Université Montpellier II - L3 Mai 2014
Logique 2 (FLIN602)

Examen

Durée : 2 heures
Seul document autorisé : l'aide-mémoire

1 Interprétations

On considère un langage du premier ordre contenant un prédicat unaire p, un prédicat binaire q et un symbole de fonction unaire f.
On considère deux interprétations de ce langage I_1 et I_2. Ces deux interprétations ont pour domaine $\{d_1, d_2\}$.

$I_1(p) = \{d_1\}$	$I_2(p) = \{d_1, d_2\}$
$I_1(q) = \{(d_2, d_1), (d_2, d_2)\}$	$I_2(q) = \{(d_1, d_2), (d_2, d_2)\}$
$I_1(f)(d_1) = d_1$	$I_2(f)(d_1) = d_2$
$I_1(f)(d_2) = d_2$	$I_2(f)(d_2) = d_2$

Question

Donnez la valeur des formules suivantes, pour chacune des interprétations I_1 et I_2.

$$A = \forall x\ p(x) \rightarrow \forall x\ q(f(x), x)$$
$$B = \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x, f(x)))$$
$$C = \forall x\ (p(x) \rightarrow \exists y\ q(x, y))$$
$$D = \forall x\ (p(f(x)) \rightarrow q(x, f(x)))$$
$$E = \exists y \forall x\ (p(x) \rightarrow q(y, x))$$

Présentez vos réponses dans un tableau ayant la forme ci-dessous.
On ne vous demande pas de justifier vos réponses, mais les réponses fausses compteront négativement.

Formule	A	B	C	D	E
valeur avec I_1					
valeur avec I_2					

2 Modèle et contre-modèle

Soit $F_1 = \forall x\ \exists y\ q(x, y)$ et $F_2 = \exists y\ \forall x\ q(x, y)$.
Construisez, sur le domaine $\{d_1, d_2\}$, un modèle de F_1 qui soit un contre-modèle de F_2.

3 Modélisation

On se donne un langage logique comportant les prédicats unaires *Etudiant* et *Examen*, et le prédicat binaire *Réussi*. La signification intuitive de ces prédicats est la suivante :
Etudiant(x) : x est un étudiant
Examen(x) : x est un examen (d'une certaine matière)
Réussi(x,y) : x a réussi (l'examen) y.

Vous étendrez ce langage avec les constantes dont vous aurez besoin.

Question 1

Formalisez la phrase suivante en utilisant comme seuls prédicats ceux donnés ci-dessus : "Les étudiants ayant réussi l'examen de logique ont réussi tous les examens". Soit F_1 la formule obtenue.

Question 2

Même question avec la phrase "Pedro, qui est étudiant, a réussi l'examen de logique". Soit F_2 la formule obtenue.

Question 3

Même question avec la phrase "Il existe un étudiant qui a réussi tous les examens". Soit F_3 la formule obtenue.

Question 4

F_3 est-elle conséquence de $\{F_1, F_2\}$? Justifiez votre réponse avec des arguments utilisant les modèles.

Question 5

Soit $F = \exists x$ (Etudiant(x) $\wedge$ Réussi(x,a)), où a est une constante désignant l'examen d'anglais. Cette formule n'est pas conséquence de $\{F_1, F_2\}$

alors qu'intuitivement on voudrait qu'elle le soit. Formalisez la connaissance manquante par une formule F_4 de façon à ce que F soit conséquence de $\{F_1, F_2, F_4\}$.

4 Méthode de résolution

On considère un langage du premier ordre contenant un prédicat unaire P, un prédicat binaire Q et un symbole de fonction unaire f.

Soient :

$$H_1 = (\forall x\ P(x)) \vee (\ \exists x\ \neg P(x))$$

$$H_2 = \forall x\ \forall y\ (Q(f(x), y) \vee \neg Q(x, y))$$

$$H_3 = \forall x\ \forall y\ \neg Q(x, f(y))$$

$$H_4 = \exists x\ \forall y\ (Q(f(x), y))$$

Illustrez pas à pas l'utilisation de la méthode de résolution pour répondre aux questions suivantes ;

Question 1

H_1 est-elle valide ?

Question 2

A-t-on $H_3 \models H_4$?

Question 3

A-t-on $H_3 \models \neg H_4$?

Question 4

A-t-on $H_2 \models H_3$?

5 De l'usage de la méthode de résolution

Quelques années après ses cours de logique, on demande à Pedro une méthode pour tester si une formule de la logique du premier ordre est valide.

Question 1

Pedro, qui a un peu oublié ses cours de logique du premier ordre, se souvient vaguement qu'on lui ait dit que la méthode de résolution était “complète” : complète pour quel problème ? Qu'est-ce que cela signifie exactement ? Aidez Pedro à préciser ses souvenirs.

Question 2

La méthode de résolution permet-elle de tester si une formule est valide ? [Non, toujours, à certaines conditions ?] Justifiez votre réponse.

Question 3

La méthode de résolution permet-elle de tester si une formule est satisfiable ? [Non, toujours, à certaines conditions ?] Justifiez votre réponse.

Question 4

Quelqu'un propose à Pedro un algorithme de test de la satisfiabilité d'une formule quelconque de la logique du premier ordre. Selon lui, cet algorithme répond en un temps fini si la formule est satisfiable, mais peut ne pas répondre si la formule ne l'est pas. Pourquoi les connaissances qu'a Pedro sur le problème de l'insatisfiabilité d'une formule lui permettent-elles de savoir si la proposition de cette personne est vraisemblable ou non ?