Contrôle continu de logique des prédicats (GLIN 601)

Le barème est donné à titre indicatif.
Aucun document autorisé.

Question 1 (3 points)

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers.
Modéliser par une formule logique la phrase

"*Tout $x \in \mathbb{N}$ a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x.*"

Vous définirez vous même les symboles de prédicats que vous utiliserez et leur interprétation.
On vous demande d'utiliser un minimum de symboles de prédicats.

Question 2 (4 points)

Soient P_1 un prédicat d'arité 1, Q_2 un prédicat d'arité 2 et $\mathcal{F}$ la formule :

$$\forall x \ (P_1(x) \rightarrow \exists y \ Q_2(x, y))$$

Soient d'autre part

— un domaine $\mathcal{D} = \{o_1, \ o_2\}$
— une interprétation $\mathcal{I}$ telle que $I(Q_2) = \{(o_2, o_1), \ (o_2, o_2)\}$.

1. Supposons que $I(P_1) = \{o_1\}$. Prouver alors que $Val(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = faux$

2. On a toujours $I(Q_2) = \{(o_2, o_1), \ (o_2, o_2)\}$.
   Quelles sont **toutes** les interprétations possibles $\mathcal{I}(P_1)$ telles que $Val(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = vrai$

   Justifiez que chacune de vos interprétations est un modèle de $\mathcal{F}$
   et justifiez aussi que vous avez trouvé tous les modèles.

Question 3 (5 points)

Le "*théorème de l'examen*" énonce que dans tout amphithéatre (sous entendu non vide), `il existe un étudiant`[1] `tel que si lui ne réussit pas son examen, alors personne ne réussit son examen`.

1. En utilisant le symbole de prédicat $\mathcal{R}$ (pour *réussir*) d'arité 1, modéliser cet énoncé sous forme d'une formule logique $\mathcal{F}$.

2. Prouvez la validité de $\mathcal{F}$: vous appellerez $\mathcal{I}$ une interprétation du langage sur lequel vous avez formulé $\mathcal{F}$, vous regarderez deux cas
   (a) $I(\mathcal{R}) = \emptyset$ et
   (b) $I(\mathcal{R}) \neq \emptyset$

   et vous montrerez que dans chacun de ces deux cas $Val(\mathcal{F},\ I) = vrai$.

Question 4 (4 points)

On considère le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ composé de deux symboles de prédicats P et Q d'arité 1.

Soit $\mathcal{I}$ une interprétation de $\mathcal{L}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ non vide.

Soit A la formule $\forall x(P(x) \to Q(x))$ et B la formule $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

1. Quelles conditions doivent vérifier $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}(Q)$ pour que $\mathcal{I}$ soit un modèle de la formule A ?

2. Quelles conditions doivent vérifier $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}(Q)$ pour que $\mathcal{I}$ soit un modèle de la formule B ?

Question 5 (4 points)

Soient les formules
- $\mathcal{F}_1$: $(\forall x\ P(x) \to (\forall x\ Q(x) \to \exists x\ R(x)))$
- $\mathcal{F}_2$: $((\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \exists x\ R(x))$
- $\mathcal{G}_1$: $\exists y\ \exists z\ \exists t\ (P(y) \to (Q(z) \to R(t)))$
- $\mathcal{G}_2$: $\forall y\ \exists z\ \exists t\ ((P(y) \to Q(z)) \to R(t))$

Chacune des deux formules $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est logiquement équivalente à une formule $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$. Laquelle ? Justifier.

1. qui peut être une étudiante