

Examen de Logique 1 – Session Mai 2009

Attention : La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction. Tout document autorisé. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : Application des tables de vérité

3 points

Soit les formules $F = ((a \vee b) \wedge ((b \rightarrow c) \rightarrow a))$, $G = (a \vee (b \wedge \neg c))$ et $H = (a \rightarrow \neg c)$

- 1- Montrez que F est contingente
- 2- Montrez que $F \equiv G$
- 3- Dites si $F \models H$ (en prouvant votre réponse).

Exercice 2 : Modélisation

4 points

- 1- Modélisez en logique des propositions les phrases suivantes :
 - (1) Jean est à son bureau, à moins qu'il soit en train de déjeuner.
 - (2) Jean a un fils ou deux filles.
 - (3) Jean n'a ni fils, ni filles
 - (4) Ni Jean ni Bernard ne possède à la fois un lecteur MP3 et un graveur.
- 2- En vous aidant de cette modélisation, proposez pour chaque phrase, une phrase exprimant la négation de la phrase d'origine.

Exercice 3 : Forme clausale

2 points

Mettez sous forme clausale la formule suivante : $((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg(q \vee r) \rightarrow p))$

Exercice 4 : Méthode de résolution

2 points

Soit l'ensemble de formules $H = \{a \rightarrow b, (c \wedge d) \rightarrow a, e \rightarrow c, d \wedge e\}$, montrez par la **méthode de résolution** que $H \models b$.

Exercice 5 : Méthode des tableaux

3 points

Dites en utilisant **uniquement la méthode des tableaux** (« uniquement » signifiant sans s'autoriser des transformations de formules par application d'équivalence sémantique) si la formule suivante est satisfiable :

$$((\neg(b \wedge a) \rightarrow (a \leftrightarrow b)) \wedge \neg(\neg a \vee b))$$

Exercice 6 : Enigme

3 points

Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégories de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses. Alice et Bernard sont deux habitants de l'île de Puro-Pira. Il se peut qu'ils soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire,... Tout est possible ! Vous rencontrez Bernard qui vous dit : « Alice et moi sommes tous les deux des Pires ».

- 1- Déterminez si Alice et Bernard sont des Purs ou des Pires. Vous justifierez votre réponse en modélisant et résolvant ce problème en logique des propositions.
- 2- Trouvez une phrase qui peut-être dite à la fois par un Pur et un Pire.

Exercice 7 : Complétude de la méthode des tableaux

3 points

On s'intéresse dans cet exercice à la **méthode des tableaux restreinte aux formules sous forme conjonctive**.

- 1- Quelles règles de la méthode des tableaux sont utiles au développement d'un tableau complet sur ces formules ?
- 2- Soit F un ensemble de formules sous forme conjonctive, montrez pour chacune des règles précédentes que si F est contradictoire alors les ensembles de formules associés au(x) nœud(s) fil(s) créé(s) par une règle sont également contradictoires.
- 3- Observez que pour toute application de ces règles, le nombre de connecteurs \wedge, \vee de chaque nœud fils généré est strictement inférieur à son nœud père. Montrez alors par récurrence sur le nombre de connecteurs \wedge, \vee d'un ensemble de formules sous forme conjonctive que si F est contradictoire alors tout tableau complet de F est fermé.