Examen de Logique 1 – GLIN402 – session 1

Michel Leclère

14 Mai 2014

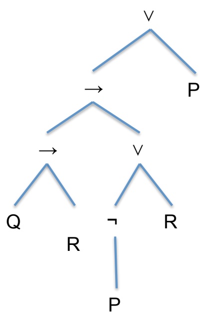
Durée : 2h. Tout document autorisé. Pas de calculatrice, portable, tablette...
La note tiendra le plus grand compte de la manière dont vous aurez rédigé vos démonstrations et vos explications.

Question 1 (2 points) *Soit la formule :*

$$(((Q \to R) \to \neg P \vee R) \vee P)$$

a. Dessinez l'arborescence de cette formule.

arborescence ci-dessous



b. Dites si elle est valide, contingente ou insatisfiable en justifiant votre réponse.

valide

Question 2 (3 points) *Soit le problème suivant :*

H1 : Si Alice et Julie viennent à Montpellier, Zoé viendra aussi.

H2 : Si Alice ne vient pas à Montpellier, Julie non plus.

H3 : Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, viendra à Montpellier.

Peut-on savoir qui viendra ou ne viendra pas à coup sûr à Montpellier ?

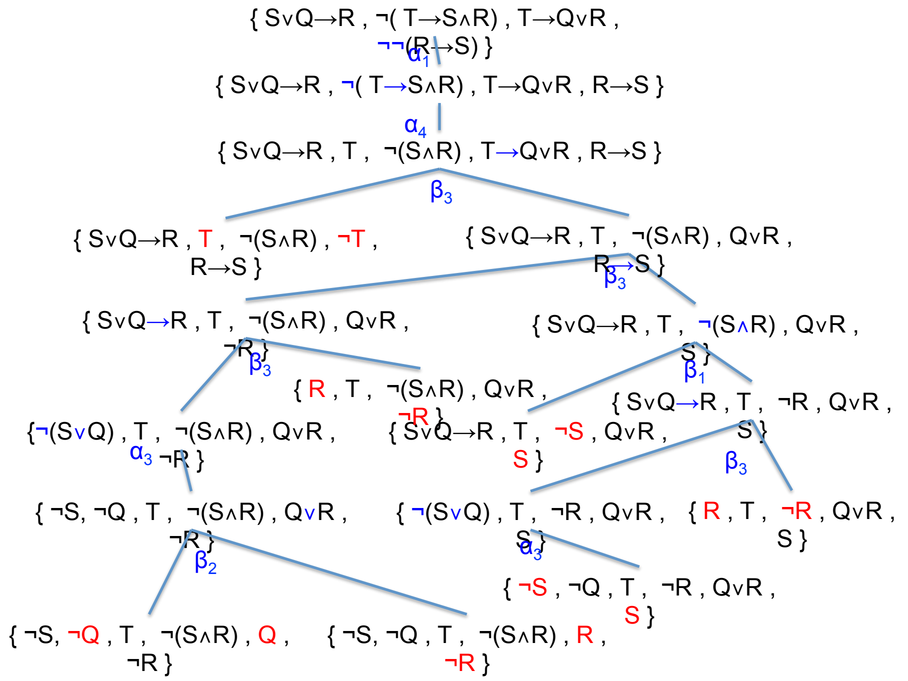
Vous modéliserez chacune des phrases en logique des propositions, expliquerez quels problèmes de logique des propositions permettent de résoudre cette question, et justifierez votre réponse.

$H1 = A \wedge J \to Z$ *ou une forme sémantiquement équivalente.*
$H2 = \neg A \to \neg J$ *ou une forme sémantiquement équivalente.*
$H3 = J \vee Z$ *ou une forme sémantiquement équivalente.*
il s'agit d'étudier si $A, \neg A, J, \neg J, Z, \neg Z$ *sont des conséquences logiques de* $\{H1, H2, H3\}$.
Zoé viendra et on ne sait pas pour les autres.
justification par table de vérité, résolution, etc.

Question 3 (3 points) *En utilisant la méthode des tableaux sémantiques montrez la conséquence logique suivante (après avoir développé votre tableau, vous rappellerez quelles propriétés et/ou théorèmes permettent de conclure à la conséquence logique à partir de votre tableau) :*

$$\{ S \vee Q \to R\,,\ \neg(T \to S \wedge R)\,,\ T \to Q \vee R \} \models \neg(R \to S)$$

développement d'un tableau correct (cf. exemple ci-dessous).
toutes les feuilles fermées et on a fait un tableau des hypothèses et de la négation de la conclusion.



Question 4 (4 points) *Soit les formules suivantes :*

$\mathcal{H}_1 = (D \vee \neg((C \to B) \to C)) \to A$
$\mathcal{H}_2 = (A \to C) \vee (A \wedge E) \vee (B \wedge E)$
$\mathcal{H}_3 = (C \vee E) \to (D \wedge (C \to E))$
$\mathcal{C} = A \wedge D \wedge E$

Montrez à l'aide de la méthode de résolution la conséquence logique : $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3\} \models \mathcal{C}$ *.*
Vous détaillerez :

1. *La mise sous forme clausale. Vous indiquerez alors quelles clauses peuvent être supprimées et par quelles propriétés.*
2. *La séquence de résolutions.*
3. *Les propriétés et/ou théorèmes qui permettent de conclure à la conséquence logique à partir de votre séquence de résolution.*

mise sous forme clausale de chaque élément
$FC(\mathcal{H}_1) = \{\ \{A, \neg D\},\ \{A, C\},\ \{A, \neg B, C\}\ \}$
$FC(\mathcal{H}_2) = \{\ \{A, \neg A, B, C\},\ \{\neg A, C, E\}\ \}$
$FC(\mathcal{H}_3) = \{\ \{\neg C, D\},\ \{\neg C, E\},\ \{D, \neg E\},\ \{\neg C, E, \neg E\}\ \}$
$FC(\neg\mathcal{C}) = \{\ \{\neg A, \neg D, \neg E\}\ \}$
simplifications de la FC : la première clause de $FC(\mathcal{H}_2)$ *et la dernière de* $FC(\mathcal{H}_3)$ *peuvent être supprimées car tautologiques ; la troisième clause de* $FC(\mathcal{H}_1)$ *peut être supprimée car subsumée par la deuxième clause de* $FC(\mathcal{H}_1)$*. Au final on a :*
$FC = \{\ C_1 = \{A, \neg D\},\ C_2 = \{A, C\},\ C_3 = \{\neg A, C, E\},\ C_4 = \{\neg C, D\},\ C_5 = \{\neg C, E\},\ C_6 = \{D, \neg E\},\ C_7 = \{\neg A, \neg D, \neg E\}\ \}$
une séquence de résolutions correctes conduisant à la clause vide. $C_8 = Res(C_1, C_7) = \{\neg D, \neg E\}$
$C_9 = Res(C_6, C_8) = \{\neg E\}$
$C_{10} = Res(C_2, C_3) = \{C, E\}$
$C_{11} = Res(C_5, C_{10}) = \{E\}$
$C_{12} = Res(C_9, C_{11}) = \emptyset$
justification : on a produit la clause vide à partir de la $FC(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \mathcal{H}_3 \wedge \neg\mathcal{C})$ *donc* $FC(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \mathcal{H}_3 \wedge \neg\mathcal{C})$ *insatisfiable (correction de la méthode de résolution), donc* $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \mathcal{H}_3 \wedge \neg\mathcal{C}$ *insatisfiable (équivalence sémantique de la forme clausale), donc* $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3\} \models \mathcal{C}$ *(théorème d'équivalence des problèmes logiques).*

Question 5 (4 points) *Soit* $H_1, H_2, ..., H_n, C$ *(avec* $n \geq 1$*) des formules bien formées de la logique des propositions. Montrez que si* $H_1 \wedge H_2 \wedge ...H_n \wedge \neg C$ *est insatisfiable alors* $\{H_1, H_2, ...H_n\} \models C$*.*

$H_1 \wedge H_2 \wedge ... H_n \wedge \neg C$ insatisfiable signifie que ***pour toute interprétation*** *I* ***on a*** *$v(H_1 \wedge H_2 \wedge ... H_n \wedge \neg C, I) = 0$. Par la* ***sémantique du*** *$\wedge$, on a :*
- Soit il existe un $k \in [1..n]$ tel que $v(H_k, I) = 0$; du coup I n'est pas un modèle de ce H_k et donc ***pas un modèle commun de*** *$\{H_1, H_2, ...H_n\}$ (il ne contraint donc pas $v(C, I)$ par la définition de la conséquence logique).*
- Soit $v(\neg C, I) = 0$; par la ***sémantique du*** *$\neg$, on a donc $v(C, I) = 1$; du coup, même si I est un modèle commun à $\{H_1, H_2, ...H_n\}$ il est aussi* ***un modèle de*** *C.* *CQFD*

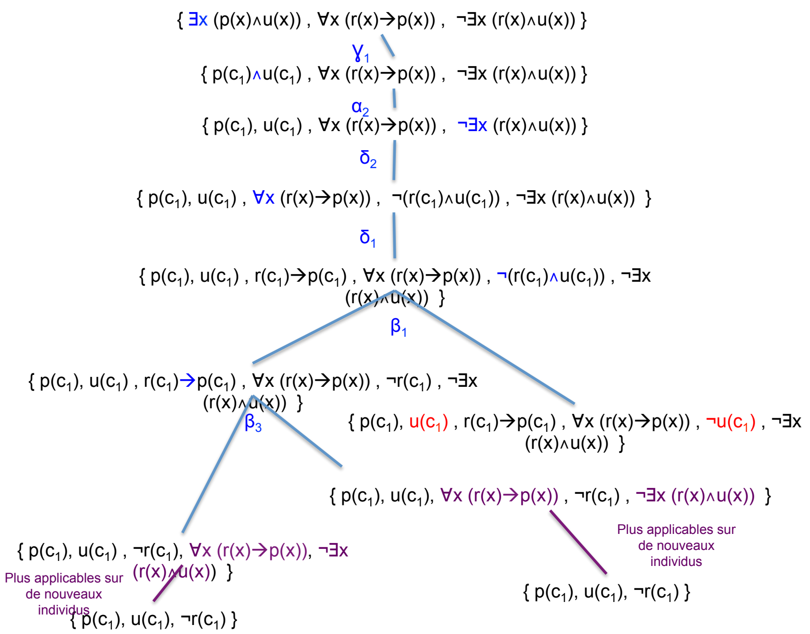
Question 6 (4 points) *Soit le syllogisme suivant :*
Certains poissons sont urticants
Les raies sont des poissons
Donc certaines raies sont urticantes

1. *Modélisez ce raisonnement en logique des prédicats.*

   On utilise le vocabulaire logique suivant : Pas de constante et l'ensemble des prédicats contient les prédicats unaires p, r, u dont l'interprétation intuitive est :
   - p : "être un poisson"
   - r : "etre une raie"
   - u : "etre urticant"
   Le syllogisme se traduit par la conséquence logique suivante : $\{\exists x\ (p(x) \wedge u(x)),\ \forall x\ (r(x) \rightarrow p(x))\} \models \exists x\ (r(x) \wedge u(x))$

2. *Montrez à l'aide de la méthodes des tableaux que ce n'est pas un raisonnement correct.*

   un tableau correct. Cf. exemple ci-dessous



3. *En déduire une interprétation montrant que ce n'est pas un raisonnement correct.*

   une interprétation qui rend vraies les hypothèses et fausse la conclusion. Par exemple : $D = \{c_1\}$, $I(p) = I(u) = \{(c_1, 1)\}$, $I(r) = \{(c_1, 0)\}$.