1 Soit la formule $\mathcal{F}_1$: $\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \rightarrow \exists z P(x,z))$.

Question 1 (1 point) Dessiner l'arbre syntaxique correspondant à $\mathcal{F}_1$.
Question 2 (2 points) Définir un domaine $\mathcal{D}$ et une interprétation I (sur $\mathcal{D}$) du langage de $\mathcal{F}_1$ tels que $Val(\mathcal{F}_1, I) =$ vrai.
Question 3 (1 point)
Que pouvez vous déduire **de votre réponse** sur le statut[1] de $\mathcal{F}_1$? Justifier.

2 Soit la formule $\mathcal{F}_2$: $\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \rightarrow \exists z P(x,z))$

Question 4 (2 point) Mettre la formule $\mathcal{G}_2 = \neg\mathcal{F}_2$ sous forme prenexe, c'est à dire éliminez l'implication, collez les $\neg$ aux prédicats et faites passer les quantificateurs en tête de la formule, le tout par des transformations syntaxiques qui transforment une formule en une formule logiquement équivalente.
Détaillez vos transformations.
Question 5 (5 points)
Démontrer par l'absurde (et sans autre manipulation syntaxique) que $\mathcal{F}_2$ est valide.
On vous demande d'écrire formellement votre preuve en utilisant la notion d'assignation.

3 Manipulation syntaxique

Question 6 (4 points)
Grâce à des manipulations syntaxiques judicieuses, donner pour chacune des deux formules suivantes une formule logiquement équivalente, sans implication, et la plus courte possible :

$\mathcal{F}'$: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg P(x))$

$\mathcal{F}''$: $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x))$

Détaillez vos manipulations.

4 Modélisation

Soit le domaine $\mathcal{D}$ composé des entiers de 1 à 15, les prédicats $\mathcal{P}$ et Π d'arité 1 et Suc d'arité 2 et l' interprétation I suivante :

- $I(P) = \{n;\ n$ est un entier **pair** compris entre 1 et 15$\}$
- $I(\Pi) = \{n;\ n$ est un entier **premier** compris entre 1 et 15$\}$
- $I(Suc) = \{(p+1, p); p$ est un entier compris entre 1 et 14 $\}$

Question 7 (2 point)
Construire une formule $\mathcal{F}$ (utilisant les deux seules variables x et y) telle qu'une modélisation de "*tout successeur d'un nombre pair entre 1 et 15 est premier*" soit "$\forall x\, \forall y\, \mathcal{F}$".

Question 8 (3 points)
Combien y a-t-il d'assignations θ (du couple des variables de $\mathcal{F}$) telles que $Val(\mathcal{F}, \mathcal{I}, \theta)$ =vrai ? (Justifier).

1. valide, satisfiable, contingent, insatisfiable