Logique 1 - Durée 2h- M. Leclère

Tout document autorisé. Pas de calculatrice. La note tiendra le plus grand compte de la manière dont vous aurez rédigé vos démonstrations et vos explications.

A – Syntaxe et sémantique *1,5 point*

Soit la formule suivante : $(((B\wedge(\neg C\wedge D))\vee A) \wedge \neg(E\rightarrow A))$

1- Dessinez l'arborescence qui lui est associée

2- Montrez que cette formule est contingente

B – Equivalence et conséquence *3 points*

3 - Dites en utilisant les formulaires ou les tables de vérité si les formules suivantes sont sémantiquement équivalentes $A = (((p\rightarrow q) \wedge (p\rightarrow\neg r)) \rightarrow \neg p)$ $B = (p\rightarrow(\neg q\vee r))$.

4 - Soit les 4 formules suivantes $p\wedge q$, $p\wedge\neg p$, $\neg p\vee q$, $q\vee\neg q$. Ordonnez ces formules selon la relation « a pour conséquence logique » (on ne cherche que des conséquences logiques simples c'est à-dire avec une seule formule en hypothèse). Justifiez (prouvez) votre réponse.

C - Modélisation *5,5 points*

Didou essaye de se rappeler les crayons de couleurs qu'il a emportés. Il se souvient que :

(a) Il n'a pas de jaune ;
(b) Il a toujours du vert quand il n'a pas de bleu ;
(c) S'il a du rouge, alors il n'a ni noir ni gris ;
(d) Des trois couleurs : bleu, jaune et rouge, il en a au moins deux ;
(e) Des deux couleurs : gris et orange, il en a exactement une.

On suppose qu'il n'a jamais d'autres couleurs que celles citées. Peut-on déterminer avec certitude les couleurs qu'il a emportées ? Si oui lesquelles ? Sinon pourquoi ?

Vous séparerez bien dans votre réponse :

5- **modélisation des énoncés**

6- **formalisation du problème posé**

7- **justification** de votre réponse en **détaillant le raisonnement** utilisé.

D - Méthodes de preuve *5 points*

8- Démontrez en utilisant exclusivement la méthode des tableaux que :

$$p, (p \rightarrow q), (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \models (p \wedge (q \wedge r)).$$

9- Dites en utilisant exclusivement la méthode de résolution si la fbf suivante est satisfiable ou insatisfiable

$$(p\rightarrow q) \wedge (\neg p\rightarrow(q\vee r)) \wedge (\neg r\rightarrow\neg q) \wedge ((q\wedge r)\rightarrow\neg p) \wedge (r\rightarrow p)$$

E - Problème de synthèse *5 points*

On s'intéresse à la mise en œuvre d'un système expert simplifié permettant à partir d'un ensemble $\mathbb{F}$ de faits et d'un ensemble $\mathbb{R}$ de règles de répondre à une requête $\mathbb{Q}$. Plus précisément :

- les **faits** sont des **symboles propositionnels** ;
- les **règle**s sont de la forme **H1∧H2…∧Hn→C** où C et les Hi sont des symboles propositionnels ;
- les **requête**s sont de la forme **Q1∧Q2…∧Qk** où les Qi sont des symboles propositionnels.

Etant donné $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ un tel système doit répondre « oui » si $\mathbb{F} \cup \mathbb{R} \models \mathbb{Q}$ et « non » sinon.

a) Soit F = {b, c} , R = {c∧d→a, b→e, e∧a→f, e∧c→a} et soit Q = e∧f, calculez la forme clausale nécessaire pour appliquer la méthode de résolution pour répondre au problème F ∪ R ⊨ Q.

b) Montrez que quelque soit $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ les données d'un tel système, les formes clausales obtenues seront toujours composées de clauses de Horn.

c) Démontrez que quelque soit $\mathbb{F}$ et $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{F} \cup \mathbb{R}$ est forcément consistant en montrant comment construire un modèle à partir des clauses associées à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{R}$.

On décide d'utiliser la stratégie de résolution suivante : toujours réutiliser la dernière clause obtenue et toujours effectuer *une résolution* permettant d'effacer le premier littéral de cette dernière clause obtenue (si la dernière clause est ¬p∨¬q, on cherche à effectuer une résolution avec une autre clause selon le symbole p). Démarrer avec la clause associée à la requête.

d) Montrez par induction que cette stratégie ne produit que des clauses ne contenant pas de littéraux positifs.

e) Sur l'exemple précédent, donnez deux dérivations différentes obtenues selon cette stratégie, l'une conduisant à un arrêt par absence de résolution possible et l'autre à la clause vide.

f) Montrez que le calcul de dérivation selon cette stratégie ne s'arrête pas toujours (un contre-exemple suffit). Proposez alors de nouvelles conditions d'arrêt permettant de conserver la complétude.