文章编号:1671-1513(2003)03-0059-02

关于静电平衡导体表面电荷分布规律的研究

王秀娥
(北京工商大学 基础部,北京 100037)

摘 要:采用椭球坐标系,选典型二次曲面——单叶双曲面作为导体表面,定量分析出在静电平衡条件下,导体表面上面电荷密度的分布规律,进而说明:一般条件下,导体表面的电荷密度与其曲率并不成正比.

关键词:椭球坐标;电势;面电荷密度;曲率
中图分类号:O441.1 **文献标识码**:A

由于要用到比较复杂的数学运算,因而,在一般物理书中,关于达到静电平衡后,导体表面电荷分布的规律都未做定量分析,只是定性指出:静电平衡导体表面的电荷密度与其曲率有关,曲率越大,面电荷密度越大. 并常以两个相距很远的导体球用导线相连为例,说明静电平衡后,球面上的电荷密度与球面的半径成反比. 此结果难以理解,甚至导致误解:静电平衡导体上的面电荷密度与其曲率成正比. 为了深入、确切地理解静电平衡导体表面上的电荷分布规律,作者定量研究了静电平衡导体表面——单叶双曲面上的电荷分布与其曲率的关系.

采用椭球坐标系,取 $-b^2\leqslant\eta\leqslant-c^2$,因为 $c^2+\eta\leqslant 0$,所以,二次曲面[1]

$$\frac{x^2}{\eta+a^2}+\frac{y^2}{\eta+b^2}+\frac{z^2}{\eta+c^2}=1 \tag{1}$$

是以 z 轴为对称轴的单叶双曲面. 如果电势 $U=U(\eta)$,那么,任一张单叶双曲面($\eta=$常数)均为等势面,并且 $\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{\partial U}{\partial\zeta}=0$. 利用在椭球坐标系下电势的拉普拉斯方程[2],得到单叶双曲面的电势满足

$$\left(\frac{1}{\eta+a^2}+\frac{1}{\eta+b^2}+\frac{1}{\eta+c^2}\right)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\eta}+2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\eta^2}=0$$

令 $p=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\eta}$,得

$$\left(\frac{1}{\eta+a^2}+\frac{1}{\eta+b^2}+\frac{1}{\eta+c^2}\right)p+2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta}=0$$

即 $$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta+a^2}+\frac{1}{\eta+b^2}+\frac{1}{\eta+c^2}\right)\mathrm{d}\eta$$

$$\therefore p=\frac{-A}{\sqrt{(\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)}}$$

其中 A 为常数. 令 $R_\eta=(\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)$,则

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\eta}=\frac{1}{\sqrt{|R_\eta|}}$$

由于在静电平衡条件下,导体表面外附近的电场强度 E 与该处导体表面上的面电荷密度 σ 满足

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

而电场强度可由电势的法向导数得到,所以,单叶双曲面上的电荷密度为

$$\begin{aligned}\sigma&=-\varepsilon_0\frac{\partial U}{\partial n}=\\&-\varepsilon_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)=\\&-\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\eta}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\eta}{\partial z}\cos\gamma\right)\end{aligned} \tag{2}$$

由(1)式求得

$$\frac{2x}{\eta+a^2}-\frac{x^2}{(\eta+a^2)^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{y^2}{(\eta+b^2)^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{z^2}{(\eta+c^2)^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$$

$$\therefore\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{2x}{(\eta+a^2)\Delta}$$

同理

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{2y}{(\eta+b^2)\Delta}$$

收稿日期:2002-10-10
作者简介:王秀娥(1957-),女,山东郓城人,副教授,主要从事表面物理的研究.

$$\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{2z}{(\eta+c^2)\Delta}$$

其中

$$\Delta=\frac{x^2}{(\eta+a^2)^2}+\frac{y^2}{(\eta+b^2)^2}+\frac{z^2}{(\eta+c^2)^2}$$

又当 $\eta=$常数时,由(1)式知曲面外法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{(\eta+a^2)\sqrt{\Delta}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{(\eta+b^2)\sqrt{\Delta}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-z}{(\eta+c^2)\sqrt{\Delta}}$$

代入(2),得

$$\sigma=\frac{2\varepsilon_0 A}{\sqrt{|R_\eta|}\,\Delta^{3/2}}\left(\frac{x^2}{(\eta+a^2)^2}+\frac{y^2}{(\eta+b^2)^2}-\frac{z^2}{(\eta+c^2)^2}\right) \tag{3}$$

为了找出导体表面电荷密度 σ 与其曲率 k 的关系,不妨设 $x=0$,则有

$$\frac{y^2}{\eta+b^2}+\frac{z^2}{\eta+c^2}=1$$

所以,对某个单叶双曲面($\eta=$常数),

$$z'=-\frac{\eta+c^2}{\eta+b^2}\cdot\frac{y}{z}$$

$$z''=-\frac{(\eta+c^2)^2}{\eta+b^2}\cdot\frac{1}{z^3}$$

$$\therefore\quad k=\frac{|z''|}{(1+z'^2)^{3/2}}=$$

$$\frac{1}{(\eta+b^2)(\eta+c^2)}\left(\frac{y^2}{(\eta+b^2)^2}+\frac{z^2}{(\eta+c^2)^2}\right)^{-3/2}$$

代入(3)式,得

$$\sigma=2\varepsilon_0 A\sqrt{\frac{(\eta+b^2)(\eta+c^2)}{\eta+a^2}}\cdot k\cdot\left(\frac{y^2}{(\eta+b^2)^2}-\frac{z^2}{(\eta+c^2)^2}\right)$$

由上式看出,一般情况下,静电平衡导体表面的电荷密度 σ 与其曲率 k 的关系是相当复杂的,并不成简单的正比关系.

参考文献:

[1] Л Д 朗道,E M 栗费席兹. 连续媒质电动力学[M]. 北京:人民教育出版社,1979.

[2] 王秀娥,于正河. 静电平衡条件下导体表面电荷分布的定量研究[J]. 山东纺织工学院学报,1995,10(增刊):92—96.

ON THE STUDY OF DISTRIBUTION RULE OF ELECTRIC CHARGES ON A SURFACE OF AN ELECTROSTATIC EQUILIBRIUM CONDUCTOR

WANG Xiu-e

(*Department of Basic Courses*, *Beijing Technology and Business University*, *Beijing* 100037, *China*)

Abstract: In this paper, with the aid of ellipsoidal coordinate system, choose one of the typical quadratic surfaces—— hyperboloid of single sheet as a conductor surface. We obtained the distribution rule of the surface density of electric charges on a conductor surface under the condition of electrostatic equilibrium quantitatively. With the result obtained in this paper, we got a conclusion: the density of electric charges on the conductor surface is generally not directly proportional to the curvature of the conductor surface.

Key words: ellipsoidal coordinate; electric potential; charge density; curvature

(责任编辑:王 宽)