Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- **Formes normales et clausale**
- Méthode de résolution
- Méthode des tableaux
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

Littéral

- Un ***littéral*** est une fbf réduite à un symbole propositionnel ou à la négation d'un symbole propositionnel
  - On parle de *littéral positif* (ex. p)
    ou de *littéral négatif* (ex. ¬p)

- On parle du *littéral opposé* d'un littéral donné (ex. ¬p et p sont opposés)

- *Exercice : définir la fonction lit qui associe à une fbf donnée l'ensemble de ses littéraux*

Formes conjonctive et disjonctive

- Une fbf est dite sous *forme conjonctive* lorsqu'elle est composée d'une conjonction de disjonctions de littéraux
  - Exemple : $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$
- Une fbf est dite sous *forme disjonctive* lorsqu'elle est composée d'une disjonction de conjonctions de littéraux
  - Exemple : $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)$

Formes normales

- Une fbf P est dite sous forme ***normale*** conjonctive (resp. disjonctive) lorsqu'elle est sous une forme conjonctive (resp. disjonctive) telle que tous les symboles propositionnels (ceux de P ou ceux de l'ensemble S considéré) apparaissent dans chaque disjonction (resp. conjonction)
  - Ex. de FNC : $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$
  - Ex. de FND: $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$
- Remarque : un littéral seul est à la fois FNC et FND
- Propriété : A une permutation des littéraux, conjonctions et disjonctions près, les FNC et FND sont uniques pour un S donné.
  - On peut donc tester l'équivalence de deux fbf en comparant syntaxiquement leur FNC (ou FND)

D'une FC/FD à une FNC/ND

- Pour passer d'une forme conjonctive (resp. d'une forme disjonctive) à une forme normale conjonctive (resp. disjonctive) on introduit les symboles manquants à l'aide des équivalences suivantes :

  $D \equiv (D \vee p) \wedge (D \vee \neg p)$ $\quad\quad$ $C \equiv (C \wedge p) \vee (C \wedge \neg p)$

- Exemple :

  $\mathbf{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)}$

  $(p \vee q \;\; \mathbf{r?}\;) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

  $\equiv \mathbf{(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)}$

Formes normales (suite)

- Les FND et FNC s'obtiennent à partir d'une table de vérité :
  - FND : on fait la disjonction des conjonctions des littéraux associés aux interprétations donnant la valeur 1 à la fbf
  - FNC : on fait la conjonction des disjonctions des opposés des littéraux associés aux interprétations donnant la valeur 0 à la fbf
- Exemple :

p	q	**P**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

FND(P) = $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

FNC(P) = $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Par ailleurs, $P \equiv \neg p$

Clause

- Une ***clause*** est une représentation ensembliste de disjonctions de littéraux
  - Exemple : $\{\neg p, q, \neg r, s\}$
  - La sémantique d'une clause est complètement définie par l'ensemble des littéraux qui la composent
  - Une infinité de disjonctions de littéraux peut être associée à une clause mais elles sont toutes sémantiquement équivalentes
    - idempotence, associativité et commutativité de la disjonction
- On associe la proposition $\perp$ à la clause vide (notée Ø)
  - toute disjonction associée à une clause $C=\{L_1,L_2,\ldots,L_k\}$ est logiquement équivalente à $((L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k) \vee \perp)$
  - La sémantique de Ø est donc 0

Forme clausale

- Une ***forme clausale*** est une représentation ensembliste d'une forme conjonctive
  - Exemple : $\{\{p,q,\neg r\}, \{p,\neg s\}, \{\neg r,\neg s\}, \{q\}\}$
  - La sémantique d'une forme clausale est complètement définie par l'ensemble des clauses qui la composent
  - Une infinité de formes conjonctives peut être associée à une forme clausale mais elles sont toutes sémantiquement équivalentes
    - idempotence, associativité et commutativité de la conjonction
- On associe la proposition T à l'ensemble vide de clause
  - toute forme disjonctive associée à une forme clausale $F=\{C_1,C_2,\ldots, C_k\}$ est logiquement équivalente à $((C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k) \wedge T)$
  - La sémantique de l'ensemble vide de clause est donc 1

Mise sous forme clausale

- **Théorème**

  « On peut associer à toute fbf P une forme clausale F logiquement équivalente à P »

  – Il n'y a pas d'unicité !

- Algorithme de mise sous forme clausale (par formulaires)

1. Éliminer les $\leftrightarrow$

   $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

2. Éliminer les $\rightarrow$

   $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

3. Ramener la négation devant les symboles propositionnels et supprimer les négations multiples

   $\neg\neg P \equiv P$ $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$ $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$

4. Inverser les disjonctions de conjonction

   $((P \vee (Q \wedge R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

5. *Passer de la forme conjonctive obtenue à sa forme clausale*

Propriétés des clauses

- Dans la suite, on emploie indifféremment le terme de clause pour parler de l'ensemble de littéraux ou d'une des fbf disjonctives que l'on peut lui associer
- Propriétés
  - Une clause est valide ssi elle contient un littéral et son opposé
  - Une clause non vide ne contenant pas de littéraux opposés est contingente
  - Seule la clause vide est insatisfiable
- Définition
  - Une clause C subsume une clause C' ssi $C \subseteq C'$
- Propriétés
  - Si C subsume C' alors $C \models C'$
  - Si C' non valide et $C \models C'$ alors C subsume C'

Propriétés des formes clausales

- Soit F une forme clausale et soit C une clause valide de F, on a **F ≡ F - {C}**
  - On peut donc éliminer les clauses tautologiques des formes clausales en conservant leur sémantique

- Soit F une forme clausale et soit C, C' (avec C ≠ C') deux clauses de F t.q. C subsume C', on a **F ≡ F - {C'}**
  - On peut donc éliminer les clauses subsumées des formes clausales en conservant leur sémantique

Clause de Horn

- Une ***clause de Horn*** est une clause ayant au plus un littéral positif
  - Exemple : $\{\neg p, q, \neg r, \neg s\}$ ou $\{\neg r, \neg s\}$
- On appelle *règle de Horn*, une fbf composée d'une implication entre deux conjonctions de littéraux positifs
  - Exemple : $p1 \wedge p2 \ldots \wedge pn \rightarrow c1 \wedge c2 \ldots \wedge cn$
- Propriété :

« La forme clausale d'un ensemble de règles de Horn ne contient que des clauses de Horn »