Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode des tableaux
- Méthode de Davis et Putnam
- **Initiation à la logique des prédicats**

Exemple introductif

- La Log. Prop. a une expressivité limitée (par rapport par exemple au langage naturel)
- Exemple :

  A = Tout étudiant possède un bac

  B = Pierre est un étudiant

  C = Pierre possède un bac

  – Comment avoir {A, B} |= C ?

Des propositions simples…

- Idée 1 : Introduire un domaine d'interprétation = « l'ensemble des objets du monde considéré »
- Exemple :
  - Domaine = « Ens. des personnes » = {p1,p2…,Pierre,…}
  - La modélisation de A devient
    - A1 = Si p1 est un étudiant alors p1 possède un bac
    - A2 = Si p2 est un étudiant alors p2 possède un bac
    - …
    - APierre = Si Pierre est un étudiant alors Pierre possède un bac
    - …
  - On obtient la conséquence logique {A,B} |= C
- Problème :
  - Infinité potentielle du domaine
  - Accroissement inutile du nombre de symboles propositionnels
  - Comment représenter « *il y a au moins un étudiant* » ?

… aux propositions paramétrées : les prédicats…

- Idée 2 : utiliser des énoncés paramétrés par des variables dont les valeurs seront prises dans le domaine
- Exemple :
  - EtreUnEtudiant(x), AvoirUnBac(x)
  - A = EtreUnEtudiant(x) → AvoirUnBac(x)
- La sémantique de ces prédicats ne sera donnée qu'après avoir **valué** les variables avec des éléments du domaine (la sémantique est donc dépendante d'un domaine)

…avec des quantificateurs

- Idée 3 : utiliser des quantificateurs précisant les valeurs qui peuvent être prises par les variables
  - Tous les éléments :
    - Quantification universelle $\forall$
    - Exprimant : *pour tout, quelque soit, chaque…*
  - Au moins un élément :
    - Quantification Existentielle $\exists$
    - Exprimant : *il y a, certains, quelque…*
- Exemple
  - $A = \forall x \, (EtreUnEtudiant(x) \rightarrow AvoirUnBac(x))$

Mod. Prédicat vs. Propositions

- La logique des propositions représente le monde par des faits
- La logique des prédicats représente le monde par
  - des objets = les éléments du domaine : p1, p2, Pierre…0,1,2,3…
  - des propriétés sur ces objets et relations entre ces objets : EtreUnEtudiant, PosséderUnBac…Pair, <, EtreLePgcdDe…
  - et des fonctions entre ces objets : PèreDe…Succ, Carré, +…
- Exemple :

  A=$\forall$x (EtreUnEtudiant(x) $\rightarrow$ AvoirUnBac(x))

  B=EtreUnEtudiant(Pierre)

  C=AvoirUnBac(Pierre)

  On a bien {A,B} $\models$C

Les symboles de la logique des prédicats

- Un ***langage du premier ordre*** est un ensemble **L = Cst** ∪ **Prd** de symboles constitué :
  - d'un ensemble **Cst** de constantes (ou symboles de fonctions 0-aires) : {a, b, c...}
    - *! Dans le cadre de cette introduction à la logique des prédicats nous ne considérons pas les symboles de fonctions d'arité ≥1 : {f,g,h…}*
  - d'un ensemble **Prd** de symboles de prédicats avec une arité associée : $\{P_1,Q_2,R_2\ldots\}$
    - *Les symboles de prédicats d'arité 0 sont les symboles de proposition de la logique des propositions*
  - **Cst** et **Prd** sont disjoints

Les Termes

- Un terme est une expression désignant un objet du domaine modélisé
  - En plus des constantes, on dispose d'un ensemble infini **V** de **variables** disjoint de L: {x,y,z…}
    - Les constantes désignent des objets précis du langages
    - Les variables désignent des objets indéfinis du langage
- Les termes d'un langage L=Cst∪Prd est l'ensemble **Tm = V ∪ Cst**

! Dans le cadre de cette introduction les termes sont élémentaires ; en logique des prédicats les termes peuvent être complexes :
Exemple : f(x,g(a,y)) où f et g sont des fonctions d'arité 2.

Formules Bien Formées

- Soit **L=Cst∪Prd** un langage, **V** un ensemble infini de variables, **C**={T,⊥,¬,∧,∨,→,↔} les connecteurs, **Q**={∀,∃} les quantificateurs et **D**={(,)} un jeu de parenthèses

- On définit par induction **FBF(L)**, l'ensemble des formules bien formées, construites sur L :

(base)

- FBF(L) contient l'ensemble des atomes

{**p(t1,…,tn)** | p∈Prd est un prédicat n-aire et t1,..., tn∈Tm sont des termes}

- FBF(L) contient {T,⊥}

(cons) soit A et B ∈ FBF(L) et soit x ∈ Var :

- **¬A** ∈ FBF(L)
- **(A ∧ B)** ∈ FBF(L) *[idem avec **(A ∨ B)**, **(A → B)**, **(A ↔ B)**]*
- **∀x A** ∈ FBF(L) *[idem avec **∃x A**]*

Définitions par induction

- Arbre syntaxique d'une fbf
  - les feuilles sont étiquetées par des atomes
- Profondeur d'une fbf
- Ensemble des sous-fbf d'une fbf

- Ensemble **Var(F)** des variables d'une fbf F
  - (base) Si F est un atome de la forme F= p(t1,..., tn), Var(F) = $\{t1,\ldots tn\} \cap V$

    Si F = T ou $\perp$ alors Var(F) = $\emptyset$

  (cons) Si F = $\neg$A, Var(F) = Var(A)

  Si F = (A $\wedge$ B), Var(F) = Var(A)$\cup$Var(B) *[id. $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$]*

  Si F = $\forall$x A , Var(F) = Var(A)$\cup$\{x\} *[id. $\exists$x]*

Variables libres et liées

- Ensemble **VarLib** des variables libres d'une fbf
  (les variables ayant une occurrence non quantifiée)
  (base) VarLib(F) = Var(F)
  (cons) Si F=¬A, VarLib(F) = VarLib(A).
  Si F=(A∧B), VarLib(F) = VarLib(A)∪VarLib(B)
  Si F=∀x A, VarLib(F) = VarLib(A) - {x}

- Ensemble **VarLiées** des variables liées d'une fbf
  (les variables ayant une occurrence quantifiée)
  (base) VarLiées(F) = ∅
  (cons) Si F=¬A, VarLiées(F)=VarLiées(A)
  Si F=(A∧B), VarLiées(F)=VarLiées(A)∪VarLiées(B)
  Si F=∀x A, VarLiées(F)=VarLiées(A)∪{x}

Fbf ouverte et fermée

- Dans une fbf une même variable peut être à la fois libre et liée il est parfois nécessaire de préciser de quelle occurrence d'une variable on parle
  - Une occurrence d'une variable x est liée dans F si dans la branche qui va de la racine à la feuille (l'atome) où se trouve cette occurrence on trouve $\forall x$ ou $\exists x$. Elle est liée sinon.
  - Une variable x est libre dans F si elle a au moins une occurrence libre dans F
- Une fbf est dite ***ouverte*** lorsqu'elle a au moins une variable libre et ***fermée*** sinon (id. elle n'a aucune variable libre)

Egalité syntaxique à un renommage près

- Le nom des variables liées n'est pas important

$$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \quad \approx \quad \forall z(P(z) \to Q(z,y))$$

- On dit que deux formules sont α-équivalentes si elles sont syntaxiquement identiques à un renommage* près des occurrences liées des variables

* *Attention, on ne doit pas en renommant transformer une occurrence libre en occurrence liée, ni modifier les « liaisons des variables liées »*

$$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \neq \forall y(P(y) \to Q(y,y))$$

Sémantique

- Une **interprétation I** d'un langage L est un couple I=(D, i) telle que :
  - D (le domaine d'interprétation) est un ensemble non vide
  - pour toute constante a de L, i(a) est un élément de D
  - pour tout prédicat P de L, i(P) est une application de $D^{\text{arité}(p)}$ dans {0, 1}

    $i(P_1) = P : D \rightarrow \{0,1\}$ $\qquad$ $i(Q_2) = Q : DxD \rightarrow \{0,1\}$

- Exemples pour $L=\{a,b,P_1,Q_2\}$
  - I=(D,i) avec D={d}, i(a)=d, i(b)=d, i(P)={(d,1)} et i(Q)={((d,d),1)}
  - I'=(D,i') avec D={d}, i(a)=d, i(b)=d, i(P)={(d,0)} et i(Q)={((d,d),1)}
  - I''=(D'',i'') avec D=N, i(a)=0, i(b)=3, i(P)=pair? et i(Q)=<

Valeur d'une fbf

- I étant une interprétation d'un langage L nous voulons définir une fonction v(F, I) dans {0, 1} qui associera à toute fbf fermée F construite sur L une valeur de vérité.
- Ceci se fait en utilisant l'interprétation I, et le sens donné en logique des propositions aux connecteurs
- Il faut également interpréter les quantificateurs
  - Sémantique compositionnelle nécessite d'interpréter des fbf ayant des variables libres (même si les fbf considérées à l'origine sont fermées)
  - On fait cela en utilisant la notion d'assignation des variables.
- Une ***assignation*** est une application de l'ensemble des variables dans le domaine d'interprétation D

Valeur d'une fbf

- Soit I=(D,i) une interprétation d'un langage L et s une assignation de V dans D, v(F, I, s) est telle que :

(base) · si F=P(t1, t2, ..., tn) est un atome,

v(F,I,s) = i(P)(sem(t1,I,s), ..., sem(tn,I,s)), où :

- si t est une constante sem(t,I,s) = i(t)
- si t est une variable sem(t,I,s) = s(t)

· *v(⊥, I, s) = 0*

· *v(T,I,s) = 1*

(cons) · si F=¬A, v(F,I,s) = NON(v(A,I,s))

· si F=(A∧B), v(F,I,s) = ET(v(A,I,s), v(B,I,s)) *[id. avec ∨ → ↔]*

· si F=∀x A, v(F,I,s)=1 ssi

pour tout élément d de D, v(A, I, s<+{(x,d)}) = 1

*où **s<+{(x,d)}** est l'assignation obtenue à partir de s en donnant à la variable x la valeur d,*

· *si F=∃x A, v(F,I,s) = 1 ssi*

il existe un élément d de D t.q. v(A,I,s<+{(x,d)}) = 1

Propriétés

- ***Pour toute assignation s, v(F,I,s) ne dépend que de la restriction de s à l'ensemble des variables libres de F***

- ***Pour une fbf fermée F la valeur de v(F,I,s) est indépendante de s et on la note v(F,I).***

Définitions

- Modèle et contre-modèle
  - Une interprétation I t.q. il existe une assignation s avec v(F,I,s) = 1 est appelée un *modèle* de F
  - Une interprétation I t.q. il existe une assignation s avec v(F,I,s) = 0 est appelée un *contre-modèle* de F
- Soit F une fbf :
  - F est ***satisfiable*** si elle possède au moins un modèle
  - F est ***contingente*** si elle possède au moins un modèle et au moins un contre-modèle
  - F est ***insatisfiable*** si elle ne possède aucun modèle
  - F est ***valide*** si toute interprétation est un modèle
- Propriété : A est valide ssi ¬A est insatisfiable

Etude systématique des valeurs de vérité d'une fbf

- Un langage du premier ordre a une infinité d'interprétations:
  - On peut se limiter à un ensemble particulier d'interprétations (celles de Herbrand) mais cet ensemble est lui aussi généralement infini
  - On **ne peut donc pas utiliser les technique du type énumération des interprétations** (tables de vérité, Davis et Putnam…)
    - On a des généralisation des méthodes de résolution, méthode des tableaux qui ne sont plus des procédures de décision
  - La logique du premier ordre est semi-décidable

Théorème des tautologies

- Soit A une fbf valide de la logique des propositions ayant p1, p2, ..., pn pour symboles propositionnels.
- Soient A1, A2, ..., An des fbf d'un langage du premier ordre L,
- Alors A' la fbf obtenue à partir de A en substituant, pour tout i, Ai à pi, est valide.

- *Attention toute formule valide au premier ordre ne peut pas se ramener par substitution à une formule valide des propositions : $(\neg\exists x p(x) \rightarrow \forall x \neg p(x))$*

Equivalence

- Deux fbf A et B (construites sur un même langage du premier ordre L) sont dites ***logiquement équivalentes***, **$A \equiv B$**, lorsque pour toute interprétation I et toute assignation s : v(A, I, s) = v(B, I, s).
- Propriété :

$$A \equiv B \text{ ssi } A \leftrightarrow B \text{ est valide.}$$

Formulaires

- Si A, B et C sont des fbf d'un langage du premier ordre on a, *par exemple*, les équivalences :

  $\neg\neg A \equiv A$

  $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

  $(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$

- Le **théorème de substitution** reste valable au premier ordre

  Soient F une fbf, A une sous-fbf de F, et A' une fbf équivalente à A. Toute fbf F' obtenue à partir de F en remplaçant une occurrence de A par une occurrence de A' est équivalente à F

Autre formulaires

1. si $y \notin var(A)$ $QxA \equiv QyA[x/y]$ où $Q \in \{\forall, \exists\}$
2. si $x \notin var(A)$ $\forall xA \equiv \exists xA \equiv A$
3. si $x \notin var(B)$ $(QxA \wedge B) \equiv Qx\,(A \wedge B)$ où $Q \in \{\forall, \exists\}$
4. si $x \notin var(B)$ $(QxA \vee B) \equiv Qx\,(A \vee B)$ où $Q \in \{\forall, \exists\}$
5. $\neg \forall xA \equiv \exists x\, \neg A$
6. $\neg \exists xA \equiv \forall x\, \neg A$
7. $\forall xA \wedge \forall xB \equiv \forall x(A \wedge B)$
8. $\exists xA \vee \exists xB \equiv \exists x(A \vee B)$

9. $QxA \wedge Q'xB \equiv QxQ'y\,(A \wedge B[x/y])$
10. $QxA \vee Q'xB \equiv QxQ'y\,(A \vee B[x/y])$
    où Q et $Q' \in \{\forall, \exists\}$ et $y \notin \{var(A) \cup var(B)\}$

Conséquence Logique

- Si H_1, H_2, ..., H_n et C sont des **fbf fermées** d'un langage L du premier ordre on dit que ***C est conséquence logique de H_1, H_2, ..., H_n***, lorsque toute interprétation I de L qui est un modèle de tous les Hi est un modèle de C :

$$\{H_1, H_2, ..., H_n\} \models C.$$

Théorème

- Si H_1, H_2, ..., H_n et C sont des fbf fermées d'un langage du premier ordre les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

    1. $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \models C$
    2. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$ est valide
    3. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ est insatisfiable

Méthode des tableaux sémantiques

- On étend les règles de la logique des propositions aux quantificateurs
- Problème :
  - Certains ensembles de formules bien formées n'admettent pas de tableaux complets.
    - On peut développer des branches à l'infini : on ne peut pas prouver qu'on tend à rendre les nœuds terminaux lors de l'application des règles.

Substitution de variables

- On appelle substitution de variables l'opération qui consiste à remplacer dans une formule F toutes les occurrences libres d'une variable x par un terme t
  - On note [x:=t]F

- Exemple :

$$[\mathbf{x}:=a](P(\mathbf{x}) \rightarrow (\forall \mathbf{x}\ Q(\mathbf{x},y) \vee \exists z\ Q(\mathbf{x},z)))$$

$$= P(a) \rightarrow (\forall x\ Q(x,y) \vee \exists z\ Q(a,z)))$$

Méthode des tableaux

- On ajoute les règles pour les quantificateurs

2 Règles γ

$\exists x P, \Delta$ |-- $[x:=c]P, \Delta$

$\neg\forall x P, \Delta$ |-- $[x:=c]\neg P, \Delta$

où c est
une nouvelle cste

2 Règles δ

$\forall x P, \Delta$ |-- $[x:=t]P, \forall x P, \Delta$

$\neg\exists x P, \Delta$ |-- $[x:=t]\neg P, \neg\exists x P, \Delta$

où t est
un terme quelconque*

Note: **Note:** **On peut se limiter à n'utiliser que des termes préexistants ou une constante « e » (représentant le fait que le domaine ne peut être vide) si aucun terme ne préexiste (et considérer que la règle est épuisée quand aucune règle n'est applicable et qu'elle a été appliquée sur tous les termes existants)*

Méthode des tableaux

- La méthode des tableaux est adéquate et complète
- La logique de prédicats est semi-décidable
  - Si insatisfiable alors on peut trouver un tableau fermé
  - Si satisfiable alors on n'est pas sûr de trouver un modèle (car il peut être infini)