TD 2 – Sémantique de la logique des propositions

Exercice 1 – Soit les fbf : $A = p \wedge (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))$ et $B = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

a) Soit I une interprétation. Déterminer (si c'est possible) v(A,I) et v(B,I) dans chacun des 4 cas suivants :
   1. on sait que I(p) = 0 et I(q) = 1 ;
   2. on sait que I(p) = 1 et I(q) = 0 ;
   3. on sait que I(p) = 0 ;
   4. on sait que I(q) = 1 ;
   5. on ne sait rien sur I(p) et I(q).

b) Les fbf A et B sont-elles satisfiables ? Valides ?

c) L'ensemble {A,B} est-il consistant ?

Exercice 2 – La sémantique d'une formule est déterminée par celle des symboles propositionnels qui la composent. Combien d'interprétations différentes peut-on donner aux symboles propositionnels de chaque formule suivante. Pour chacune d'elles, donnez la valeur de vérité de la formule.

$p \vee \neg p$ $\quad$ $p \wedge p$

$p \wedge \neg p$ $\quad$ $p \vee q$

$p \vee (q \vee \neg q)$ $\quad$ $(p \rightarrow \neg\neg p) \wedge (\neg\neg p \rightarrow p)$

$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ $\quad$ $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow (p \leftrightarrow q))$

Exercice 3 - Démontrez pour chaque couple de formules suivantes qu'elles sont « sémantiquement équivalentes » (c'est-à-dire que leur valeur de vérité est identique quelque soit l'interprétation des symboles propositionnels) :

p et $\neg\neg p$ $\quad$ $p \vee \neg\bot$ et $\neg\bot$

$p \rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ et $p \leftrightarrow q$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \wedge \neg p$ et $\bot$ $\quad$ $p \wedge (q \vee \neg q)$ et p

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \wedge s) \wedge \neg p)$ et $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s \vee r)) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

Exercice 4 - Le connecteur $\vee$ correspond au « ou inclusif ». Nous n'avons pas introduit de connecteur pour exprimer le « ou exclusif ». Donnez un connecteur vérifonctionnel pour ce connecteur. Quelles formules de la logique des propositions correspondent à ce connecteur c'est à dire ont la même sémantique que « p ou exclusif q » ? Même question avec le connecteur ternaire « si p alors q sinon r » dont la sémantique est celle de l'instruction correspondante des langages de programmations.

Exercice 5 – Dites parmi les formules suivantes lesquelles sont équivalentes en vous aidant des formulaires de bases donnés en cours : $(A \wedge B) \rightarrow C$, $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$, $(A \vee B) \rightarrow C$, $A \rightarrow (C \wedge D)$, $A \rightarrow (C \vee D)$, $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)$, $(A \rightarrow C) \vee (A \rightarrow D)$

Exercice 6 - Donnez des formules correspondant à la table de vérité suivante, en particulier les FNC et FND :

p	*q*	*r*	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 7 – Dire si les formules suivantes sont valides, insatisfiables ou contingentes

$((p \rightarrow q) \rightarrow p)$, $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, $((p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q))$, $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$

Exercice 8 – Que pensez-vous des affirmations suivantes :
- si une formule est contingente, sa négation l'est également ;
- si G et H sont 2 formules contingentes, alors $G \vee H$ et $G \wedge H$ sont 2 formules contingentes ;
- si $G \vee H$ est insatisfiable alors G et H sont 2 formules insatisfiables ;
- si $G \vee H$ est valide alors G et H sont 2 formules valides.

Exercice 9 – Montrez que pour toute formule H, il existe une formule H' équivalente à H et n'ayant comme connecteurs logiques que la négation et l'implication. Appliquer à la formule $((p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s))$.

Exercice 10 – Soit le connecteur *nand* défini par p *nand* q $\equiv \neg(p \wedge q)$. Montrez que toute formule est équivalente à une formule ayant *nand* comme seul connecteur. Appliquez à la formule $p \rightarrow q$.