FLIN509
Université Montpellier 2 janvier 2011

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (première session)

Tout document personnel autorisé
Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE

UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ
PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 : Simplifier les définitions des langages suivantes :

- { a } . { ε } = {a}
- { a } . { } = {}
- $\{ a , \varepsilon \}^2$ = {ε ,a,aa}
- $\{ \varepsilon \}^*$ = {ε }
- $\{ a , \varepsilon \}^*$ = {a}*

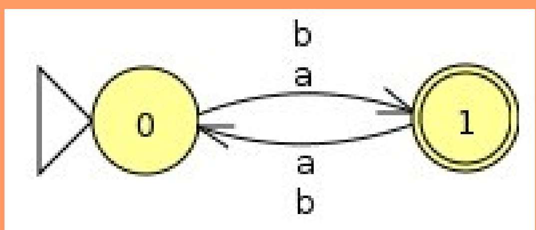
Exercice 2 : Soit l'automate fini déterministe A =(Σ, E, i, F, δ) défini par :

Σ = {a,b} E = { 0, 1 } i = 0 F = {1}

δ : E x Σ ---> E tel que : $\forall e \in E, \forall \alpha \in \Sigma,\ \delta(e,\alpha)=1-e$

Notons L(A) le langage associé à l'automate A.

a) Dessiner une représentation graphique de cet automate



b) Soit $H=\{ m,\ |m|_a - |m|_b$ est impair $\}$ Il s'agit de prouver que L(A) ⊆ H

Pour ce faire, établir d'abord le lemme suivant pour tout état e et tout mot m :

$\delta^*(e,m)=(e+|m|_a-|m|_b) \bmod 2$ où x mod 2 est la parité de x, i.e. l'entier 0 (pair) ou 1 (impair)

La démonstration du Lemme se fait avec un raisonnement par récurrence :

Soit $\Pi(n)= \quad \forall m$ tel que $|m|=n$, $\delta^*(e,m)=(e+|m|_a-|m|_b)$ mod 2

b.1) Π(0) est vrai car

|m| = 0 ==> m = ε

Or δ*(e,ε) = e

et $|\varepsilon|_a - |\varepsilon|_b = 0 – 0 = 0$

On a bien $\delta^*(e,\varepsilon) = e + |\varepsilon|_a - |\varepsilon|_b$ mod 2

b.2) Hypothèse : Π(n) est vrai. Montrer que Π(n+1) est vrai :

$\delta^*(e,\alpha.m)=(e+|\alpha.m|_a-|\alpha.m|_b) \bmod 2 \Leftrightarrow$ $\delta^*(\delta(e,\alpha),m) = e+|\alpha.m|_a - |\alpha.m|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ $\delta^*(1-e,m) = e+|\alpha.m|_a - |\alpha.m|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ $1-e+|m|_a - |m|_b$ mod 2 $= e+|\alpha.m|_a - |\alpha.m|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ $1-e+|m|_a - |m|_b$ mod 2 $= e+ |\alpha|_a - |\alpha|_b + |m|_a - |m|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ $1-e$ mod 2 $= e+ |\alpha|_a - |\alpha|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ 1 mod 2 $= 2*e+ |\alpha|_a - |\alpha|_b$ mod 2

$\Leftrightarrow$ $1 = |\alpha|_a - |\alpha|_b$ mod 2

Ce qui est vrai en envisageant les 2 cas possibles : α = a ou α = b . On obtient 1 = ±1 mod 2

Remarque : $\forall \alpha \in \Sigma,\ |m.m'|_\alpha = |m|_\alpha + |m'|_\alpha$ et rappelons que 2 = 0 mod 2 (ou 2 mod 2 = 0)

b.3) En déduire que L(A) ⊆ H

m ∈ L(A) ==> δ*(0, m) =1 ==> $0+|m|_a - |m|_b$ mod 2 = 1 ==> $|m|_a - |m|_b$ impair ==> m ∈ H

c) Prouver que H ⊆ L(A). Pour ce faire, montrer les résultats suivants :

c.1) $\forall e \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma,\ \delta^*(e, \alpha_1.\alpha_2)=e$

δ *(e, α1.α2) = δ (δ (e, α1), α2) = δ (1-e, α2) = 1 – (1-e) = e c.2) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma, |\alpha_1 . \alpha_2|_a - |\alpha_1 . \alpha_2|_b \text{ mod } 2 = 0$

|α1. α2|a - |α1. α2|b =

2 - 0 mod 2 Si α1 = a et α2 = a

1 - 1 mod 2 Si α1 = a et α2 = b

1 - 1 mod 2 Si α1 = b et α2 = a Dans tous les 4 cas, cela donne bien 0

0 - 2 mod 2 Si α1 = b et α2 = b

Autre approche en combinant : $\delta^*(0, \alpha_1 . \alpha_2) = 0$ par application de c.1)

et $\delta^*(0, \alpha_1 . \alpha_2) = (0 + |\alpha_1 . \alpha_2|_a - |\alpha_1 . \alpha_2|_b) \text{ mod } 2$ par application du lemme

Autre approche : |α1. α2|a - |α1. α2|b = (|α1|a - |α1|b) + (|α2|a - |α2|b) = ±1 + ±1 = 0 mod 2

c.3) Soit $\Pi(n) = \quad \forall m$ tel que $|m| \leq n$ et $(|m|_a - |m|_b) \; mod \; 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m \in L(A)$

Montrer que Π(0) et Π(1) sont vrais :

Π(0) est vrai par vacuité : |m| ≤ 0 ==> m = ε

Or $|\varepsilon|_a - |\varepsilon|_b$ mod 2 = 0 ≠ 1

Π(1) est vrai car |m| ≤ 1 ==> m = a ou m = b

Or δ(0,a) = δ(0,b) = 1 donc a et b sont bien dans L(A).

Montrer que si Π(n) est vrai alors Π(n+2) est vrai :

$(|\alpha_1 \alpha_2 . m|_a - |\alpha_1 \alpha_2 . m|_b) \; mod \; 2 = 1 \quad \Rightarrow$ $|\alpha1.\ \alpha2.m|_a - |\alpha1.\ \alpha2.m|_b$ mod 2 =1

==> $|\alpha1.\ \alpha2|_a + |m|_a - |\alpha1.\ \alpha2|_b + |m|_b$ mod 2 =1

==> $|m|_a + |m|_b$ mod 2 =1

==> m ∈ L(A) par hyp rec.

==> δ*(0,m) = 1

==> δ*(0, α1. α2.m) = δ*(δ*(0, α1. α2),m) = δ*(0,m) = 1

==> α1. α2.m ∈ L(A)

Exercice 3 : Soit la grammaire G = < {a,b} , {S}, S, P > avec les productions P données par :

S --> a a S | a b S | b a S | b b S | a | b

Soit L_G le langage associé à la grammaire G

a) Donner :

Un mot composé de 2011 lettres qui appartient à L_G : a^{2011}

Un mot de 5 lettres qui n'appartient pas à L_G : abcde

b) Cette grammaire est-elle ambiguë ? non

Justifier succinctement votre réponse :

La lecture des deux premières lettres les + à gauche détermine laquelle des 4 productions il faut obligatoirement appliquer. Et s'il n'y a pas deux lettres, la lecture de l'unique lettre détermine laquelle des 2 dernières productions il faut appliquer. Et on itère sur les lettres suivantes.

La chaîne de dérivation est donc unique et, par conséquent, l'arbre de dérivation est aussi unique.

c) Montrer par récurrence sur le nombre de dérivations n que : $\forall m$, tel que $S \xrightarrow{n} m \Rightarrow |m|$ est impair

Vrai pour n = 0 par vacuité

Vrai pour n=1 car S --> a ou S --> b et |a| = |b| = 1

Hyp. : vrai pour n dérivations

Supposons que S --> m en n+1 dérivations

Alors S --> α1 α2 S --> m

==> S --> α1 α2 S --> α1 α2 m ' = m et S --> m' en n-2 dérivations (lemme fondamental)

==> |m'| est impair par hyp. de récurrence

==> |m| = |α1 α2 m'| = |α1 α2 | + |m'| = 2 + |m'| est impair

d) En déduire simplement que $\forall m \in L_G, \ |m|_a - |m|_b$ est impair

On vient de montrer en c) que si m est dans L_G, alors |m| est impair

Or $|m| = |m|_a + |m|_b = |m|_a - |m|_b + 2 * |m|_b$

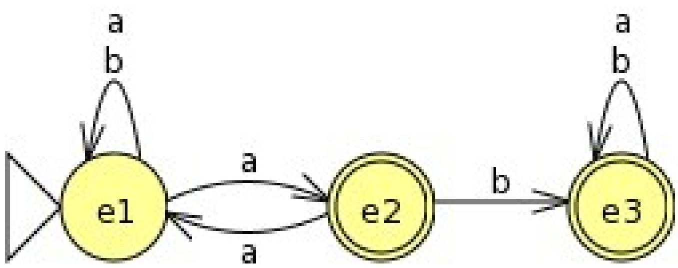
donc $|m|_a - |m|_b$ est impair

e) Montrer par récurrence que $\forall m, \ |m|_a - |m|_b$ est impair $\Rightarrow \ m \in L_G$
On décomposera par exemple m en m = $\alpha_1.\alpha_2.m'$

Par récurrence sur n = |m| Si |m|=0, alors m = ε , on a $\|m\|_a - \|m\|_b$ = 0 qui n'est pas impair. Donc c'est vrai dans ce cas par vacuité.   Si |m|=1, alors m = a ou m = b , on a $\|m\|_a - \|m\|_b$ qui est impair et a et b sont trivialement dans L_G Hyp. : c'est vrai pour les mots m de taille inférieure ou égale à n   Soit m = α1 α2 m' tel que $\|\alpha 1\ \alpha 2\ m'\|_a - \|\alpha 1\ \alpha 2\ m'\|_b$ est impair   ==> $\|\alpha 1\ \alpha 2\|_a + \|m'\|_a - \|\alpha 1\ \alpha 2\|_b - \|m'\|_b$ est impair   ==> $\|m'\|_a - \|m'\|_b$ est impair   ==> m' ∈ L_G par hyp. de récurrence   ==> S --> m' par définition de L_G ==> S --> α1 α2 S --> α1 α2 m'   ==> m = α1 α2 m' ∈ L_G

Exercice 4 :

Soit l'automate A4 suivant :



Vous devrez construire l'expression rationnelle associée à cet automate, en utilisant la méthode par variation des états de sortie. Soit R_{e1}, ... R_{e3} les expressions rationnelles associées à chaque état e1, e2 et e3.

a) Définir les équations obtenues par la méthode :

$R_{e1} = R_{e1}\,(a+b) + R_{e2}\,a + \varepsilon$
$R_{e2} = R_{e1}\,a$
$R_{e3} = R_{e2}\,b + R_{e3}\,(a+b)$

b) Résoudre le système d'équations précédent et donner une expression rationnelle R_{A4} associée à l'automate A4. On donnera la succession des étapes de calcul de la résolution.

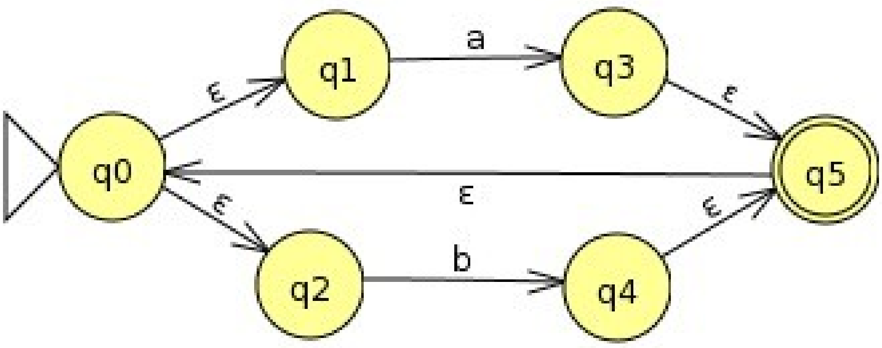
$R_{e1} = R_{e1}(a+b) + R_{e2}\, a + \varepsilon = R_{e1}(a+b) + R_{e1}\, aa + \varepsilon = (a+b+aa)^*$

$R_{e2} = (a+b+aa)^*\, a$

$R_{e3} = R_{e2}\, b + R_{e3}(a+b) = (a+b+aa)^*\, a\, b + R_{e3}(a+b) = ((a+b+aa)^*\, ab\, (a+b)^*$

$R_{A4} = R_{e2} + R_{e3} = (a+b+aa)^*\, a + ((a+b+aa)^*\, ab\, (a+b)^*$

Exercice 5 : Soit l'automate A5 suivant :



Appliquer la méthode d'élimination des ε-transitions pour construire l'automate sans ε-transitions équivalent à l'automate A5. Expliquer les étapes et la construction afin de justifier le résultat obtenu.

$\hat{\varepsilon}(q0)=\{q0,q1,q2\}$ $\hat{\varepsilon}(q1)=\{q1\}$ $\hat{\varepsilon}(q2)=\{q2\}$

$\hat{\varepsilon}(q3)=\{q3,q5,q0,q1,q2\}$ $\hat{\varepsilon}(q4)=\{q4,q5,q0,q1,q2\}$ $\hat{\varepsilon}(q5)=\{q5,q0,q1,q2\}$

$\delta(\{q0\},a) = \delta_\varepsilon(\{q0,q1,q2\},a)=\{q3\}$

$\delta(\{q0\},b) = \delta_\varepsilon(\{q0,q1,q2\},b)=\{q4\}$

$\delta(\{q3\},a) = \delta_\varepsilon(\{q3,q5,q0,q1,q2\},a)=\{q3\}$

$\delta(\{q3\},b) = \delta_\varepsilon(\{q3,q5,q0,q1,q2\},b)=\{q4\}$

$\delta(\{q4\},a) = \delta_\varepsilon(\{q4,q5,q0,q1,q2\},a)=\{q3\}$

$\delta(\{q4\},b) = \delta_\varepsilon(\{q4,q5,q0,q1,q2\},a)=\{q4\}$

état terminaux : q3 et q4 car leur ε-fermeture contient q5