

静电平衡导体表面电荷分布的计算机模拟

中国科学技术大学
理学院05级物理1班
方向明
PB05203046

问题的提出

- 在静电场中，导体达到静电平衡时，表面电荷是怎样分布的？前苏联科学家朗道在《连续介质电动力学》中介绍了用正交曲线坐标系求解椭球体的例子。除此之外，除了极少数简单的情况可以根据静电场的唯一性定理，“凑”出一个或数个象电荷使系统满足边界条件，没有一种通用的方法。
-

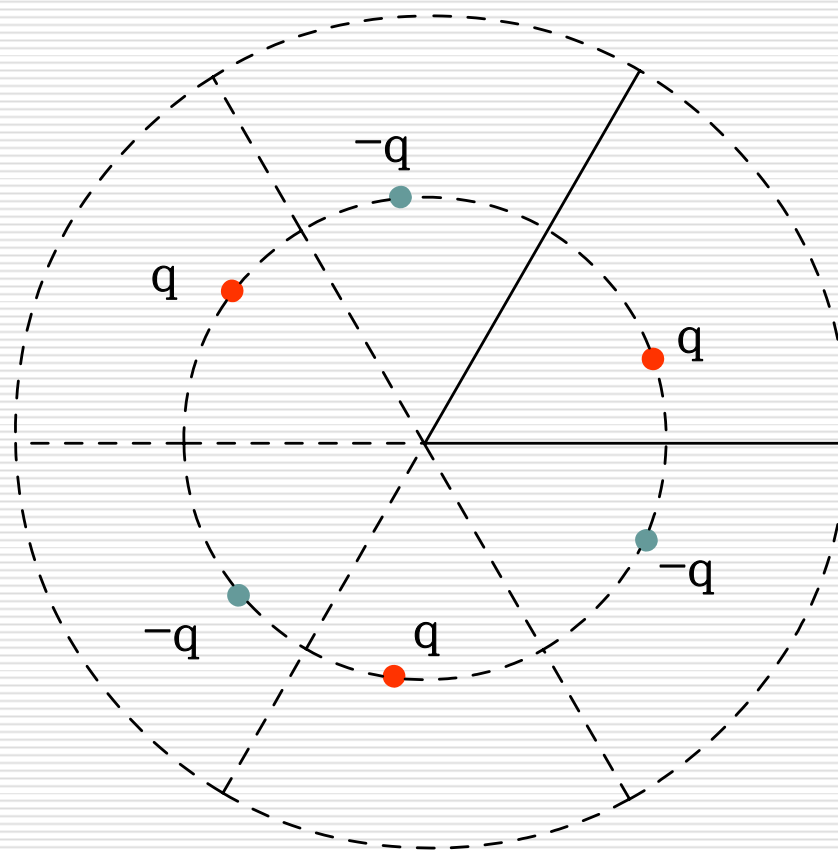
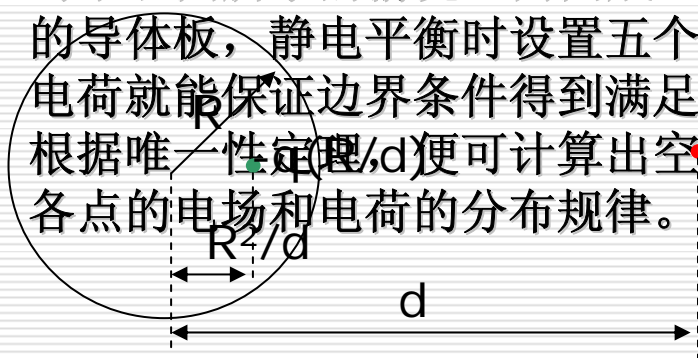
方法的提出

- 简单的问题往往给我们解决复杂的问题带来启发
 - 既然象电荷法可以解决简单的问题，那么，对于困难的问题，象电荷还适不适用？
 - 如果适用，又需要做怎样的改进呢？
 - 下面就让我们一起来探讨一下😊
-

方法的提出

对于在导体球外只放置一个点电荷的情况，只需在球内设置一个点电荷作为象电荷即可。

对于右图所示的情况，两面成 60° 的导体板，静电平衡时设置五个象电荷就能保证边界条件得到满足，根据唯一性定理，便可计算出空间各点的电场和电荷的分布规律。



方法的提出

- 基本思想:
 - 选取更多的象电荷!
-

问题的数学描述

- 假设外电场在空间处的场强度和电势分别为:

$$E = E(x, y, z);$$

$$U = U(x, y, z);$$

- 而导体表面的方程为: $F(x, y, z) = 0$;

- 在导体表面取 n 个参考点

$$a_1(X_1, Y_1, Z_1), a_2(X_2, Y_2, Z_2), \dots, a_n(X_n, Y_n, Z_n)$$

- 在导体内部取 n 个象电荷点

$$b_1(x_1, y_1, z_1), b_2(x_2, y_2, z_2), \dots, b_n(x_n, y_n, z_n)$$

- 各象电荷的电量分别为

$$q_1, q_2 \cdots q_n$$

- 记第 i 个象电荷点到第 j 个参考点的距离为 r_{ij} , 相应的向量记作 \vec{r}_{ij} ,

问题的数学描述

- 记第*i*个象电荷点到第*k*个参考点的距离为相应的向量记作则第*k*个参考点处所有象电荷的电势的和为：（注，为了方程的简洁，下面的推导均省略了系数 $-1/4\pi\epsilon$ ）

$$U_k = \sum_{i=1}^n (q_i / r_{ik})$$

- 对于每个参考点均有上式，可以写成矩阵的形式：

距离矩阵 **R**

电荷矩阵 **Q**

电势矩阵 **U**

$$\begin{bmatrix} 1/r_{11} & 1/r_{21} & 1/r_{31} & \cdots & 1/r_{n1} \\ 1/r_{12} & 1/r_{22} & 1/r_{32} & \cdots & 1/r_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/r_{1n} & 1/r_{2n} & 1/r_{3n} & \cdots & 1/r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

问题的数学描述

- 由于导体达到静电平衡的条件下，导体表面为等势面，且电势相差一个常数仍表示同一个电场。所以不妨令导体表面的电势为**0**。根据电势叠加原理：

$$U_i + U(x_i, y_i, z_i) = 0$$

- 从而，三个矩阵中两个矩阵均已知；

$$U_i = -U(x_i, y_i, z_i)$$

- 即可解出电荷矩阵：

$$Q = R^{-1} \bullet U$$

解决思路

- 但是仅仅解出还不能肯定这些象电荷是合适的，因为我们只知道在参考点上满足边界条件，在表面的其他点上还有待验证。
 - 所以，在表面上取一系列验证点 $T_1, T_2 \cdots T_n$ ，然后用象电荷计算这些点电势，并和验证点处的外电势的相反数进行比较，观察误差，如果不满足精度要求，就需要进行调整，可以增加象电荷的数量，也可以改变象电荷的位置。但是，并不是象电荷越多越好，实际计算时会发现，如果象电荷太多，两个象电荷的距离就会很近，于是对应不同参考点的距离也很近，即矩阵中相邻两行的对应项很接近，矩阵的行列式很小，计算不准确（设想两个点足够接近，以至于在计算机的双精度范围内值是完全一致的，那么行列式为零，逆矩阵不存在）。
-

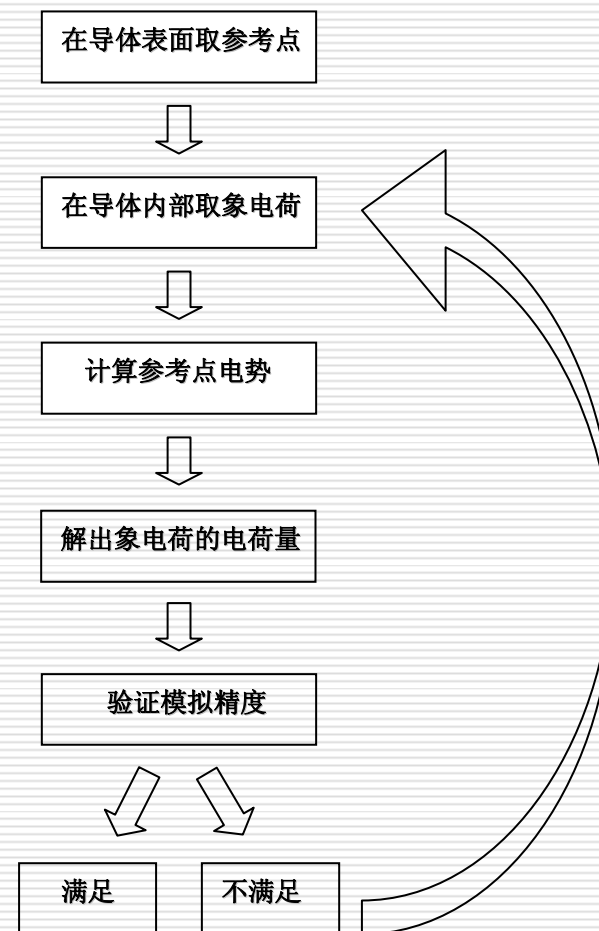
解决思路

大致的流程可以归纳为如下的流程图，也可作为程序的流程图：

编程与可视化使用的主要是

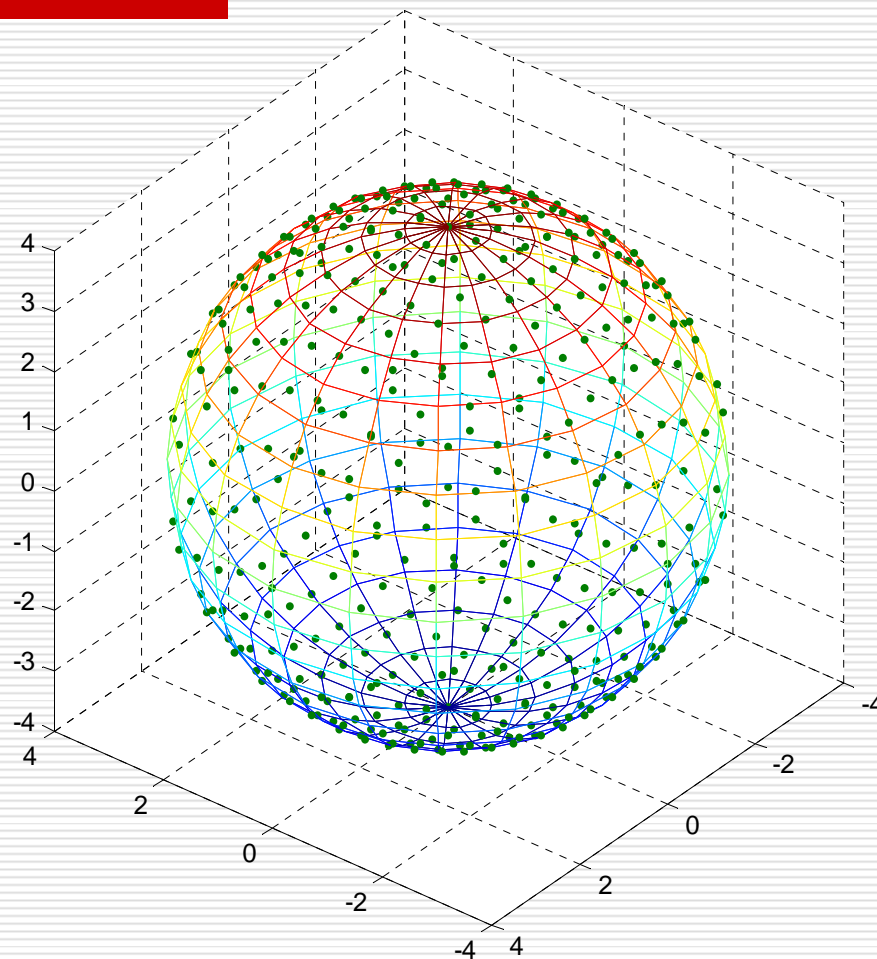


MATLAB



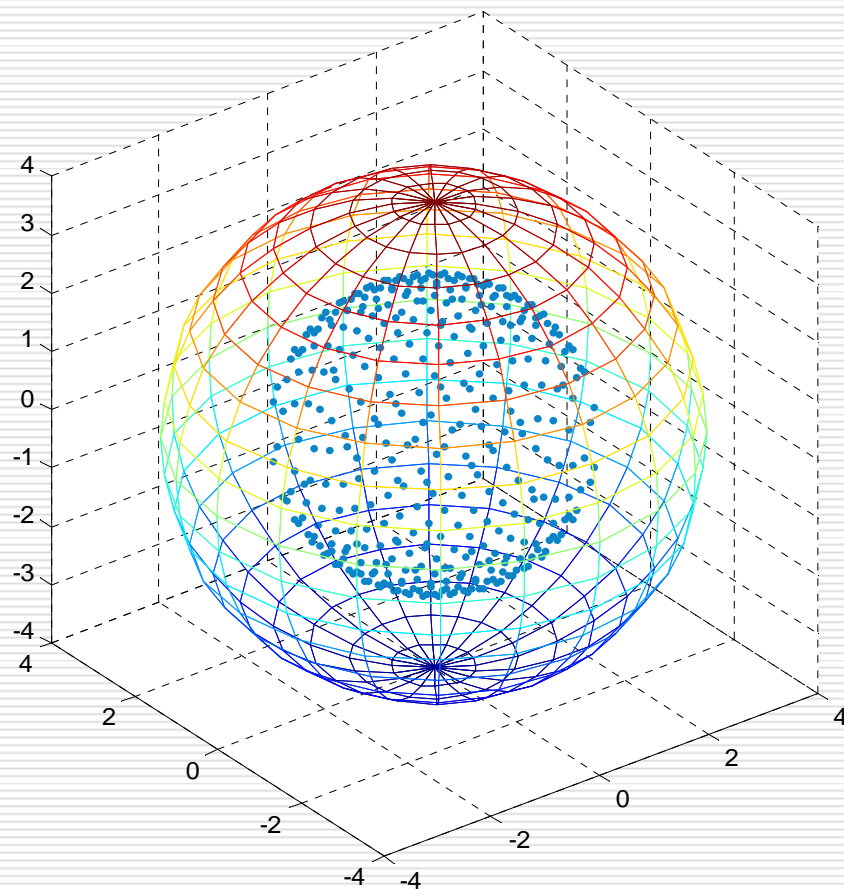
方法的应用

- 一、以球体为例考虑单位匀强电场（场强 $E=1$ ）中电荷的分布（之所以选择这样一个比较简单的问题，是因为它有解析解，可以用模拟解和理论解进行对比）
- 1. 首先在表面取参考点：图中球面上的蓝色点标记的是在表面取定的参考点。



方法的应用

- 2.在球体内部取象电荷点：
图中蓝色点标记的为象电荷的位置；是将对应的参考点向里收缩0.6倍得到的，这种方法虽然简单，但是效果非常好。（这是多次尝试后的小经验，这个比例好像比较好，在各种问题中使用这个比例一般多能得到较好的结果）



方法的应用

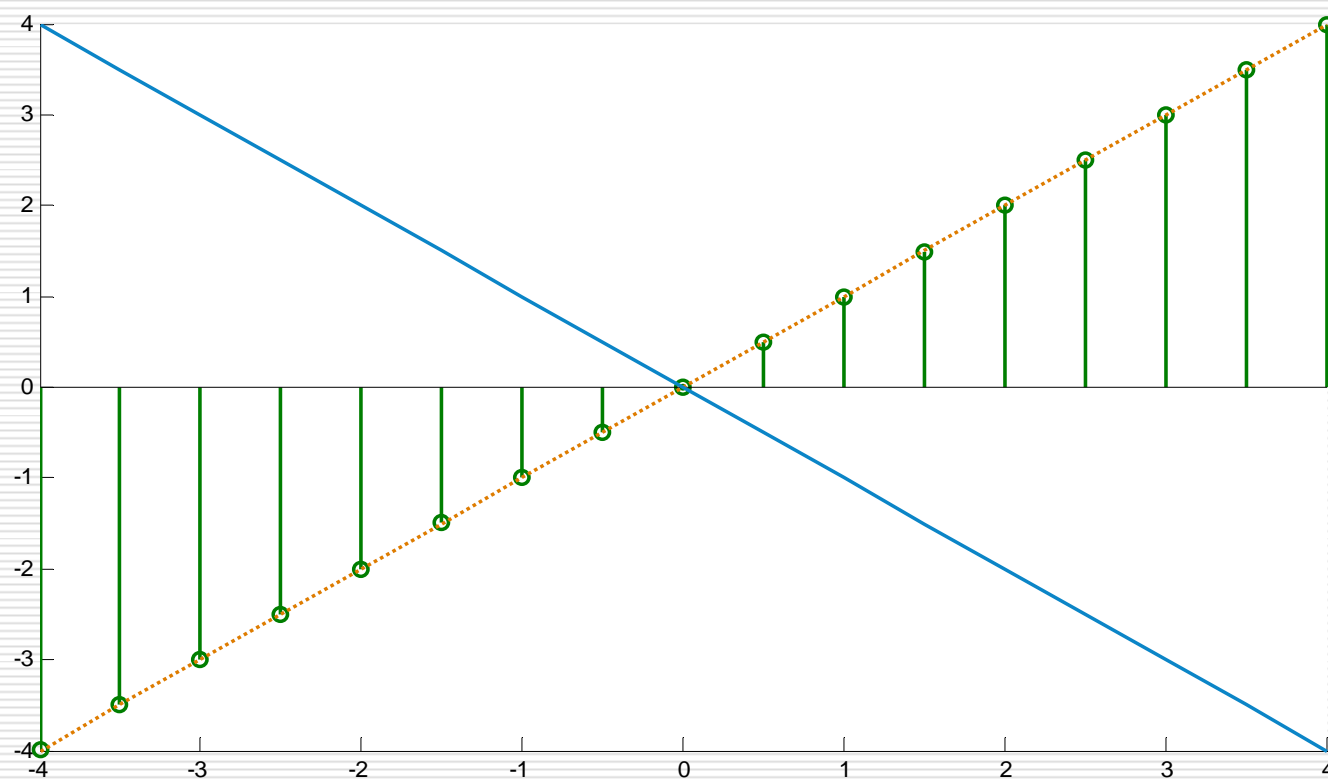
□ 3.使用MATLAB计算出各象电荷的电量并取验证点加以验证

验证点取为平面内 Z 每隔0.5单位取一个点，下表中第一行是 Z 坐标，由于是沿 Z 轴的单位匀强电场，故 Z 坐标的值即为外场的电势，第二行是象电荷在验证点的电势)

Z坐标	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
象电荷电势	-4.0000	-3.5000	-3.0000	-2.5001	-2.0001	-1.4984	-0.9965	-0.4970	-0.0000
Z坐标	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-3.5	-4	
象电荷电势	0.4970	0.9965	1.4984	2.0001	2.5001	3.0000	3.5000	4.0000	

方法的应用

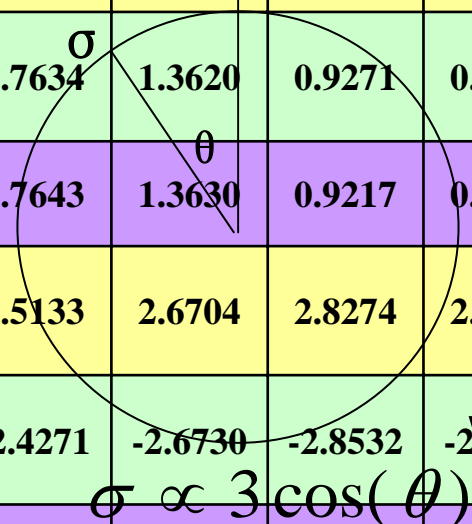
□ 下图形象的表明了两者的关系，可见验证点处的电势是很精确的。



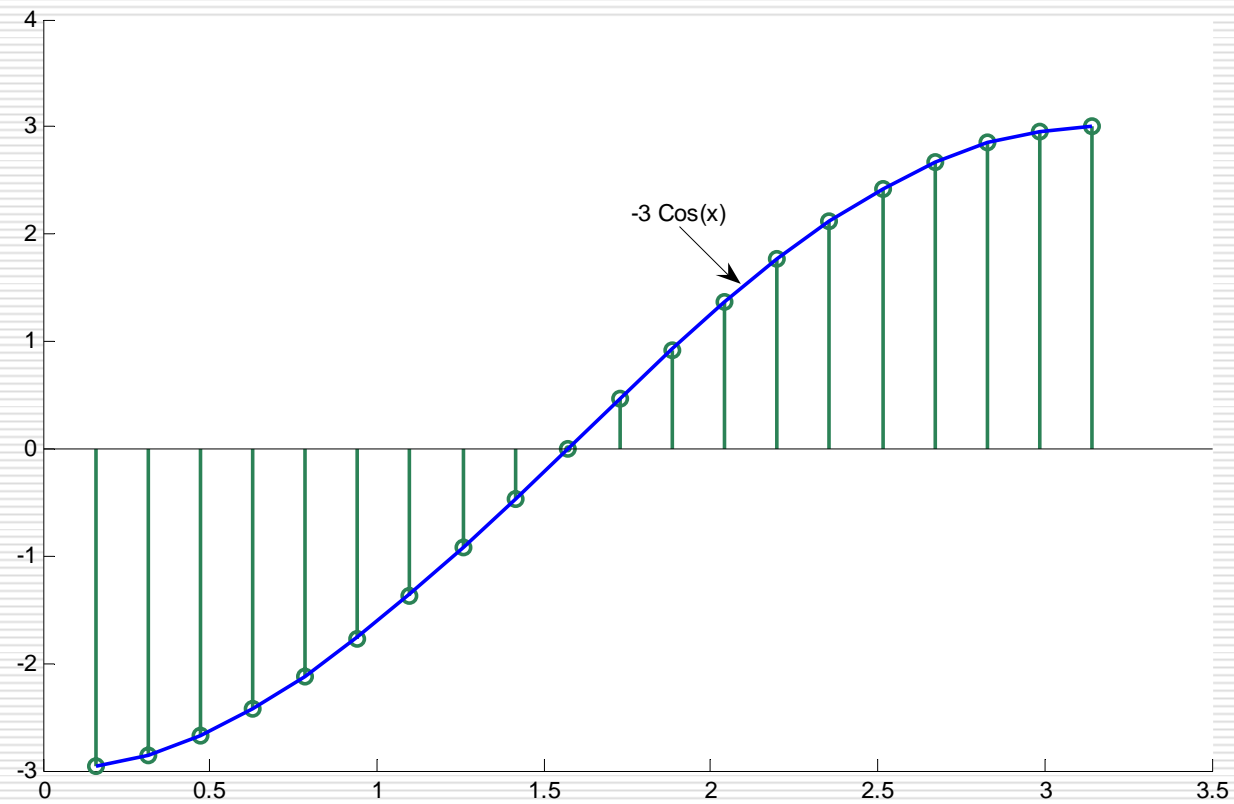
方法的应用

- 而电磁学理论告诉我们，这种情况下，电荷面密度和辐角满足余弦函数关系；不妨将理论值和模拟计算的结果作在一幅图里对比一下：

θ	0.1571	0.3142	0.4712	0.6283	0.7854	0.9425	1.0996	1.2566	1.4137	1.5708
$3\cos(\theta)$	2.9631	2.8532	2.6730	2.4271	2.1213	1.7634	1.3620	0.9271	0.4693	0.0000
电场强度	2.9631	2.8532	2.6730	2.4272	2.1211	1.7643	1.3630	0.9217	0.4616	0.0070
θ	1.7279	1.8850	2.0420	2.1991	2.3562	2.5133	2.6704	2.8274	2.9845	3.1416
$3\cos(\theta)$	-0.4693	-0.9271	-1.3620	-1.7634	-2.1213	-2.4271	-2.6730	-2.8532	-2.9631	-3.0000
电场强度	-0.4616	-0.9217	-1.3630	-1.7643	-2.1211	-2.4272	-2.6730	-2.8532	-2.9631	-3.0000



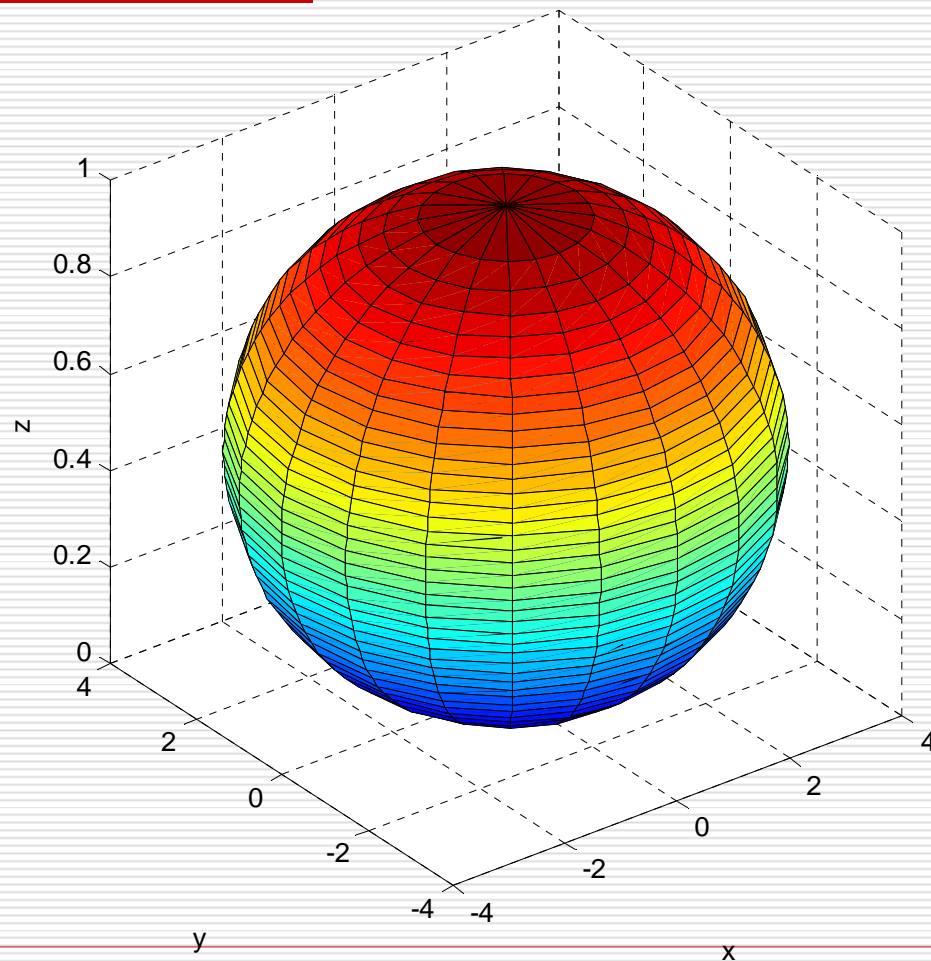
方法的应用



□ 即与理论值完全吻合

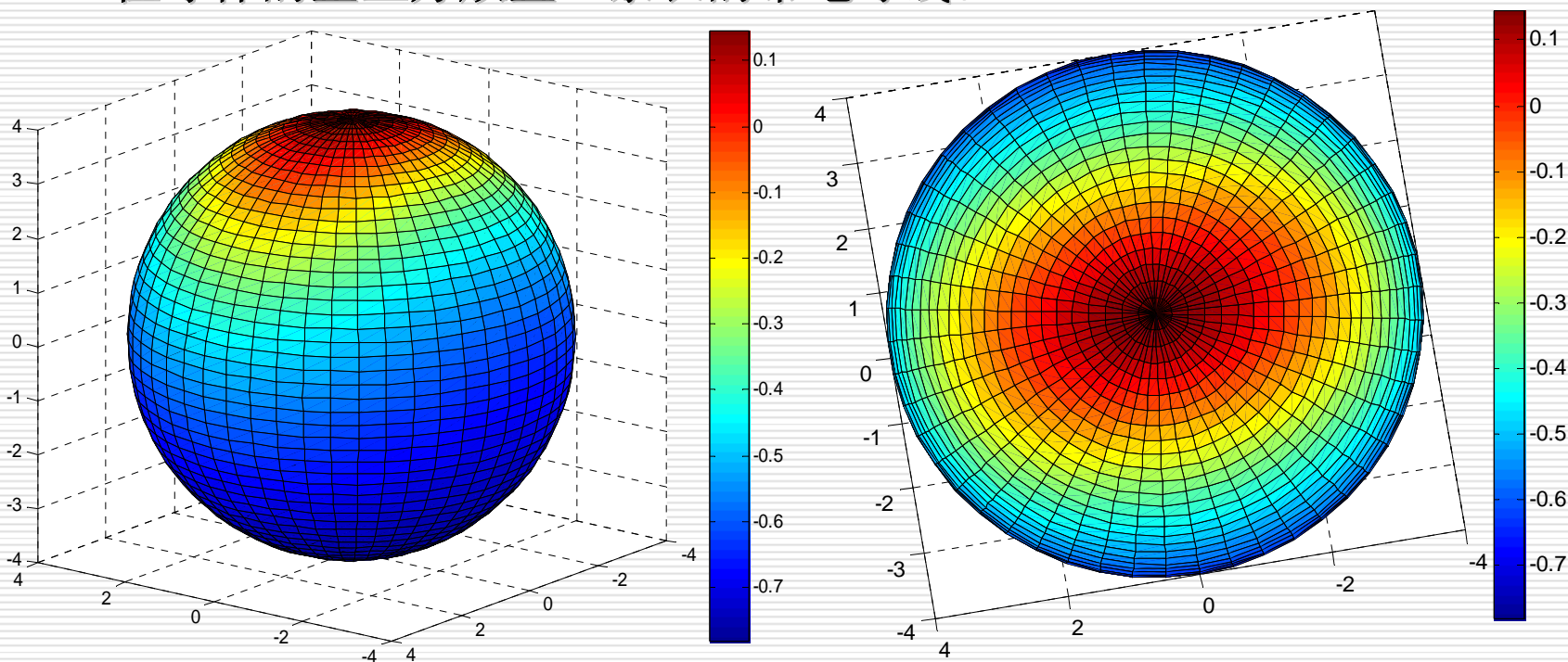
方法的应用

- 最后，用不同的颜色区分电荷的正负与面密度，得到一张形象的电荷密度分布图：



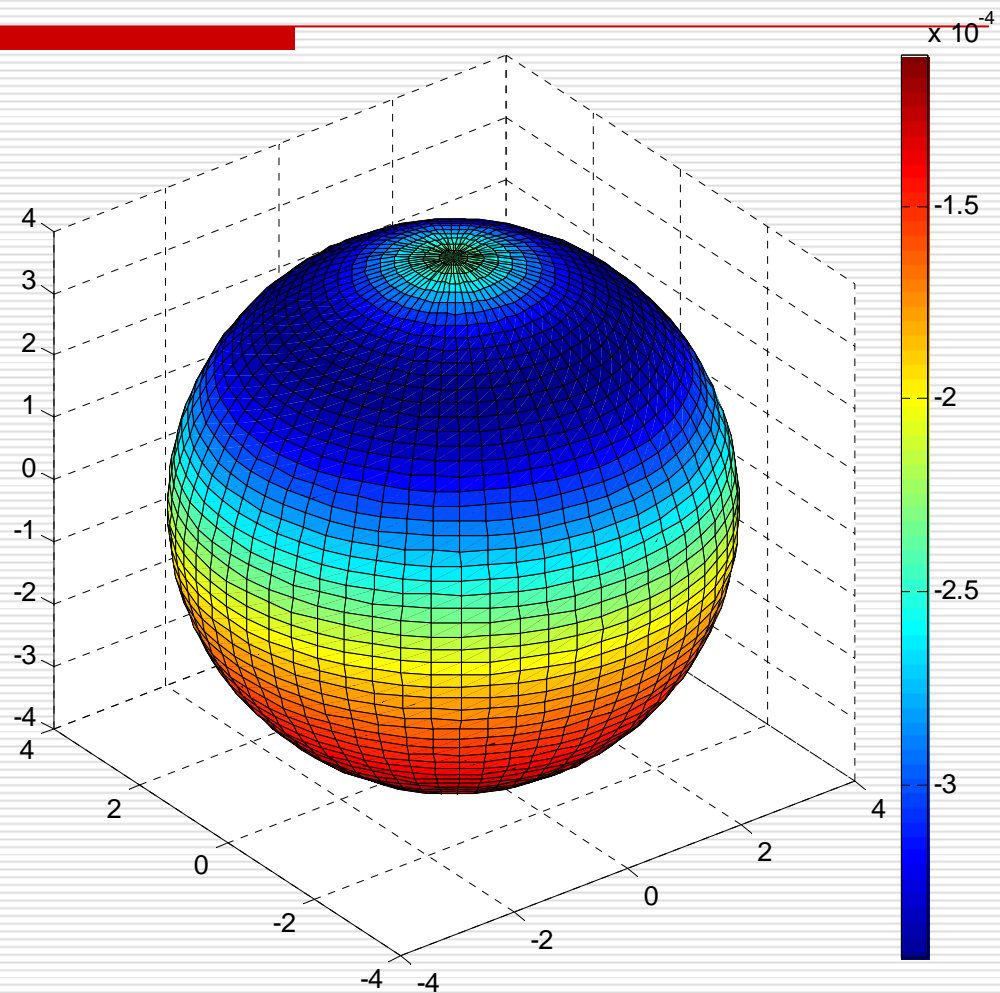
更多的计算结果

- 既然这种方法是正确可行的，就不妨用它来看看其他一些情况下的电荷分布：
- 在球体的正上方放置一条长的带电导线：



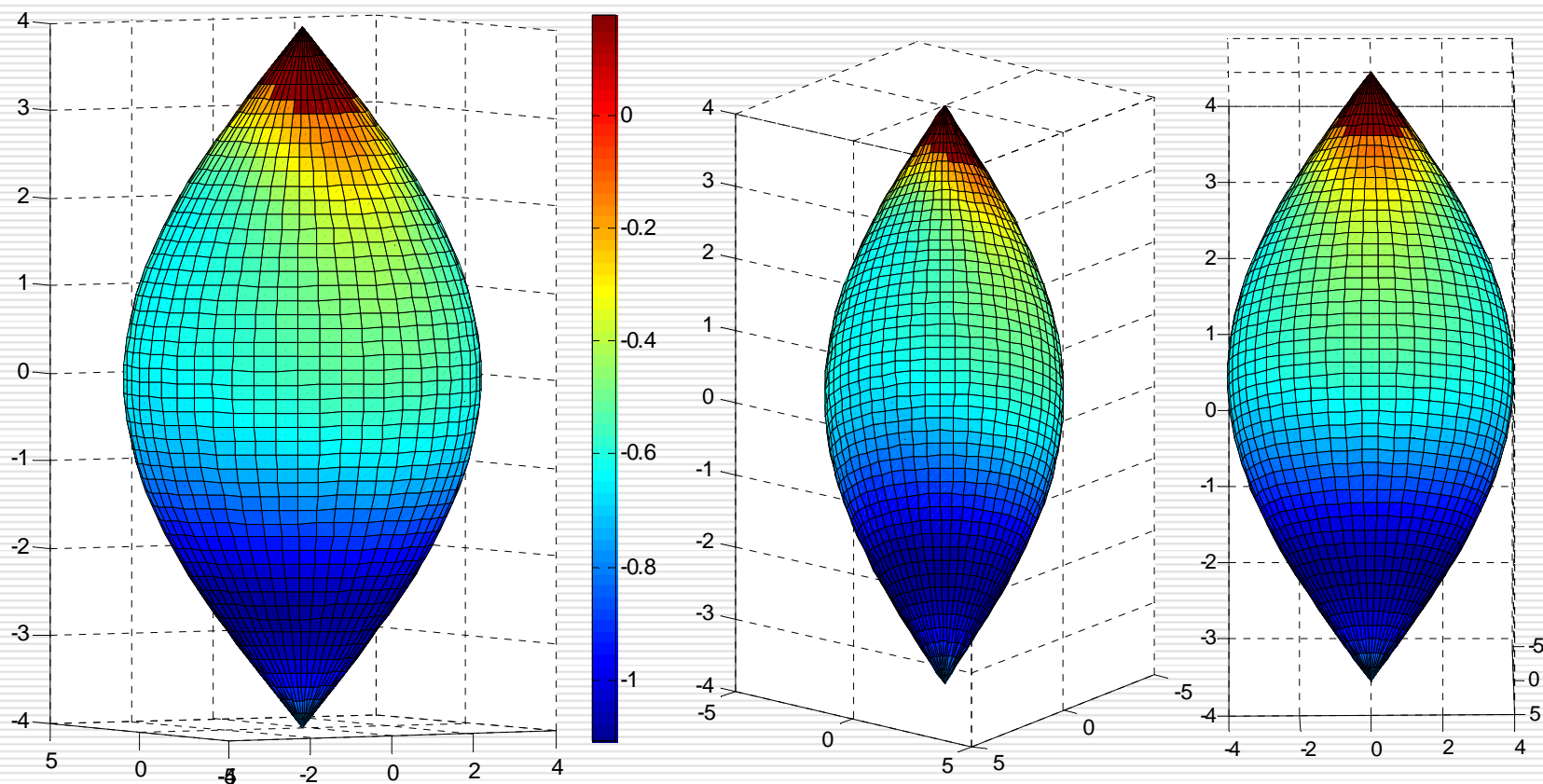
更多的计算结果

□ 球体对电偶极子的感应电荷分布



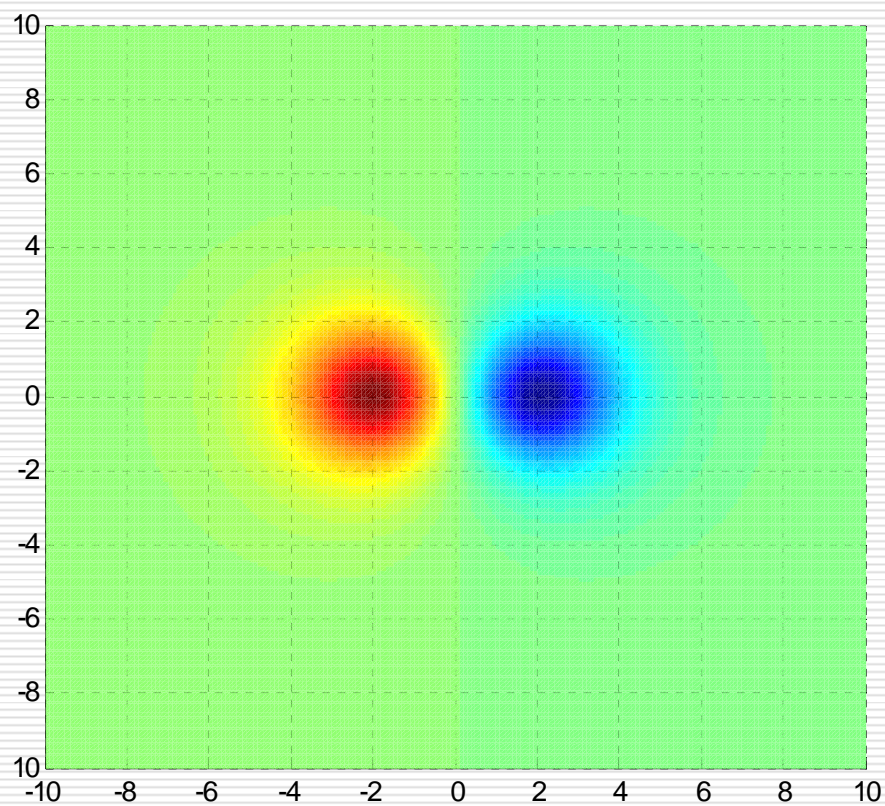
更多的计算结果

□ 在梭形的正上方放置一条长的带电导线:

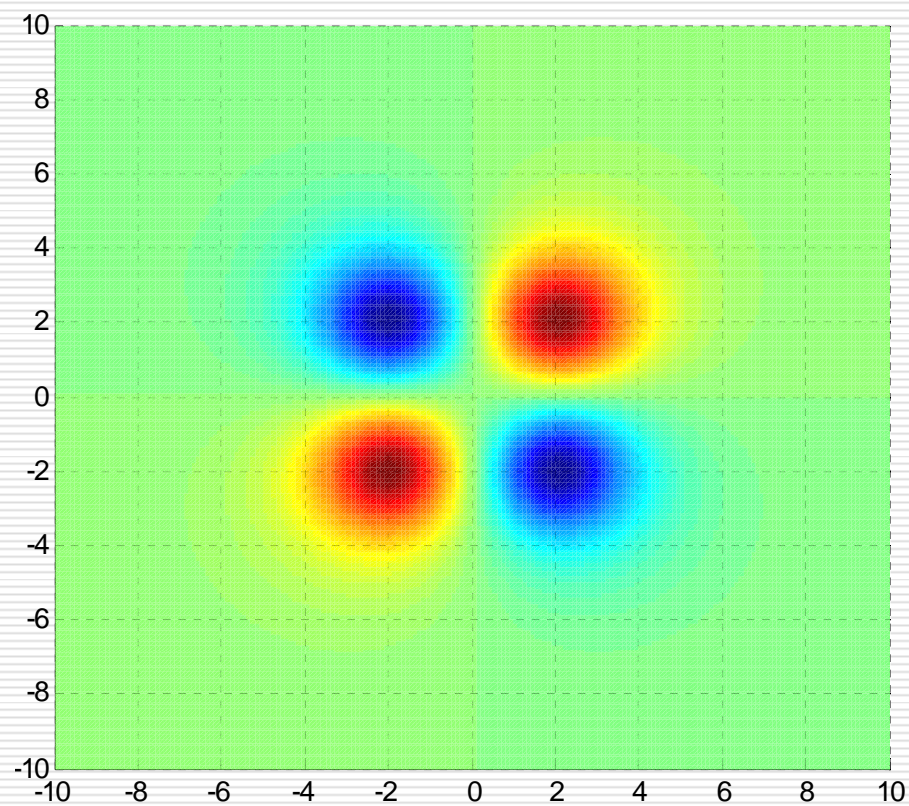


更多的计算结果

□ 导体板对电偶极子

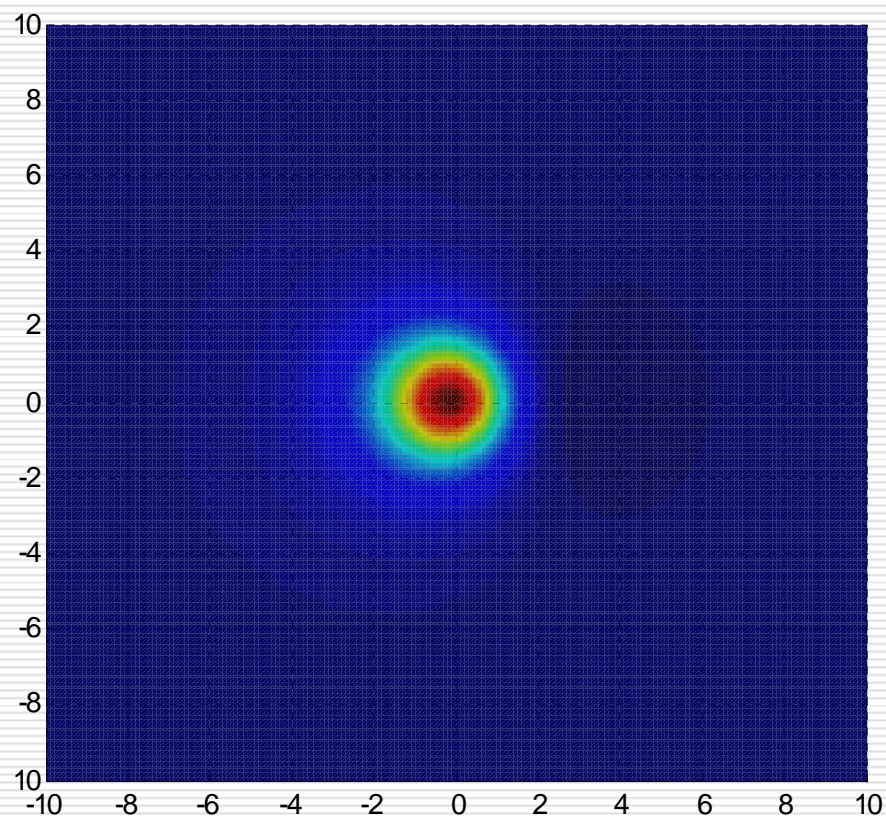


□ 平行平板的电四极子

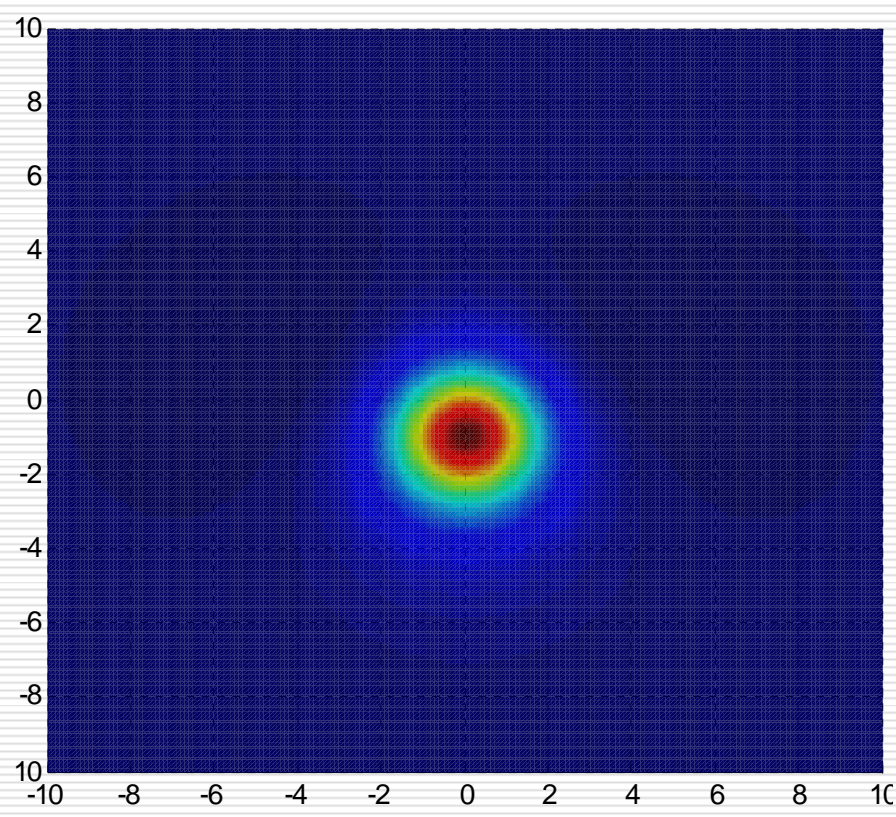


更多的计算结果（调整了对比度）

□ 倾斜的电偶极子



□ 倾斜 20° 的电四极子



感叹

- 自然界精确的完成静电平衡的电荷移动只需要 10^{-9}s
 - 而我们仅仅计算一个近似解，就比这个慢**7~8**个数量级
 - 大自然太神奇了！
-

参考文献

- [1] 胡友秋 程福臻 刘之景 电磁学 1992 合肥
 - [2] 秦家桦 经典力学 1991 合肥
 - [3] 郭 翔 郑晓静 周又和 导体表面电荷分布的计算方法研究 兰州大学学报(自然科学版) 文章编号: 0455—2059(2003)02—0031—04
 - [4] 马向国 顾文琪 基于MATLAB语言的静电场模拟电荷法分析 电瓷避雷器 2005 11 3 文章编号: 1003—8337(2005)03—0041—06
 - [5] 葛永斌 田振夫 马红磊 三维泊松方程的高精度多重网格解法 应用数学 2006. 19(2): 313~318
 - [6] MATLAB 7.0基础教程 清华大学出版社
 - [7] Mathematic全书 西安交通大学出版社
-

感谢😊

- 叶邦角教授
 - 张仁友副教授
 - **05级物理一班的全体同学**
-

Thank you!

□ 谢谢大家

