1 Manipulations syntaxiques de formules

Montrez l'équivalence ci-dessous. Pour cette question, vous n'utiliserez pas les interprétations mais uniquement le formulaire des équivalences donné en cours et vous ne justifierez que les déplacements des quantificateurs.
on peut faire "remonter" le $\exists y$, car $P_1(x)$ ne contient pas y comme variable libre :

$$\exists x(P_1(x) \rightarrow \exists y \neg Q_2(x,y)) \equiv \exists x \exists y(P_1(x) \rightarrow \neg Q_2(x,y))$$

2 Forme clausale

*Donner (sans justification) la forme clausale de la **négation** de la formule*

$$F = \forall x \exists y \{Q_2(x,y) \rightarrow \forall z \big(R_3(x,y,z) \rightarrow \exists t[S_4(x,y,z,t) \wedge S_4'(x,y,z,t)]\big)\}$$

$$\neg F = \exists x \forall y \exists z \forall t[Q_2(x,y) \wedge R_3(x,y,z) \wedge (\neg S_4(x,y,z,t) \vee \neg S_4'(x,y,z,t))]$$

Skolem

$$G^s = Q_2(a,y) \wedge R_3(a,y,f(y)) \wedge [\neg S_4(a,y,f(y),t) \vee \neg S_4'(a,y,f(y),t)]$$

3 Unification

Les paires d'atomes ci-dessous sont-elles unifiables ? si oui donner un u.p.g. de ces atomes, sinon justifiez.

- $R_3(x, g_2(x,y), y)$*et* $R_3(f_1(z), z, z)$*, où x, y et z sont des variables.*
  Après avoir unifié x et $f_1(z)$, il faut unifier $R_3(f_1(z), g_2(f_1(z), y), y)$et $R_3(f_1(z), z, z)$, donc z et $g_2(f_1(z), y)$ ce qui n'est pas possible

- $R_3(x, g_2(x,y), y)$ *et* $R_3(f_1(z), t, a)$.
  $[x, f_1(z)]$ $[t, g_2(f_1(z), a)]$ $[y, a]$

4 Résolution

Soient les deux fbf

- $F_1 = \forall x \exists y \exists z(Q_2(x,y) \wedge Q_2'(y,z))$
- $F_2 = [\forall x \exists y\ Q_2(x,y)] \wedge [\forall y \exists z\ Q_2'(y,z)]$

*Montrer, **par la méthode de résolution**, que* $F_2 \models F_1$

Il faut montrer que $F_2 \wedge \neg F_1$ est insatisfiable ; on va skolémiser séparément les deux formules :

- $F_2 \rightsquigarrow = Q_2(x, f_1(x)) \wedge Q_2'(t, f_1'(t)) = C_1 \wedge C_2$
- $\neg F_1 \rightsquigarrow C_3 = \neg Q_2(a,u) \vee \neg Q_2'(u,v)$

se résoud facile : $(x,a), (u, f_1(a), (t, f_1(a)), (v, f_1'(f_1(a))))$

5 Interprétations

Soient les trois formules

- $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}$: $\exists \mathbf{y}\{\mathbf{P_1}(\mathbf{y}) \rightarrow [\mathbf{P_1'}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{P_1''}(\mathbf{y})]\}$,
- $\mathcal{E}_{\mathbf{2}}$: $\exists \mathbf{y}\{[\mathbf{P_1}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{P_1'}(\mathbf{y})] \rightarrow \mathbf{P_1''}(\mathbf{y})\}$ et
- $\mathcal{E}_{\mathbf{3}}$: $\exists \mathbf{y}\{\mathbf{P_1}(\mathbf{y}) \rightarrow [\mathbf{P_1'}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{P_1''}(\mathbf{y})]\}$

Pour chacune, donner (sans justifications) ***tous*** *les* ***contre****modèles sur un domaine $\mathcal{D}$ arbitraire.*

- $I(P_1) = D$ et $I(P_1') \cap I(P_1'') = \emptyset$
- pour les deux autres $I(P_1) = I(P_1') = D$ et $I(P_1'') = \emptyset$

6 Problème

1. *Modélisation des trois hypothèses et de la conclusion*
   - $\mathbf{H_1}$: $\exists w \forall x \; Q_2(w, x)$
   - $\mathbf{H_2}$: $\forall y \forall z \; Q_2(y, z) \rightarrow Q_2(z, y)$
   - $\mathbf{H_3}$: $\forall t \forall u \forall v \; Q_2(t, u) \wedge Q_2(u, v) \rightarrow Q_2(t, v)$
   - $\mathbf{K}$: $\forall r \forall s \; Q_2(r, s)$
2. *Modélisation du raisonnement*
   $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \neg K$ insatisfiable
3. *Mise sous forme de Skolem*

   - $\mathbf{H_1'}$: $Q_2(a, x)$
   - $\mathbf{H_2'}$: $\neg Q_2(y, z) \vee Q_2(z, y)$
   - $\mathbf{H_3'}$: $\neg Q_2(t, u) \vee \neg Q_2(u, v) \vee Q_2(t, v)$
   - $\mathbf{K'}$: $\neg Q_2(b, d)$
4. *Utilisation de la méthode de résolution*
   H_1', H_2' se résoud en $Q_2(x, a)$ qui s'instancie en $Q_2(b, a)$, H_1' s'instancie en $Q_2(a, d)$ et donne avec K' la clause vide