静电平衡条件下导体面电荷分布研究*

陈伯俊, 周思华
(周口师范学院 物理与电子工程系, 河南 周口 466000)

摘 要: 通过逻辑推理和具体计算, 讨论了处于静电平衡状态的孤立导体上的电荷分布问题, 研究了处于静电平衡状态导体的面电荷密度与导体表面曲率的关系。得到了导体面电荷密度与表面曲率并不成正比的结论。

关键词: 电荷面密度; 净电荷; 曲率; 椭球坐标
中图分类号: O441.1 文献标志码: A 文章编号: 1674-3326(2009)05-0022-02

Study of Surface Charge Distribution Based on Conductor Electrostatic Balance

CHEN Bo-jun, ZHOU Si-hua
(Department of Physics and Electrical Engineering, Zhoukou Normal Unirersity, Zhoukou 466000, China)

Abstract: In this paper, the charge distribution on the isolated conductor is discussed by logical reasoning and specific calculation. The relationship between the conductor surface charge density and surface curvature is further investigated. The results show that conductor surface charge density is not proportional to the surface curvature.

Key words: surface charge density; net charge; curvature; ellipsoidal coordinates

0 引言

在静电平衡条件下, 由导体内电荷不做定向运动可知, 导体内部各点的电场强度为零, 由高斯定理导出导体内部的净电荷为零, 从而可以得出导体所带电荷只能分布在导体外表面上的结论[1-2]。但孤立导体的表面电荷分布及面电荷密度与表面曲率之间的定量关系一直是电磁学教学中常常遇到的疑难问题之一, 大部分电磁学教材对此往往只作简单的定性描述。本文的讨论结果对电磁学理论和教学都具有一定的意义。

1 孤立导体上的电荷分布

当孤立导体是球体时, 净电荷将均匀分布在球体表面上; 当孤立导体外表面凹凸不平时, 导体内净余电荷在库仑斥力作用下分布在所受合力最小处, 突出的尖端由于距离其余部分最远, 所受其余电荷的斥力最小, 因而尖端部分电荷密度最大, 其周围的电场强度最强, 易击穿介质而发生尖端放电现象[3]。可以证明, 即使在临界击穿的情况下电荷的分布厚度仍为 1 薄层。以下讨论导体上电荷分布与导体外表面曲率的关系。

2 椭球坐标系

在直角坐标系中, 椭球面的方程为:

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, (假定 $a>b>c$)。 (1)

引进正交曲线坐标系(椭球坐标系), 原点取在椭球表面上, 坐标线 ξ 指向椭球面的法线方向, 坐标线 η 和 ζ 在椭球面上。(x, y, z) 与 (ξ, η, ζ) 的关系由下式给出:

$x^2/(a^2+u)+y^2/(b^2+u)+z^2/(b^2+u)=1$, $u=\xi, \eta, \zeta$。 (2)

在正交曲线坐标系 (ξ, η, ζ) 中, 线元 ds 满足: $ds^2=h_1^2 d\xi^2+h_2^2 d\eta^2+h_3^2 d\zeta^2$ 的关系, 并有 $dx=h_1 d\xi$, $dy=h_2 d\eta$, $dz=h_3 d\zeta$。其中 h_1、h_2、h_3 称为 Lame 系数或度量系数, 它们由下式决定[4]:

$h_1=[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)]^{1/2}/(2R_\xi)$, $h_2=[(\eta-\xi)(\eta-\zeta)]^{1/2}/(2R_\eta)$, $h_3=[(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)]^{1/2}/(2R_\zeta)$;

* 收稿日期: 2009-08-17 修回日期: 2009-09-12
作者简介: 陈伯俊(1965—), 男, 河南周口人。讲师, 研究方向: 电学、理论物理。E-mail: chenbaijun@zknu.edu.cn。

$$\begin{cases} R_\xi = \sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}, \\ R_\eta = \sqrt{(\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)}, \\ R_\zeta = \sqrt{(\zeta+a^2)(\zeta+b^2)(\zeta+c^2)}. \end{cases} \quad (3)$$

3 椭球面上电荷分布的定量分析

3.1 椭球面上电荷密度的表达式

在椭球坐标系下，关于电势的拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)\right] = 0. \quad (4)$$

若满足方程(4)的电势 ϕ 只是 ξ 的函数，则 $\xi=$常量给出了一族等势面(包括 $\xi=0$)，$\xi=0$ 对应导体表面，故导体表面也是等势面，这符合已知的边值条件。由唯一性定理可知，电势 ϕ 确实只是 ξ 的函数，与 η 和 ζ 无关，于是方程(4)可简化为：

$$\phi(\xi) = A\int_\xi^\infty R_\xi^{-1} d\xi,$$

式中的 A 为积分常量，可由远场极限求得此常量。当场点离导体的距离 r 足够大时，电场趋于库仑场，其电势为：$\phi = Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$，其中 Q 为椭球面上所带的总电量。故在远场点的电势可表示为：$\phi(\xi) = Q(8\pi\varepsilon_0)^{-1}\int_\xi^\infty R_\xi^{-1} d\xi$。此式就是带电量为 Q 的椭球形导体在椭球坐标系中的电势分布表达式。

在静电平衡条件下，由于导体表面外附近空间的场强 $\boldsymbol{E}$ 与该处导体表面的面电荷密度 σ 满足 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 的关系，而场强可由电势的法向导数得到，所以，椭球面上的电荷密度为：$\sigma = -\varepsilon_0\,\partial\phi/\partial n$。在椭球坐标系中(坐标线与表面的法向一致)，可以证明椭球导体的面电荷分布为：$\sigma = Q(4\pi abc)^{-1}(x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^{\frac{1}{2}}$。

3.2 椭球面上电荷分布的三种特殊情况

1)当 $a=b=c$ 时，椭球曲面为：$x^2+y^2+z^2=a^2$，所以，$\sigma = Q(4\pi a^3)^{-1}[(x^2+y^2+z^2)a^4]^{-\frac{1}{2}} = Q(4\pi a^2)^{-1}$，即球面上的电荷是均匀分布的。

2)当 $a=b>c$ 时，椭球面为：$[(x^2+y^2)/a^2+z^2/c^2]=1$，它是由 yz 平面上的椭圆绕 z 轴旋转所得的旋转椭球面，其上 $\sigma = Q(4\pi a^2 c)^{-1}[(x^2+y^2)/a^4+z^2/c^4]^{-\frac{1}{2}}$；特别地，若 $a=b\gg c$，曲面为一扁平椭球面，此时有：$\sigma \approx Q(4\pi a)^{-1}(a^2-x^2-y^2)^{-1/2}$。由此不难看出，平面 $z=l$(常数，$-c\leqslant l_1\leqslant c$)与椭球面的交线上 σ 相等；$|l_1|=c$ 时，σ 最小；$|l_1|$ 越小，σ 越大；因此，扁平椭球面上的电荷绝大多数分布在圆 $x^2+y^2=a^2$ 的附近。

3)当 $a\gg b=c$ 时，椭球面 $x^2/a^2+(y^2+z^2)/b^2=1$ 是 xy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转而成的细长曲面。因为 $\lim\limits_{b\to 0}\sigma = \lim\limits_{b\to 0} Q(4\pi ab^2)^{-1}[x^2/a^4+(y^2+z^2)/b^4]^{-\frac{1}{2}} = Q(4\pi a)^{-1}(y^2+z^2)^{-1/2}$，所以，当 $a\gg b=c$ 时，$\sigma \approx Q(4\pi a)^{-1}(y^2+z^2)^{-1/2}$。可见，平面 $x=l_2$(常数，$-a\leqslant l_2\leqslant a$)与椭球面的交线上 σ 相等，当 $l_2=0$ 时，$\sigma=Q(4\pi ab)^{-1}$ 最小，$|l_2|$ 越大，σ 越大，因而细长椭球面上靠近细长端点处的电荷密度最大。[5]

3.3 电荷密度与导体外表面曲率的关系

从上述讨论中可以看出，当曲率为常数时，曲率越大，σ 越大；曲率越小，σ 越小。但是，σ 并不与曲率成简单的正比关系，它们之间的关系是相当复杂的。

在椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 上取 1 条曲线 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$，其上各点处的电荷密度为：$\sigma = Q(4\pi abc)^{-1}(x^2/a^4+y^2/b^4)^{-\frac{1}{2}}$，相应的曲率：$k=|y''|(1+y')^{-3/2}=[x^2/(a^4b^2)+y^2/(a^2b^4)]/(x^2/a^4+y^2/b^4)^{3/2}$。由此看出，若 $a\neq b$，σ 不可能与 k 成正比关系，比如在 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 上的点(0, b)处的曲率 $k_1=b/a^2$，电荷密度为 $\sigma_1=Q(4\pi ac)^{-1}$；在点(a, 1)处的曲率为 $k_2=a/b^2$，电荷密度 $\sigma_2=Q(4\pi bc)^{-1}$。显然，$k_1<k_2$，$\sigma_1<\sigma_2$(所以 $a>b$)，即曲率大处，电荷密度大，但 $k_1/k_2\neq\sigma_1/\sigma_2$，即电荷密度与曲率不成正比。

4 结论

综上所述，在静电平衡条件下，孤立的带电导体所带的电荷，只能分布在导体的外表面上，无论导体带电多少，净电荷都不会深入到导体内部去。导体表面电荷分布是 1 个很复杂的问题，曲率大的地方电荷密度大只能说是 1 个大致的定性规律，电荷密度并不与曲率成正比。

参考文献：

[1] 梁灿彬，秦光戎，梁竹健. 电磁学[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，1980：65－70.

[2] 王树林. 静电场中电荷分布及有关问题讨论[J]. 西安矿业学院学报，1997，17(3)：285－288.

[3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，1997：24－30.

[4] 陈秉乾，舒幼生，胡望雨. 电磁场专题研究[M]. 北京：高等教育出版社，2001：601－609.

[5] 单筱攸，李美玲. 浅谈导体表面电荷分布与表面曲率的关系[J]. 鞍山师范学院学报，2002，4(1)：68－70.

【责任编辑 邢怀民】