Université de Montpellier - L3 Mai 2015
Logique 2 (FLIN602)

Correction examen

Durée : 2 heures
Seul document autorisé : l'aide-mémoire

1 Evaluation de formules

On considère un langage du premier ordre contenant un prédicat binaire p, un prédicat unaire q et un symbole de fonction unaire f. On considère l'interprétation suivante I sur ce langage :
$D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$
$I(p) = \{(d_1, d_2), (d_1, d_3), (d_2, d_3), (d_3, d_3)\}$
$I(q) = \{d_2, d_3\}$
$I(f) = \{d_1 \mapsto d_2, d_2 \mapsto d_3, d_3 \mapsto d_1\}$.

Question

Donnez la valeur des formules suivantes pour I.

$F_1 = \forall x\ \exists y\ (p(x, y) \wedge q(y))$
$F_2 = \forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow q(y))$
$F_3 = \forall x\ \forall y\ (\neg p(x, y) \rightarrow \neg q(y))$
$F_4 = (\forall x\ \forall y\ p(x, y)) \rightarrow \forall y\ q(y)$
$F_5 = \forall x\ (q(x) \rightarrow \exists y\ p(x, y))$
$F_6 = \forall x\ (q(x) \rightarrow p(x, f(x)))$.

Lorsqu'une formule est vraie pour I, vous n'avez pas besoin de justifier votre réponse (mais les mauvaises réponses compteront négativement). Dans le cas contraire, donnez une assignation (de x, ou de x et y) montrant que la formule est fausse pour I.

val(F_1, I) = vrai
val(F_2, I) = vrai
val(F_3, I) = faux (par exemple $x \leftarrow d_2$ et $y \leftarrow d_2$)
val(F_4, I) = vrai (car val $(\forall x \forall y p(x, y), I)$ = faux)
val(F_5, I) = vrai
val(F_6, I) = faux (en prenant $x \leftarrow d_3$)

2 Modèles

Les deux formules suivantes sont-elles équivalentes ?

$F_1 = \forall x\ (p(x) \vee q(x))$
$F_2 = \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$

Justifiez votre réponse en utilisant la notion de modèle.

On n'a pas $F_1 \models F_2$, comme le montre l'interprétation I suivante, qui est un modèle de F_1 mais pas de F_2 :
$D = \{d_1, d_2\}$
$I(p) = \{d_1\}$ et $I(q) = \{d_2\}$

Remarque : par contre, on a $F_2 \models F_1$.

3 Formalisation en logique

1. Homère a écrit l'*Illiade* et l'*Oyssée*.
2. *Hamlet* a été écrit par Shakespeare.
3. *Don Quichotte* a été écrit par Cervantès.
4. Seul un être humain peut avoir écrit un livre.
5. Certains livres ont plusieurs auteurs.
6. Tout auteur a écrit au moins un livre.
7. Un texte est anonyme s'il n'a pas d'auteur.
8. *Les mille et une nuits* sont un texte anonyme.

Question 1

Donnez un langage du premier ordre qui permette d'exprimer les énoncés ci-dessus.

Traduisez chaque énoncé en une formule de la logique du premier ordre avec le langage que vous avez défini.

On se donne le langage logique $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{C})$, avec :
$\mathcal{P} = \{$ humain/1, livre/1, texte/1, anonyme/1, écrit/2, auteur/2, $\}$ où l'arité des prédicats est indiquée après le symbole /
La signification intuitive des prédicats unaires est immédiate, celle de écrit(x, y) est que x a écrit y, celle de auteur(x, y) est que x est auteur de y.
$\mathcal{C} = \{$ Homère, Illiade, Odyssée, Hamlet, Shakespeare, DonQuichotte, Cervantes, 1001Nuits$\}$

Remarque : Y a-t-il besoin d'avoir les deux prédicats écrit et auteur ? Cela dépend du contexte d'utilisation : si on ne considère que des oeuvres écrites, on peut avoir un seul des deux prédicats ; sinon, il se peut que x soit auteur de y sans que y soit une oeuvre écrite, auquel cas on pourrait ajouter la connaissance suivante : $\forall x \forall y$ (écrit(x, y) $\rightarrow$auteur(x, y)), la réciproque n'étant pas forcément vérifiée.
De même, on peut se demander si les livres et les textes sont deux concepts équivalents. Si oui, un seul des deux prédicats suffit.

On formalise chaque phrase i par une formule F_i :
F_1 =écrit(Homère,Illiade) $\wedge$ écrit(Homère,Odyssée)
F_2 =écrit(Shakespeare,Hamlet)
F_3 =écrit(Cervantes,DonQuichotte)
$F_4 = \forall x \forall y((\text{livre}(x) \wedge \text{écrit}(x, y)) \rightarrow \text{humain}(y))$
$F_5 = \exists x \exists y \exists z(\text{livre}(x) \wedge \text{auteur}(x, y) \wedge \text{auteur}(x, z) \wedge y \neq z)$, où $y \neq z$ est une notation abrégée pour $\neg = (y, z)$.
$F_6 = \forall x(\ \exists y \text{ auteur}(x, y) \rightarrow \exists z(\text{livre}(z) \wedge \text{écrit}(x, z))\ )$
$F_7 = \forall x(\ (\text{texte}(x) \wedge \neg \exists y \text{auteur}(y, x)) \rightarrow \text{anonyme}(x)\ )$
$F_8 = \text{texte}(1001\text{Nuits}) \wedge \text{anonyme}(1001\text{Nuits})$

Remarque : on s'aperçoit qu'il aurait été commode de définir un précidat unaire estAuteur, et d'ajouter la formule suivante pour faire le lien entre les prédicats estAuteur et auteur :
$\forall x(\text{estAuteur}(x) \leftrightarrow \exists y \text{ auteur}(x, y))$.

Question 2

La dernière phrase est elle conséquence des précédentes ? Justifiez votre réponse et commentez le résultat.

Il ne vous est pas demandé une preuve formelle mais des arguments précis (par exemple, si l'on parle d'une interprétation particulière, on précisera son domaine et l'interprétation des prédicats et constantes, mais on ne détaillera pas l'évaluation des formules dans cette interprétation).

Non, F_8 n'est pas conséquence de $F_1, \ldots, F_7$. On peut en effet construire un modèle de $F_1 \wedge \ldots \wedge F_7$ qui n'est pas un modèle de F_8. Il suffit de prendre une interprétation I avec $I(\text{texte}) = \emptyset$ (ceci assure que F_7 est satisfaite, et on remarque que les autres formules ne contiennent pas le prédicat texte) et telle que I soit un modèle de $F_1 \wedge \ldots \wedge F_6$ (on vérifie que c'est bien possible). Attention à ce que I soit bien un modèle de F_5 : il faut au moins un élément d du domaine D tel que $d \in I(\text{livre})$ et il existe deux éléments d_1 et d_2 de D $(d_1 \neq d_2)$ avec (d, d_1) et (d, d_2) dans $I(\text{auteur})$.

On peut se dire qu'une meilleure formalisation des phrases aurait aussi traduit des connaissances implicites (c'est-à-dire qui ne sont pas exprimées dans les phrases mais sous-entendues). Par exemple, le fait que toutes les oeuvres citées au début sont des livres, qu'un livre est un texte (A_0), et que si quelqu'un écrit quelque chose, il est auteur de quelque chose (A_1) :
$A_0 = \forall x(\text{livre}(x) \rightarrow \text{texte}(x))$
$A_1 = \forall x \forall y\ (\text{écrit}(x, y) \rightarrow \text{auteur}(x, y))$
$F_1 = \text{livre(Illiade)} \wedge \text{livre(Odyssée)} \wedge \text{écrit(Homère,Illiade)} \wedge \text{écrit(Homère,Odyssée)}$
$F_2 = \text{livre(Hamlet)} \wedge \text{écrit(Shakespeare,Hamlet)}$
$F_3 = \text{livre(DonQuichotte)} \wedge \text{écrit(Cervantes,DonQuichotte)}$
$F_4 = \forall x \forall y((\text{livre}(x) \wedge \text{écrit}(x, y)) \rightarrow \text{humain}(y))$
$F_5 = \exists x \exists y \exists z(\text{livre}(x) \wedge \text{auteur}(x, y) \wedge \text{auteur}(x, z) \wedge y \neq z)$, où $y \neq z$ est une notation abrégée pour $\neg = (y, z)$.
$F_6 = \forall x(\ \exists y \text{ auteur}(x, y) \rightarrow \exists z(\text{livre}(z) \wedge \text{écrit}(x, z))\ )$
$F_7 = \forall x(\ (\text{texte}(x) \wedge \neg \exists y \text{ auteur}(y, x)) \rightarrow \text{anonyme}(x)\ )$
$F_8 = \text{texte(1001Nuits)} \wedge \text{anonyme(1001Nuits)}$

Remarquons qu'au lieu de préciser pour chaque oeuvre que c'est un texte (et parfois même un livre) on aurait pu ajouter la formule :
$A_2 = \forall x \forall y(\text{écrit}(x, y) \rightarrow \text{texte}(y)))$.

Avec cette deuxième version, construisons un modèle I de toutes nos formules sauf F_8 qui ne soit pas un modèle de F_8. On considère par exemple le domaine D égal à $\mathcal{C}$ (pour simplifier, on interprète chaque constante par un élément du domaine qui a le même nom), et $I(c) = c$ pour toute constante $c \in \mathcal{C}$. Etant donnée cette interprétation des constantes, on donne ci-dessous des interprétations *minimales* de chaque prédicat :
$I(\text{livre}) = \{\text{Illiade, Odyssée, Hamlet, DonQuichotte}\}$ (voir $F_1 \ldots F_3$)
$I(\text{texte}) = I(\text{livre})$ (voir A_0)
$I(\text{humain}) = \{\text{Homère, Shakespeare, Cervantes}\}$ (voir $A_0, F_1 \ldots F_4$)
$I(\text{écrit}) = \{$(Homère,Illiade), (Homère,Odyssée), (Shakespeare,Hamlet), (Cervantes,DonQuichotte) $\}$
$I(\text{auteur}) = I(\text{écrit}) \cup \{\text{(Shakespeare,Illiade)}\}$ *Pour satisfaire F_5 on a ajouté le couple (Shakespeare,Illiade) qui permet d'avoir un livre avec deux auteurs –même si cela heurte notre culture littéraire !*
$I(\text{anonyme}) = \emptyset$.
On constate que I n'est pas un modèle de F_8 car 1001Nuits n'appartient pas à I(texte).

Conclusion : tout exercice de formalisation est à dimensions variables car un énoncé en langue naturelle contient généralement des ambiguités et des pré-supposés implicites. L'essentiel est de donner une réponse cohérente. Si de plus vous discutez les différents choix qui vous paraissent possibles, c'est encore mieux !

4 Problème de validité d'une formule

On considère la formule F ci-dessous :

$$F = \forall x \forall y \; \big[p(x,y) \vee \exists z(r(x,z) \wedge r(z,y))\big] \; \rightarrow \forall u \exists v \; \big[p(u,v) \vee r(u,v)\big]$$

Question 1

La formule F est-elle valide ? Prouvez votre réponse en utilisant la méthode de résolution. Vous préciserez en particulier :
- la forme clausale que vous considérez (en donnant l'ensemble de ses clauses)
- les unificateurs que vous considérez quand vous appliquez la règle de résolution.

F est valide ssi $\neg F$ est insatisfiable. Puisque F est de la forme $A \rightarrow B$, $\neg F$ est de la forme $A \wedge \neg B$. On peut skolémiser A et B "indépendamment" (tout en faisant attention à ne pas réutiliser des symboles de fonctions), ou globalement.
Globalement : voici une forme prénexe de $\neg F$ (déjà sous forme de conjonction de disjonctions) :

$$\exists u \forall v \forall x \forall y \exists z [(p(x,y) \vee r(x,z)) \wedge (p(x,y) \vee r(z,y)) \wedge \neg p(u,v) \wedge \neg r(u,v)]$$

On obtient donc 4 clauses (en remplaçant u par la constante a et z par le terme $f(v,x,y)$) :
$C_1 : p(x,y) \vee r(x, f(v,x,y))$
$C_2 : p(x,y) \vee r(f(v,x,y), y)$
$C_3 : \neg p(a,v)$
$C_4 : \neg r(a,v)$
Ne pas oublier de renommer les variables communes à deux clauses avant d'effectuer un pas de résolution (sinon on ne pourra pas effectuer certaines unifications).
En considérant C_1 et $C_3 = \neg p(a,v')$ et l'unificateur $\{x \leftarrow a, v' \leftarrow y\}$, on obtient la clause résolvante $C_5 = r(a, f(v,x,y))$.
En considérant C_5 et $C_4 = \neg r(a,v')$ et l'unificateur $\{v' \leftarrow f(v,x,y)\}$, on

obtient la clause vide. On en conclut que $\neg F$ est insatisfiable, donc F valide.

Question 2

Même question que ci-dessus : la formule F est-elle valide ? Prouvez votre réponse en raisonnant sur les modèles.

F s'écrit $A \rightarrow B$. Soit I une interprétation quelconque. Si I n'est pas un modèle de A, c'est un modèle de F par définition de $\rightarrow$. Sinon, pour tout $d \in D$, on a deux cas :
(a) soit il existe $d' \in D$ avec $(d, d') \in I(p)$;
(b) soit il existe d' et d'' dans D, avec $(d, d') \in I(r)$ et $(d', d'') \in I(r)$.
Dans les deux cas, on a $val(p(u, v) \wedge r(u, v), I, [u \leftarrow d, v \leftarrow d']) =$ vrai.
Donc pour tout $d \in D$, il existe $d' \in D$ tel que $val(p(u, v) \wedge r(u, v), I, [u \leftarrow d, v \leftarrow d']) =$ vrai.
Donc $val(B, I) = vrai$. I est donc un modèle de F.

5 Réflexion sur les formules existentielles / universelles

On appelle *formule existentielle close* une formule sous forme prénexe dans laquelle toutes les variables sont quantifiées existentiellement. De façon similaire, on appelle *formule universelle close* une formule sous forme prénexe dans laquelle toutes les variables sont quantifiées universellement.

Question 1

Montrez que si une formule existentielle close F est vraie pour une interprétation I de domaine D, alors pour tout D' tel que $D \subseteq D'$, il existe une interprétation I' de domaine D' pour laquelle F est vraie.

Soit $F = \exists x_1 \dots x_n F'$ une formule existentielle close (où par définition F' n'a pas de quantificateur et pas d'autre variable que $x_1 \dots x_n$). Soit I de domaine D un modèle de F. Par définition de $\exists$, il existe une assignation de chaque x_i à un $d_i \in D$, telle que $val(F', I, [x_i \leftarrow d_i]) =$ vrai. Cette assignation reste possible pour tout D' qui inclut D. On construit donc I' à partir de I en remplaçant seulement le domaine par D'.

Question 2

La propriété précédente est-elle vraie pour les formules universelles closes ? Pourquoi ?

Non, par exemple prenons $F = \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (p(x,y) \wedge \neg p(x,y))$ et une interprétation I de domaine $D = \{d\}$. I est un modèle de F puisqu'on ne peut pas assigner à x et y des éléments de D différents. Mais aucune interprétation sur $D' = \{d, d'\}$ ne peut satisfaire F.

Question 3

Considérons les formules universelles closes. Quelle propriété "duale" de la propriété de la question 1 a-t-on ? Justifiez votre réponse.

La propriété duale est la suivante : si une formule universelle close F est vraie pour une interprétation I de domaine D, alors pour tout D' tel que $D' \subseteq D$, il existe une interprétation I' de domaine D' pour laquelle F est vraie.
En effet, soit I de domaine D un modèle de $F = \forall x_1 \ldots x_n F'$. Par définition de $\forall$, toute assignation de $x_1 \ldots x_n$ à des éléments de D satisfait F'. Soit $D' \subseteq D$. Toute assignation de $x_1 \ldots x_n$ à des éléments de D' est aussi une assignation à des éléments de D, donc satisfait aussi F'. On construit donc I' à partir de I en restreignant son domaine à D', ainsi que les interprétations des prédicats pour qu'elles ne comportent que des éléments de D' : pour tout p d'arité k, on prend $I'(p) = I(p) \cap (D')^k$.

Remarque : l'exercice final de l'examen est généralement plus difficile que les autres. Assurez-vous d'avoir bien fait les exercices précédents avant de l'aborder.