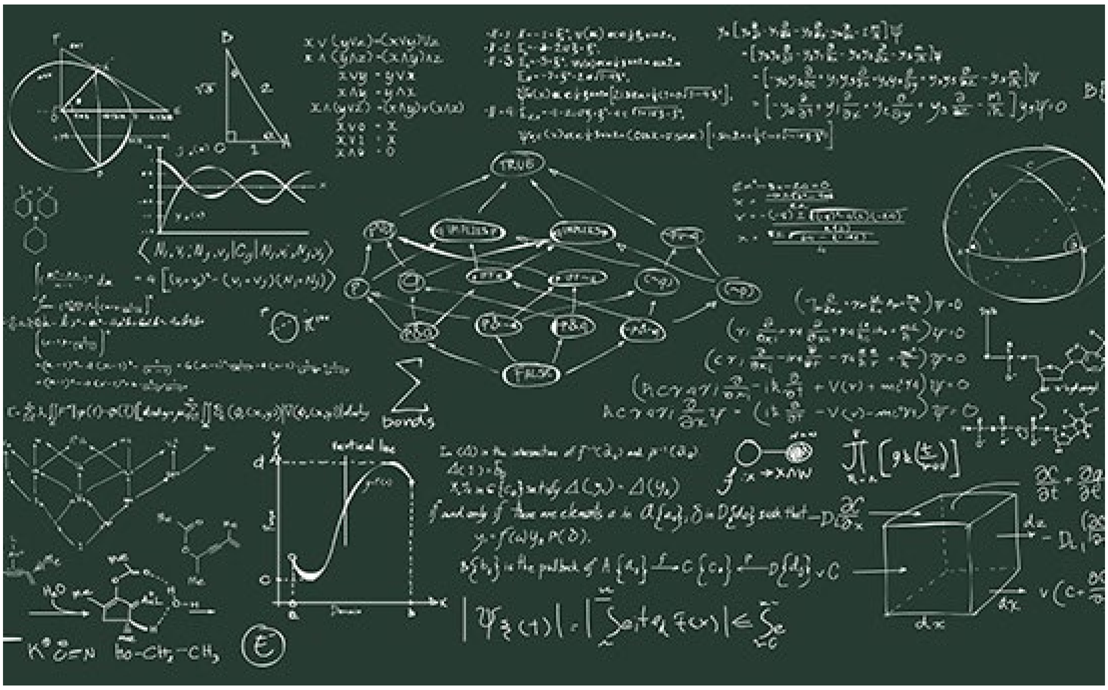
UMONS
Université de Mons

Faculté des Sciences

Rapport - Projet Optimisation Linéaire



Huseyin OZUDOGRU (202114)
Bachelier Sciences Informatiques – Bloc 2

Optimisation Linéaire – M. Nicolas GILLIS

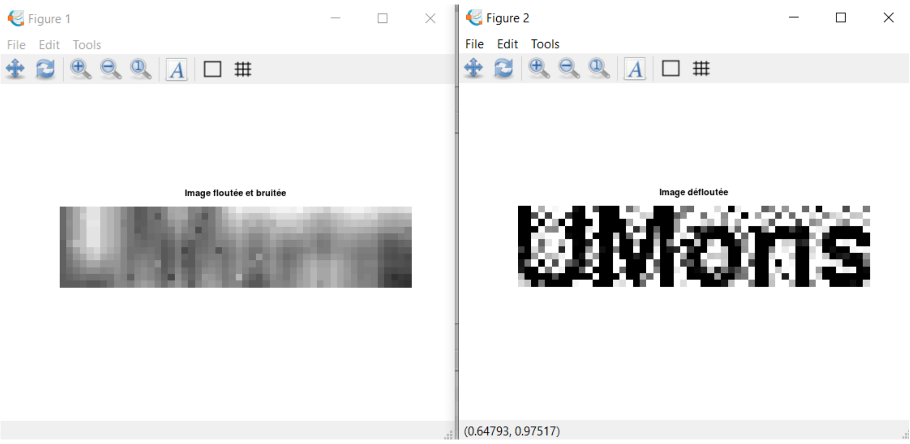
Université de Mons
Année académique 2022-2023

Table des matières

Introduction et problème 3
Modélisation du problème comme un problème d'optimisation linéaire 4
Mise sous forme standard du problème 6
Résolution du problème avec Octave 6
Solution obtenue est-elle un sommet du polyèdre correspondant ? 7
Etude de sensibilité de la solution en fonction de la valeur de lambda. 7

Introduction et problème

Ce projet consiste en la résolution d'un problème d'optimisation linéaire ayant pour but de déflouter et débruiter une image via la méthode de simplexe comme sur l'exemple suivant :



Comme on peut le constater, on a l'image de base qui est floutée et bruitée à gauche et l'image défloutée et débruitée à droite.

Le floutage et le bruitage se font comme indiqué dans l'énoncé :

Floutage Soit $\bar{x} \in [0,1]^n$ le vecteur contenant l'intensité de chaque pixel de l'image originale non floutée (entre 0 et 1). On observe un vecteur flouté $\tilde{x} \in [0,1]^n$: chaque entrée de $\tilde{x}$ est une combinaison linéaire des entrées de $\bar{x}$. Les poids de cette combinaison dépendent du type de floutage. Un floutage très simple consiste par exemple à avoir chaque entrée de $\tilde{x}$ égale à la moyenne des entrées de $\bar{x}$ correspondant à des pixels voisins.

De manière plus générale, en l'absence d'autres sources de bruit, on a une relation linéaire entre $\bar{x}$ et $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = A\bar{x},$$

où la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de floutage. Malheureusement, cette matrice A n'est pas inversible : étant donné $\tilde{x}$ et A, l'ensemble des solutions x du système $Ax = \tilde{x}$ est soit vide (s'il y a du bruit), soit contient un nombre infini de solutions (en particulier, si x est solution, $x + c$ en est également une où c est une constante).

En pratique, on va chercher à identifier la solution d'énergie minimale:

$$\min_{0 \leq x \leq 1} ||x||_1 \quad \text{tel que} \quad Ax = \tilde{x},$$

où $||x||_1 = \sum_i |x_i|$ est la norme 1 du vecteur x.

Bruit creux De plus, l'observation $\tilde{x}$ est également corrompue avec du bruit : $\tilde{x} = A\bar{x} + b$ où b est le vecteur contenant le bruit. On supposera ici que l'intensité d'un petit nombre de pixels est erronée (c'est ce qu'on appelle un bruit creux, ou parcimonieux). Ainsi, pour estimer $\bar{x}$, on considère le problème d'optimisation suivant

$$\min_{0 \leq x \leq 1} ||Ax - \tilde{x}||_1 + \lambda ||x||_1, \tag{1}$$

où λ est un paramètre positif qui dépend du niveau de bruit. En effet, la norme 1 $||Ax - \tilde{x}||_1$ est plus indiquée que la norme 2 dans le cas de bruit creux (la norme 2, $||x||_2^2 = \sum_i x_i^2$, est idéale pour du bruit Gaussien).

L'objectif de ce projet est l'étude du problème (1), et ainsi de reconstruire, de manière approchée, l'image originale $\bar{x}$ à partir de $\tilde{x}$ et A.

Remarque. En pratique, la matrice de floutage A n'est en général pas connue exactement. Cependant, il existe des techniques efficaces pour l'approcher; voir par exemple le livre *Deblurring images: matrices, spectra, and filtering* par Nagy et O'leary, SIAM, 2006. On supposera dans ce projet que cette matrice est connue (l'identifier peut aussi être formulé comme un problème d'optimisation!).

Modélisation du problème comme un problème d'optimisation linéaire

Reprenons le problème :

$$\min_{0 \leq x \leq 1} ||Ax - \tilde{x}||_1 + \lambda ||x||_1,$$

En appliquant la définition de la norme 1 du vecteur ici, on se retrouve avec ceci :

$$\min_{0 \leq x \leq 1} ||Ax - \tilde{x}||_1 + \lambda ||x||_1$$

par déf. de $||x||_1$

$$\iff \min_{0 \leq x \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |A(i,:)x - \tilde{x}_i + \lambda x_i|$$

Comme je me retrouve bloqué, je vois que je me retrouve dans le même cas que l'Application 2 du cours.

Application 2: régression linéaire

Dans le cas non exact (plus général), on peut par exemple vouloir minimiser la somme des erreurs:

$$\min_{a,b} \quad \sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \min_{a,b\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \text{tel que} \quad & t_i \geq ax_i + b - y_i,\ 1 \leq i \leq n, \\ & t_i \geq -ax_i - b + y_i,\ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Après l'avoir appliqué à mon problème, j'obtiens donc :

$$\min_{0 \leq x \leq 1} \|Ax - x^2\|_1 + \lambda \|x\|_1$$

par déf.
de $\|x\|_1$

$$\Leftrightarrow \min_{0 \leq x \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |A(i,:)x - x_i^2 + \lambda x_i|$$

par Application 2
du cours

$$\Leftrightarrow \min_{x} \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\text{tq} \quad t_i \geq -A(i,:)x + \tilde{x}_i - \lambda x_i$$

$$t_i \geq A(i,:)x - \tilde{x}_i + \lambda x_i$$

Mise sous forme standard du problème

Mise sous forme standard :

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$tq \quad -\tilde{x}_i = -t_i - A(i,:)x - \lambda x_i + s_i$$

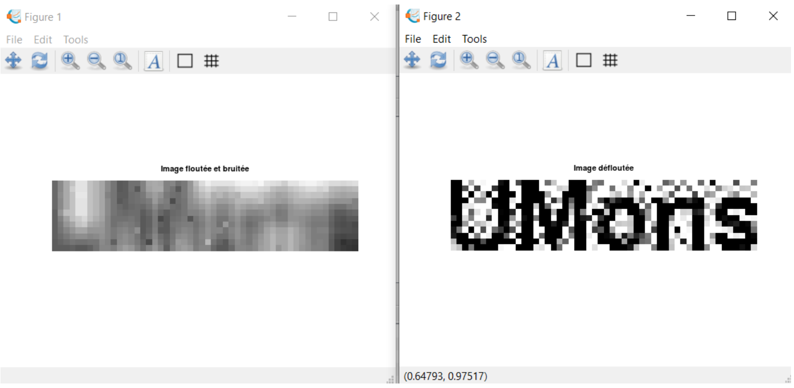
$$\tilde{x}_i = -t_i + A(i,:)x + \lambda x_i + s_i$$

Résolution du problème avec Octave

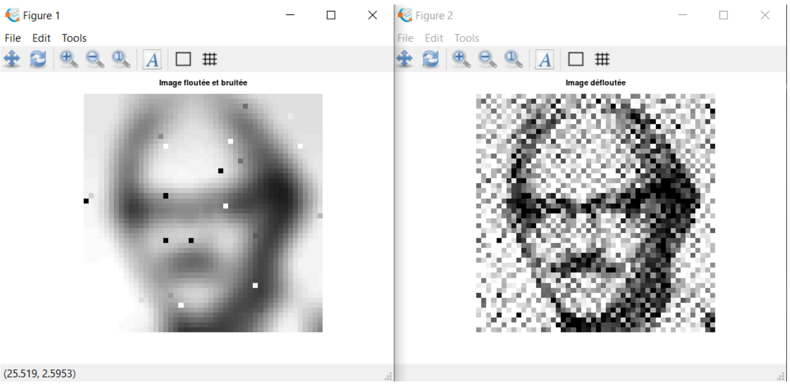
Vous pouvez retrouvez le code source dans le dossier du rapport dans les fichiers « deblurr.m » et « MainFile.M »

Voici les résultats des 3 images :

- Exemple0.mat :

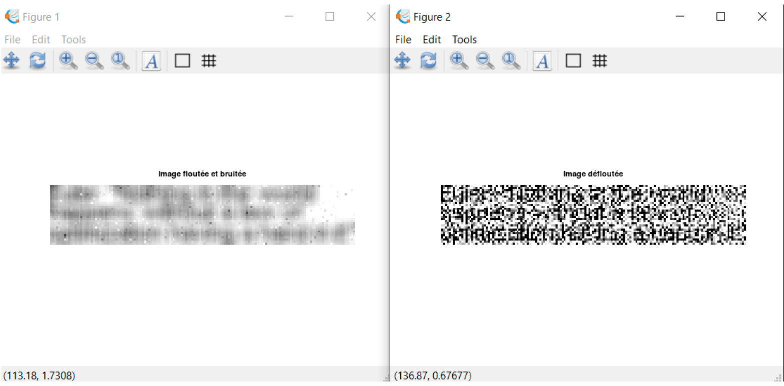


- Exemple1.mat



- Exemple2.mat

L'image n'apparaît pas, je ne sais pas si c'est un bug ou un mauvais choix du lambda (lambda $= 10^{-2}$).



Solution obtenue est-elle un sommet du polyèdre correspondant ?

Oui car il s'agit de la solution optimale. Dans l'output de la fonction GLPK, on a la possibilité de sortir un paramètre nommé status qui est d'extra.
Si cette valeur vaut 5, la solution est alors optimale.

On peut d'ailleurs le voir sur la console d'Octave :

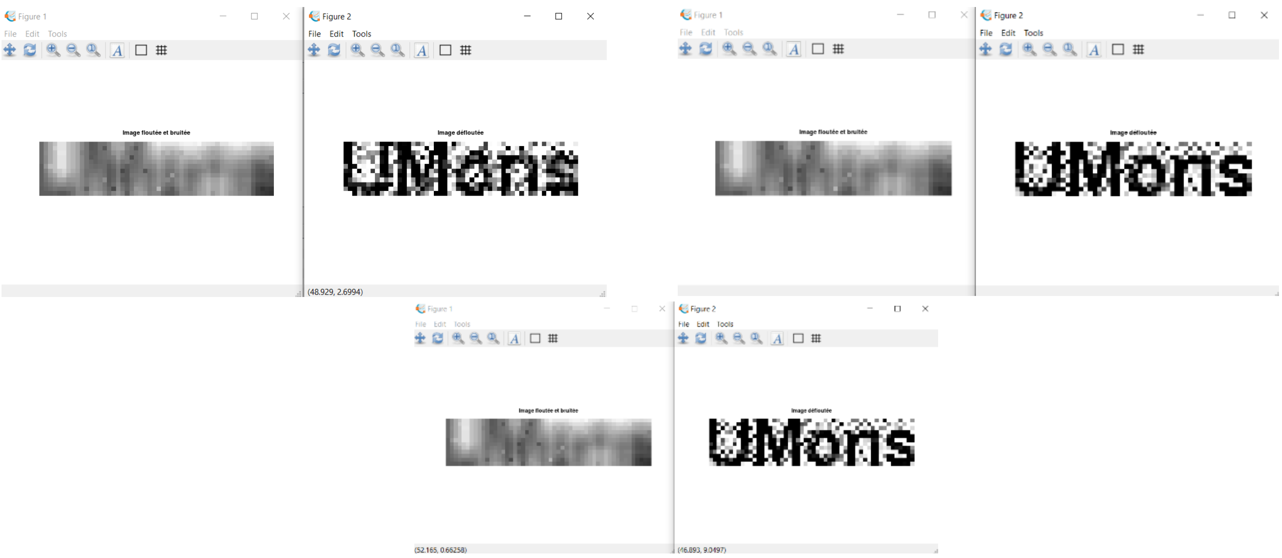
```
Fenêtre de Commandes
warning: colon arguments should be scalars
warning: called from
    deblurr at line 21 column 2
    MainFile at line 12 column 3

Warning: numerical instability (primal simplex, phase II)
Warning: numerical instability (primal simplex, phase II)
Warning: numerical instability (primal simplex, phase II)
ans = 5
warning: colon arguments should be scalars
warning: called from
    deblurr at line 43 column 3
    MainFile at line 12 column 3

>> |
```

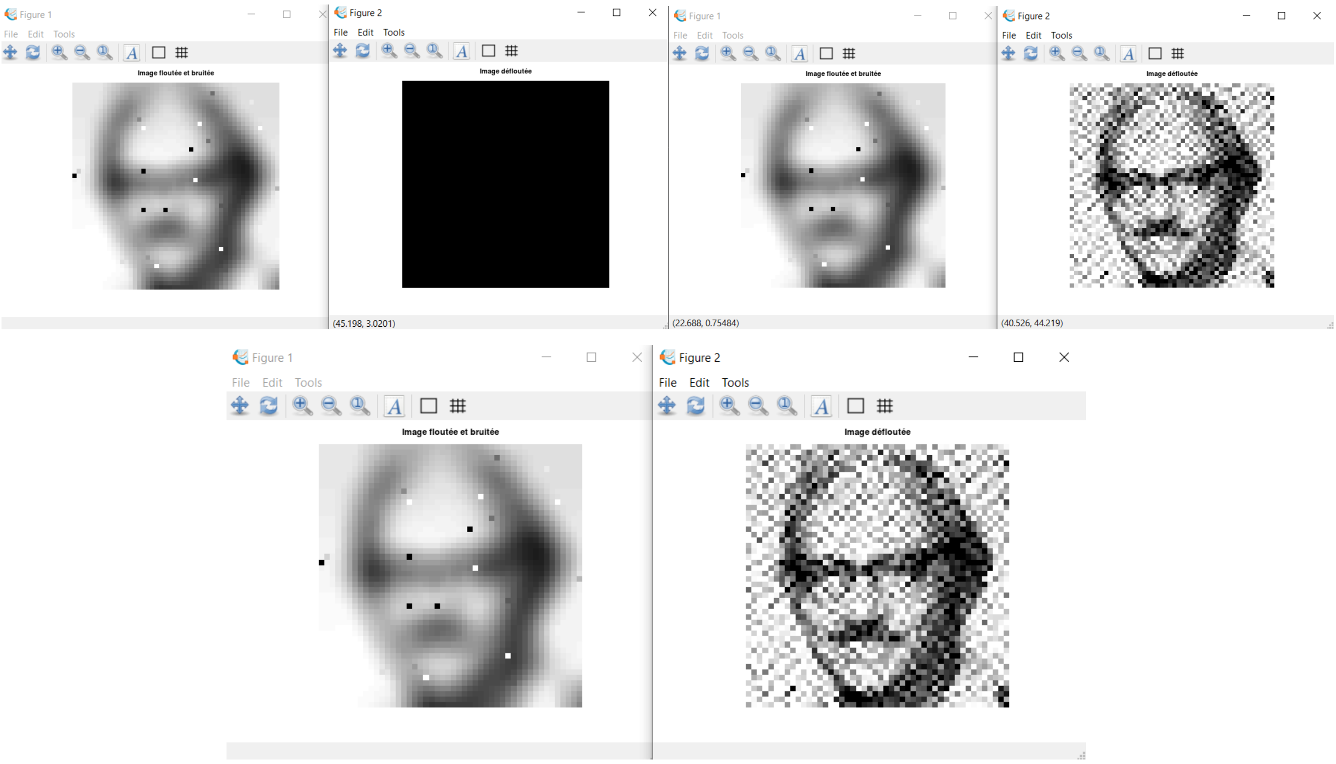
Etude de sensibilité de la solution en fonction de la valeur de lambda.

- Lambda $= 10^{-2}$, Lambda $= 10^{-5}$, Lambda $= 10^{-10}$ pour Example0.mat



Comme on peut le voir, pour un lambda assez petit, on ne voit pas de différence sur cet exemple.

➢ Lambda = 10^{-2}, Lambda = 10^{-5}, Lambda = 10^{-10} pour Example1.mat



Comme on peut le voir, avec Lambda = 10^{-2}, on a un écran noir. Mais avec les deux autres, on a la même image.