烟台师范学院学报(自然科学版)
Yantai Teachers University Journal(Natural Science) 1998, 14(4): 317~320

教学研究

任意带电孤立导体表面电荷分布公式

栾殿桥　柳华国

(烟台教育学院物理系,烟台 264001)

摘要　给出了任意几何形状带电孤立导体在静电平衡条件下的面电荷密度分布公式,分析了公式的物理意义及适用范围.

中图法分类号　O44

对于如何确定带电孤立导体在静电平衡条件下的面电荷密度,许多文献对于规则的带电体(如椭球导体)的面电荷密度给出了计算公式和推导方法[1,2].对于不规则孤立带电导体且具有任意几何形状的连续曲率表面的面电荷密度,尚未见计算公式.本文推导出了计算公式,应用此公式,可很方便地计算出包括椭球导体在内的各种形状带电孤立导体在静电平衡条件下的面电荷密度.

1　公式的内容与证明

设带电孤立导体在静电平衡条件下所带的净电荷为 q,该导体的表面 S 为闭合凸曲面(图 1),且处处 Gauss 曲率 $K>0$,则其面电荷密度为

$$\sigma=\sqrt{K/K_0}\cdot\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\cdot\sigma_0,\tag{1}$$

或写作

$$\sigma=\frac{q\sqrt{K}\,(\cos\theta_0/\cos\theta)}{\oiint\sqrt{K}\,(\cos\theta_0/\cos\theta)\,\mathrm{d}S}.\tag{2}$$

公式(1)和(2)中的 σ 为 S 上任意一点(以下称考察点)处的面电荷密度,如图 1 中的 P 点处的面电荷密度,K 为考察点 P 处的表面 S 的 Gauss 曲率;而 σ_0 则为参考点(图 1 中的 P_0 点,可人为选定)P_0 处面电荷密度.K_0 为参考点 P_0 处表面 S 的 Gauss 曲率.过参考点 P_0 到考察点 P 引一条直线(以下称为联络线),其两端的指向矢量 $\boldsymbol{R}_0$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别与两端点处表面 $\boldsymbol{S}$ 的法线 $\boldsymbol{n}_0$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ_0 和 θ.

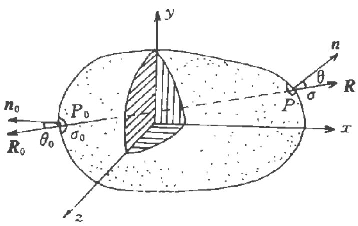

图 1　任意带电孤立导体

设想电荷 q 分布在一个孤立的单位导体球面 S^* 上,这个 S^* 可看作为是曲面 S 的法

收稿日期: 1998-01-05;改定日期: 1998-03-03

球面.已知 S是一个闭合凸曲面,因此,S^*与 S之间存在的映照是一一对应的.在此映照下,电荷分布所导致的力学平衡的空间同性是不变的.为了表示这种不变性,我们将 S^*与 S同时按立体角分成无限多个大小相等的立体角元:ΔK_1,ΔK_2,…,ΔK_i,且$|\Delta\Omega_1| = |\Delta\Omega_2| = \cdots |\Delta K_i| = \cdots = \Delta K$.这些立体角元在曲面 S上割出的面积元为ΔS_1,ΔS_2,…,ΔS_i,每个ΔS_i对应的$\Delta\Omega_i$都是以当地的 Gauss曲率 K的平方根 $\sqrt{K}$为半径且与ΔS_i相切的球面的球心为观察点的.于是有

$$\Delta S_i = \Delta K / K_i. \tag{3}$$

上述映照称之为 Gauss映照.

在这里,我们已经把曲面 S看作是一个力学平衡系统,即把 S想像成一个刚性的内部光滑的闭壳,其内部都充满大量粒子(例如电子),它们互相排斥.相互作用力程大于曲面 S的残度,斥力的大小则与粒子(电子)的某个特征量(例如电量)成正比.任何两个电子之间的斥力作用遵从牛顿第三定律.很显然,这些大量粒子在达到力学平衡后,都将分布在 S的表面上,并对 S施加"负压力",任何一对面元ΔS_i和ΔS_j上的粒子间的相互作用力应当相互抵消.

观察参考面元ΔS_0和考察面元ΔS,设参考点的压强为 p_0,ΔS_0上受到的压力即为$p_0\Delta S_0$,其方向同 $\boldsymbol{n}_0$,它在 $\boldsymbol{K}_0$上投影为

$$(p_0\cos\theta_0)(\Delta S_0\cos\theta_0) = p_0\Delta S_0\cos^2\theta_0.$$

同理,设考察点的压强为 p,则ΔS上受到的压力即为 $p\Delta S$,方向同 $\boldsymbol{n}$,它在 $\boldsymbol{K}$的投影为$(p\cos\theta)(\Delta S\cos\theta) = p\Delta S\cos^2\theta$.按牛顿第三定律,在达到力学平衡后,必有

$$p_0\Delta S_0\cos^2\theta_0 = p\Delta S\cos^2\theta. \tag{4}$$

将式(3)分别应用到参考面元ΔS_0和考察面元ΔS上,然后将结果代入(4)式,经整理得

$$(p_0/K_0)\cos^2\theta_0 = (p/K)\cos^2\theta. \tag{5}$$

又据文献[3,4]知

$$P_0 = (1/2)\varepsilon_0 E_0^2,$$

$$P = (1/2)\varepsilon_0 E^2, \tag{6}$$

$$E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0,\ E = \sigma/\varepsilon_0. \tag{7}$$

上述公式中的 ε_0为真空介电常数 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{n}_0$,$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{n}$,分别为曲面 S上参考点处和考察点处的电场强度.

将式(6)和(7)代入式(5)即得$\dfrac{\sigma_0^2}{K_0}\cos^2\theta_0 = \dfrac{\sigma^2}{K}\cos^2\theta$,因此有 $\sigma = \sqrt{K/K_0}\cdot\dfrac{\cos^2\theta_0}{\cos\theta}\cdot\sigma_0$.

公式(1)证毕.积分式(1),并令 $\oiint_S \sigma\,\mathrm{d}S = q$,则有

$$q = \oiint_S \sigma\,\mathrm{d}S = \oiint_S \sqrt{\frac{K}{K_0}}\cdot\frac{\cos^2\theta_0}{\cos\theta}\cdot\sigma_0\,\mathrm{d}S. \tag{8}$$

我们注意到积分是对考察点进行的,式(8)中的 K_0,σ_0均与考察点无关,可以提到积分号外,但 θ_0却与考察点有关,故有

$$\sigma_0 = \left(q \cdot \sqrt{K} \right) \Big/ \left(\oiint_S \sqrt{K} \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \cdot \mathrm{d}s \right) . \tag{9}$$

将式 (9)代入 (1)中 ,消去 $\sqrt{K_0}$,即得 $\sigma = \left(q \sqrt{K} \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \right) \Big/ \left(\oiint_S \sqrt{K} \cdot \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \mathrm{d}s \right)$.公式 (2)证毕 .

2 公式的物理意义及适用范围

1) 曲面 S的整体特性和局域特性对面电荷密度 σ的影响 .从公式及其证明中我们已经看到 ,应用本公式解决具体问题时必须引入一条联络线 ,它就集中反映了带电孤立导体表面—— 曲面 S的整体特性对 σ的影响 ,即带电孤立导体表面电荷分布与导体的几何形状有关 .这一整体特性的力学根源在于 ,对带电孤立导体这个系统来说 ,光滑内壁壳层的大量相斥电子在达到静电平衡后 ,两两之间距离之和必须取极大值 .

曲面 S的局域特性对 σ的影响集中反映在 $\sigma \propto \sqrt{K}$的关系上 .其中 Gauss曲率 K与两个主曲率 K_1和 K_2之间的关系为

$$K = K_1 \cdot K_2 . \tag{10}$$

上式中的 K_1和 K_2的意义是: 在曲面 S的某点处 ,过 S在该点的法线作一平面 ,它与 S相交成一条曲线 .将此曲线绕法线在曲面 S内旋转一周 ,会得到曲率的极大值和极小值 (设 $K_1 > K_2$) .可见 ,面电荷密度 σ不是与曲率成正比 ,而是与 Gauss曲率的平方根成正比 .对于本公式所要求的闭合凸曲面 ,即 $K_1 > K_2 > 0$,因而 , Gauss曲率 $K > 0$,其力学根源正如前述 ,系统是光滑内壁闭凸壳层中有大量相斥电子 ,它们是长力程地相互排斥 .作用力程越大 ,其稳定度越大 ,电子在那里停留的几率也愈大 ,从而使表面电荷密度 σ也愈大 .这就是曲面 S的局域特性 (不同局域 , Gauss曲率 K可能不同)对面电荷密度 σ的影响 .

为了得出本公式的适用范围 ,应当根据上述的力学根源分别讨论 $K = 0$($K_2 = 0, K_1 \neq 0$; $K_1 = 0, K_2 \neq 0$; $K_1 = K_2 = 0$)、 $K < 0$($K_2 < 0, K_1 > 0$)及凹曲面 $K > 0$($K_1 < 0, K_2 < 0$)等各种情形 .

2) $K = 0$时 , $\sigma = 0$. 由式 (10)易看出 ,只要 $K_1 = 0$,必有 $K = 0$. 为了简单 ,我们设 $K_1 = 0, K_2 > 0$. 从物理图象上讲 ,在这样的地方 ,某个电子由于受到其他电子的排斥作用 ,便会迅速溜到 $K \neq 0$处 .因此 ,在 $K = 0$处 ,必定有 $\sigma = 0$. 我们把 $K = 0$处称之为 K零区或 K零线或 K零点 .至于 $K_1 = 0, K_2 = 0$处 ,它就是包括平面在内的可展面 ,同样因电子间的斥力作用 ,不可能有电子存在 ,所以也属于 $\sigma = 0$的情形 .

3) $K < 0$时 ,亦有 $\sigma = 0$. 为了简单 ,我们假设 $K_1 > 0, K_2 < 0$,这样的点称之为鞍点 ,如图 2中的 P点 .很显然电子在这种点处更加无法站稳脚跟 ,必定会在其他电子的排斥下沿 $K_2 < 0$的沟道溜掉 .这样的点一般在凹处或洞中 .因此 , $K < 0$时 ,亦有 $\sigma = 0$.

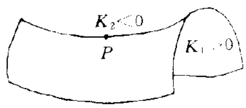

图 2　鞍形带电体

4) 凹曲面 $K > 0$($K_2 < K_1 < 0$) ,仍有 $\sigma = 0$. 显然 ,这种点必在凹坑之中 ,此时电子在这种点处也是无法稳定的 ,况且这种点必定被 $K < 0$区域所包围 (即被鞍区所包围) ,故仍有 $\sigma = 0$.

综合以上所分析可知,任何带电导体表面,除去 $K=0$ 区、$K<0$ 区及凹坑、洞穴之外,其余区域均可用本公式,上述几种区域的 $\sigma=0$.

例 用"分布公式"计算哑铃形状带电孤立导体在静电平衡条件下的面电荷密度.

分析 哑铃形状带电孤立导体(图3)其表面 S 被 Gauss 曲率 K 分成 $K<0$ 和 $K>0$ 两部分.图3中所画虚线 $ABCD$ 代表圆柱面,它所包围的哑铃导体表面为鞍面且设 $K_1>0$, $K_2<0$,因而 $K<0$.显然,在 $K<0$ 部分,由于大量电子相互排斥,电子必沿 $K_2<0$ 溜到 $K>0$ 表面部分,因此有 $\sigma=0$,所以该题归结为只需计算 $K>0$ 部分表面的电荷分布.然而,这里的 Gauss 映照并非一一对应的.为了使哑铃形带电孤立导体的 $K>0$ 部分表面构成 Gauss 映照,以便应用"分布公式"求出面电荷密度 σ,我们可用 K 零面即 $ABCD$ 圆柱侧面将哑铃导体表面的 $K<0$ 部分蒙起来,这时哑铃的 $K>0$ 部分表面与圆柱 $ABCD$ 的侧面一起可以想象成一个只有闭合凸曲面的导体,从而可用"分布公式"计算面电荷密度 σ.不过,计算结果的 σ 仅仅是哑铃的 $K>0$ 部分表面电荷密度,而哑铃的 $K<0$ 部分表面电荷密度显而易见,恒有 $\sigma=0$.应当补充的是,借助 $K=0$ 面,同样可将导体的凹坑、洞穴和 $K<0$ 面蒙上,从而将导体表面想像成闭合凸曲面,进而应用"分布公式"计算面电荷密度 σ.这种 K 零面又称为可展开面.

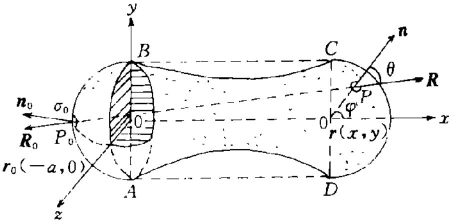

图 3 哑铃形带电体

解 在用可展开面对哑铃形导体的表面进行修复后,选取 $P_0(0,0)$ 点和 $P(x,y)$ 点分别为参考点和考察点.设哑铃球半径为 a,两球心间距为 c,则由图3易看出: $\boldsymbol{n}_0=(-1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\cos\theta, \sin\theta)$, $\boldsymbol{R}=[(a+c+a\cos\theta), a\sin\theta]$.参考点和考察点处 Gauss 曲率的平方根为 $\sqrt{K_0}=\sqrt{K}=a$.所以应用公式 $\sigma=\sqrt{K/K_0}\dfrac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\sigma_0$,即有 $\sigma=-\dfrac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}}\sigma_0=\dfrac{2a\cos^2(\theta/2)+c}{(a+c)\cos\theta+a}$.

当 $\theta=0$ 时,则有 $\sigma=\sigma_0$.当 $\theta=\pi/2$ 时,则有 $\sigma=\left(1+c/a\right)\sigma_0$.

讨论 式 $\sigma=\sigma_0$ 和 $\sigma=\left(1+c/a\right)\sigma_0$ 表明,电荷在哑铃形导体的 $K>0$ 表面的分布仍然不均匀,在 $\theta=\pi/2$ 处,有突变,即 $K<0$, $\sigma=0$; $K>0$, σ 最大且为 $\left(1+c/a\right)\sigma_0$.当 $c=0$,哑铃退化为圆球,此时由式 $\sigma=\left(1+c/a\right)\sigma_0$ 易得出 $\sigma=\sigma_0$,表明电荷均匀分布于球形导体表面.

参 考 文 献

1 ЛД朗道, E M栗弗席兹著.连续媒质电动力学(上册).北京:北京人民教育出版社, 1963. 29

2 W R斯迈思著.静电学和电动力学(上册).北京:科学出版社, 1981. 175

3 北京大学物理系理论物理教研室.电动力学.北京:人民教育出版社, 1961. 7

4 蔡圣善,朱耘.经典电动力学.上海:复旦大学出版社, 1985. 9

第一作者简介:栾殿桥,男, 42岁,大学专科,工程师.

(责任编辑 迟玉华)