# - TD 2. Arbres de poids minimum -

### - Exercice 1 - Hypercube.

Soit $d$ un entier positif non nul. L'*hypercube* $Q_d$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des $d$-uplets $(x_1, \dots, x_d)$ de 0 et de 1, deux $d$-uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

a. Dessiner $Q_d$ pour $d = 1$ puis pour $d = 2$, $d = 3$ et enfin $d = 4$.

b. Pour $d$ quelconque, déterminer le nombre de sommets et d'arêtes de $Q_d$.

c. On considère la fonction de poids $p$ définie sur les arêtes de $Q_d$ qui vérifie $p(e) = i$ lorsque $i$ est l'indice de la coordonnée qui diffère entre les extrémités de $e$. Déterminer un arbre couvrant de poids minimum de $Q_3$.

### - Exercice 2 - Voyageur de commerce.

On se donne un ensemble de villes $V = \{v_1, \dots, v_8\}$ ainsi que les distances $d(v_i, v_j)$ séparant ces villes données par la matrice (symétrique) suivante :

$$(d(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 11 & 9 & 7 & 9 & 10 \\ . & 0 & 8 & 6 & 7 & 11 & 11 & 12 \\ . & . & 0 & 5 & 4 & 10 & 12 & 10 \\ . & . & . & 0 & 7 & 5 & 12 & 9 \\ . & . & . & . & 0 & 7 & 12 & 10 \\ . & . & . & . & . & 0 & 11 & 11 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 8 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

À un ensemble $E$ d'arêtes sur $V$, on associe $d(E)$, la *distance totale* de $E$, définie comme la somme des distances des arêtes de $E$.

a. Construire un arbre couvrant $T$ sur $V$ minimisant $d(T)$.

b. On s'intéresse au problème du voyageur de commerce sur cet ensemble de ville. Donner une tournée associée à l'arbre $T$ dans la 2-approximation du problème vue en cours.

c. Proposer une meilleure tournée. Quelle minoration pouvez-vous proposer pour la longueur de la tournée optimale ?

### - Exercice 3 - Unicité.

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction de poids sur les arêtes. On se donne deux arbres couvrants distincts $T = (V, A)$ et $T' = (V, A')$ de poids minimum $\omega(A) = \omega(A')$. On suppose que $e$ est une arête de poids minimum parmi les arêtes de $A \Delta A' := (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$, supposons par exemple que $e \in (A \setminus A')$.

a. Montrer qu'il existe une arête $e' \in (A' \setminus A)$ telle que $\omega(e') = \omega(e)$.

b. En déduire que si la fonction $\omega$ est injective (i.e. toutes les arêtes ont des poids différents), alors il existe un unique arbre couvrant de poids minimum.

### - Exercice 4 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

a. L'algorithme suivant fourni un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe connexe $G$ :
   - Pour tout sommet $x$ de $G$, noter $e_x$ une arête de poids minimum ayant $x$ pour extrémité.
   - Retourner l'ensemble des arêtes obtenues, en supprimant possiblement les doublons.

b. Si $e$ est une arête de poids minimum d'un graphe connexe $G$, alors $e$ appartient à un arbre couvrant de poids minimum de $G$.

c. Si $e_1$, $e_2$ et $e_3$ sont les trois arêtes de poids minimum d'un graphe connexe $G$, alors $e_1$, $e_2$ et $e_3$ appartiennent à tous les arbres couvrants de poids minimum de $G$.

d. Pour le problème du voyageur de commerce, l'algorithme suivant fournit une tournée optimale :
   - Trouver $v_1, v_2$ et $v_3$ les 3 villes les plus proches parmi les $n$ villes.
   - La tournée $v_1, \ldots, v_k$ étant construite, trouver la ville $v$, parmi les villes restantes, qui minimise $l(v_i v) + l(v v_{i+1}) - l(v_i v_{i+1})$ pour $i = 1, \ldots, k$ (en comptant les indices modulo $k$).
   - En notant $i_0$ l'indice donnant ce minimum, construire la tournée $v_1, \ldots, v_{i_0}, v, v_{i_0+1}, \ldots v_k$.

## - Exercice 5 -

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction de poids. Une *coupe* est une partition de $V$ en deux sous-ensembles $(X, V \setminus X)$. Une arête $e \in E$ *traverse* la coupe $(X, V \setminus X)$ lorsque l'une des extrémités de $e$ se trouve dans $X$ et l'autre dans $V \setminus X$.

a. Illustration : dans $Q_3$, quelles sont les arêtes qui traversent la coupe $\{X, V \setminus X\}$, où $X$ est l'ensemble des triplets dont la première coordonnée est 0.

b. Soit $T = (V, A)$ un arbre couvrant de poids minimum de $G$. Montrer que pour toute coupe $C$ et toute arête $e \in E$ traversant $C$, il existe $a \in A$ traversant $C$ telle que $\omega(a) \leq \omega(e)$.

c. Prouver la réciproque, c'est à dire que si l'ensemble $A$ des arêtes d'un arbre $T$ vérifie la propriété ci-dessus, alors $T$ est de poids minimum.

## - Exercice 6 - Algorithme de Prim.

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction de poids. On suppose que $G$ est codé par listes de voisins : à chaque sommet $v$ de $G$ est associée la pile $Vois(v)$ des voisins de $v$. L'ensemble des sommets de $V$ est $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

a. L'algorithme de Prim, renvoyant un arbre couvrant de poids minimum de $G$, est le suivant :
   - Initialiser $A$ à vide et poser $Atteint = \{x_1\}$.
   - Tant que $Atteint \neq V$, choisir une arête $x_a x_b$ avec $x_a \in Atteint$, $x_b \in V \setminus Atteint$ et de poids minimum pour cela. Mettre à jour : ajouter $x_a x_b$ à $A$ et ajouter $x_b$ à $Atteint$.
   - Retourner $A$.

   Tester cet algorithme sur le graphe $Q_3 \setminus \{111\}$ pondéré comme dans l'exercice 1.

b. Écrire en détail cet algorithme.

c. Comparer sa complexité avec celle de l'algorithme de Kruskal.

d. Prouver sa correction (i.e. qu'il renvoie bien un arbre couvrant de poids minimum de $G$).

## - Exercice 7 - MI6.

Un ensemble de $n$ espions peuvent communiquer entre-eux. Pour chaque paire d'espions, on connaît la probabilité qu'un message échangé entre eux deux soit intercepté (toutes ces probabilités sont supposées indépendantes). Un des espions veut communiquer un message important à l'ensemble de ses collègues. Comment doit-il faire pour minimiser la probabilité d'interception ?