TD 5 – Logique des prédicats

Exercice 1 – Modélisez en logique des prédicats du premier ordre les énoncés ci-dessous :

1. *Toute femme a au moins une fille.*
2. *Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.*
3. *Aucune brouette n'est confortable. Tout véhicule inconfortable n'a aucun succès. Certains véhicules ont du succès.*

Exercice 2 – Soit la formule $\forall x\ (\exists y\ p(x,y) \rightarrow q(x))$

1) Dessinez l'arborescence syntaxique associée à cette formule
2) Donnez un modèle et un contre-modèle

Exercice 3 – Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides. Justifiez votre réponse en donnant un contre-modèle pour les non-valide et une preuve pour les valides.

$A = ((\forall x\ p(x) \wedge (\exists y\ q(y) \vee \forall y\ p(y))) \rightarrow \exists x\ p(x))$
$B = ((\forall x\ p(x) \wedge (\exists y\ q(y) \vee \forall y\ p(y))) \rightarrow \forall x\ p(x))$
$C = ((\forall x\ p(x) \rightarrow \forall x\ q(x)) \rightarrow \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)))$
$D = (\forall x \exists y\ p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\ p(x, y))$

Exercice 4 – Trouver des formules de la logique des prédicats pouvant être interprétées par les phrases suivantes. Donner pour chaque formule l'interprétation des constantes et des symboles de prédicats :

A. : Tout ce qui est en or brille.
B. : Tout ce qui brille n'est pas de l'or.
C. : Tous les oiseaux volent sauf les autruches qui sont des oiseaux mais ne volent pas.
D. : Si Eric est un étudiant sérieux alors tous les étudiants sont sérieux
E. : Toto a lu un livre qui a été lu par tous ses amis sauf par son ami Juju.

Pour chaque formule dites si elle est valide, satisfiable, ou insatisfiable (justifiez votre réponse soit par une preuve, soit par un domaine non vide D et une interprétation I modèle ou contre-modèle de la formule).

Exercice 5 – Soient les formules :

$A = \forall x(p(x) \rightarrow p(a))$, $B = (\forall x\ p(x) \rightarrow p(a))$, $C = (p(a) \rightarrow \forall x\ p(x))$,
$E = \exists x(p(x) \rightarrow p(a))$, $F = (\exists x\ p(x) \rightarrow p(a))$, $G = (p(a) \rightarrow \exists x\ p(x))$,

et l'interprétation I dont le domaine D est l'ensemble des salles de cours de l'UM2 et telle que I(a) est la salle de cours N°1 (SC.1.01) et I(p) est l'application de D dans {0,1} telle que pour tout élément d de D , I(p)(d) = 1 ssi la salle d est ouverte.

a) Calculer v(A, I), v(B, I), ... et v(F, I) sachant que la salle de cours N°1 est ouverte et que toutes les autres sont fermées.
b) Calculer v(A, I), v(B, I), ... et v(F, I) sachant que la salle de cours N°1 est fermée et que toutes les autres sont ouvertes.
c) Lesquelles des formules A, B, C, E, F et G sont elles valides ?

Exercice 6 – Soit L un langage de la logique du premier ordre contenant deux symboles de prédicats unaires p et q. On considère les formules suivantes :

$A = \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$ $B = \exists x(p(x) \rightarrow q(x))$.

On se propose d'étudier les interprétations pour lesquelles ces formules sont vraies. Soit D un ensemble non vide et I une interprétation de L de domaine D. On note $D_p = \{d \in D \mid I(p)(d) = 1\}$ et $D_q = \{d \in D \mid I(q)(d) = 1\}$.

a) Dans cette question, D = {1, 2, 3} et D_p = {1, 2}. Quelle condition doit vérifier D_q pour que A soit vraie pour I ? Pour que B soit vraie pour I ?
b) On suppose que D est un ensemble non vide quelconque. Quelles conditions doivent vérifier D_p et D_q pour que A soit vraie pour I ? Pour que B soit vraie pour I ?

Exercice 7 – Soit une relation binaire R dans un ensemble E et un graphe orienté G = (X, U). Trouver des formules de la logique des prédicats pouvant être interprétées par les phrases suivantes. Donner pour chaque formule le domaine d'interprétation et l'interprétation des constantes et des symboles de prédicats.

a) A : « *R est une relation d'équivalence (c'est-à-dire R est réflexive, symétrique et transitive)* ».
b) B : « *R n'est pas une relation d'équivalence* ».
c) C : « *G a au moins une source et au moins un puits* ».
d) D : « *G n'a ni source ni puits* ».

On suppose que E=X={1, 2} et R=U={(1,1), (1,2)}. Préciser pour chaque formule la valeur de vérité pour cette interprétation.

Exercice 8 - En utilisant la méthode des tableaux, dites si les fbfs suivantes sont insatisfiables, contingentes ou valides

$A = \forall x \forall y\ ((p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow \neg\ (q(y) \vee p(x,x)))$
$B = (\forall x\ (q(x) \rightarrow \exists y\ (q(y) \wedge p(x,y))) \vee \exists y\ q(y))$

Exercice 9 – Parmi les équivalences suivantes où F et G sont des fbf quelconques contenant au moins une occurrence libre de x , lesquelles sont correctes ?

$(\exists x\ F \vee \exists x\ G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$ $(\exists x\ F \wedge \exists x\ G) \equiv \exists x\ (F \wedge G)$
$(\forall x\ F \vee \forall x\ G) \equiv \forall x\ (F \vee G)$ $(\forall x\ F \wedge \forall x\ G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$