Université Montpellier II – L3 2007-08
Logique 2 (FLIN 602)

Examen

Durée : 2h.
Documents autorisés, pas de calculatrice.
Le barème est mentionné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 pts)

Dans cet exercice, on ne vous demande pas de justifier vos réponses à la question (a). Vous devez par contre justifier vos réponses aux autres questions.

On considère un langage logique L comportant un prédicat binaire *p*, ainsi que deux interprétations de L, que l'on note I1 et I2.
I1 : D1 ={1,2}, I1(p) = {(1,2),(2,1)}
I2 : D2 ={1,2}, I2(p) = {(1,2),(2,2)}

(a) Donnez la valeur des formules suivantes, pour chacune des interprétations I1 et I2 :
$A = \forall x \exists y\ p(x,y)$
$B = \exists y \forall x\ p(x,y)$
(b) La formule A est-elle valide ?
(c) La formule $(A \rightarrow B)$ est-elle valide ?
(d) On ajoute au langage L une constante *a* et une fonction unaire *f*. Pour chacune des deux formules suivantes C et D, et chacune des interprétations I1 et I2 : peut-on compléter l'interprétation en définissant le sens de *f* et de *a* de façon à ce que la formule soit vraie pour cette interprétation ? (4 cas à traiter : C avec I1, C avec I2, D avec I1 et D avec I2)
$C = \forall x\ p(x,f(x))$
$D = \forall x\ p(x,a)$
(e) Quelles relations sémantiques (en termes d'équivalence, conséquence ou non-conséquence) y-a-t-il entre les formules suivantes :

- A et C
- B et D
- C et D

Exercice 2 (2,5 pts)

Utilisez l'algorithme de Robinson pour déterminer si les paires d'atomes ci-dessous sont unifiables, et si oui calculer un u.p.g. de ces atomes. Détaillez les différentes étapes du calcul.

1) p(x, f(x,y), y) et p(g(z), z, z), où *x, y* et *z* sont des variables.
2) p(x, f(x,y), y) et p(g(z), t, a), où *a* est la seule constante.

Exercice 3 (7 pts)

1. Modélisez en logique du premier ordre les phrases suivantes :

   1.*Une baleine est heureuse si tous ses enfants savent chanter.*
   2.*Tous les enfants des baleines bleues savent chanter.*

2. Comment exprimer en logique du premier ordre le raisonnement suivant : "des affirmations 1 et 2, on peut déduire que les baleines bleues sont heureuses" ?

3. Montrez que ce raisonnement est correct en utilisant la méthode de résolution. Détaillez toutes les étapes de calcul.

4. Peut-on déduire des phrases 1 et 2 que "les baleines sans enfant sont heureuses" ? Prouvez votre réponse.

Exercice 4 (2,5 pts)

On considère le programme Prolog suivant :

```
p(a,b).
q(X,Y) :- p(X,Y).
q(X,Y) :- q(X,Z),p(Y,Z).
```

Quel est le comportement de Prolog pour ce programme avec la question `q(a,Y)` ? Expliquez.

Exercice 5 (3 pts voire plus selon la qualité des preuves)

1. On considère l'atome p(x) et les formules A=∃x p(x) et B=∀x p(x). Soit s = {(x, t)} une substitution, où t est un terme quelconque (et, par définition d'une substitution, t est différent de x). On note s(p(x)) l'atome obtenu en appliquant s à p(x). Soit A' la formule fermée obtenue à partir de s(p(x)) en quantifiant existentiellement ses variables. Soit B' la formule fermée obtenue à partir de s(p(x)) en quantifiant universellement ses variables. Si s(p(x)) ne contient pas de variable, A' = B' = s(p(x)).
A-t-on :

A |= A' ?
B |= B' ?

Prouvez vos réponses.

2. On considère la formule fermée C = $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_p$ ($L_1 \vee L_2 \vee$...), où les Li sont des littéraux. Montrez que : pour toute substitution s, C |= s(C), où s(C) est la formule obtenue à partir de s($L_1 \vee L_2 \vee$...) en quantifiant universellement ses variables.