

- Contrôle continu - SUJET A -

- Durée : 1 heure - Aucun document n'est autorisé -
Novembre 2015

Le barème est indicatif, le note totale sera sur 15 points (même si le barème total fait un petit peu plus...). Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

- Exercice 1 - ACPM et voyageur de commerce (4 points) -

Soit $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ les sommets d'un graphe G complet à 6 éléments. Le poids w d'une arête entre deux sommets est donné par la matrice (symétrique) suivante :

$$(w(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 13 & 5 & 6 & 10 \\ . & 0 & 5 & 10 & 11 & 8 \\ . & . & 0 & 12 & 8 & 8 \\ . & . & . & 0 & 2 & 2 \\ . & . & . & . & 0 & 4 \\ . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Le *poids* d'un ensemble F d'arêtes de G est défini comme la somme des poids des arêtes de F .

- Construire un arbre couvrant $T = (V, F)$ de poids minimum en utilisant l'algorithme de Kruskal. Justifier particulièrement les étapes de rejet d'arêtes qui ont lieu avant l'obtention de la totalité de l'arbre. Dessiner l'arbre obtenu et donner son poids total.
- Question de cours.* Rappeler rapidement le principe de l'algorithme d'approximation de la meilleure tournée pour le voyageur de commerce vu en cours. Que produit précisément cet algorithme ?
- Utiliser l'algorithme de la question précédente pour proposer une tournée pour le voyageur de commerce sur le graphe G .
- Si cela est possible, proposez une meilleure tournée.

- Exercice 2 - Parcours (3.5 points) -

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et r un sommet de G . On effectue un parcours de G qui produit une fonction *père* : $V \rightarrow V$ et un arbre T associés au parcours. On note classiquement n le nombre de sommets de G et m son nombre d'arêtes. Pour rappel, le *niveau* d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes du chemin qui relie r à x dans l'arbre T . De plus, on dit qu'un sommet y est un *ancêtre* d'un sommet x si y appartient au chemin qui relie r à x dans T .

- Écrire une fonction *niveau*($x, r, \text{père}$) qui retourne le niveau d'un sommet x . Préciser la complexité de votre algorithme.
- Écrire une fonction *ancêtre*($x, y, r, \text{père}$) qui renvoie *VRAI* si y est un ancêtre de x et *FAUX* sinon. Préciser la complexité de votre algorithme.
- Écrire une fonction *profondeur*?($G, r, \text{père}$), qui renvoie *VRAI* si, et seulement si, le parcours effectué était un parcours en profondeur. Préciser la complexité de votre algorithme. Dans le cas où la fonction a retourné *VRAI*, comment qualifie-t-on l'arbre T ?

- Exercice 3 - Re-parcours (1.5 points) -

Effectuer un parcours en largeur du graphe dessiné à l'exercice suivant. On prendra e pour racine, et on calculera les fonctions *père*, *ordre* et *niveau* au cours du parcours.

- Exercice 4 - Algo mystère... (3.5 points) -

On se donne l'algorithme suivant :

Algorithme : ALGO

Données : Un graphe $G = (V, E)$ codé par listes de voisin $Vois(x)$ pour $x \in V$.

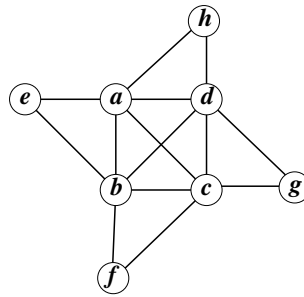
Résultat : Un ensemble X de sommets de G .

```

1 début
2    $X \leftarrow \emptyset$ ;
3   pour tous les  $x \in V$  faire  $c(x) \leftarrow 0$ ;
4   pour tous les  $xy \in E$  faire
5       si  $c(x) = 0$  et  $c(y) = 0$  alors
6            $c(x) \leftarrow 1$ ;
7            $X \leftarrow X \cup \{x\}$ ;
8       fin
9   fin
10  retourner  $X$ ;
11 fin

```

a. Dérouler ALGO sur le graphe G suivant (indiquer rapidement quelques étapes de calcul) :



- Quelle est la complexité de ALGO ? On notera n le nombre de sommets de G et m son nombre d'arêtes.
- Sans preuve, dire quelle propriété possède l'ensemble X .
- Proposer un ensemble X différent de celui fourni à la question a. et qui pourrait être retourné par ALGO sur le graphe G .

- Exercice 5 - Graphes eulériens (4.5 points) -

On dit qu'un graphe G est *eulérien* si le degré de chacun de ses sommets est pair. Une *marche eulérienne* dans un graphe G est une marche de G qui part d'un sommet de G , termine en ce même sommet et traverse exactement une fois chaque arête de G (autrement dit, on peut dessiner G en partant et revenant au même sommet et en ne passant qu'une fois par chaque arête). Le but de l'exercice est de prouver qu'un graphe admet une marche eulérienne si, et seulement si, il est connexe et eulérien.

- Représenter un graphe eulérien.
- Un arbre (ayant au moins deux sommets) peut-il être un graphe eulérien ?
- Si on retire les arêtes d'un cycle à un graphe eulérien, que dire du graphe restant (justifier votre réponse) ?
- Prouver le résultat attendu (on pourra procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe considéré, utiliser la question précédente et ne pas oublier la connexité...)