TD 4 – Formes clausales et Méthodes de preuve

Exercice 1 – Soit la fbf : F = $((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg(q \vee r) \rightarrow p))$, dessinez l'arborescence syntaxique de F puis mettez F sous forme conjonctive. Finalement donnez sa forme clausale.

Exercice 2 – Mettez sous forme clausale les fbf suivantes :

$$(p \leftrightarrow (q \vee \neg(r \wedge p))) \qquad \neg((b \rightarrow a) \rightarrow \neg c \wedge \neg(d \rightarrow e \wedge f))$$

Exercice 3 – « Subsomption » : Soit deux clauses C1 et C2, on dit que C1 subsume C2 (i.e. C2 est une clause subsumée par C1) ssi $C1 \subseteq C2$. Montrez que si C1 subsume C2 et que C1 est satisfiable alors C2 est satisfiable. En déduire qu'une forme clausale F est insatisfiable ssi F débarrassée des clauses subsumées est insatisfiable.

Exercice 4 – « Tautologie » : Montrez qu'une forme clausale F est insatisfiable ssi F débarrassée des clauses tautologiques (valides) est insatisfiable.

Notation : *Soit F une forme clausale et l un littéral, on note F[l] la forme clausale obtenue à partir de F en supprimant les clauses contenant le littéral l et en supprimant le littéral opposé à l des autres clauses.*

Exercice 5 – Un littéral pur d'une forme clausale F est un littéral qui n'apparaît que sous une seule forme dans F, i.e. F contient des occurrences de l mais aucune occurrence de $\bar{l}$. Soit F une forme clausale et l un littéral pur de F, montrez que F[l] est insatisfiable si et seulement si F est insatisfiable.

Exercice 6 – Une clause unitaire est une clause ne contenant qu'un seul littéral. Montrez que si {l} est une clause unitaire d'une forme clausale F alors F est insatisfiable ssi F[l] est insatisfiable.

Exercice 7 – Soit F une forme clausale et l un littéral de F (et soit $\bar{l}$ le littéral opposé), montrez que F est insatisfiable ssi F[l] et F[$\bar{l}$] sont insatisfiables.

Exercice 8 – Soit la forme clausale suivante (correspondant à la description de la bataille navale du TD4) :

$$D=\{\{a1,a2,a3\},\{b1,b2,b3\},\{\neg a1,\neg b1\},\{\neg a2,\neg b2\},\{\neg a3,\neg b3\},\{\neg b1\}\{\neg a1,\neg b3\}\{\neg a2,\neg b3\}\}$$

Prouve que l'on peut déduire qu'il y a un bateau en b2 et pas de bateau en a2, en montrant que $D \cup \{\{\neg b2, a2\}\}$ est insatisfiable :

a) par la méthode de résolution
b) en appliquant les propriétés des exos 5 à 7 (cf. méthode de Davis et Putnam)

Exercice 9 – Démontrez en utilisant exclusivement la méthode de résolution que : $\{a \rightarrow b, (c \wedge d) \rightarrow a, e \rightarrow c, d \wedge e\} \models b$

Exercice 10 - Dites en utilisant la méthode des tableaux sémantiques si les fbfs suivantes sont satisfiables :

$$((\neg(b \wedge a) \rightarrow (a \leftrightarrow b)) \wedge \neg(\neg a \vee b))$$
$$((\neg p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (p \rightarrow (q \wedge \neg r))) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$$

Exercice 11 – Montrez que les formules suivantes sont valides à l'aide de la méthode des tableaux :

$$((A \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \rightarrow C))$$
$$((A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D))$$
$$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Exercice 12 – Montrez à l'aide de la méthode de résolution puis à l'aide de la méthode des tableaux que le raisonnement suivant n'est pas correct c'est à dire que $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow (r \rightarrow s)), \neg s\} \not\models \neg p$.

Exercice 13 –Soit les formules bien formées suivantes de la logique des propositions :

$A = \neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \rightarrow q \vee (r \wedge \neg p))$
$B = \neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)$

1- Calculez les valeurs de vérité de A et B pour l'interprétation I suivante : I(p)=1, I(q)=0, I(r)=1 et I(s)=1. Que peut-on en conclure sur A et B ?
2- Mettre A sous forme clausale.
3- Montrez par la méthode de résolution que B se déduit logiquement de A ($A \models B$).
4- Montrez cette déduction par la méthode des tableaux sémantiques.

Exercice 14 – Le résultat de la méthode de résolution est : « une forme clausale *FC* est insatisfiable ssi il existe une résolution de FC terminant par la clause vide (une telle résolution est appelée réfutation) ». Mais comment obtenir une réfutation ? Un moyen simple consiste à calculer toutes les résolvantes possibles. L'ensemble des résolvantes possibles étant fini cette stratégie garantit de ne pas rater la clause vide (on dit que la stratégie est complète). Mais elle est coûteuse. Nous proposons ici d'autres stratégies

- Une première stratégie est la unit-résolution qui ne calcule les résolvantes qu'entre une clause unitaire et une clause quelconque.
  - o Appliquez l'unit-résolution aux clauses $\{a \vee c,\ \neg a \vee b,\ \neg c,\ \neg b\}$
  - o L'unit-résolution est-elle complète ?

- Une seconde stratégie possible construit à partir d'une forme clausale FC, la séquence de formes clausales S_0, S_1, …S_n où :
  - S_0 = FC,
  - Pour tout i appartenant à [0..n-1], S_{i+1} est l'ensemble des résolvantes de clauses de S_i.

  On ne calcule donc les résolvantes qu'entre clauses produites à l'étape précédente.
  - Calculez la séquence produite par les clauses précédentes ;
  - Cette stratégie est-elle complète ?

Exercice 15 – <u>Définition :</u> une clause est une clause de Horn si elle contient au plus un littéral positif. Une forme clausale est de Horn si elle ne contient que des clauses de Horn. Exemple $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge p \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ est une forme clausale de Horn.
- Donnez un exemple de forme clausale de Horn insatisfiable.
- Donnez un modèle de la forme clausale de Horn : $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)$.
- Montrez que si toutes les clauses d'une forme clausale de Horn contiennent au moins 2 littéraux, alors cette forme clausale possède au moins un modèle.
- Soient C1 et C2 2 clauses de Horn « résolvables ». Que peut-on dire de la résolvante de C1 et C2 ?
- Que peut-on alors conclure de l'utilisation de la unit-résolution sur une forme clausale de Horn ?

Exercice 16 - Bientôt les vacances…

Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.
Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.
Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.
Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.
Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

1- Modélisez ce problème en logique des propositions :
   a. Identifiez les propositions simples de ce texte et associez y des symboles propositionnels,
   b. Traduisez chaque énoncé par une formule de la logique des propositions utilisant ces symboles.
2- Montrez à l'aide de la méthode de résolution que *« Jules est en forme »*.

Exercice 17 - *Evolution sentimentale…*

1- On interroge un logicien (qui dit toujours la vérité) sur sa vie sentimentale. Il répond par les deux affirmations suivantes :
   – *J'aime Marie ou j'aime Anne*
   – *Si j'aime Marie, j'aime Anne*

   Que peut-on conclure : aime-t-il Marie ? Anne ? Ou les deux ?

2- Le même logicien est à nouveau interrogé un an plus tard par un autre logicien de la façon suivante *: « Est-il vrai que si vous aimez Marie, alors vous aimez Anne ? ».* Ce à quoi il répond :
   – *Si c'est vrai alors j'aime Marie*
   – *Si j'aime Marie, alors c'est vrai*

   Quelles conclusions en tirer : aime-t-il toujours Marie ? Anne ? Les deux ? Ou plus personne ?

Modélisez ces deux problèmes en logique des propositions, et précisez quel problème de la logique des propositions vous vous posez ?

Exercice 18 – Soit le règlement suivant d'un club écossais.
1- Tout membre non écossais porte des chaussettes orange ;
2- Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussettes orange ;
3- Les membres mariés ne sortent pas le dimanche ;
4- Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais ;
5- Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié ;
6- Tout membre écossais porte une jupe ;

Peut-il y avoir un membre dans ce club ?

Exercice 19 – Vous êtes perdu dans le désert depuis trop longtemps. Vous arrivez à une bifurcation. Les deux pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert (au mieux elles mènent toutes deux à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux). Chaque piste est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Votre but bien sûr est d'atteindre une oasis.
– L'un des sphinx vous répond A : « une au moins des deux pistes conduit à un oasis ».
– L'autre sphinx vous répond B : « la piste de droite se perd dans le désert ».

De source sûre vous savez que C : les deux sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.
Résoudre l'énigme : peut-on déduire à partir de l'énoncé qu'une piste conduit à une oasis et si oui quelle est-elle ?

Exercice 20 – « L'énigme du masque de fer »
On a trouvé les inscriptions suivantes dans la cellule de l'homme au masque de fer :
- Je ne suis pas le frère jumeau de Louis XIV
- Une seule de ces deux propositions est vraie

Que peut-on en déduire ? Sous quelles conditions ?