- TD 1. Connexité. Arbres. -

- Exercice 1 -

Dérouler l'algorithme COMPOSANTES sur le graphe G ayant pour ensemble de sommets $\{1, \ldots, 8\}$ et pour ensemble d'arêtes $\{12, 65, 46, 31, 23, 57\}$. On prendra l'ordre de traitement des arêtes suivant : $12, 46, 31, 57, 23, 65$

- Exercice 2 -

Représenter les graphes dont les ensembles de sommets V et d'arêtes E sont codés ainsi :

a. *Graphe de Petersen.* L'ensemble des sommets est l'ensemble des paires d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deux sommets sont reliés si leurs paires respectives sont disjointes.

b. *Echelle de Möbius.* L'ensemble des sommets est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Deux sommets i et j sont reliés si on a soit $j - i = 3 \mod 8$ soit $j - i = 4 \mod 8$ ou soit $j - i = 5 \mod 8$.

- Exercice 3 - Graphes k-réguliers.

a. Montrer qu'un graphe 1-régulier est un couplage.

b. Montrer qu'un graphe 2-régulier est une union disjointe de cycles.

c. Construire tous les graphes 3-réguliers à 6 sommets. Les dessiner dans le plan en minimisant les croisements d'arêtes.

d. Construire tous les graphes 3-réguliers à 7 sommets.

- Exercice 4 - Nombre d'arêtes.

a. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets ?

b. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant 2 composantes connexes ?

c. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant c composantes connexes ?

d. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe biparti à n sommets ?

- Exercice 5 -

On note $\delta(G)$ le degré minimum d'un sommet du graphe G. Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$. Montrer que G est connexe. Donner un exemple de graphe non connexe avec $\delta(G) \geq \frac{n-2}{2}$.

- Exercice 6 -

Soit G un graphe et x un sommet de G de degré impair. Montrer qu'il existe un chemin de x vers un autre sommet (donc différent de x...) de G de degré impair.

- Exercice 7 - Arbres binaires.

Un *arbre binaire enraciné* est un arbre qui possède une racine de degré 2 (ou 0 si l'arbre est réduit à sa racine) et dont les autres sommets sont de degré 3 ou de degré 1 (ces derniers éléments sont les *feuilles* de l'arbre).

a. Montrer que le nombre de sommets d'un arbre binaire est impair.

b. Calculer, en fonction de n, le nombre de feuilles d'un arbre binaire à n sommets.

- Exercice 8 - Amis.
On veut montrer que dans Montpellier deux personnes au moins ont le même nombre d'amis montpelliérains. Formaliser le problème en termes de graphe et le résoudre.

- Exercice 9 - Algo.
Dans cet exercice, G désigne un graphe non orienté codé par un ensemble de sommets V, et un ensemble d'arêtes E. On se donne l'algorithme suivant :

Algorithme : ALGO
Données : Un graphe $G = (V, E)$.
Résultat : Un ensemble d'arêtes C.
début
    $C \longleftarrow \emptyset$;
    pour tous les $x \in V$ **faire** $c(x) \longleftarrow 0$;
    pour tous les $xy \in E$ **faire**
        si $c(x) = 0$ *et* $c(y) = 0$ **alors**
            $C \longleftarrow C \cup \{xy\}$;
            $c(y) \longleftarrow 1$;
            $c(x) \longleftarrow 1$;
    retourner C;

a. Dérouler ALGO sur les cycles C_5 et C_6.
b. Quelle est la complexité de ALGO ?
c. Quelle propriété $\mathcal{P}$ possède C ? Justifier.
d. Proposer un graphe G, pour lequel l'exécution de ALGO retourne un ensemble C alors qu'il existe un ensemble C' vérifiant $\mathcal{P}$ tel que $|C| < |C'|$.
e. * Montrer en revanche que $|C| \geq |C'|/2$. (On dit que ALGO est une *2-approximation* des ensembles vérifiant $\mathcal{P}$.)

- Exercice 10 - Re-algo.
On propose l'algorithme suivant admettant en entrée un graphe G. Pour un sommet donné v de G, Voisins(v) désigne l'ensemble des voisins de v.

Algorithme : FONCTION
Données : Un graphe $G = (V, E)$.
Résultat : Un entier.

```
début
    si |E| = 0 alors
        retourner |V|;
    sinon
        Choisir un sommet v de G de degré au moins 1;
        n1 ⟵FONCTION(G \ v);
        n2 ⟵1+FONCTION(G \ ({v}∪Voisins(v)));
        retourner max(n1, n2);
```

a. Que retourne FONCTION(G) lorsque : G est le stable (graphe sans arêtes), le graphe complet, le chemin, et le cycle, tous sur 5 sommets ?

b. Interpréter l'entier FONCTION(G). Justifier soigneusement votre réponse.

c. Quelle est la complexité de cet algorithme (dans le pire des cas) ?

- Exercice 11 - En avant !

a. Ecrire un algorithme $CHEMINMAX(G, x)$ prenant en entrée un graphe G codé par listes de voisins et un sommet x de G, et retournant une liste $x = x_0, x_1, \ldots, x_k$ formant un chemin *maximal* de G issu de x (i.e. tel que tous les voisins de x_k sont dans $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$).

b. Proposer une instance pour laquelle votre algorithme pourrait ne pas retourner un chemin de longueur maximale issu de x.

c. Montrer que deux chemins de longueur maximale dans un graphe connexe G ont au moins un sommet en commun.

- Exercice 12 - Connexité.

Montrer que :

a. Un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 2 contient un cycle.

b. Un graphe sur n sommets ayant au moins n arêtes contient un cycle.

c. Un graphe connexe sur n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

d. Si G est un graphe connexe, il existe au moins un sommet x tel que le graphe obtenu en supprimant x est connexe.

- Exercice 13 -

Calculer le nombre d'arbres distincts sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour $n = 1, \ldots, 5$. Proposer une formule générale.

- Exercice 14 - Codage de Prüfer.

Soit A un arbre avec racine sur un ensemble $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$. On associe à A une liste $L(A)$ d'éléments de X de la manière suivante :

- si A est réduit à sa racine, $L(A)$ est vide.
- sinon, on trie dans l'ordre croissant les feuilles $f_1, \ldots, f_k$ de A et on forme la liste $L' := N(f_1), \ldots, N(f_k)$ où $N(f_i)$ est le voisin de f_i. En notant A' l'arbre obtenu en supprimant les feuilles de A, on pose $L(A) = L'.L(A')$ où . est la concaténation.

a. Calculer $L(A)$ lorsque A est l'arbre sur $\{1, \ldots, 9\}$ de racine 8, et dont les arêtes sont $\{48, 38, 14, 24, 64, 93, 51, 71\}$.

b. Quel arbre A sur $\{1,\dots,9\}$ est codé par $9,9,1,9,9,7,2,7$?

c. Combien y a-t-il de suites possibles codant les arbres avec racine de $\{1,\dots,n\}$?

d. En déduire que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 15 -

Soit G le graphe sur $\{1,2,3,4\}$ dont les arêtes sont $\{12,13,14,23,34\}$.

a. Ecrire la matrice d'adjacence A_G de G.

b. On note $D=(d_{i,j})$ la matrice 4×4 diagonale vérifiant que $d_{i,i}$ est le degré de i dans G. Ecrire la matrice $M := A_G - D$.

c. Enlever une ligne et une colonne quelconque à M, et calculer le déterminant de la matrice 3×3 ainsi obtenue.

d. Compter le nombre d'arbres couvrants de G.

e. Le Théorème de Kirchhoff affirme que pour tout graphe, les deux résultats calculés précédemment sont égaux au signe près. Appliquer ce théorème afin de retrouver que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 16 - Propriété de Helly.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de sous-arbres d'un arbre T. Montrer que si les arbres de $\mathcal{T}$ s'intersectent deux à deux, alors il existe un sommet x appartenant à tous les arbres de $\mathcal{T}$.

- Exercice 17 - Grandes manœuvres.

Le nouveau président de l'Université a décidé de délocaliser certains cours de licence à Palavas, lieu plus propice à la concentration. Sachant qu'un cours peut être proposé dans plusieurs licences et qu'on ne veut pas de licence bi-localisée (i.e. sur Montpellier et Palavas), proposer un modèle et un algorithme à utiliser. Bien entendu, la solution 'tout le monde à Palavas' n'est pas acceptable si on peut l'éviter.