GLIN502
Université Montpellier 2 juin 2013

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (deuxième session)

Tout document personnel autorisé

Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ
PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

Pour tout langage L, on définit :

$\sqrt{L}=\{m\in L \mid m.m\in L\}$

$L^{(2)}=\{m.m \mid m\in L\}$

a) Soit E = {ε , a, b, aa, ab} un langage défini sur l'alphabet {a, b }. Donner les éléments des ensembles suivants :

- $\sqrt{E}$ = { ε , a }
- $E^{(2)}$ = {ε , aa, bb, aaaa, abab }
- $\sqrt{E^{(2)}}$ = { ε , a, b, aa, ab } = E
- $\sqrt{E}^{(2)}$ = { ε , aa }

b) Soit l'alphabet Σ={a, b } et $E' = \{m.b \mid m\in\Sigma^*\}$

b.1) Prouver que : $E' \subseteq \sqrt{E'}$

m ∈ E' ==> m = m'b
==> mm = m'bm'b ∈ E'
==> m ∈ $\sqrt{E'}$

b.2) Prouver que : $\sqrt{E'} \subseteq E'$

m ∈ $\sqrt{E'}$ ==> mm ∈ E'
==> m = m'b
==> m ∈ E'

c) Prouver que, si L est un langage fermé pour la concaténation, alors $L \subseteq \sqrt{L}$

m ∈ L ==> mm ∈ L

==> m ∈ $\sqrt{L}$

d) Soit l'alphabet Σ={a, b } et $E'' = \{m \in \{a,b\}^* \mid |m|_a = |m|_b + 1\}$
Prouver que $\sqrt{E''} = \{\}$

m ∈ $\sqrt{E''}$ ==> mm ∈ E'

==> |mm|a = |mm|a + 1

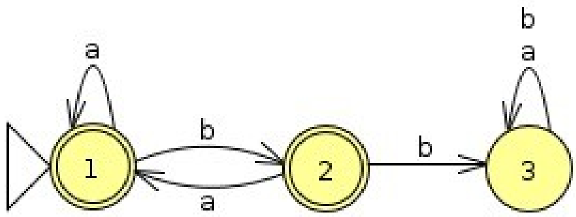
==> 2|m|a = 2|m|b + 1

==> 2(|m|a -|m|b) = 1 impossible

==> $\sqrt{E''}$ = {}

Exercice 2 :

Soit l'automate déterministe A = (Σ, E, i, F, δ) suivant :



a) Trouver trois mots de longueur inférieure ou égale à trois qui ne sont pas reconnus par cet automate.

bb et abb et bba

b) Justifier que $\forall e \in E \ , \ \delta^*(e, bb) = 3$

δ *(1,bb) = δ(δ (1, b), b) = δ(2, b) = 3

δ *(2,bb) = δ(δ (2, b), b) = δ(3, b) = 3

δ *(3,bb) = δ(δ (3, b), b) = δ(3, b) = 3

c) Prouver que $\forall m \in \Sigma^* \ , \ \delta^*(3, m) = 3$

Π(n) = |m| ≤ n ==> δ*(3 ,m)=3

Π(0) est vrai car δ*(3 ,ε)=3

Hypothèse : Π(n) vrai

Montrons que Π(n+1) est vrai :

Soit m tel que |m| = n+1. Posons m = α.m' (on peut aussi décomposer en m = m'.α)

δ *(3, m) = δ *(3, α.m') = δ *(δ (3, α), m') = δ *(3, m')

= 3 Hyp. rec.

d) En déduire que $\forall m_1 \in \Sigma^*$, $\forall m_2 \in \Sigma^*$ $\delta^*(1, m_1 bb m_2) = 3$

$\delta^*(1, m_1.bb.m_2) = \delta^*(\delta^*(1, m_1.bb), m_2)$ $= \delta^*(\delta^*(\delta^*(1, m_1), bb), m_2)$ $= \delta^*(\delta^*(e, bb), m_2)$ où $e = \delta^*(1, m_1)$ $= \delta^*(3, m_2)$ $= 3$

e) Si $(e_1, \alpha_1, e_2, \alpha_2, \ldots, e_n, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ est un chemin de l'automate A allant de l'état 1 à l'état 3, alors

$\exists k$ tel que $e_k = 2$ et $\forall i \geq k$ tel que $e_i = 3$ et $\alpha_{k-1} = b$ et $\alpha_k = b$

Expliquer comment trouver e_k et pourquoi ces propriétés sont vraies.

Pour aller de l'état 1 à l'état 3 ne peut se faire qu'en passant au moins une fois par l'état 2. On prendra pour ek le dernier de ces états 2 dans le chemin de l'état 1 à l'état 3. De sorte que les états suivants ne pourront être que des états 3. Et α_{k-1} = b car la seule transition pour arriver dans l'état 2 a b comme étiquette. Et α_k = b car la seule transition qui va de l'état 2 à l'état 3 a pour étiquette la lettre b

f) Justifier l'implication suivante : $\delta^*(1, m) = 3 \Rightarrow \exists m_1 \in \Sigma^*, \exists m_2 \in \Sigma^*$ tel que $m = m_1 bb m_2$

$\delta^*(1, m) = 3$ ==> Il existe un chemin $(e_1, \alpha_1, e_2, \alpha_2, \ldots, e_n, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ de trace m allant de l'état 1 à 3 ==> $\exists k$ tel que $e_k = 2$ et $\forall i \geq k$ tel que $e_i = 3$ et $\alpha_{k-1} = b$ et $\alpha_k = b$ En posant m1 = $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-2}$ et m2 = $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{n+1}$, on obtient $m = m_1 bb m_2$

g) En déduire une preuve que les mots reconnus par l'automate sont ceux qui ne contiennent pas le facteur bb et uniquement ceux là.

Si bb est un facteur de m alors m = m1 bb m2 et on a montré au d) que $\delta^*(1, m_1.bb.m_2) = 3 \notin F$ Donc les mots contenant le facteur bb ,ne sont pas reconnus par l'automate. Inversement, il faut montrer que, si le mot est sans facteur bb, alors il est reconnu par l'automate : on a établit que $\delta^*(1, m) = 3$ ==> m = $m'_1 bb.m'_2$ Donc m n'a pas un facteur bb ==> $\delta^*(1, m) \neq 3$ ==> $\delta^*(1, m) \in \{1,2\}$ ==> $\delta^*(1, m) \in F$ ==> m est reconnu par l'automate A

Exercice 3 : Soit $G=<\Sigma, X, P, S>$ une grammaire non contextuelle d'alphabet Σ={a, b}, d'axiome S, de non terminaux X, et dont les productions P sont : $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

a) Prouver que $\forall m \in \Sigma^*, S \overset{*}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a$ est un entier pair

$\Pi(n) = \forall m \in \Sigma^* \quad S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a$ est un entier pair

Π(0) vrai par vacuité

Hypothèse : Π(n) vrai

Supposons $S \overset{n+1}{\rightarrow} m$

Alors S → aSa → m ==> m = am$_1$a et S → m$_1$ ==> m = am$_1$a et |m$_1$| pair ==> |m| pair

ou S → bSb → m ==> m = bm$_1$b et S → m$_1$ ==> m = bm$_1$b et |m$_1$| pair ==> |m| pair

ou S → ε = m ==> |m|$_a$ = | ε |$_a$ = 0 est bien un entier pair

b) Prouver que $\forall m \in \Sigma^*, \exists m'$ tel que $S \overset{*}{\rightarrow} m.m'$

$\Pi(n) = \forall m \in \Sigma^*, |m| \leq n \Rightarrow \exists m'$ tel que $S \rightarrow_* m.m'$

Π(0) vrai car $|m| \leq 0$ ==> m = ε ==> m' = ε est tel que S → ε . ε = ε

Hypothèse : Π(n) vrai

Supposons que $m \in \Sigma^*$ et $|m| = n+1$

Alors m = α.m$_1$

Par hypothèse de récurrence, il existe m'$_1$ tel que S → m$_1$ m'$_1$

et on a : S → α S α. → α m$_1$ m'$_1$ α = m m' avec m' = m'$_1$ α

d'où il existe m' tel que S → mm'