GLIN502
Université Montpellier 2 janvier 2013

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (première session)
Tout document personnel autorisé
Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ
PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies et le justifier très brièvement.

- Si $A= \{ a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$ alors $A^2 = \{ a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Non, $a^4 = a^3.a^1$ est dans A^2 et pas dans $\{ a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N} \}$

- Si $A= \{ a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$ et $m \in A^2$ alors $|m|$ est un nombre pair.

Oui car $m \in A$ ==> $|m|$ est impair et $m \in A^2$ ==> $m=m_1m_2$ avec $|m_1|$ et $|m_2|$ impair donc $|m|$ pair

- L'ensemble des préfixes des mots d'un langage A est inclus dans le langage A*.

Non. Contre exemple : $A=\{aa\}$, $A^*=\{a^{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}\}$ « a » est un préfixe de aa et n'est pas dans A*

- Si les mots du langage A sur l'alphabet {a,b} ont autant de a que de b, alors les mots de A* ont autant de a que de b.

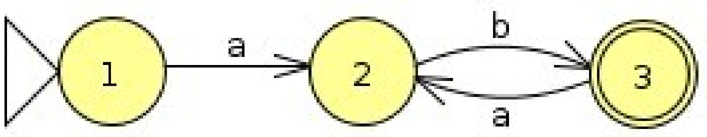
Oui car la concaténation de mots qui ont autant de a que de b est un mot qui a autant de a que de b (et le mot vide a autant de a que de b).

- $L= \{ m \in \{a,b\}^* \mid m[1] = m[|m|] \}$ est un langage fermé pour la concaténation.

Non. Contre exemple : $a \in L$ et $b \in L$. Mais $ab \notin L$

Exercice 2 :

Soit l'automate A suivant :



Calculer deux expressions rationnelles r_e et r_s associées à cet automate (telles que $L(r_e) = L(r_s) = L(A)$) en appliquant la méthode de variation des états d'entrée (pour trouver r_e), puis la méthode de variation de sortie (pour trouver r_s). Remarque : inutile de compléter préalablement l'automate. On explicitera les calculs.

Variation des états d'entrée

R1 = aR2

R2 = bR3

R3 = aR2+ ε

Résolution (non unique) :

R1 = abR3

R2 = bR3

R3=abR3 + ε

==> R3 = (ab)*

==> r_e = R1 = $(ab)(ab)^* = (ab)^+$

Variation des états de sortie

R1 = ε

R2 = R1a+R3a

R3 = R2 b

Résolution (non unique) :

R1 = ε

R2 = a + R2ba

R3=R2b

==> R2 = a(ab)*

==> r_s = R3 = $a(ab)^*b$

En déduire une propriété sur les expressions rationnelles.

a(ab)*b=(ab)+

Exercice 3 :

Soient $A_1 = (\Sigma, E_1, i_1, F_1, \delta_1)$ et $A_2 = (\Sigma, E_2, i_2, F_2, \delta_2)$ deux automates déterministes complets.
Soit l'automate $A_{1\_2} = (\Sigma, E_1 \times E_2, (i_1, i_2), F_1 \times F_2, \delta_{1\text{-}2})$ où $\delta_{1\text{-}2}$ est défini par :

$$\forall\ e \in E_1,\ \forall\ e' \in E_2,\ \forall\ \alpha \in \Sigma, \quad \delta_{1\text{-}2}((e,e'), \alpha) = (\delta_1(e, \alpha), \delta_2(e', \alpha))$$

a) Prouver que :

$$\forall\ e \in E_1,\ \forall\ e' \in E_2,\ \forall\ m \in \Sigma^*, \quad \delta_{1\text{-}2}^{\ *}((e,e'), m) = (\delta_1^{\ *}(e, m), \delta_2^{\ *}(e', m))$$

Preuve par induction sur la longueur |m| de m :

$\Pi(n) = |m| \leq n$

Si |m|=0 alors $m = \varepsilon$. Dans ce cas :

$\delta_{1\text{-}2}^{\ *}((e,e'), \varepsilon) = (e,e')$ par définition de la fonction de transition itérée

et $(\delta_1^{\ *}(e, \varepsilon), \delta_2^{\ *}(e', \varepsilon)) = (e,e')$ " "

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai

Soit m tel que $|m| = n+1$ et $n \geq 0$. Alors $m=\alpha m'$ avec $\alpha \in \Sigma$

et $\delta_{1\text{-}2}^{\ *}((e,e'), m) = \delta_{1\text{-}2}^{\ *}((e,e'), \alpha m')$

$= \delta_{1\text{-}2}^{\ *}(\delta_{1\text{-}2}((e,e'), \alpha), m')$ déf de $\delta_{1\text{-}2}^{\ *}$

$= \delta_{1\text{-}2}^{\ *}((\delta_1(e, \alpha), \delta_2(e', \alpha)), m')$ déf de $\delta_{1\text{-}2}$

$= (\delta_1^{\ *}(\delta_1(e, \alpha), m'), \delta_2^{\ *}(\delta_2(e', \alpha), m'))$ hyp. Rec.

$= (\delta_1^{\ *}(e, \alpha m'), \delta_2^{\ *}(e', \alpha m'))$

$= (\delta_1^{\ *}(e, m), \delta_2^{\ *}(e', m))$

b) Prouver que $L(A_{1\_2}) = L(A_1) \cap L(A_2)$ où L(A) est le langage associé à l'automate A.

$m \in L(A_{1\_2}) \iff \delta_{1\text{-}2}{}^*((i_1, i_2), m) \in F_1 \times F_2$

$\iff (\delta_1{}^*(i_1, m), \delta_2{}^*(i_2, m)) \in F_1 \times F_2$

$\iff \delta_1{}^*(i_1, m) \in F_1$ et $\delta_2{}^*(i_2, m)) \in F_2$

$\iff m \in L(A_1)$ et $m \in L(A_2)$

$\iff m \in L(A_1) \cap L(A_2)$

Exercice 4 : Soit $G=<\Sigma,X,P,S>$ une grammaire non contextuelle d'axiome S et de non terminaux X. Soit L_G le langage associé à la grammaire G.

a) Soit la grammaire $G^2 = < \Sigma , \{S^2\} \cup X , P \cup \{ S^2 \text{-->} SS \} , S^2 >$ où $S^2 \notin X$

Prouver que $L_{G^2} = L_G . L_G$

$m \in L_{G^2}$ <==> S^2 -----> m

==> S^2 --> SS ----> m

==> S^2 --> SS ----> $m=m_1m_2$ et S --> m_1 et S --> m_2

<==> $m=m_1m_2$ et $m_1 \in L_G$ et $m_2 \in L_G$

<==> $m \in L_G . L_G$

Réciproquement, on peut largement inverser le raisonnement précédent :

$m \in L_G . L_G$ ==> $m=m_1m_2$ et $m_1 \in L_G$ et $m_2 \in L_G$

==> $m=m_1m_2$ et S --> m_1 et S --> m_2

==> S^2 --> SS ----> m_1 S ---> m_1 m_2 =m

==> S^2 -----> m ==> $m \in L_{G^2}$

b) Définir la grammaire G' associée au langage $(L_G)^*$

G' = < Σ , {S'} U X , P U { S' --> S'S | ε } , S' > où $S' \notin X$

c) Prouver que $L_{G'} \subseteq (L_G)^*$

G' = < Σ , {S'} U X , P U { S' --> S'S | ε } , S' > où $S' \notin X$

Preuve de $L_{G'} \subseteq (L_G)^*$:

$\Pi(n) =$ $S' \xrightarrow{n} m$ ==> $m = \varepsilon$ ou $m = \Pi\, m_i$ et $S' \text{-->} m_i$

$\Pi(0)$ est trivialement vrai car $|m| \leq 0$ ==> $m = \varepsilon$

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai

Soit m tel que $|m| = n+1$.

$S' \xrightarrow{n+1} m$ ==> S' ---> S'S ---> m

==> $S' \xrightarrow{\leq n} m_1$ et S --> m_2 et $m = m_1m_2$

==> $m_1 \in (L_G)^*$ et $m_2 \in (L_G)$ et $m = m_1m_2$

==> $m = m_1m_2 \in (L_G)^* .(L_G) \subseteq (L_G)^*$

d) Prouver que $(L_G)^* \subseteq L_{G'}$

$G' = < \Sigma , \{S'\} \cup X , P \cup \{ S' \to S'S \mid \varepsilon \} , S' >$ où $S' \notin X$

Preuve de $(L_G)^* \subseteq L_{G'}$:

$\Pi(n) = \left(m = \prod_{i=1}^{n} m_i \text{ avec } S \to m_i \right) \Longrightarrow S' \xrightarrow{*} m$

$\Pi(1)$ vrai :

$m = m_1$ et $S \to m_1 \Longrightarrow S' \to S'S \to S \to m_1 \Longrightarrow m = m_1 \in L_{G'}$

Hyp : $\Pi(n)$ vrai avec $n > 0$

Montrons $\Pi(n+1)$:

$m = \prod_{i=1}^{n+1} m_i$ et $S \to m_i \Longrightarrow S' \to S'S \to \prod_{i=1}^{n} m_i \, m_{n+1} = m$

$\Longrightarrow S' \xrightarrow{*} m$

$\Longrightarrow m \in L_{G'}$

Il en découle que $\Pi(n)$ vrai pour tout $n > 0$.

Il faut aussi vérifier que, comme $\varepsilon \in (LG)^*$, on a bien aussi $\varepsilon \in L_{G'}$ ce qui est vrai car $S' \to \varepsilon$ est une production de G'.