对罗恩泽问题的探讨与发现

Inspiration From Laudau's Ellipsoid

徐九赐 PB16021529
指导老师：叶邦角 邓友金

— 目 录 —

CONTENCTS

理论篇

— 目 录 —

CONTENCTS

模拟篇

罗恩泽理论评述

罗恩泽利用导体等势的条件，沿导体两主曲率 方向取随动坐标架，导出了力线与平均曲率的关系：

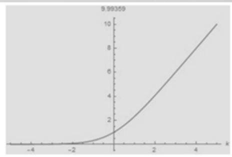
$$\frac{\mathrm{d}E}{dn}+2kE=0$$

然后他在他的第一篇文 章中直接得出

$$E=E_0e^{-2kn} \qquad \Delta \mathrm{V}=\frac{E_0}{2k}(e^{-2kn}-1)$$

表面电荷

$$\sigma=\varepsilon E_0=\frac{2\varepsilon k\Delta V}{e^{-2k\Delta n}-1}\Big|_{\Delta n->0}$$



给定$\Delta V<0$,由上式画出的σ-k图如图所示。该曲线表明，k为正时，k越大，σ也越大 k为负时，k越负则σ就越小

从椭球中得到的灵感

Laudau通过使用椭球坐标：

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$$

$u=\xi,\eta,\varsigma$

将Laplace方程化简为

$$\frac{d}{d\xi}(R_\xi\frac{d\phi}{d\xi})=0$$

得到椭球导体的面电荷分布：

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} x=\left[\dfrac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\varsigma+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ y=\left[\dfrac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\varsigma+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ z=\left[\dfrac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\varsigma+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

椭球的法向量：

$$\vec{n}=(bc\sin^2\theta\cos\varphi,ca\sin^2\theta\sin\varphi,ab\sin\theta\cos\theta)$$

$$=abc\sin\theta(\frac{\sin\theta\cos\varphi}{a},\frac{\sin\theta\sin\varphi}{b},\frac{\cos\theta}{c})$$

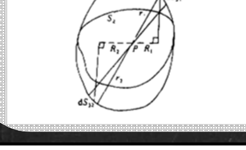
模$|\vec{n}|=abc\sin\theta\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$

电荷投影定理

定理1：静电平衡的孤立导体内有一点，过这个点作一个对顶椎体，则两个椎体底面上的电荷产生的场强等大反向。

证明：由唯一性定理可知成立

定理2（电荷投影定理）：将静电平衡的导体的电荷分布，往导体的某一截面作投影分布，则所得分布仍是静电平衡时的唯一分布



由投影定理，不难从椭球分布：

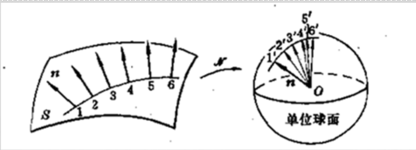
$$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

得到圆盘的分布

$$\sigma'=\frac{Q}{2\pi a}\left(a^2-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

电荷关联定理

- 介绍：（Guass映射）把可定向曲面的单位法向量（终点P）的起点平移到单位球的球心，得到单位球面上与P对应的一点P'。此映射叫做Gauss映射。



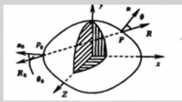
- 定理3（阿达马定理）M是$\Re^3$中的定向紧致无边缘的凸曲面，则高斯映射是一一的且在上的。

电荷关联定理

定理（电荷关联定理）：对于任意孤立凸导体，处于静电平衡状态，总电量为Q。选定其上一点P_0为参考点，P_0处的电荷面密度σ_0。

则对于导体上的异于P_0的参考点P，其上面密度满足：

$$\sigma=\sqrt{\frac{K}{K_0}}\left|\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\right|\sigma_0$$



其中，K，K_0是两点处的$Gauss$曲率，θ，θ_0是连线PP_0与两点处外法线方向的夹角。（注：定理的名字是笔者起的。本定理充分否认了面电荷分布只局域的依赖导体的几何性质的观点，而给出了导体上任意两点连线处电荷面密度必然相互关联的“全局”观点，因而名之为电荷关联定理）

证明：对于某一封闭导体S，设其$Gauss$映照下的法球面为S^*，设想电荷Q分布在S^*上。可以证明，在此映照下，电荷所引起的力的平衡效应具有空间同时性。为了表示这种不变性，我们同时将S^*与S分为一系列无限小立体角元$\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2$，$\Delta\Omega_3$.....，满足

$|\Delta\Omega_1|=|\Delta\Omega_2|=|\Delta\Omega_3|=......=|\Delta\Omega|$每个立体角元对应的面元为$\Delta S_1$，$\Delta S_2$，$\Delta S_3$......与$\Delta S_i$对应的立体角都是在以其所在处的高斯曲率$K$的平方根的倒数为半径的与$\Delta S_i$相切的球面的球心为观察点的。这里，我们得到：

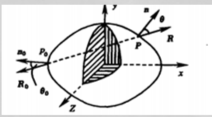
$$\Delta S=\frac{\Delta\Omega}{K}$$

视静电平衡的导体为一力学平衡系统，其内充满着大量相互排斥的粒子，力程远大于导体的线度，因而平衡时分布到导体表面，并对S面上产生负压强。设点P处的压强为p，考察定理中的P，P_0两点，根据牛顿第三定律，应有：

$$(p\cos\theta)(\Delta S\cos\theta)=(p_0\cos\theta)(\Delta S_0\cos\theta)$$

利用上式我们得到

$$p\frac{\Delta\Omega}{K}\cos^2\theta=p_0\frac{\Delta\Omega}{K_0}\cos^2\theta_0$$



回到电荷系统，压强p即是面元在外场中的受力，$p=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

代入则得$\sigma=\sigma_0\sqrt{\frac{K}{K_0}}\left|\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\right|$

注意：上述过程仅仅只能给予读者一个直观印象，并不能当作证明。

适用范围：笔者证明了，如果一个曲面$F(x,y,z)=0$满足微分方程：

$$\left(2\alpha_1\alpha_2x+(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)y+(\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2)z\right)(xF_x'+yF_y'+zF_z')$$
$$=a\left(2\alpha_1\alpha_2a+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)y+(\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2)z\right)F_x'$$

那么电荷关联定理就是适用的！

第一基本系数

$$E=a^2+c^2\frac{\xi^2}{\varsigma^2}$$

$$F=c^2\frac{\xi\eta}{\varsigma^2}$$

$$G=b^2+c^2\frac{\eta^2}{\varsigma^2}$$

令$T=a^2b^2\varsigma^2+b^2c^2\xi^2+c^2a^2\eta^2$

$Gauss$曲率$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\left(\frac{abc}{T}\right)^2$

第二基本系数

$$L=\frac{abc}{\varsigma^2\sqrt{T}}(1-\eta^2)$$

$$M=\frac{abc}{\varsigma^2\sqrt{T}}\xi\eta$$

$$N=\frac{abc}{\varsigma^2\sqrt{T}}(1-\xi^2)$$

代入关联定理得：$\sigma=\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{T}}$

如此简洁！

一般凸曲面上的电荷分布

对于导体曲面$F(x,y,z)=0$，如果我们把电势写成$\psi=\psi$（F）

则$\nabla\psi=\frac{d\psi}{dF}\nabla F$

$$\nabla^2\psi=\nabla\left(\frac{d\psi}{dF}\nabla F\right)=\frac{d^2\psi}{dF^2}(\nabla F)^2+\frac{d\psi}{dF}\nabla^2F$$

记$u=\frac{d\psi}{dF}$

$Laplace$方程$\nabla^2\psi=0$变成了：

$$\frac{du/dF}{u}=\frac{d(\ln u)}{dF}=-\frac{\nabla^2F}{(\nabla F)^2}$$

那么$u=\frac{d\psi}{dF}=\exp\left(-\int\frac{\nabla^2F}{(\nabla F)^2}dF\right)$

那$\psi=\int\exp\left(-\int\frac{\nabla^2F}{(\nabla F)^2}dF\right)dF$

那现在我们发现，一个导体能不能够优美的表达出，全在于$\frac{\nabla^2F}{(\nabla F)^2}$能否表示为$F$的全微分。

对于椭球的情形，笔者证明了：

$$\frac{\nabla^2u}{(\nabla u)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}\right)$$

直接代入，并利用u极大时，椭球近似为球体的条件

再一次得椭球分布$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

总结

1.根据电荷投影定理，已知某个立体表面的电荷分布，就可以求得其投影面上的电荷分布。这可以有效避免我们在运算时可能会碰到的无穷大难题。

2.文献[4]中给出的电荷关联定理不是普适的，但在满足上文的几何性质的导体上适用。这仍不失为一种很好的计算方法。它给出了在这种情况下导体面电荷密度的定量公式

3.罗恩泽的想求得电荷面密度与导体局部几何形状的思想是错误的，至少，在一般情况下是不正确的。而文献[7]中所谓“导体面电荷密度与法向模量成正比”的结论更是不可能的，它仅仅适用于个例。为了进一步指出罗恩泽理论的根本的错误，笔者举出下例：

卡西尼卵形线上的“面电荷”分布（二维情形）

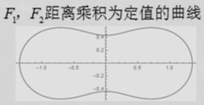
用保角变换法求得其上电荷密度为：

$$\sigma=\frac{|H|}{2\pi b^2}r\propto r$$

而卡西尼卵形柱面上的电荷密度则更复杂：

$$48\pi^4b^8a^4-32\pi^3b^8A'Ha^3+(a^4-b^4)A^4=0$$

卡西尼卵形线：到平面上两点F_1，F_2距离乘积为定值的曲线



鸣谢

- 笔者撰写论文的过程中，曾受到过许多帮助，甚为感谢，兹列如下：
- 中国科大16级物理学院1班李文博同学与笔者进行了长期的交流，给了笔者许多启发，以及精神上的慰藉。
- 物院1班的孙子庭同学提醒笔者可引入格林函数来利用导体的局域特性，使得笔者的研究方向更加丰富。
- 清华大学16级胡其炜同学提醒笔者要带有批判的眼光看文献，这是后来笔者考虑证伪电荷关联定理的动力源泉。
- 武汉轻工大学16级陈取同学为我提供了许多技术支持，非常感谢。
- 我的两位老师，叶老师带给我丰厚的学术知识，极大地拓宽我的视野；邓老师鼓励同学大胆创新，让我不断前进。能成为老师们的学生，笔者感到万分荣幸。

参考文献

- [1].《电磁学专题研究》，陈秉乾，舒幼生，胡望雨著。
- [2].《孤立导体的拉普拉斯方程解》 曹国良
- [3]《任意形状带电导体表面电荷分布定理》，山东大学学报，2003
- [4]《微分几何讲义》苏步青著
- [5]《数学分析教程（下册），常庚哲，史济怀
- [6]《电荷投影法及其应用》
- [7]《关于孤立导体表面的电荷分布规律的讨论》 冯家望
- [8]《导体表面的电荷分布》 王俊
- [9]《连续介质电动力学（上册）》 朗道`栗弗席兹
- [10]《数学物理方程及其近似方法》 程建春著 P44~P47

- [11]罗恩泽　物理通报 1984（3）
- [12]《导体椭球的电势分布》 张之翔
- [13] 《电磁学与电动力学》 P33～37 胡友秋 程福臻 刘之景 叶邦角 著
- [14]《复变函数论（第四版）》 高等教育出版社 钟玉泉
- [15]《微分几何（第四版）》 高等教育出版社 梅向明 等

基于MMA的椭球模拟遇到的三大难题。

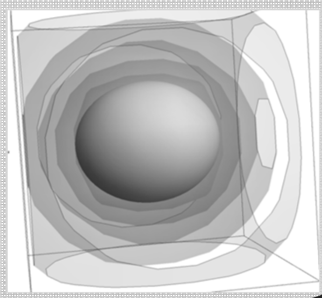
- 发散难题——椭球边界处的 $\frac{1}{0}$，系统停止计算。
- 计算难题——椭圆积分不可积
- 精度难题——MMA内置的函数精度低下，模拟效果差

边界上$\frac{1}{0}$困难，导致系统的计算很混乱，为了保持模拟的真实性，我们画一个椭球挡住。

椭圆积分不可积，故采取数值积分。而数值积分有精度的问题，故需要调制参数，找到既快又好的模拟结果

三维电势分布图

系统默认参数绘制图



• 手动设置

MaxPlotPoints

参数设置：

$a = 5$

$b = 2$

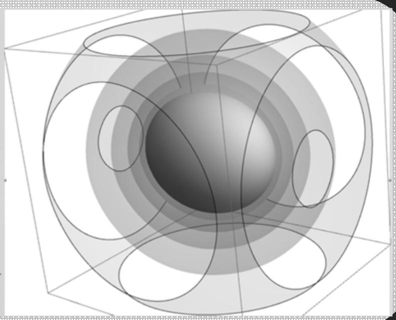
$c = 2.5$

$VolPrecise = 5$

$EPrecise = 5$

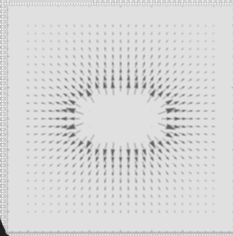
$ContData =$

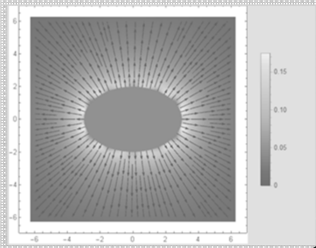
$\{0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15\}$



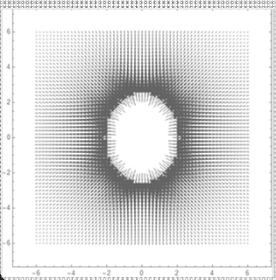
二维场线模拟

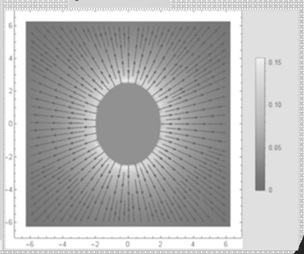
xy平面





yz同学





鸣谢

• 第二部分的内容主要是王博同学完成的。笔者在调研的过程中，发现没有任何一篇论文里有关于椭球电场的模拟工作。而笔者本人在试图摸索模拟方法时，又遇到了前面所述的三大难题。因此，笔者求助于王博同学，他出乎意料地完美地完成了所有工作，我为此非常感谢他。

The End

Mit Trauer und Entscheidung im Herzen
Zeigen wir den Willen weiterzugehen
Niemand darf eigensinning seines Lenbens
beraubt werden