的构建中, 这是最开始的一环, 回焊炉预热完成后焊接区域的温度场温的分布将会是一个有意义且重要的课题.

## 参考文献

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2020 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. [2021-01-22]. [http://www.mcm.edu.cn/html\\_cn/node/10405905647c52abfd6377c0311632b5.html](http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/10405905647c52abfd6377c0311632b5.html).
- [2] 中国大学生在线. 2020 年全国大学生数学建模竞赛论文展示[EB/OL]. [2021-01-22]. <http://dxs.moe.gov.cn/zx/qkt/sxjm/lw/2020qgdxssxjmlwz/>.

## Mathematical Model and Solution of Furnace Temperature Curve

SHEN Jihong<sup>1</sup>, CAI Zhijie<sup>2</sup>, LI Xiaole<sup>1</sup>

(1. College of Mathematical Sciences, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

2. College of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** Under some simplified assumptions, the mathematical model of furnace temperature curve is given. The maximum furnace speed at a given temperature setting is obtained. The setting of temperature and passing speed of the optimal curve are discussed. Finally, the comments on the student's solution papers of 2020CUMCM problem A have been given.

**Key words:** automatic welding; furnace temperature curve; objective optimization

## 作者简介

沈继红(1966—), 男, 博士, 哈尔滨工程大学数学科学学院教授, 研究领域包括计算数学、应用数学及运筹学与控制论方面, 目前重点在优化算法及系统建模方面从事研究工作.

蔡志杰(1968—), 男, 博士, 复旦大学数学科学学院教授, 研究方向为工业应用数学.

李晓乐(1990—), 男, 博士, 哈尔滨工程大学数学科学学院讲师, 研究方向为变限积分法和间断有限元法以及海洋环境数值模拟.