教学研究

带电导体椭球的电势和电荷分布

张之翔

(北京大学 物理学院,北京 100871)

摘要:介绍用椭球坐标系求带电导体椭球所产生的电势和它上面电荷分布的方法,并讨论一些特殊情况.

关键词:导体椭球;椭球坐标系;电势

中图分类号:O 441　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-0712(2008)01-0011-03

导体椭球带电时,它所产生的电势以及电荷在椭球表面上的分布,不能用一般的方法求出,只有借助于共焦二次曲面的一些性质,才能求出.一种方法是用椭球坐标系,解拉普拉斯方程,利用边界条件求出电势再求电荷分布[1,2].还有一种方法是用等势面的条件和共焦椭球面的性质,直接求积分[3].前一种方法简单些,我们在这里作一介绍,并讨论一些特殊情况.

1 问题和解法

在电容率为 ε 的无限大均匀介质内有一导体椭球,以它的中心为原点取笛卡儿坐标系,它的表面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

当它带有电荷量 Q 时,求它所产生的电势 φ 和它表面上电荷量的面密度 σ.边界条件是:在导体椭球面上,$\varphi=\varphi_c$(常量);离椭球非常远处,φ 趋于点电荷的电势.

用解拉普拉斯方程和满足边界条件的方法求 φ.由于要用到椭球坐标系,所以下面先对它作一介绍.

2 椭球坐标系

与导体椭球面共焦的二次曲面为

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{2}$$

这是参数 λ 的一个三次方程,给定一组 x,y,z 的值,λ 有 3 个不同的实根:$\lambda_1=\xi,\lambda_2=\eta,\lambda_3=\zeta$.设 $a>b>c$,这 3 个根按大小排列,它们的范围如下:

$$\xi>-c^2>\eta>-b^2>\zeta>-a^2 \tag{3}$$

与 ξ,η,ζ 相应的 3 种二次共焦曲面分别为:

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1 \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\eta}+\frac{y^2}{b^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta}=1 \tag{5}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\zeta}+\frac{y^2}{b^2+\zeta}+\frac{z^2}{c^2+\zeta}=1 \tag{6}$$

式(4)是椭球面,式(5)是单叶双曲面,式(6)是双叶双曲面.

对于空间的每一点(x,y,z),都有上述 3 种曲面,而且它们都是彼此互相正交的曲面,所以 ξ,η,ζ 构成一个正交曲面坐标系,称为椭球坐标系[4,5].ξ,η,ζ 称为 x,y,z 点的椭球坐标.在椭球坐标系中,ξ 是式(4)所表示的共焦椭球面族的参数,不同的 ξ 值代表该族中不同的椭球面.对于一个给定的 ξ 值来说,η 和 ζ 便是确定该椭球面上位置的量.

由式(4)、(5)、(6)可以得出,用 ξ,η,ζ 表示 x,y,z 如下:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}} \tag{7}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}} \tag{8}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} \tag{9}$$

在椭球坐标系(ξ,η,ζ)中,电势 φ 满足的拉普拉斯方程为[1,4]

$$(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+(\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+(\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=0 \tag{10}$$

收稿日期:2006-12-12;**修回日期**:2007-05-30

作者简介:作者简介:张之翔(1928—),男,湖北黄梅人,北京大学物理学院教授.

式中

$$R_\lambda=\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)},\quad \lambda=\xi,\eta,\zeta \tag{11}$$

3 求电势

我们的目的是求式(10)的满足边界条件的解. 由式(1)、(4)可见,$\xi=0$ 就是导体椭球的表面. 在导体椭球上,电势 φ_c 是与 η 和 ζ 都无关的常量,因此,如果 φ 只是 ξ 的函数 $\varphi(\xi)$,而与 η 和 ζ 都无关,就可以满足这个条件. 于是这时拉普拉斯方程(10)就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(R_\xi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right)=0 \tag{12}$$

式中的 R_ξ 由式(11)为

$$R_\xi=\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)} \tag{13}$$

解式(12)得

$$\varphi=\varphi(\xi)=C\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}} \tag{14}$$

其中 C 是积分常数. 下面就用距离椭球非常远处的边界条件来定出 C 的值.

由式(13)可见,在离椭球非常远处,即 ξ 非常大($\xi\gg a^2$)时,$R_\xi\to\xi^{3/2}$. 这时由式(14)得

$$\varphi=\varphi(\xi)\to C\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{3/2}}=\frac{2C}{\sqrt{\xi}} \tag{15}$$

为了看出这时 ξ 与 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的关系,将式(4)改写成

$$\frac{x^2}{1+\frac{a^2}{\xi}}+\frac{y^2}{1+\frac{b^2}{\xi}}+\frac{z^2}{1+\frac{c^2}{\xi}}=\xi \tag{16}$$

可见当 ξ 非常大时,由上式知 $\xi\to x^2+y^2+z^2=r^2$. 这时由式(15)得

$$\varphi=\varphi(\xi)\to\frac{2C}{r} \tag{17}$$

而当 $r\to\infty$ 时,导体椭球上的电荷 Q 所产生的电势趋于点电荷的电势,即

$$\varphi\to\frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{18}$$

比较(17)、(18)两式,即得

$$C=\frac{Q}{8\pi\varepsilon} \tag{19}$$

将 C 代入式(14)便得所求的电势为

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}} \tag{20}$$

这个积分是第一类椭圆积分 $\mathrm{F}(k,\phi)$,可以在一些数学手册里查到,其结果为

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\mathrm{F}(k,\phi) \tag{21}$$

式中

$$k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \tag{22}$$

$$\phi=\arcsin\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+a^2}} \tag{23}$$

$\mathrm{F}(k,\phi)$的值在一些数学手册里有表可查.

带电导体椭球本身的电势为

$$\varphi_c=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}F(k,\phi_0) \tag{24}$$

式中

$$\phi_0=\arcsin\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}} \tag{25}$$

上面求出的电势是用参数 ξ 表示的 $\varphi=\varphi(\xi)$. 如果要知道空间任一点(x,y,z)处的电势,还得解式(4),将 ξ 表示为 x,y,z 的函数. 因为式(4)是 ξ 的三次方程,解出的函数

$$\xi=\xi(x,y,z) \tag{26}$$

是一个相当复杂的函数. 将它代入式(23),再将 ϕ 代入(21)式,最后得出的

$$\varphi=\varphi(\xi(x,y,z))=f(x,y,z) \tag{27}$$

就是非常复杂的函数了. 所以,带电导体椭球的几何形状很简单,由式(1)表示,但它所产生的电势 φ 用坐标 x,y,z 表示出来,却非常复杂.

4 导体椭球上电荷量的面密度

尽管带电导体椭球所产生的电势 φ 的表达式非常复杂,但导体椭球上电荷量的面密度 σ 的表达式却很简单. 设 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 表示导体椭球表面外法线方向上的单位矢量,则有

$$\sigma=\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\boldsymbol{D}=D_\mathrm{n}=\varepsilon E_\mathrm{n}=-\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\xi=0} \tag{28}$$

在椭球坐标系中,φ 的法向导数为[1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{2R_\xi}{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{29}$$

由式(20)求出$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$,代入式(29)得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{2R_\xi}{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}\left(-\frac{Q}{8\pi\varepsilon R_\xi}\right)=$$

$$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}} \tag{30}$$

再代入式(28)便得

$$\sigma=-\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\xi=0}=\frac{Q}{4\pi\sqrt{\eta\zeta}} \tag{31}$$

在(7)、(8)、(9)三式中，令 $\xi=0$，便可得出

$$\eta\zeta=a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) \tag{32}$$

代入式(31)，最后便得

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \tag{33}$$

5　一些特殊情况

5.1　扁旋转椭球

当 $a=b>c$ 时，便是扁旋转椭球(旋转轴为 z 轴)，这时式(20)可以直接积分，得

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi+a^2)\sqrt{\xi+c^2}}=$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\arctan\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}} \tag{34}$$

由上式得扁旋转椭球本身的电势为

$$\varphi_c=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\arctan\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}} \tag{35}$$

当 $c=0$ 时，扁旋转椭球便成为一个半径为 a 的导体圆盘，这时它所产生的电势由式(34)为

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\arctan\frac{a}{\sqrt{\xi}} \tag{36}$$

它本身的电势则为

$$\varphi_c=\frac{Q}{8\varepsilon a} \tag{37}$$

圆盘上电荷量的面密度由式(33)为

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \tag{38}$$

这是圆盘一面的电荷量面密度，若将两面算在一起，则为 2σ.

5.2　长旋转椭球

当 $a>b=c$ 时，便是长旋转椭球(旋转轴为 x 轴)，这时式(20)也可以直接积分，得

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi+c^2)\sqrt{\xi+a^2}}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\cdot$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{\xi+a^2}-\sqrt{a^2-c^2}}\right) \tag{39}$$

由上式得长旋转椭球本身的电势为

$$\varphi_c=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}}\right) \tag{40}$$

由式(33)可得出，带电的导体长旋转椭球的表面上，沿长轴方向单位长度的电荷量是常量，其值为

$$\tau=\frac{Q}{2a} \tag{41}$$

当 $c=0$ 时，长旋转椭球便成为一条长为 $2a$ 的直导线，这时它所产生的电势由式(39)为

$$\varphi=\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon a}\ln\left(\frac{\sqrt{\xi+a^2}+a}{\sqrt{\xi+a^2}-a}\right) \tag{42}$$

它本身的电势由上式为

$$\varphi_c=\infty \tag{43}$$

线电荷所在处的电势为无穷大，与预期相同.

这时等势面式(4)便化为

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{\xi}+\frac{z^2}{\xi}=1 \tag{44}$$

利用式(44)，可将式(42)化成

$$\varphi=\frac{Q}{8\pi\varepsilon a}\ln\left(\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}+x+a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}+x-a}\right) \tag{45}$$

这正是由直接积分求出的长为 $2a$ 的均匀带电直线所产生的电势的表达式[5].

5.3　球

当 $a=b=c$ 时，便是半径为 a 的球，这时由式(20)得

$$\varphi=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi+a^2)^{3/2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\xi+a^2}} \tag{46}$$

这时由式(4)得

$$\xi=x^2+y^2+z^2-a^2=r^2-a^2 \tag{47}$$

代入式(46)即得

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{48}$$

这便是一般电磁学教材中都讲到的公式.

参考文献：

[1]　Stratton JA. Electromagnetic Theory [M]. New York: Mc Graw-Hill, 1941: 207—209, 58—59.
[中译本：(1)J.A.斯特莱顿.电磁理论[M].何国瑜，译.北京：北京航空学院出版社，1986：224—226，60—61.
(2)J.A.斯特莱顿.电磁理论[M].方能航，译.北京：科学出版社，1992：159—160，41—42.]

[2]　B.B.巴蒂金等.电动力学习题集[M].汪镇藩，等译.北京：人民教育出版社，1978：193 题，194 题.

[3]　W.R.斯迈思.静电学和电动力学(上册)[M].戴世强，译.北京：科学出版社，1981：172—177.

(下转 19 页)

对角化.

由式(18)可以看出，体系的本征值

$$E_n = Cn - \frac{A}{2}, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

相应本征态为$|n\rangle_u$.

同理可知，H 的本征值为 E_n，本征态为 $|n\rangle = U^{-1}|n\rangle_u$.

3 结束语

我们考查了耦合玻色体系的哈密顿量，发现耦合体系的哈密顿量恰能用某一李代数的生成元、不变量以及常量表示，利用该李代数生成元构成幺正算符，可对体系的哈密顿量进行对角化处理，使其耦合解除，此即量子变换的李代数方法. 通过上面举例也可以看出，利用李代数方法，能够简单巧妙地构造幺正算符，与其他方法相比，具有其自身的优越性，使问题解决起来更简洁，更优美. 这种方法利用了体系的对称性，为我们求解耦合玻色体系的本征值、本征态问题提供了一条新途径.

参考文献：

[1] 玻戈留玻夫 H H，玻戈留玻夫 H H(小). 量子统计力学导论[M]. 刘典宪，郭新凯，等译. 北京：北京高等教育出版社，1992：266-276.

[2] 柳盛典，逯怀新，邓汝刚. 幺正变换与二粒子耦合体系哈密顿量的对角化技术[J]. 大学物理，1993，12(5)：25-26.

[3] 陈金全. 群表示论的新途径[M]. 上海：上海科学技术出版社，1984：188-192.

[4] 柳盛典，徐强，徐秀玮，等. 求解耦合玻色体系的本征波函数的另一简单方法[J]. 大学物理，1994，13(10)：17-19.

[5] 逯怀新，王晓芹，柳盛典. 幺正变换与二粒子耦合体系哈密顿量的对角化技术[J]. 大学物理，1995，14(12)：19-20.

The method of Lie algebra in quantum transformation

LIU Sheng-dian, WANG Yu-liang, LI Li-fang, MU Hai-feng

(College of Physics and Electronic Engineering, Ludong University, Yantai, Shandong 264025, China)

Abstract: By means of the generators of Lie algebra, a unitary operator can be obtained. A concise diagonalization approach for coupled Boson quadratic Hamiltonation is also given.

Key words: Lie algebra; coupled Boson system; diagonalization

(上接 13 页)

[4] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京：科学出版社，1979：639-642.

[5] 张之翔. 电磁学千题解[M]. 北京：科学出版社，2002：1.4.36 题.

The electric potential and charge distribution of a charged ellipsoidal conductor

ZHANG Zhi-xiang

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The method of finding the electric potential and charge distribution of a charged ellipsoidal conductor is introduced, and some special cases are discussed.

Key words: ellipsoidal conductor; ellipsoidal coordinates; electric potential