Examen de logique des prédicats (GLIN 601)
Deuxième session

Tous documents autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question 1 (2 points)

Modéliser par une formule logique la phrase

"*Tout $x \in \mathbb{N}$* [1] *a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x.*"

Vous définirez vous même les symboles de prédicats que vous utiliserez et leur interprétation. On vous demande d'utiliser un minimum de symboles de prédicats.

Question 2 (4 points)
Appliquer la méthode de résolution pour essayer de prouver la validité de l'expression suivante.

$$[\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$$

Quel est le statut (valide, contingent, insatisfiable) de cette expression ? **Justifier**.

Question 3 (3 points)
Le "*théorème du buveur*" énnonce que dans tout bar (sous entendu non vide),
`il existe une personne telle que si elle boit, alors tout le monde boit.`

1. En utilisant le symbole de prédicat B d'arité 1, modéliser cet énoncé sous forme d'une formule logique $\mathcal{F}$.
2. Prouver cet énoncé en utilisant les interprétations : soient
   — $\mathcal{B}$ l'ensemble non vide des clients du bar
   — *Boit* le prédicat interprétation du symbole B
   et en nommant $\mathcal{B}_{Boit}$ l'ensemble des clients du bar qui sont en train de boire, on regardera deux interprétations
   (a) $\mathcal{B}_{Boit} = \mathcal{B}$ et
   (b) $\mathcal{B}_{Boit} \neq \mathcal{B}$
   et on montrera, dans chacun de ces deux cas, que vaut vrai la valeur de vérité de $\mathcal{F}$ pour l'interprétation considérée.

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers.

Question 4 (3 points)
On considère le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ composé de deux symboles de prédicats P et Q d'arité 1.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et I_P et I_Q deux prédicats sur $\mathcal{D}$.

On définit une interprétation I de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{D}$ par $I(P) = I_P$ et $I(Q) = I_Q$.

On note $\mathcal{D}_P$ (respectivement $\mathcal{D}_Q$) l'ensemble des éléments d de $\mathcal{D}$ tels que $I_P(d)$ (respectivement $I_Q(d)$) vaut vrai.

Soit A la formule $\forall x(P(x) \to Q(x))$ et B la formule $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

1. Quelles conditions doivent vérifier $\mathcal{D}_P$ et $\mathcal{D}_Q$ pour que I soit un modèle de la formule A ?

2. Quelles conditions doivent vérifier $\mathcal{D}_P$ et $\mathcal{D}_Q$ pour que I soit un modèle de la formule B ?

Question 5 (8 points)
Soient les cinq expressions logiques suivantes :

— $E_1 = \forall x \ P(x, x)$

— $E_2 = \forall x \forall y \ [P(x, y) \to P(y, x)]$

— $E_3 = \forall x \forall y \forall z \ [\{P(x, y) \wedge P(y, z)\} \to P(x, z)]$

— $E_4 = \forall x \forall y \ [P(x, y) \vee P(y, x)]$

— $E_5 = \forall x \exists y \ [P(x, y)]$

Lesquelles de ces expressions sont conséquences logiques des quatre autres et lesquelles non ?
Justifier chacune de vos réponses.