

针对穿越沙漠问题的最佳决策和最优策略的建模研究

张步昇¹ 田帅军¹ 张艳霞²

(1.山西农业大学农业工程学院,山西 晋中 030800;

2.山西农业大学动物医学学院,山西 晋中 030800)

【摘要】随着新时代教学方式的不断改革、科学和社会发展的需要,我国大学生越来越注重创新精神和实践能力的培养。全国大学生数学建模是以学生为主,教师为辅开展的竞赛活动,学生可以通过查阅已有文献收集资料先独立思考再进行团队讨论,利用数学建模的方式对所提出的问题进行求解。这种实践性很强的团队竞赛融入了很多学科的知识,它以一种新时代学生普遍愿意接受的形式,摆脱了数学课本上枯燥、古板、无味的旧面孔。同时它也搭起了数学与实际问题的桥梁。论文对2020年全国大学生数学建模竞赛B题“穿越沙漠”问题一中第一关卡进行了深入分析和探讨,通过数学建模的方式确立了最优策略模型,再结合Dijkstra算法思维对该路径模型进行优化处理,在满足题中各种约束条件的基础上,阐述了思考的问题,并提出了相应的解题思路,给出了最佳分配策略。

【关键词】Dijkstra 算法;穿越沙漠;数学建模;最优策略

中图分类号:O221.1

文献标识码:A

DOI:10.19694/j.cnki.issn2095-2457.2021.04.62

1 “穿越沙漠”问题的提出

一名玩家在已知每天天气状况的条件下,给出30天之内到达终点的最优路径和资源分配的最佳方案。玩家根据地图提示,从起点出发,利用初始资金购买资源在沙漠中行走。路途中可能会遇到不同天气,若遇到沙暴天气玩家即可以停留在原地,也可以选择挖矿。将停留在原地所消耗的资源数为基础消耗量,若在沙暴天气挖矿即为基础消耗量的3倍,但其可获得基础收益。若玩家资源不充足可用剩余的初始资金或挖矿所得的资金购买,但是每箱价格为基准价格的2倍。若到达终点时资源还有剩余可按每箱基准价格的一半退回。目的是在满足上述条件下回到终点尽可能多的保留资金。

题目中提到的地图线路以及相关的各种信息提示,包括每天的天气状况、初始资金、资源的价格和质量、在不同天气不同行为条件下消耗的资源配比和挖矿的收益等信息,皆出自2020年全国大学生数学建模竞赛B题关于“穿越沙漠”问题的探讨,读者可根据所需自行查阅。

2 整体思路的构想

经分析认为,该问题为最短路径和最优决策问题。从起点到终点有许多条路径可供选择,先用穷举法确定有限个最优路径方案,再用Dijkstra算法求出任意两个区域的最小距离,最后用定量分析购买水和食物数量的最佳方案。在行走过程中由于天气变化、物资是否充足、挖矿天数和负重上限等因素均会影响

最优路径的选择。该问题为了达到最终剩余资金最大化的目的,基于资源的最佳分配下的最优路径,结合Dijkstra算法规划下最优路径的假设,对于此我们分开讨论。

3 模型的建立与求解

3.1 Dijkstra 算法规划下最优路径的假设

由地图提出基于最佳资源配置下的最优路径的假设:起点→村庄→矿山→村庄→终点。

3.2 针对最优路径假设的建模分析

不考虑天气的情况下,在基于该路径的算法并结合题中提供的地图可得:

(1) 起点到村庄再到矿山也需要花费8天时间,其部分路线图规划方案如下:

1-25-24-23-21-9-15(村庄)-13-12(矿山)

1-25-24-23-21-9-15(村庄)-14-12(矿山)

1-25-24-23-22-9-15(村庄)-13-12(矿山)

1-25-24-23-22-9-15(村庄)-14-12(矿山)

(2) 从矿山到村庄的路径可以通过上述村庄到矿山的路径反向推出,从矿山到终点的路径基于Dijkstra算法简化可以得出即:15(村庄)-9-21-27(终点)。

考虑天气的情况下,从起点到村庄最少需要用6天时间,前6天时间里有一天沙暴天气,所以在原来的基础上加上1天;在此基础上考虑到第7天还是沙暴天气,所以在原来7天的基础上加上1天,也就是说首先从起点到村庄总共需要消耗8天时间,其中6天行走,2天在原地停留。从村庄到矿山需要花费2

天时间。从矿山到终点需要花费 5 天时间。由于到达矿山后再次进行路线模拟假设。假设第一次到达村庄时挖矿 7 天,休息 1 天,随后路经村庄直接到达终点。基于该路径的模型下,显然挖矿的天数达到 7 天时总体收益达到最大,因此挖矿七天后选择放弃继续挖矿,剩余资源正好可以满足再次到达村庄的需求,在村庄再次购买正好满足到达终点的资源即可,这样一来就使得到达终点时剩余资金最大化。

3.3 确定资源实时利用的最佳分配

前提假设:(1) 满足上述路径方案且保证到达终点的条件下,总共需要花费 24 天的时间,即第 24 天正好到达终点;(2) 在起点购买的食物和水必须能保证到达村庄所需要的基础消耗,由于从起点到村庄最少需要用 6 天时间,前 6 天时间里有一天沙暴天气,所以在原来的基础上加上 1 天;在此基础上考虑到第 7 天还是沙暴天气,所以在原来 7 天的基础上加上 1 天,也就是说首先从起点到村庄总共需要消耗 8 天时间,其中 6 天行走,2 天在原地停留;通过简单计算可以求出在这种既定的时间天数和天气的条件下,总共需消耗水 98 箱,食物 98 箱,总负重为 490 kg,总花费 1 470 元,剩余资金为 8 530 元。

在此基础上我们考虑到在村庄购买水和食物是在起点购买费用的 2 倍,且食物的基准价格相对于水的基准价格更贵,所以我们设置最初在起点购买水和食物时,在满足基础消耗的前提下,将负重利用率达到最大,假设还可以购买水:食物为 1:2,考虑到剩余 150 kg 达到最大负重上限 1 200 kg,所以可以再次买 75 箱食物,同理通过简单计算可以求出还可以带水 80 箱,食物 235 箱,总负重 710 kg,总花费 2 750 元,剩余资金为 5 640 元;假设上述方案为起点购买水和食物的最佳方案,这样的话总体在起点需要购买水 178 箱,食物 333 箱,总负重 1 200 kg,总花费 4 220 元,剩余资金 5 780 元。

到达村庄后需要对食物和水进行再次购买,此时考虑到下次再回到村庄补给所需的基础消耗,且需满足尽量避免沙暴天气行走,可以选择第 20 天停止挖矿,再次回到村庄进行补给,这样的话,不仅可以避免在往返村庄时遇到沙暴天气,而且同时也能确定这段时间内需要的挖矿时间为 7 天,那么这条路径下的时间和资源的分配也就可以通过简单的计算求出来,即整体这段时间内行走 4 天,原地停留 2 天,挖矿 7 天,总共用时 12 天,在这段时间的基础消耗为:水 245 箱,食物 217 箱,总负重为 1 169 kg,总花费 3 395 元,总收益 7 000 元。

所以在第一次到达村庄时需要补充水和食物必须能够满足村庄—矿山—村庄这条的路径的基础消

耗,在到达村庄时剩余的水 0 箱,食物 24 箱,总负重 48 kg,剩余资金不变为 11 150 元,由此可知,我们如果要满足上述的基础消耗,就必须保证需要再补充水 36 箱,食物再补充 16 箱,通过简单的计算可以知道这种现有的物资满足村庄—矿山—村庄这条的路径的基础消耗。

3.4 建模结果分析与核算

由简化后的线路图结合附件中已知的天气情况、剩余天数、剩余资金、总负重量等因素可以推算出当前条件下未来 3 天的最优线路安排为村庄—终点,通过算术简单计算可以求出在次路径下的基础消耗为:水 36 箱,食物 40 箱,总负重 188 kg,剩余资金数不变为 10 470 元。

由上可知,第二次到达村庄后需要补给的水和食物只要能够保证由村庄到终点线路的基础消耗即可,这样考虑的原因有以下两条:(1) 达到终点时水和食物正好消耗尽,不需要用留下的水和食物来推换资金,(2) 不会超出负重上限,同时花费保证最少。

所以在满足上述全部要求的条件下算出来的最优路径为:起点—村庄—矿山—村庄—终点,由此路径可以计算出 0~24 天每一天的具体剩余资金,剩余水量,剩余食物量;且最后在满足题目所有给出的条件下推算出来的尽可能保留的资金为 10 470 元。

综上所述:将关卡一整条路径所剩的资金、到达终点花费的时间、挖矿天数、是否超重进行核算,可知在规定的时间内且不超重的情况下该路径剩的资金最多,假设成立。

4 结语

通过对穿越沙漠问题的研究,让学生们更加重视基本理论和基本方法的学习,以及运用计算机建立数学模型解决实际问题的能力。尤其是学生们在建立数学模型时一定要严守结果的正确性和逻辑的合理性,走完解决问题的“最后一千米”。穿越沙漠本质上是一个物资合理化配给径和路最优化的综合性问题,其本身的约束条件多,涉及到物流、通信、TSP 问题、可以推广运用于军事领域的物资运输,解决疫情等紧急情况下的物资调配,线路规划等应用领域。

【参考文献】

- [1] 卜月华.图论及其应用[M].南京:东南大学出版社,2003.
- [2] 司守奎.数学模型算法与应用[M].北京:国防工业出版社,2011.
- [3] 陈昊.基于集合运算的最短路径搜索算法[J].计算机工程,2007(20):199-200+203.
- [4] 翁敏,毋海河,杜清运,等.基于公交网络模型的最优出行路径选择的研究[J].武汉大学学报:信息科学版,2004(6):500-503.