Université de Montpellier HLIN502 Juin 2016

Numéro d'anonymat :

Durée : 2 heures

Examen de langages formels (deuxième session)

Seuls, les documents papiers (et traducteurs) sont autorisés.

Interdiction de communiquer un document.

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ

UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

Soit A=(∑, E, i, F, δ) un automate déterministe et complet, où ∑ = {a}. On note :

$$e_0 = i$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e_{k+1} = \delta(e_k, a)$$

1) Pourquoi e_k existe pour tout entier naturel k ?

Car l'automate A est complet

2) Prouver que $\forall k \geq 0, \quad e_k = \delta^*(e_0, a^k)$

Soit $\Pi(k) = \left(\; e_k = \delta^*(e_{0,} a^k) \; \right)$

Π(0) est vrai car $\delta^*(e_{0,} a^0) = \delta^*(e_{0,} \epsilon) = e_0$

Hypothèse : Π(k) vrai pour k ≥ 0

Montrons que Π(k+1) est vrai.

$$\delta^*(e_{0,} a^{k+1}) = \delta(\delta^*(e_{0,} a^k), a) \underset{\text{H.R}}{=} \delta(e_k, a) \underset{\text{def}}{=} e_{k+1}$$

3) En déduire que $\forall k \geq 0, \quad e_{r+k} = \delta^*(e_r, a^k)$

$$\delta^*(e_r, a^k) = \delta^*(\delta^*(e_{0,} a^r), a^k) = \delta^*(e_{0,} a^r a^k) = \delta^*(e_{0,} a^{r+k}) = e_{r+k}$$

4) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe deux entiers naturels distincts u et v tel que $e_u = e_v$?

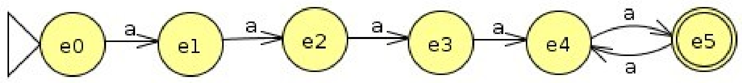
Car tous les e_k sont des états de l'automate et qu'il y en a un nombre fini.

Si tous les e_k étaient différents deux à deux, il y en aurait une infinité.

5) Soit p le plus petit entier tel que $\exists k > 0, e_p = e_{p+k}$ et soit q le plus petit de ces entiers k. On admettra alors que l'on peut en déduire la propriété suivante pour u et v des entiers naturels :

$e_{p+u} = e_{p+v} \Leftrightarrow (u - v) \% q = 0$ où a % b est le reste de la division de a par b (le modulo)

Donner la représentation graphique de l'automate, dans le cas particulier où p = 4, q = 2 et F = { e_5 }



6) Quel est le langage reconnu par l'automate de la question précédente. On ne donnera pas de justification.

$\{a^{4+1+2u}, u \in \mathbb{N}\}$

7) En revenant au cas général de l'automate A avec p et q quelconques, quel est le langage reconnu par cet automate si F est réduit à un seul état e_t avec t < p ? Prouver votre réponse.

Comme « a » est la seule lettre de l'alphabet, tout mot reconnu sera de la forme a^n

$\delta^*(e_0, m) = e_t \Rightarrow m = a^n$ et $\delta^*(e_0, a^n) = e_t \Rightarrow m = a^n$ et $e_n = e_t$

Comme t<p, et que p est le plus petit entier tel qu'il existe un k>0 avec $e_p = e_{p+k}$, il en découle que $e_n = e_t$ n'est possible que si n=t.

Le langage associé à l'automate A est donc constitué de l'unique mot a^t

8) Même question que la question précédente, mais cette fois en supposant que t ≥ p

$\delta^*(e_0, m) = e_t \Rightarrow m = a^n$ et $\delta^*(e_0, a^n) = e_t \Rightarrow m = a^n$ et $e_n = e_t$

n doit être supérieur ou égal à p pour ne pas contredire la minimalité de p.

On peut alors décomposer :

$$\begin{aligned} e_n = e_t \quad & \Rightarrow e_{p+(n-p)} = e_{p+(t-p)} \quad \text{avec } n-p \geq 0 \text{ et } t-p \geq 0 \\ & \Rightarrow ((n-p)-(t-p)) \ \% \ q = 0 \\ & \Rightarrow (n-t) \ \% \ q = 0 \\ & \Rightarrow n = t + k * q, \text{ où } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On en déduit le langage associé à l'automate A : L_A = { a^{kq+t}, $k \in \mathbb{N}$ }

Exercice 2 :

Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet {a, b} et définie par les productions :

S → aSb | aS | ε

On notera L_G le langage associé à cette grammaire G.

1) Prouver que, pour tout mot m du langage L_G , on a : $|m|_a \geq |m|_b$

Π(n) = $S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a \geq |m|_b$

Π(0) vrai :

$S \overset{\leq 0}{\rightarrow} m \Rightarrow m=\epsilon \Rightarrow |m|_a \geq |m|_b$

Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 0

Montrons que Π(n+1) est vrai :

$$S \overset{n+1}{\rightarrow} m \Rightarrow \left(\begin{array}{l} S \rightarrow aSb \overset{n}{\rightarrow} m \\ \text{ou} \\ S \rightarrow aS \overset{n}{\rightarrow} m \\ \text{ou} \\ S \rightarrow \epsilon \overset{n}{\rightarrow} m \end{array} \right)$$

Le 3e cas implique n=0 et m= ε. Ce m vérifie la propriété $|m|_a \geq |m|_b$

Les deux premiers cas :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow aSb \overset{n}{\rightarrow} m & \Rightarrow S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_1 \text{ et } m=a\,m_1\,b \\ & \Rightarrow |m_1|_a \geq |m_1|_b \text{ et } m=a\,m_1\,b \\ & \Rightarrow |m|_a = |m_1|_a + 1 \geq |m_1|_b + 1 = |m|_b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow aS \overset{n}{\rightarrow} m & \Rightarrow S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_1 \text{ et } m=a\,m_1 \\ & \Rightarrow |m_1|_a \geq |m_1|_b \text{ et } m=a\,m_1 \\ & \Rightarrow |m|_a = |m_1|_a + 1 \geq |m_1|_b = |m|_b \end{array}$$

On en conclus bien que dans tous les cas, on a : $|m|_a \geq |m|_b$

2) Prouver que la propriété suivante est vraie pour tout entier naturel k :

$$\Pi(k) = \left(m=a^u b^v \text{ et } u \geq v \text{ et } u+v \leq k \Rightarrow S \overset{*}{\rightarrow} m \right)$$

Π(0) vrai :

$u+v \leq 0 \Rightarrow u=0 \text{ et } v=0 \Rightarrow m=a^0 b^0 \Rightarrow m=\epsilon \Rightarrow S \rightarrow m$

Hypothèse : Π(k) vrai et n ≥ 0

Montrons que Π(k+1) est vrai : $Soit\ m=a^u b^v$ avec $u \geq v$ et $u+v \leq k+1$

Si v=0, soit u=0 et on retombe dans le cas déjà traité Π(0) où m = ε, soit u ≠ 0 et on décompose m en :

$m=a^u b^v = a(a^{u-1} b^v)$ peu importe que v=0 …

Par Hypothèse de Récurrence, on en déduit qu'il existe $S \overset{*}{\rightarrow} (a^{u-1} b^v)$ puisque u-1+v<u+v ≤ k

Il existe alors une chaîne de dérivation $S \overset{1}{\rightarrow} aS \overset{*}{\rightarrow} a(a^{u-1} b^v) = a^u b^v = m$

Si v ≠ 0, alors u ≠ 0 puisque u ≥ v. On décompose alors :

$$m=a^u b^v=a(a^{u-1}b^{v-1})b$$

Par Hypothèse de Récurrence, on en déduit qu'il existe $S\overset{*}{\rightarrow}(a^{u-1}b^{v-1})$ puisque u-1+v-1<u+v ≤ k

Il existe alors une chaîne de dérivation $S\overset{1}{\rightarrow}aSb\overset{\le n}{\rightarrow}a(a^{u-1}b^{v-1})b=a^u b^v=m$

3) Prouver que : $S\overset{*}{\rightarrow}m \quad \Rightarrow \quad \exists u,v$ tel que $m=a^u b^v$ et $u\geq v$

$$\Pi(n)=\left(S\overset{\le n}{\rightarrow}m \quad \Rightarrow \quad \exists u,v \text{ tel que } m=a^u b^v \text{ et } u\geq v\right)$$

Π(1) vrai :

$$S\overset{\le 1}{\rightarrow}m \quad \Rightarrow \quad m=\epsilon \quad \Rightarrow \quad \exists u=0, v=0 \text{ avec } u\geq v \text{ tel que } m=a^u b^v=\epsilon$$

Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 1

Montrons que Π(n+1) est vrai. Soit m tel que $S\overset{n+1}{\rightarrow}m$, alors :

$$S\overset{n+1}{\rightarrow}m \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{l} S \rightarrow aSb \overset{n}{\rightarrow} m \\ \quad \text{ou} \\ S \rightarrow aS \overset{n}{\rightarrow} m \\ \quad \text{ou} \\ S \rightarrow \epsilon \overset{n}{\rightarrow} m \end{array}\right)$$

Le dernier cas est impossible car n ≥ 1

Les deux premiers cas :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow aSb \overset{n}{\rightarrow} m & \Rightarrow & S\overset{\le n}{\rightarrow}m_1 \text{ et } m=a\,m_1 b \\ & \Rightarrow & m_1=a^u b^v \text{ et } u\geq v \text{ et } m=a\,m_1 b \\ & \Rightarrow & m=a^{u+1}b^{v+1} \text{ et } u+1\geq v+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow aS \overset{n}{\rightarrow} m & \Rightarrow & S\overset{\le n}{\rightarrow}m_1 \text{ et } m=a\,m_1 b \\ & \Rightarrow & m_1=a^u b^v \text{ et } u\geq v \text{ et } m=a\,m_1 \\ & \Rightarrow & m=a^{u+1}b^v \text{ et } u+1\geq v+1\geq v \end{array}$$

Dans ces deux cas, on obtient bien la conclusion recherchée.