Université Montpellier 2 janvier 2012

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (première session)

Tout document personnel autorisé

Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ
PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

a) Expliquer brièvement pourquoi on a : $L^2 \subseteq L \Leftrightarrow L$ est fermé pour la concaténation

Dire que L est « fermé pour la concaténation » signifie, par défintion que la concaténation de deux éléments quelconque de L est un élément de L, i.e. que pour tout couple m1, m2 d'éléments de L, m1.m2 est dans L, i.e. que L.L est inclus dans L

b) Montrer simplement avec un raisonnement par contraposée que : $\varepsilon \notin L \Rightarrow \varepsilon \notin L^2$

Si $\varepsilon \in L^2$, alors, ε=m1.m2 où m1 et m2 $\in$ L.

Donc m1 est un facteur de ε dans L. Comme ε est le seul facteur de ε, on a m1=$\varepsilon \in$ L.

c) Prouver que : $\forall n, n \geq 1, \quad L^2 \subseteq L \Rightarrow L^n \subseteq L$

Raisonnement par induction sur n : PI(n) = $L^2 \subseteq L \implies L^n \subseteq L$

PI(1) trivial

Hyp : PI(n).

Soit L tel que $L^2 \subseteq L$

Alors $L^{n+1} = L.L^n \subseteq L.L \subseteq L$

d) En déduire que $L^* = L \cup \{\varepsilon\} \Leftrightarrow L$ est fermé pour la concaténation

En utilisant le résultat du (a), il suffit de montrer que L*=L U { ε} ssi $L^2 \subseteq L$.

1) $L^2 \subseteq L \implies L^n \subseteq L$ pour tout entier n non nul,

$\implies \bigcup L^n \subseteq L$ pour n >= 1

$\implies L^* = \{\varepsilon\} \cup L^n \subseteq \{\varepsilon\} \cup L$

Et $\{\varepsilon\} \cup L \subseteq L^*$ par définition de L*.

Donc $L^*=L \cup \{\varepsilon\}$

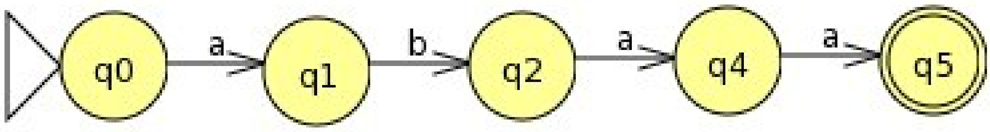
2) $L^* = L \cup \{\varepsilon\} \implies L^2 \subseteq L \cup \{\varepsilon\}$

Si $\varepsilon \in L$, alors $L^2 \subseteq L \cup \{\varepsilon\} = L$

Si $\varepsilon \notin L$, alors $L^2 \subseteq L \cup \{\varepsilon\}$ et $\varepsilon \notin L^2 \implies L^2 \subseteq L$

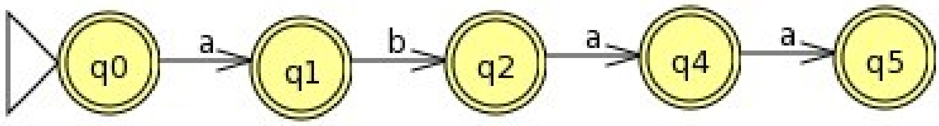
Exercice 2 : Construire l'automate qui reconnaît uniquement le mot m=abaa :

- Le mot m :



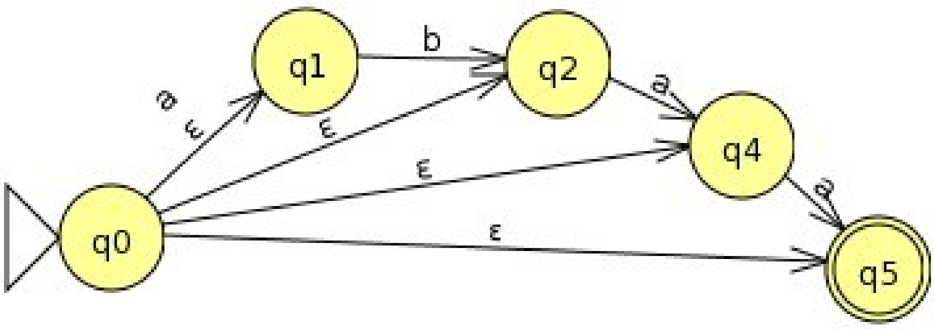
Puis étendre cet automate (sans ajouter des états et sans enlever les transitions déjà existantes) pour construire les automates (éventuellement indéterministes avec ε-transitions) qui reconnaissent :

- Les préfixes de m :



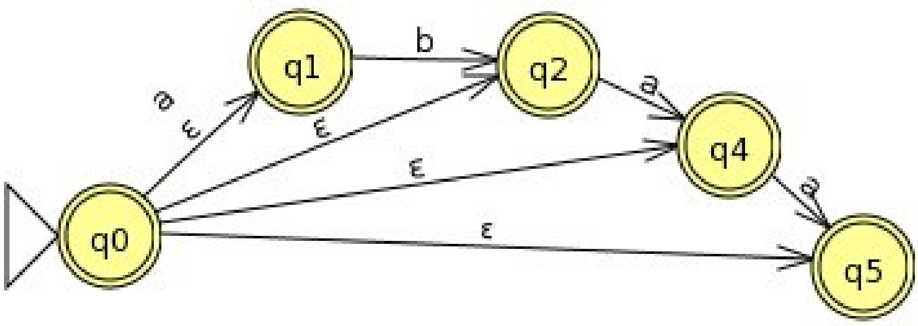
Il y a des solutions alternatives avec des ε-transitions

- Les suffixes de m :



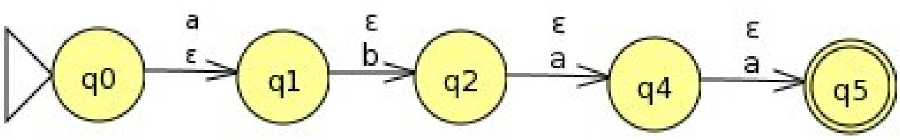
Il y a des solutions alternatives en rendant « initial » les états

- Les facteurs de m :



Une solution parmi d'autres....

- Les sous mots de m :



Une solution parmi d'autres...

Exercice 3 : Soit la grammaire (dite de Lukasiewicz) $L_L = < \Sigma, \{S\}, S, \{S \to aSS \mid b\} >$
Soit L_G le langage associé à la grammaire L_L, et soit $\widehat{L_G}$ le langage étendu associé à la grammaire L_L.
a) Prouver que, pour tout mot m de $\widehat{L_G}$, on a : Si $S \overset{*}{\to} m$ alors $|m|_b + |m|_S = |m|_a + 1$

PI(n) = Si $S \overset{n}{\to} m$ alors $|m|_b + |m|_S = |m|_a + 1$

PI(0) est vrai car : $S \overset{0}{\to} m$ ===> m=S. Or, on a bien $|S|_b + |S|_S = |S|_a + 1$

Hyp : Vrai pour PI(n)

Si $S \overset{n+1}{\to} m$ alors $S \overset{1}{\to} aSS \overset{n}{\to} m$ ou $S \overset{1}{\to} b = m$

Dans le 2e cas, on a bien $|b|_b + |b|_S = |b|_a + 1$

Reste à traiter le premier cas :

==> m= am1.m2 et $S \overset{\leq n}{\to} m_1$ et $S \overset{\leq n}{\to} m_2$ (lemme fondamental)

==> m= am1.m2 et $|m_1|_b + |m_1|_S = |m_1|_a + 1$ et $|m_2|_b + |m_2|_S = |m_2|_a + 1$ `par hyp rec.`

`==> m= am1.m2 et` $|m_1 m_2|_b + |m_1 m_2|_S = |m_1 m_2|_a + 2$ `(somme des 2 équations)`

`==> m= am1.m2 et` $|a m_1 m_2|_b + |a m_1 m_2|_S = |a m_1 m_2|_a + 1$

==> $|m|_b + |m|_S = |m|_a + 1$

b) Montrer que, pour tout préfixe p propre d'un mot de L_G, on a : $\exists k \geq 1, S \overset{*}{\to} p S^k$
Conseil : Faire un raisonnement par induction à partir de la propriété suivante :

$\Pi(n) = S \overset{n}{\to} m \Rightarrow \forall p$ préfixe propre de m, $\exists k \geq 1$ tel que $S \overset{*}{\to} p S^k$

Remarque : ce résultat est plutôt immédiat intuitivement si on admet qu'à toute chaîne de dérivation S -->...--> m correspond une chaîne de dérivation à gauche S -->...--> m.

Π(0) est vrai par vacuité

Hyp : Π(n). Montrons Π(n+1) :

$S \overset{n+1}{\to} m$ ==> $S \overset{1}{\to} a S S \overset{n}{\to} m = a m_1 m_2$ et $S \overset{\leq n}{\to} m_1$ et $S \overset{\leq n}{\to} m_2$

ou $S \overset{1}{\to} b = m$ ==> la propriété à montrer est alors vraie par vacuité car « b » n'a pas de préfixe propre.

==> $\forall p_1$ préfixe propre de m_1 , $\exists k_1 \geq 1$ tel que $S \overset{*}{\to} p_1 S^{k1}$

et $\forall p_2$ préfixe propre de m_2 , $\exists k_2 \geq 1$ tel que $S \overset{*}{\to} p_2 S^{k2}$

==> Pour tout préfixe p de $m = am_1m_2$:

Si p = a alors S --> aS^2 = p S^2

Si p =ap_1 et p_1 préfixe propre de m_1 alors S --> $ap_1S^{k1}S = pS^{k1+1}$

Si p = am_1 alors S --> aSS -> am_1S = pS

Si p = am_1p_2 et p_2 préfixe propre de m_2 alors S --> aSS --> $am_1p_2S^{k2} = pS^{k2}$

==> La propriété est bien vérifiée dans tous les cas.

c) En déduire que, pour tout préfixe propre p d'un mot de $\widehat{L_G}$ on a : $|p|_a \geq |p|_b$

Tout préfixe propre p d'un mot de L_G, vérifie (grâce au (b)) : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ S \xrightarrow{*} p S^k$

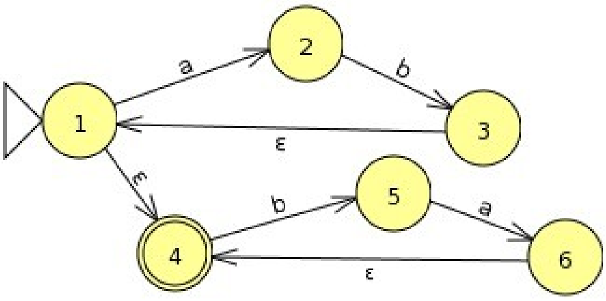
En appliquant le résultat du (a), on en déduit que $|p S^k|_b + |p S^k|_S = |p S^k|_a + 1$

==> $|p|_b + |p|_S + k = |p|_a + 1$ et $|p|_S = 0$ car p est le préfixe d'un mot dans de L_G

==> $|p|_b + k = |p|_a + 1$

==> $|p|_a = |p|_b + k - 1 \geq |p|_b$ car k >0

Exercice 4 : Soit l'automate A fini suivant :



a) Proposer une expression rationnelle qui décrive le même langage que le langage L(A) associé à l'automate A. Justifier par exemple votre proposition en explicitant le sens que l'on peut donner à l'état 1 et/ou 4.

Les mots reconnus de l'état initial jusqu'à l'état 1 sont de la forme (ab)*

Les mots reconnus de l'état 4 à l'état 4 sont de la forme (ba)*

L'expression rationnelle proposée est : (ab)*(ba)*

b) Éliminer ses ε-transitions en appliquant la méthode vue en cours et TD. On explicitera bien la démarche et comment on construit le nouvel automate.

Calcul des ε-fermetures :

$\hat{\varepsilon}(1)=\{1,\ 4\}$ | $\hat{\varepsilon}(2)=\{2\}$ | $\hat{\varepsilon}(3)=\{3,\ 1,\ 4\}$ | $\hat{\varepsilon}(4)=\{4\}$ | $\hat{\varepsilon}(5)=\{5\}$ $\hat{\varepsilon}(6)=\{6,\ 4\}$

δ({1},a) ={2}

δ({1},b) ={5}

δ({2},b) ={3}

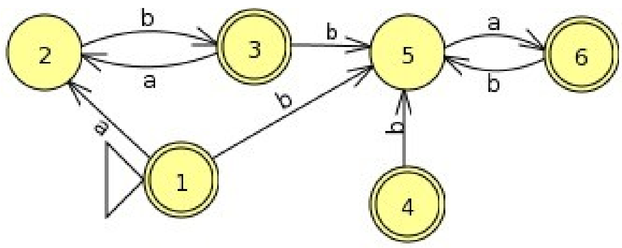
δ({3},a) ={2}

δ({3},b) ={5}

δ({4},b) ={5}

δ({5},a) ={6}

δ({6},b) ={5}



état terminaux : {1, 3, 4, 6} car leur ε-fermeture contient l'état 4

c) Éliminer les états non accessibles ni co-accessibles s'il y en a, et calculer une expression rationnelle r associée à cette automate (telle que L(r) = L(A)) en appliquant la méthode de variation des états de sortie. Remarque : inutile de compléter préalablement l'automate.

Élimination de l'état 4 non accessible.

R1 = ε

R2 = R1 a + R3 a

R3 = R2 b

R5 = R1 b + R3 b + R6 b

R6 = R5 a

Résolution :

R3 = R2 b = R1 ab + R3 ab = ab + R3 ab ==> R3 = (ab)(ab)* = $(ab)^+$

R6 = R5 a =R1 ba + R3 ba + R6 ba = ba + $(ab)^+$(ba) + R6 ba ==> R6 = (ba + $(ab)^+$(ba))(ba)*

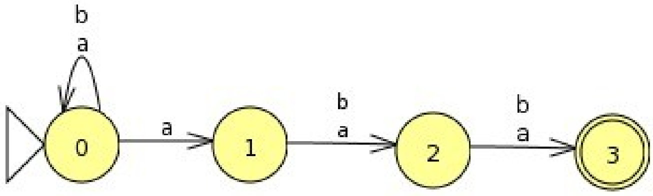
Remarque : R6 = (ba + $(ab)^+$(ba))(ba)* = (ε+$(ab)^+$)(ba)(ba)* = (ab)*$(ba)^+$

Recherché : R1+R3+R6 = ε + $(ab)^+$ + (ba + $(ab)^+$(ba))(ba)*

Remarque :

R1+R3+R6 = ε + $(ab)^+$ + (ab)*$(ba)^+$ = (ab)* + (ab)*$(ba)^+$ = (ab)* (ε + $(ba)^+$) = (ab)* (ba)*

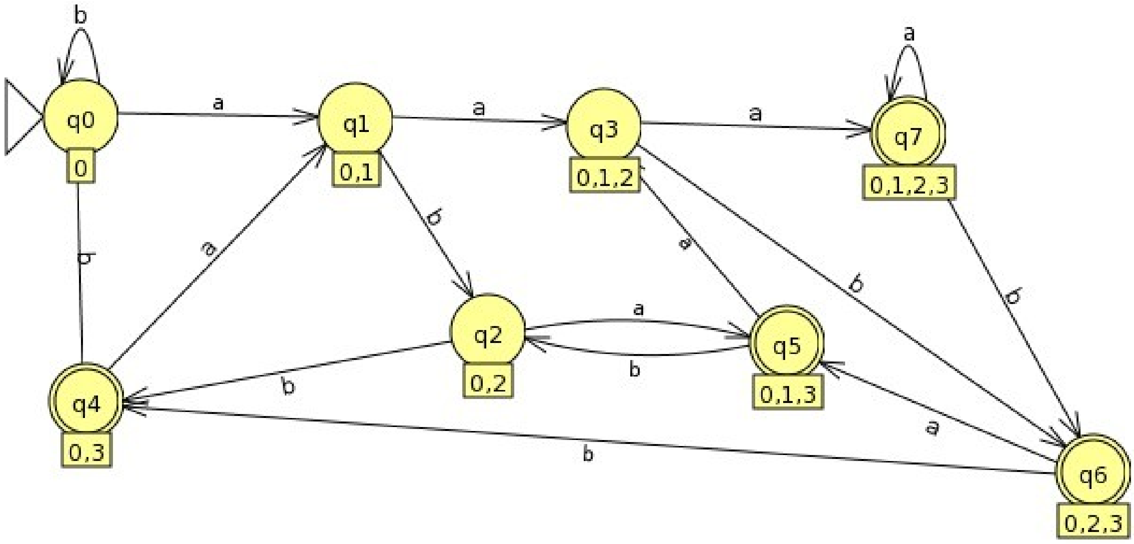
Exercice 5 : Soit l'automate A de fonction de transition δ suivant :



a) Calculer $\delta^*(\{0\}, aab)$, $\delta^*(\{0\}, b^3)$ et $\delta^*(\{0\}, a^3)$

$\delta^*(\{0\}, aab) = \{0,2, 3\}$
$\delta^*(\{0\}, b^3) = \{0\}$
$\delta^*(\{0\}, a^3) = \{0,1,2,3\}$

b) Déterminiser l'automate A en suivant la méthode vue en cours et TD.



c) En notant $\overline{m}$ le mot miroir de m (par exemple, $\overline{abaa}$ = aaba), et en notant $A_m = \{i, m[i] = a\}$, proposer une expression pour $\delta^*(\{0\}, m)$ où m est un mot de longueur 3. Le vérifier sur les exemples calculés en (a).

$\delta^*(\{0\}, m) = \{0\} \cup A_{\overline{m}}$
$\delta^*(\{0\}, aab) = \{0,2, 3\} = \{0\} \cup \{2,3\} = \{0\} \cup A_{\overline{aab}}$
$\delta^*(\{0\}, b^3) = \{0\} = \{0\} = \{0\} \cup A_{\overline{bbb}}$
$\delta^*(\{0\}, a^3) = \{0,1,2,3\} = \{0\} \cup \{1,2,3\} = \{0\} \cup A_{\overline{aaa}}$