3 Sémantique de la logique des prédicats

3.1 Présentation

3.1.1 Rappels

Soit $\mathcal{L} =_{def} \mathcal{C} \cup P$ un langage du premier ordre, avec

— $\mathcal{C}$ l'ensemble des constantes

— $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats

On sait construire des *fbf* (formules bien formées) sur $\mathcal{L}$.

Exemple

$\mathcal{L} =_{def} (\overbrace{\{a, b, c\}}^{\mathcal{C}}, \overbrace{\{P_1,\ C_2\}}^{\mathcal{P}})$ (P_1 unaire, C_2 binaire), on peut construire

$$C_2(a,b)\ \underbrace{C_2(x,a)}_{ouverte},\ \exists x\ C_2(x,a),\ \forall x\ (P_1(x) \to C_2(x,x))\ldots$$

le problème

Ces formules ne sont pas vraies ou fausses dans l'absolu, elles sont vraies ou fausses dans un *monde* donné.

Remarque

Bien sûr, il existe des formules

— vraies dans tout les mondes, par exemple $\forall x\ P_1(x) \vee \neg P_1(x)$, on les dit *valides*

— et d'autres fausses dans tout les mondes, par exemple $\exists x\ P_1(x) \wedge \neg P_1(x)$, on les dit *insatisfiables*

La solution

Comment définir un **monde** ?

Par la notion d'**interprétation** du **langage** sur lequel sont construites les formules.

— en logique des propositions $\mathcal{L} = \{p_1,\ p_2 \ldots p_n\}$ un ensemble de symboles propositionnels (autrement dit de symboles 0-aire de prédicat), une interprétation est une application de $\mathcal{L}$ dans {vrai, faux}.

— en logique des prédicats, où l'on parle d'**objets** et de **relations** entre ces objets, une **interprétation** est composée

  — d'un ensemble d'entités (justement les objets), ensemble appelé le **domaine** de l'interprétation

  — une mise en correspondance de $\mathcal{L}$ avec ce *domaine* :

    — à toute constante on associe un objet

    — à tout prédicat on associe une relation entre les objets du domaine car il faut comprendre qu'une relation, c'est l'**ensemble** de tous les n-uplets d'objets qui la vérifient.

sur l'exemple $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup P$ avec $\mathcal{C} =_{def} \{a, b, c\}$ et $\mathcal{P} =_{def} \{P_1,\ C_2\}$
définition d'une interprétation I de $\mathcal{L}$:

- domaine $\mathcal{D}=$ {Alain, Bernard, Charles, Denis}
- interprétation des constantes : I une application $\mathcal{C} \to D$
  $I(a)=$ Alain, $I(b) =$ Bernard, $I(c) =$ Charles
- interprétation des prédicats
  - P_1 est d'arité 1 (unaire) : c'est le symbole d'une "propriété" que vérifie ou non un objet du domaine.
    Nous *interpréterons* $P_1(a)$ par "Alain est fort".
    Donner l'interprétation de P_1, c'est donner l'ensemble des objets du domaine qui vérifient la propriété dont P_1 est le symbole, par exemple $I(P_1) =$ {Alain, Bernard}.
  - C_2 est d'arité 2 (binaire) : c'est le symbole d'une relation entre deux objets.
    Nous *interpréterons* $C_2(b, c)$ par "Bernard croit que Charles est fort".
    Donner l'interprétation de C_2, c'est donner l'ensemble des couples d'objets du domaine qui sont dans la relation dont C_2 est le symbole, par exemple
    $I(C_2) =$ {(Alain, Bernard), (Bernard, Charles), (Charles, Charles)}

- maintenant va-t-on pouvoir calculer sa *valeur de vérité* pour n'importe quelle formule sur $\mathcal{L}$?
  - $\exists x\ P_1(x)$
  - $\forall x P_1(x)$
  - $C_2(a, x)$ formule ouverte
  - $\forall x\ C_2(a, x)$

  On voit bien qu'en modifiant l'interprétation, on modifie la valeur de vérité de la formule.

3.2 Définition de l'interprétation d'un langage

Une interprétation d'un langage $\mathcal{L} =_{def} \mathcal{C} \cup P$ est constitué d'un ensemble **non vide** [1]$\mathcal{D}$ appelé domaine de I et d'une définition du "sens" des symboles de $\mathcal{L}$:

- pour toute constante $a \in \mathcal{C}$, $I(a) \in \mathcal{D}$ (I est une application de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$).
- pour tout prédicat $p \in P$ d'arité $a_p \neq 0$, $I(p) \subseteq \underbrace{\mathcal{D}\ \times \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D}}_{a_p} = \mathcal{D}^{a_p}$

  Dans l'exemple, $I(C_2)$ est un sous ensemble de l'ensemble des 16 couples possibles. Si $a_p = 0$, $I(p) \in$ {vrai, faux}.

Exercice
Quel est le nombre d'interprétations possibles dans notre exemple ?

1. nombre d'interprétations possibles pour P_1 : on peut dire que seuls Alain et Bernard sont forts ; on peut aussi décider que personne n'est fort. Tout sous-ensemble de $\mathcal{D}$ est une interprétation de P_1 : il y a en donc $2^{|\mathcal{D}|}$
2. nombre d'interprétations possibles pour C_2 : Il y a $|\mathcal{D}|^2$ couples ordonnés : Alain croit que Bernard est fort $\neq$ Bernard croit que Alain est fort, donc il y a $2^{|\mathcal{D}|^2}$ interprétations possibles
   dans notre exemple $2^{25} \approx 10^{3^{2,5}} = 10^{7,5}$

1. Sur un domaine vide, $\forall x P(x)$ et $\forall x \neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.

3. Cas général : c'est le nombre de sous ensembles de $\mathcal{D}^{a_p}$ soit $2^{\mathcal{D}^{a_p}}$

Quel est le nombre d'interprétation possible pour une constante ? : $|\mathcal{D}|$
pour k constantes : $|\mathcal{D}|^k$ donc dans notre exemple 4^3
Donc le nombre total d'interprétation de notre (petit) langage sur notre (petit) domaine est $4^3 \times 2^4 \times 2^{25} = 2^{35} \approx 32\ 10^9$

une toute autre interprétation I_2 de $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup P$
avec $\mathcal{C} =_{def} \{a, b, c\}$ et $\mathcal{P} =_{def} \{P_1,\ C_2\}$

Prenons $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ (un domaine **infini** I_2 défini

- sur les constantes $a \to 0$, $b \to 1$ et $c \to 1$;
- $I_2(P_1)$ est l'ensemble des entiers pairs
- $I_2(C_2)$ est l'ensemble des couples d'entiers successifs : {(0,1), (1,2), (2,3) ... }

3.3 Calcul de la valeur de vérité d'une formule $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{L}$ pour une interprétation donnée I de $\mathcal{L}$

On a vu comment *interpreter* un langage (c'est à dire associer un domaine à un langage). On va maintenant voir comment évaluer une formule (à vrai ou faux) pour une interprétation donnée.

Rappel : la première interprétation I_1 du même exemple

- $\mathcal{D}$= {Alain, Bernard, Charles, Denis}
- $I_1(P_1)$ = {Alain, Bernard}.
- $I_1(C_2)$ = {(Alain, Bernard), (Bernard, Charles), (Charles, Charles)}

3.3.1 sur l'exemple

Quelles sont les *valeurs de vérité* de chaque formule $\mathcal{F}$ pour I_1 et pour I_2 ?

Formule $\mathcal{F}$	signification intuitive	I_1	I_2
$\exists x\ C_2(x,x)$	vraie ssi il existe d dans $\mathcal{D}$ tel que $(d,d) \in I(C_2)$	vrai	faux
$\exists x\ P_1(x) \land \neg C_2(x,x)$	vraie ssi il existe d dans $\mathcal{D}$ tel que $d \in I(P_1)$ et $(d,d) \notin I(C_2)$	vrai	vrai
$\forall x\ P_1(x)$	vraie ssi pour tout d de $\mathcal{D}$, $d \in I(P_1)$	faux	faux
$P_1(a)$	vraie ssi $I(a) \in I(P_1)$	vrai	vrai
$C_2(a,b)$	vraie ssi $(I(a), I(b)) \in I(C_2)$	faux	vrai
$C_2(a,c)$	vraie ssi $(I(a), I(c)) \in I(C_2)$	vrai	faux

3.3.2 idées intuitives pour calculer la valeur de vérité d'une formule $\mathcal{F}$ fermée sur $\mathcal{L}$ pour une interprétation donnée I de $\mathcal{L}$

non seulement on va présupposer $\mathcal{F}$ fermée, mais en plus on va aussi supposer que tous les quantificateurs portent sur des variables différentes (la formule est *propre*).

1. si $\mathcal{F} = \neg\mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}$ vaut vrai ssi $\mathcal{F}'$ est fausse
   on voit comment calculer de même les valeurs de vérité de $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ (cf. logique des propositions : définition par induction de la valeur de vérité d'une formule)
2. si $\mathcal{F} = \forall x\ \mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}$ vaut vrai ssi pour tout $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}'_{x \leftarrow d}$ vaut vrai
3. si $\mathcal{F} = \exists x\ \mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}$ vaut vrai ssi il existe $d \in \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{F}'_{x \leftarrow d}$ vaut vrai

L'idée est de remplacer x par d mais bien sûr cela ne marche pas tel quel !
x est un symbole, un élément de $\mathcal{L}$, d un objet un élément de $\mathcal{D}$: $\mathcal{F}'_{x \leftarrow d}$ n'est pas une formule !
$\exists x P_1(x)$ est une formule, P_1(Alain) non car Alain n'est pas une constante.
Pour corriger ce problème on va utiliser les

assignation

associe à *des* variables de $\mathcal{V}$ un élément du domaine $\mathcal{D}$
Autrement dit une *assignation* θ est une fonction : $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ (fonction non totale)

valeur de vérité d'une formule $\mathcal{F}$ pour une interprétation donnée I et une assignation donnée θ

$\mathcal{F}$ n'est plus présupposée $\mathcal{F}$ fermée

regardons sur l'exemple ce que nous voulons dire

Soit la formule $\mathcal{F} =_{def}\ \forall x\ \exists y\ C_2(x, y)$, comment calculer pour une interprétation donnée I la valeur $val(\mathcal{F}, I)$?

- $\mathcal{F}$ vaut vrai pour I ssi pour tout $d \in \mathcal{D}$, $\exists y\ C_2(x, y)$ vaut vrai pour I et *pour l'assignation de x à d*
- mais $\exists y\ C_2(x, y)$ vaut vrai pour I (et pour l'assignation de x à d) ssi il existe un $d' \in \mathcal{D}$ tel que $C_2(x, y)$ vaut vrai pour I et pour l'assignation de y à d' (sachant que l'on a assigné x à d)
- autrement dit $\mathcal{F}$ vaut vrai pour I ssi pour tout $d \in \mathcal{D}$ il existe un $d' \in \mathcal{D}$ tel que $C_2(x, y)$ vaut vrai pour I et pour l'assignation de y à d' et de x à d
- c'est à dire $\mathcal{F}$ vaut vrai pour I ssi pour tout $d \in \mathcal{D}$ il existe un $d' \in \mathcal{D}$ tel que $(d, d') \in I(C_2)$

exercices

Les formules suivantes sont-elles valides, contingentes ou insatisfiables ?
justifier en utilisant la notion d'interprétation.

1. F_a : $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ P(x)$ contingente : il faut fournir un modèle : $\mathcal{D}_1 = \{d\}$ $I_1(P) = \{d\}$ et un contre modèle$\mathcal{D}_2 = \{d,\ d'\}$ $I_2(P) = \{d\}$
2. F_c : $\exists x\ P(x) \rightarrow P(a)$ contingente : modèle : $\mathcal{D}_1 = \{d\}$ $I_1(P) = \{d\}$ $I1(a) = d$ contre modèle$\mathcal{D}_2 = \{d,\ d'\}$ $I_2(P) = \{d\}$ $I_2(a) = d'$

3. F_d : $P(a) \rightarrow \exists x \ P(x)$ valide
pour une interprétation I quelconque
— si $V(p(a), I)$= faux, $V(F_d, I) = vrai$
— si $V(p(a), I)$= vrai alors $I(a) \in I(p)$ donc $\exists d \in \mathcal{D}$ tel que $d \in I(p)$ donc $V(\exists x \ P(x), I)$=vrai.

4. $F_e = \forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x)$
On va plutôt démontrer que $\forall x \ P(x) \models \exists x \ P(x)$, c'est à dire que pour toute interprétation I telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut aussi vrai.
`Quelle est la différence entre les deux démonstrations`
(a) $\forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x)$ valide et
(b) pour toute interprétation I telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut aussi vrai

C'est que `a) prend en compte plus de cas que b)!`
en effet d'après la définition de $val(A \rightarrow B, I)$ vue en logique des propositions cette valeur est
— vraie dés que $val(A, I)$ vaut faux
— vraie dés que $val(B, I)$ vaut vrai
— faux ssi $val(A, I)$ vaut vrai et $val(B, I)$ vaut faux
Démontrer que $\forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x)$ est valide signifie
démontrer que pour toute interprétation I, $val(\forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x), I)$ vaut vrai donc en particulier que pour toute interprétation telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut vrai,
c'est à dire démontrer $\forall x \ P(x) \models \exists x \ P(x)$

Par contre, démontrer $\forall x \ P(x) \models \exists x \ P(x)$ signifie que pour toute interprétation I telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut vrai, mais il reste encore à démontrer que pour toute interprétation I telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut faux, $val(\forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x), I)$ vaut aussi **vrai**.
Mais cette deuxième démonstration est évidente, d'après la définition de $val(A \rightarrow B, I)$.
Il nous reste donc à démontrer que $\forall x \ P(x) \models \exists x \ P(x)$, c'est à dire que pour toute interprétation I telle que $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut aussi vrai.
Mais si $val(\forall x \ P(x), I)$ vaut vrai, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ $d \in I(P)$
Or par définition $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Prenons donc un élément quelconque $d_0 \in \mathcal{D}$, on a $d_0 \in I(P)$. Donc $val(P(x), I, [x \leftarrow d_0])$ vaut vrai donc $val(\exists x \ P(x), I)$ vaut vrai, donc $\forall x \ P(x) \models \exists x \ P(x)$.
Et on a vu que cela prouve que $\forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ P(x)$ est valide.