UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

-

FACULTÉ DES SCIENCES

Session : **1**	Durée de l'épreuve : **2 heures**
Date : **29 juin 2016 08:30**	Documents autorisés : **aide-mémoire**
Licence informatique 2^e année : Logique **HLIN602**	
Sujet : **2 pages**	Matériel utilisé : **aucun**

1 Evaluation de formules

On considère un langage du premier ordre contenant un prédicat binaire p, un prédicat unaire q et un symbole de fonction unaire f. On considère l'interprétation suivante I sur ce langage :
$D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$
$I(p) = \{(d_1, d_2), (d_1, d_3), (d_2, d_3), (d_3, d_2), (d_3, d_3)\}$
$I(q) = \{d_1, d_3\}$
$I(f) = \{d_3 \mapsto d_2, d_2 \mapsto d_1, d_1 \mapsto d_3\}$.

Question

Donnez la valeur des formules suivantes pour I.

1. $F_1 = \forall x\ \exists y\ (p(x,y) \wedge q(f(y)))$

2. $F_2 = \forall x\ \forall y\ (p(x,y) \rightarrow q(f(y)))$

3. $F_3 = \forall x\ \forall y\ (\neg p(x,y) \rightarrow \neg q(f(y)))$

4. $F_4 = (\forall x\ \forall y\ p(x,y)) \rightarrow (\forall y\ q(f(y)))$

5. $F_5 = \forall x\ (q(f(x)) \rightarrow \exists y\ p(x,y))$

6. $F_6 = \forall x\ (q(x) \rightarrow p(x, f(x)))$.

Vous n'avez pas besoin de justifier votre réponse (mais les mauvaises réponses compteront négativement).

2 Modèles et résolution

On considère les deux formules : $F_1 = \forall x \exists y.\ P(x,y)$ et $F_2 = \exists y \forall x.\ P(x,y)$

1. Donner un modèle où F_1 soit vraie.
2. Donner un modèle où F_1 soit fausse.
3. Donner un modèle où F_2 soit vraie.
4. Donner un modèle où F_2 soit fausse.
5. Donner un modèle où l'une des deux formules soit vraie (laquelle ?) et l'autre fausse (laquelle ?).
6. Montrer que l'une des implications $F_1 \rightarrow F_2$ ou $F_2 \rightarrow F_1$ est valide (laquelle ?), en raisonnant sur les modèles.
7. Montrer que l'une des implications $F_1 \rightarrow F_2$ ou $F_2 \rightarrow F_1$ n'est pas valide (laquelle ?), en raisonnant sur les modèles.
8. Montrer la validité de l'implication valide par la méthode de résolution.

suite du sujet au verso ...

3 Validité d'une formule

On considère la formule F ci-dessous :

$$F = \forall x \forall y \ \big[p(x,y) \vee \exists z(r(x,z) \wedge r(z,y))\big] \ \rightarrow \forall u \exists v \ \big[p(u,v) \vee r(u,v)\big]$$

Question

La formule F est-elle valide ? Prouvez votre réponse en raisonnant sur les modèles.

4 Réflexion sur les formules existentielles / universelles

On appelle *formule universelle close* une formule sous forme prénexe dans laquelle toutes les variables sont quantifiées universellement. De façon similaire, on appelle *formule existentielle close* une formule sous forme prénexe dans laquelle toutes les variables sont quantifiées existentiellement.

Question 1

Montrez que si une formule existentielle close F est vraie pour une interprétation I de domaine D, alors pour tout D' tel que $D \supseteq D' \neq \emptyset$, il existe une interprétation I' de domaine D' pour laquelle F est vraie.

Question 2

La propriété précédente est-elle vraie pour les formules existentielles closes ? Pourquoi ?

Question 3

Considérons les formules existentielles closes. Quelle propriété "duale" de la propriété de la question 1 a-t-on ? Justifiez votre réponse.

5 Résolution

Question 1

Modélisez en logique du premier ordre le raisonnement suivant :

1. Certains jazzmen aiment toutes les compositions d'Ellington.
2. Aucun jazzman n'aime une composition inélégante.
3. Donc aucune composition d'Ellington n'est inélégante.

Question 2

Ce raisonnement est-il correct ? Si oui prouvez-le par la méthode de résolution, sinon donner une interprétation qui réfute ce raisonnement.

HLIN602 Corrigé contrôle

Exercice 1

1. val (F_1, I) = ET val $(\exists y \; p(x,y) \wedge q(f(y)), I, x \leftarrow d)$

$d \in D_1$ = pour d_1 ET d_2 ET d_3

Cette valeur est fausse parce qu'elle est fausse par l'assignation $x \leftarrow d_2$, en effet

$$\mathrm{val}\left(p(x,y) \wedge q(f(y)), I, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_2 \\ y \leftarrow d_1 \end{smallmatrix}\right) = (d_2, d_1) \in I(p) \text{ ET} \ldots$$

$$\mathrm{val}\left(\underline{\qquad\qquad}, \underline{\quad}, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_2 \\ y \leftarrow d_2 \end{smallmatrix}\right) = (d_2, d_2) \in I(p)$$

$$\mathrm{val}\left(\underline{\qquad\qquad}, \underline{\quad}, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_2 \\ y \leftarrow d_3 \end{smallmatrix}\right) = I(f)\;(\sigma(y)) = d_3 \in I(q)$$

2. $\mathrm{val}\left(p(x,y), I, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_3 \\ y \leftarrow d_3 \end{smallmatrix}\right)$ = VRAI

$\mathrm{val}(q(f(y)), I, y \leftarrow d_3)$ = FAUX

donc $\mathrm{val}\left(p(x,y) \rightarrow q(f(y)), I, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_3 \\ y \leftarrow d_3 \end{smallmatrix}\right)$ = FAUX

donc $\mathrm{val}(F_2, I)$ = FAUX

3. $\mathrm{val}\left(\neg p(x,y) \rightarrow \neg q(f(y)), I, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_2 \\ y \leftarrow d_2 \end{smallmatrix}\right)$ = FAUX donc $\mathrm{val}(F_3, I)$ = F

$(d_2, d_2) \in I(p)$ $\quad I(f)(\sigma(q)) = d_3 \in I(q)$

4. $\mathrm{val}(\forall x \forall y \; p(x,y), I)$ = FAUX car $I(p) \neq D^2$

donc $\mathrm{val}(F_4, I)$ = VRAI

5. $x \leftarrow d_1$ $\quad y \leftarrow d_2$

$x \leftarrow d_2$ $\quad y \leftarrow d_3$

$x \leftarrow d_3$ $\quad \mathrm{val}(q(f(x)), I, x \leftarrow d_3)$ = FAUX

6. $\mathrm{val}(F_6, I)$ = VRAI

Exercice 2

$I(P) = D^2$ modèle F_1 et F_2

$I(P) = \emptyset$ contre-modèle de F_1 et F_2

7. $F_2 \models F_1$ signifie qu'on peut trouver un modèle de F_1 mais pas forcément de F_2.

$D = \{d_1, d_2\}$ $I(p) = \{(d_1, d_2), (d_2, d_1)\}$ contre-modèle $F_1 \to F_2$

$F_2 \to F_1$ est valide ssi $F_2 \models F_1$

Soit I un modèle de F_2 : il existe une substitution $y \leftarrow d$ telle que pour tout d' de D $val(P(x,y), I, {}^{y \leftarrow d'}_{x \leftarrow d'}) = VRAi$

Donc pour tout d' de D, il existe $d \in D$ tel que $val(P(x,y), I, {}^{y \leftarrow d}_{x \leftarrow d'}) = VRAi$ cad $val(F_1, I) = VRAi$

8. Pour montrer $F_2 \to F_1$ valide, il faut montrer $F_2 \wedge \neg F_1$ insatisfiable.

On skolénise F_2 : $P(x, a)$ $\xrightarrow{x \leftarrow b}$

On skolénise $\neg F_1$: $\neg P(b, y)$ $\xrightarrow[y \leftarrow a]{}$ $\Box$

Exercice 3

$F = F_1 \to F_2$ avec $F_1 = \forall x \forall y [p(x,y) \vee \exists z (r(x,z) \wedge r(z,y))]$

$F_2 = \forall u \exists v [p(u,v) \vee r(u,v)]$

$F_1 \to F_2$ est valide ssi $F_1 \models F_2$. Soit I un modèle de F_1

$val(F_1, I) = VRAi$ ssi pour toute substitution $x \leftarrow d_1$ $y \leftarrow d_2$

$val(p(x,y) \vee \exists z (r(x,z) \wedge r(z,y)), I, {}^{x \leftarrow d_1}_{y \leftarrow d_2}) = VRAi$

- pour toutes les substitutions σ $x \leftarrow d_1$ $y \leftarrow d_2$ telle que $val(p(x,y), I, \sigma) = VRAi$ $val(p(u,v), I, {}^{u \leftarrow d_1}_{v \leftarrow d_2}) = VRAi$

• pour toutes les substitutions $x \leftarrow d_1$ $y \leftarrow d_2$ telle que

val $\left(\exists z\ r(x,z) \wedge r(z,y), I, \begin{smallmatrix} x \leftarrow d_1 \\ y \leftarrow d_2 \end{smallmatrix}\right) =$ VRAI

alors val $(\exists z\ r(x,z), I, x \leftarrow d_1) =$ VRAI

donc val $(\exists v\ r(u,v), I, u \leftarrow d_2) =$ VRAI

Exercice 5

Q1. $\mathcal{L} = \{J, E, C, I, A_2\}$

$H'_0 : \forall x\ (E(x) \rightarrow C(x))$ $\quad$ $H''_0 : \forall x\ (I(x) \rightarrow C(x))$

$H1 : \exists x\ J(x) \wedge (\forall y\ (E(y) \rightarrow C(y)))$

$H2 : \neg \exists x\ \exists y\ (J(x) \wedge I(y) \wedge A(x,y))$

$K : \forall x\ (E(x) \rightarrow \neg I(x))$

Q2. On skolénise les formules ci-dessus

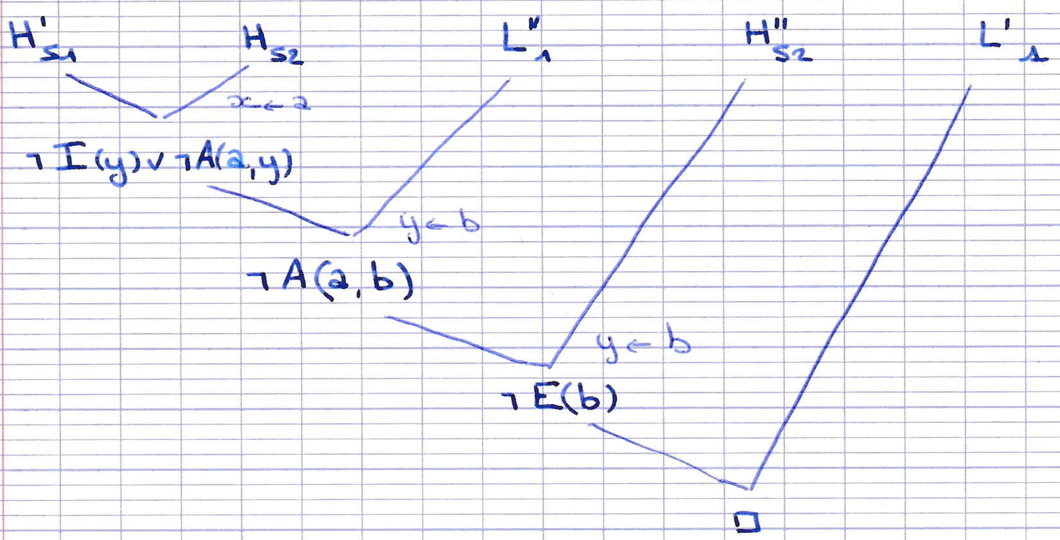
$H'_{S0} : \neg E(x) \vee C(x)$

$H''_{S0} : \neg I(x) \vee C(x)$

$H_{S1} : \underbrace{J(a)}_{H'_{S1}} \wedge \underbrace{(\neg E(y) \vee A(a,y))}_{H'_{S2}}$

$H_{S2} : \neg J(x) \vee \neg I(y) \vee \neg A(x,y)$

L'_1: $E(b)$ $\quad$ L''_1: $I(b)$



Exercice 4

/!\ Une formule universelle est sans constante

Q1 Par récurrence sur le nombre de quantificateurs.
.P(n) : si une formule universelle avec n quantificateurs est vrai pour une interprétation I de domaine D alors pour tout D' tel que $D \supseteq D' \neq \emptyset$ il existe une interprétation I' de domaine D' par laquelle F est VRAIE.
.P(0) (la seule formule universelle valide est $\top$ (top))
.$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Soit $F = \forall x\ G$ où G est une formule universelle qui contient n quantificateurs.
$val(F, I)$ est VRAI ssi pour tout d de D $val(G, I, x \leftarrow d) =$ VRAI
mais alors pour tout $D' \subseteq D$ $D' \neq \emptyset$ il existe I' tel que $val(G, I', x \leftarrow d') =$ VRAI où I' est une interprétation sur D' (HR)
Et pour tout $D' \subseteq D$
Pour tout $d' \in D'$ $val(G, I', x \leftarrow d') =$ VRAI donc sur D'
$val(F, I') =$ VRAI

Q2 $F = \exists x\ P(x)$

$D =$

$I(P) \neq \emptyset$

$I(P) \neq D$

$D' = D - I(P) \neq \emptyset$

$val(F, I) =$ VRAI

Q3 $D' \supset D$ $I'(P) = I(P)$