几何形状对孤立导体面电荷分布的影响

刘　玲
(江苏财经职业技术学院基础部, 江苏淮安　223001)

[摘　要] 本文通过例子说明了几何形状对孤立导体上面电荷分布的影响, 然后再通过对几种带电孤立导体的电荷密度的分析、计算、讨论, 得出孤立导体表面电荷分布不仅与导体表面的曲率有关, 还与导体表面的整体形状有关。

[关键词] 孤立导体; 面电荷; 表面曲率; 几何形状
[中图分类号] O47　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1008－178X(2008)04－0015－04

尖端放电效应早已为人们所熟知. 但电荷在导体表面究竟如何分布? 这种分布与导体表面各部分的几何形状的关系如何? 本文通过对一些特殊例子的分析, 讨论了孤立导体面电荷分布与导体表面微分几何性质的关系, 表明电荷密度与曲率成正比只是一个大致的定性的规律, 是在一定特殊条件下才成立的, 不能简单地依据两处的曲率来比较它们的电荷密度. 孤立带电导体的面电荷分布, 不仅与导体表面的曲率有关, 也与它的整体形状有关.

1　几例

例 1. 孤立带电导体表面有一二个深的凹谷, 在凹谷中间有一尖端凸起, 虽然尖端处的曲率很大, 分析电力线分布易知, 此尖端处的面电荷密度却很小. 可见, 受孤立导体的整体形状这一因素的影响, “曲率大处, 面电荷密度也大”这一论断不成立.

例 2. 一个孤立导体, 由夹角为 β 的两个半平面组成, 若此导体具有电势 V, 可用极坐标列出其场方程, 从而求出在 $r\to 0$ 附近, 两板面的面电荷密度为[1]:

$$\sigma(r)=-\frac{a_1}{4\beta}\rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \tag{1}$$

其中 a_1 为常数. 由(1)式易看出, 虽然两板面的曲率处处相等, 但由于 β 角的不同, 即形状的不同, 其面电荷分布会发生明显的变化.

例 3. 孤立导体的表面为一圆环面. 环面可看作半径为 a, 球心在半径为 b 的圆上滚动的球所占有的空间部分的表面. 很明显, 环的外侧面有一法方向, 其曲率为 $\frac{1}{a+b}$, 而环的内侧面有一法方向, 其曲率为 $\frac{1}{a}$. 对此二曲率而言, 环的内侧面曲率较大, 从圆环电场线的分布图可以看出, 环的内侧面的面电荷密度却较小. 这也说明环的面电荷密度与其形状因子有关.

2　*Guass* 曲率

设曲面方程为 $Z=f(x, y)$, 则总曲率[2] 为:

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \tag{2}$$

式中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

[收稿日期] 2008－04－25
[作者简介] 刘　玲 (1964－), 女, 山东胶州人, 江苏财经职业技术学院基础部副教授, 硕士, 从事电磁学教学与研究。

3 几种孤立带电导体电荷面密度

3.1 带电椭球导体的电荷面密度

设椭球面的方程为:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

由(2)式得总曲率为:

$$K=\frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2} \tag{4}$$

已知带电椭球体的电荷面密度[3]为:

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

比较(4)和(5)两式,得:

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{(abc)^{\frac{1}{2}}}\cdot K^{\frac{1}{4}} \tag{6}$$

Q 为椭球导体的总电荷.

3.2 带电旋转双曲面的电荷面密度

设绕 OX 轴旋转的双曲面方程为:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \quad (\text{取 } x>0 \text{ 的一叶}) \tag{7}$$

由(2)式可求得总曲率为:

$$K=\frac{1}{a^2b^4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}\right)^2} \tag{8}$$

已知带电旋转双曲面的电势[3]为:

$$\varphi=\frac{\pi\sigma_0(k^2-4C_1^2)}{2c_1}\ln\frac{(k-2c_1)\left(\sqrt{(x+c_1)^2+y^2+z^2}-\sqrt{(x-c_1)^2+y^2+z^2}-2c_1\right)}{(k+2c_1)\left(\sqrt{(x+c_1)^2+y^2+z^2}-\sqrt{(x-c_1)^2+y^2+z^2}+2c_1\right)} \tag{9}$$

式中所采用的旋转双曲面的方程为:

$$\sqrt{(x+c_1)^2+y^2+z^2}-\sqrt{(x-c_1)^2+y^2+z^2}=k \tag{10}$$

由此,常数 c_1 和 k 与旋转双曲线方程中的常数 a, b 有如下关系:

$$k=2a,\ b^2=c_1^2-a^2+c_1^2-\frac{k^2}{4} \tag{11}$$

根据关系式 $\sigma=\frac{E}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}|\nabla\varphi|_{\text{曲面上}}$

已知旋转双曲面上电荷面密度为:

$$\sigma=\frac{\sigma_0 b}{\sqrt{(x+c_1)^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{(x-c_1)^2+y^2+z^2}} \tag{12}$$

式中 σ_0 为双曲面顶点$(\frac{k}{2}, 0, 0)$上的电荷面密度,由解析几何很容易证明下列等式成立

$$\sqrt{(x+c_1)^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{(x-c_1)^2+y^2+z^2}=ab\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

因此(12)式可化作:

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{14}$$

比较(8)式与(14)式得:

$$\sigma=\frac{\sigma_0 b}{\sqrt{a}}K^{\frac{1}{4}} \tag{15}$$

3.3　带电的旋转抛物面的电荷面密度

设绕 X 轴旋转得抛物面的曲面方程为:

$$y^2+z^2=k^2+2kx \tag{16}$$

由(2)式和(16)式可得:

$$K=\frac{k^2}{(k^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{4(k+x)^2} \tag{17}$$

已知带电旋转抛物面电场的电势[3]为:

$$\varphi=2\pi\sigma_0 k\ln\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{k} \tag{18}$$

式中 σ_0 为顶点$(-\frac{k}{2}, 0, 0)$上的电荷面密度. 由关系式 $\sigma=\frac{E}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}|\nabla\varphi|_{曲面上}$可得:

$$\sigma=\frac{\sqrt{2}\sigma_0 k}{2(-x+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\frac{1}{2}}}\circ\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}|\nabla\varphi| \tag{19}$$

注意到旋转抛物面的曲面方程可表示为:

$$-x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k(x>0)$$

式(19)可化简为:

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+x}} \tag{20}$$

比较(17)(20), 可得:

$$\sigma=\sigma_0\sqrt{k}K^{\frac{1}{4}} \tag{21}$$

上述内容定量地分析了三种二次曲面的电荷面密度 σ 都与曲面的总曲率 K 的 $\frac{1}{4}$ 次幂成正比, 这表明曲率大的地方电荷密度也大, 与实验规律[4]一致. 该结论并不具有普适性, 对于其他形状导体的电荷分布情况还要借助于微分几何的知识加以判断.

4　讨论

为了进一步考察在什么情况下孤立带电导体的整体形状会影响它的面电荷分布, 我们先对曲面上的点进行分析, 通常用高斯曲率对曲面上的点进行分类.

4.1　$K>0$ 的点为椭圆性点. 该点的所有法截线曲率都有相同的符号, 即法截线的主法线方向都在曲面的同一侧, 一切法截线朝切面同一侧弯曲, 因而曲面在某点的邻近部分, 只有这点在曲面上, 其余的点都在切面的同一侧, 这样才能保证在这个小的邻域内, 该点不受其他点的屏蔽. 如前面讨论的几种二次曲面就为椭圆性点.

4.2　$K=0$ 的点为抛物性点. 该点的法截线曲率不变号, 但当某一法截线的曲率为 0 时, 对应于主方向的两条法截线中的一条朝法向的反方向弯曲, 另一个主方向是渐近方向. 它们的形状近似于一个反向弯曲的抛物线和一个正向的立方抛物线.[5] 故这种点可能受其邻近点的屏蔽作用, 使得该点邻域的面电荷密度与形状因子有关. 平面上的点则是抛物性点的特例.

4.3　$K<0$ 的点为双曲性点. 该点的法截线曲率可以不同号, 有时与法向同侧, 有时异侧. 曲面在双曲性点邻近的形状近似马鞍面.[6] 故此种点要受其邻近点的屏蔽作用, 使得这种点的邻域的面电荷密度与孤立导体的形状有关. 如深谷中出现的凸的尖端则是双曲性点的特例.

在前面的例子中, 导体表面上有抛物性点或双曲性点, 或者二者都有, 这使得孤立导体的面电荷分布与其形状有关. 从上面的分析可知, 只有孤立导体表面上处处是椭圆性点时, 才有可能不考虑导体的整体形状的影响去研究面电荷分布问题.

5 结论

由上面分析可得:对于某个孤立带电导体,若其表面是处处为椭圆性点的定向闭合曲面,则其面电荷密度由高斯曲率唯一确定而且在高斯曲率大处,面电荷密度也较大,如前面所讨论的几种典型的二次曲面.

总之,孤立导体表面电荷分布不仅与导体表面的曲率分布有关,还与导体表面的整体形状有关.

[参 考 文 献]

[1] The Feyman Lectures On Physics[M]. Addison－Wesley Publishing Co, 1966.

[2] 刘平,余文录.几种孤立带电导体的电荷密度与曲率的关系[J].商洛师专学报,1996(2).

[3] 福里斯.普通物理学[M].1954.

[4] 赵凯华,陈熙谋.电磁学[M].北京:高等教育出版社,1991:188.

[5] 梅向明.微分几何[M].北京:人民教育出版社,1981:138－260.

[6] L. D. Landau and E. MLeftists Electrodynamics of Continuous Media, Peramon Press 1960.

The Influence of Geometric Shape on the Surface Charge Distribution on the Isolated Conductor

LIU Ling

(Jiangsu Vocational and Technological Institute of Finance &Economy, Huaian 223001, China)

Abstract: By analysis, calculation and discussion about several types of the charge density on the isolated conductor, it is revealed in this thesis that the surface charge distribution on the isolated conductor is not only related to its surface curvature, but also related to its surface form.

Key words: isolated conductor; surface charge; surface curvature; geometric shape