Logique des propositions

.

- La logique des propositions est un langage formel constitué d'une syntaxe et d'une sémantique.
  - La syntaxe décrit l'ensemble des formules qui appartiennent au langage.
  - La sémantique permet de donner un sens aux formules du langage.

Logique des propositions - syntaxe

.

- Le vocabulaire de la logique des propositions est constitué :
  - d'**atomes**, ou **propositions** que l'on désignera par les lettres minuscules de l'alphabet $a, b, c, d, \ldots, z$
  - de **connecteurs logiques** $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$,
  - de parenthèses

Logique des propositions - syntaxe

.

Les règles de formation des formules de la logique des proposition sont :

- Tout atome est une formule
- si E_1 et E_2 sont des formules alors

$\neg E_1$	est une formule
$E_1 \vee E_2$	est une formule
$E_1 \wedge E_2$	est une formule
$E_1 \longrightarrow E_2$	est une formule
$E_1 \leftrightarrow E_2$	est une formule

- si E est une formule alors (E) est une formule.
- rien d'autre n'est une formule.

Logique des propositions - syntaxe

.

- On définit un ordre de précédence entre les connecteur :

$$\neg \; > \; \wedge \; > \; \vee \; > \rightarrow \; > \leftrightarrow$$

- Exemples de formules :

$$\begin{array}{lcl} a & & \\ a \vee b & & \\ \neg a \vee b & \equiv & (\neg a) \vee b \\ a \vee b \wedge c & \equiv & a \vee (b \wedge c) \\ a \vee b \rightarrow c \wedge d & \equiv & (a \vee b) \rightarrow (c \wedge d) \end{array}$$

Logique des propositions - syntaxe

.

- L'ensemble des formules peut être généré à l'aide de la grammaire hors-contexte $G = \langle \Sigma, \{F\}, P, F \rangle$ où :
  - $\Sigma = \{a, b, \ldots, z, (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $P = \begin{cases} F \longrightarrow a|b|\ldots|z \\ F \longrightarrow \neg F \\ F \longrightarrow F \vee F \\ F \longrightarrow F \wedge F \\ F \longrightarrow F\ ' \rightarrow'\ \ F \\ F \longrightarrow F \leftrightarrow F \\ F \longrightarrow (F) \end{cases}$

Logique des propositions - syntaxe

- Le même langage peut être généré par la grammaire non ambiguë $G' = \langle \Sigma, \{F, G, H, I, J, K\}, P, F \rangle$ où :
  - $\Sigma = \{a, b, \ldots, z, (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $P = \left\{ \begin{array}{lcl} F \rightarrow F \leftrightarrow G & | & G \\ G \rightarrow G\ '\!\rightarrow'\ H & | & H \\ H \rightarrow H \vee I & | & I \\ I \rightarrow I \wedge J & | & J \\ J \rightarrow \neg J & | & K \\ K \rightarrow (F) & & \\ K \rightarrow a|b|\ldots|z & & \end{array} \right.$

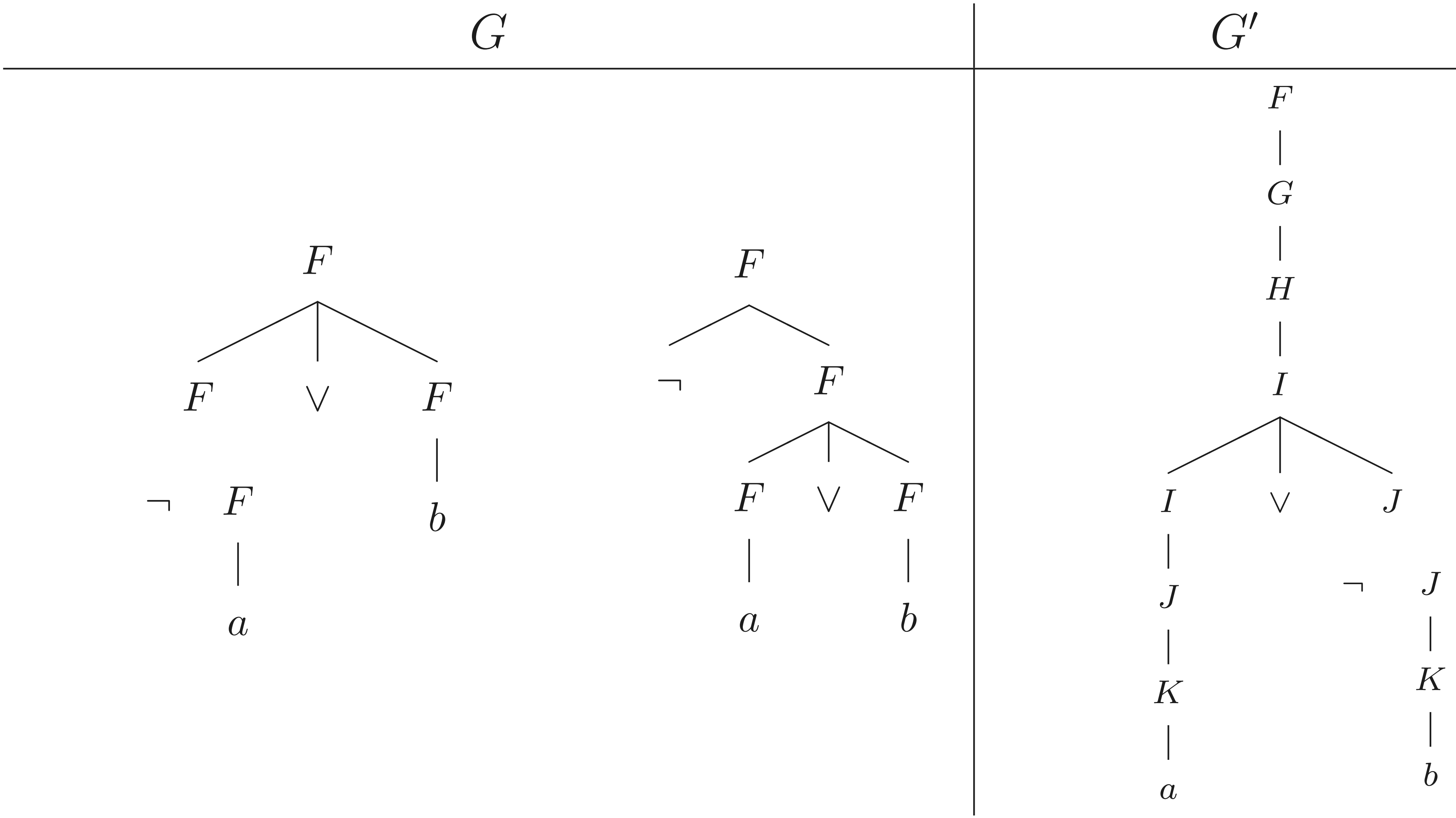
Logique des propositions - syntaxe

.

- G et G' sont **faiblement équivalentes** :
  - Elles reconnaissent le même langage.
  - Mais peuvent associer des arbres différents à un même mot.

Logique des propositions - syntaxe

.



Logique des propositions - sémantique

.

- La sémantique consiste à donner un sens aux différents éléments du langage :
  - on donne à chaque atome une **valeur de vérité** : vrai (v) ou faux (f)
  - on associe à chaque connecteur une **table de vérité.**
- La valeur d'une formule peut être calculée à partir des valeurs de vérité des atomes, grâce aux tables de vérité des connecteurs.

Logique des propositions

.

- La table de vérité d'un connecteur unaire $\circ_1$ permet de calculer la valeur de $\circ_1 F$ étant donné la valeur de F.
- La table de vérité d'un connecteur binaire $\circ_2$ permet de calculer la valeur de $F_1 \circ_2 F_2$ étant donné les valeurs de F_1 et F_2.

F_1	F_2	$F_1 \vee F_2$	$F_1 \wedge F_2$	$\neg F_1$	$F_1 \longrightarrow F_2$	$F_1 \leftrightarrow F_2$
v	v	v	v	f	v	v
v	f	v	f	f	f	f
f	v	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v	v

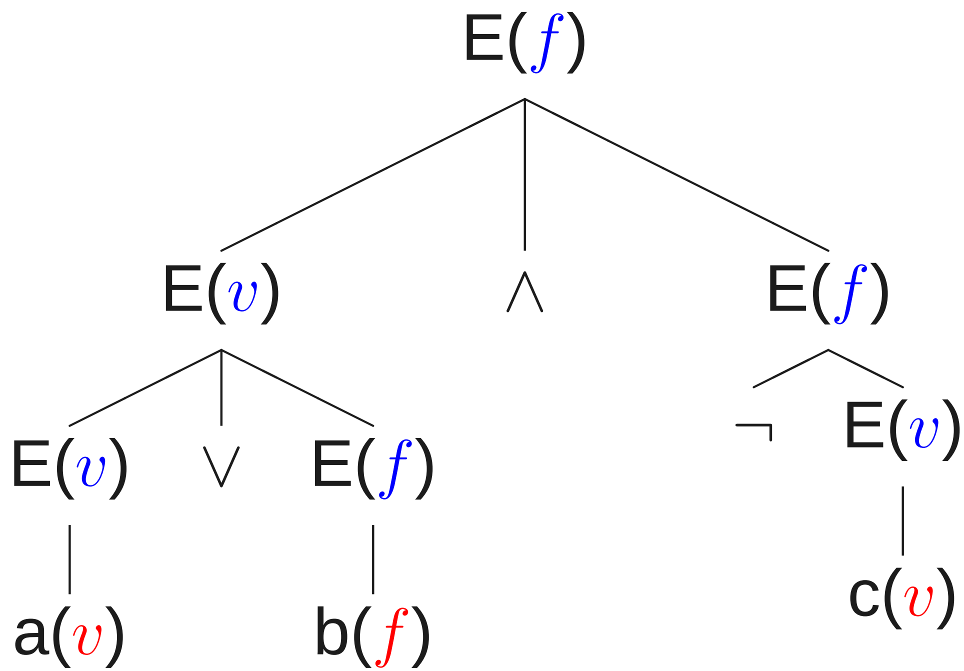
Logique des propositions - sémantique

.

- Les tables de vérité des connecteurs sont toujours les mêmes.
- Les valeurs de atomes peuvent changer, elles sont déterminées par une **fonction d'évaluation.**
- On appelle fonction d'évaluation d'un ensemble d'atomes A, une fonction V de A dans $\{v, f\}$.
- Pour **évaluer** une formule F, il faut définir une fonction d'évaluation des atomes qui figurent dans F.
- On dit que V **satisfait** F si l'évaluation de F étant donné V est égale à v.

Logique des propositions

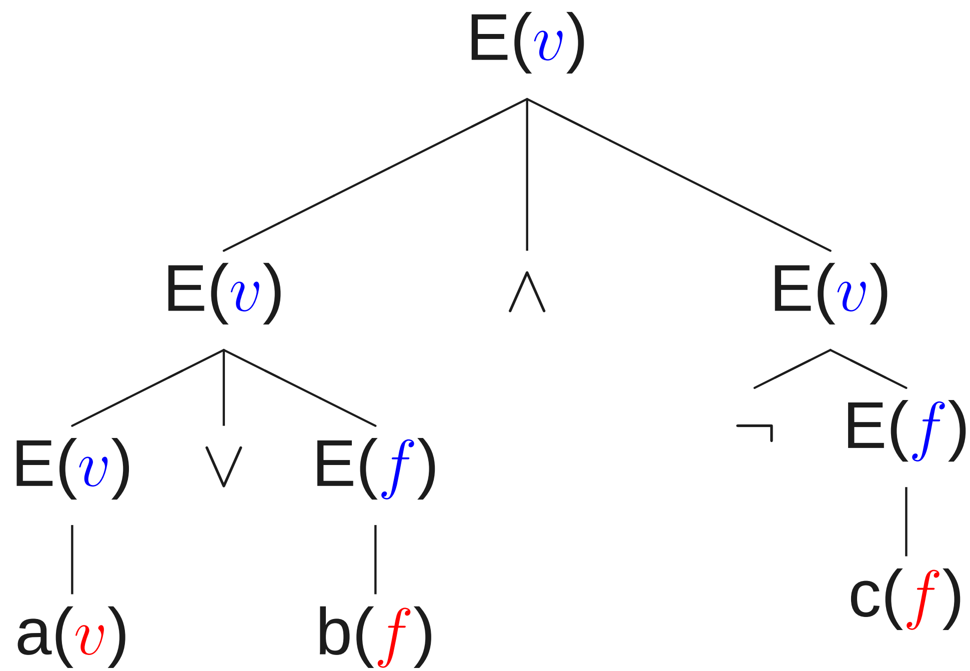
- $V = \{(a, v), (b, f), (c, v)\}$ ne satisfait pas $a \vee b \wedge \neg c$



Logique des propositions

.

- $V = \{(a,v),(b,f),(c,f)\}$ satisfait $a \vee b \wedge \neg c$



Logique des prédicats

.

- En logique des prédicats, les éléments de base du langage ne sont plus des propositions mais des prédicats.

la mer	*est bleue*
sujet	prédicat

- Un prédicat peut être vu comme une **fonction propositionnelle** $bleu(x)$ qui prend la valeur v lorsque x est *la mer* et f lorsque x est *le soleil*.
- Le prédicat *aimer* prend deux arguments : l'être aimant et l'être ou la chose aimée.
- On appellé **arité** d'un prédicat, le nombre d'argument qu'il requiert.

Logique des prédicats

.

- Le vocabulaire de la logique des prédicats est constitué de cinq classes de symboles :
  - les constantes ($a, b, c, d \ldots$)
  - les variables ($w, x, y \ldots$)
  - les symboles de prédicats d'arité positive ou nulle ($A, B \ldots$)
  - les connecteurs logiques
  - les quantificateurs ($\forall, \exists$)
    - $\forall$ est appelé le quantificateur **universel**
    - $\exists$ est appelé le quantificateur **existentiel**

Logique des prédicats

.

- Un **terme** est :
  - une variable
  - ou une constante
- Si $t_1 \ldots t_n$ sont des termes et si A est un prédicat d'arité n, alors $A(t_1, \ldots, t_n)$ est un **atome** ou formule atomique.

Logique des prédicats

.

- une **formule** est définie récursivement :
  - tout atome est une formule
  - si φ et ψ sont des formules, alors : $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ sont des formules.
  - si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est un formule.
  - si φ est une formule et si x est une variable, alors $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ sont des formules. φ est appelé la **portée** du quantificateur $\forall x$ et $\exists x$.
  - toute formule est obtenue par l'application des règles précédentes un nombre fini de fois.

Logique des prédicats - syntaxe

.

- On définit un ordre de précédence entre les connecteur :

$$\forall, \exists \; > \; \neg \; > \; \wedge \; > \; \vee \; > \rightarrow > \leftrightarrow$$

- Exemples de formules :

$$\begin{array}{lcl}
\forall x A(x) & \equiv & \forall x (A(x)) \\
\forall x \exists y B(y) \vee H(a) & \equiv & \forall x (\exists y (B(y))) \vee H(a) \\
\neg \forall x H(x) \rightarrow P(x) & \equiv & \neg (\forall x (H(x))) \rightarrow P(x)
\end{array}$$

Logique des prédicats

.

- Dans la formule $\forall x J(x, y)$, x est dans la portée du quantificateur universel. Elle est dite **liée**, la variable y est **libre.**
- L'ensemble des variables liées d'une formule φ (noté $\mathcal{B}(\varphi)$) se définit de la façon suivante :
  - si φ est un atome, $\mathcal{B}(\varphi) = \emptyset$
  - si φ est de la forme $\chi \vee \psi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \rightarrow \psi$, $\chi \leftrightarrow \psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\chi) \cup \mathcal{B}(\psi)$.
  - si φ est de la forme $\neg\psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\psi)$
  - si φ est de la forme $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$ alors $\mathcal{B}(\varphi) = \{x\} \cup \mathcal{B}(\psi)$

Logique des prédicats

.

- L'ensemble des variables libres d'une formule φ (noté $\mathcal{F}(\varphi)$) se définit de la façon suivante :
  - si φ est un atome, $\mathcal{F}(\varphi)$ est égal à l'ensemble des variables apparaissant dans φ
  - si φ est de la forme $\chi \vee \psi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \rightarrow \psi$, $\chi \leftrightarrow \psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\chi) \cup \mathcal{F}(\psi)$.
  - si φ est de la forme $\neg\psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\psi)$
  - si φ est de la forme $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$ alors $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\psi) - \{x\}$
- Une formule φ telle que $\mathcal{F}(\varphi) = \emptyset$ est dite **close** ou **fermée**.

Domaine de discours, interprétation, modèle

.

- Pour évaluer la formule $\forall x H(x)$ il faut connaître l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x.
- Cet ensemble est appelé le **domaine de discours**, noté $\mathcal{D}$
- L'évaluation d'une formule φ nécessite la spécification d'un domaine de discours $\mathcal{D}$ et d'une **fonction d'interprétation** I qui associe :
  - à chaque symbole de constante un élément de $\mathcal{D}$
  - à chaque symbole de prédicat P d'arité n, la définition d'une fonction de $\mathcal{D}^n \rightarrow \{v, f\}$ définissant P.
- Un domaine de discours et une fonction d'interprétation constituent un **modèle**.

Assignation

.

- Pour évaluer une formule comportant des variables, il est nécessaire de donner à ces dernières des valeurs dans $\mathcal{D}$.
- On appelle **assignation**, une fonction qui associe à toute variable une valeur dans $\mathcal{D}$.
- Etant donné l'assignation g, on note $g[y \leftarrow d]$ l'assignation g' qui associe la valeur d à la variable y et associe les mêmes valeurs que g à toutes les autres variables.

Evaluation d'une formule

.

- L'évaluation d'une formule nécessite la spécification de :
  - Un modèle M
  - Une fonction d'assignation g

Interprétation de termes

.

- Si t est un terme, on définit la fonction d'interprétation, étant donné un modèle $M = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et une assignation g, de la manière suivante :

$$[[t]]_{\langle M,g \rangle} = \begin{cases} I(t) & \text{si } t \text{ est une constante} \\ g(t) & \text{si } t \text{ est une variable} \end{cases}$$

Evaluation

.

- $V_{\langle M,g\rangle}(P(t_1,\ldots,t_n)) = v$ ssi $\langle [[t_1]]_{\langle M,g\rangle},\ldots,[[t_n]]_{\langle M,g\rangle}\rangle \in [[P]]_{\langle M,g\rangle}$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\neg\varphi) = v$ ssi $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi) = f$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi \vee \psi) = v$ ssi $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi) = v$ ou $V_{\langle M,g\rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi \wedge \psi) = v$ ssi $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi) = v$ et $V_{\langle M,g\rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi \rightarrow \psi) = v$ ssi $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi) = f$ ou $V_{\langle M,g\rangle}(\psi) = v$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi \leftrightarrow \psi) = v$ ssi $V_{\langle M,g\rangle}(\varphi) = V_{\langle M,g\rangle}(\psi)$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\forall x\varphi) = v$ ssi pour tout $d \in \mathcal{D}$, $V_{\langle M,g[x\leftarrow d]\rangle}(\varphi) = v$
- $V_{\langle M,g\rangle}(\exists x\varphi) = v$ s'il existe au moins un $d \in \mathcal{D}$ tel que $V_{\langle M,g[x\leftarrow d]\rangle}(\varphi) = v$