Examen de Logique 1 – FLIN406 – session 1

17 Mai 2011

Durée : 2h. Tout document autorisé. Pas de calculatrice.
La note tiendra le plus grand compte de la manière dont vous aurez rédigé vos démonstrations et vos explications.

Question 1 (2 points) *Soit la formule :*

$$((\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \wedge (C \vee \neg D)))$$

a. Dessinez l'arborescence de cette formule.
b. Montrez qu'elle est contingente.

Question 2 (2 points) *Parmi les formules suivantes :*

- $(A \rightarrow B)$
- $(\neg A \rightarrow B)$
- $(B \rightarrow A)$
- $(\neg B \rightarrow A)$
- $(A \leftrightarrow B)$
- $\top$
- $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$
- $(\neg C \wedge (A \vee B))$

Quelles sont celles qui sont conséquence logique de $(((A \rightarrow B) \wedge (\neg B \vee (A \vee C))) \wedge \neg C)$ *?*

Question 3 (3 points) *On suspecte Elise, Fred et Gaétan d'avoir commis un vol. Nous avons à leur sujet les informations suivantes :*

- *Si Gaétan n'est pas coupable alors Fred est coupable*
- *Gaétan est forcement coupable dès lors qu'Élise ne l'est pas.*
- *Si Gaétan est coupable alors Elise l'est aussi*
- *Si Elise est coupable alors Fred ne l'est pas.*

Déterminez (grâce à la méthode de votre choix), qui est coupable et qui est innocent ?

Vous séparerez bien dans votre réponse :

- *Modélisation des énoncés*
- *Formalisation du problème posé*
- *Justification de votre réponse en détaillant le raisonnement utilisé.*

Question 4 (2,5 points) *Montrez à l'aide de la méthode de résolution que la formule suivante est* **valide** *:*

$$((((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Question 5 (2,5 points) *Montrez à l'aide de la méthode des tableaux sémantiques que la formule suivante est* **satisfiable** *:*

$$((((S \rightarrow Q) \wedge (S \vee \neg Q)) \wedge (S \leftrightarrow \neg Q)) \vee (P \wedge (\neg P \vee S)))$$

Question 6 (3 points) *Soit* $\{F, G, H_1, ...H_n\}$ *un ensemble de formules bien formées de la logique des propositions telles que pour tout* $i \in [1, n]$ *on ait* $F, H_i \models G$ *; montrez que si la formule* $(H_1 \vee H_2 \vee \ ... \ \vee H_n)$ *est valide alors* $F \models G$*.*

Question 7 (3 points) *Soit les prédicats*

- $Chat(x)$ *:* x *est un chat*
- $Chien(x)$ *:* x *est un chien*
- $Q(x)$ *:* x *habite dans mon quartier*
- $Apprecie(x, y)$ *:* x *apprécie* y
- $Roux(x)$ *:* x *est roux*
- $BP(x)$ *:* x *a un beau panier*

Modélisez en logique des prédicats les énoncés suivants :

- *Les chats de mon quartier n'apprécient pas les chiens.*
- *Certains chats roux apprécient les chiens.*
- *Aucun chat roux n'habite dans mon quartier*
- *Les chats qui n'ont pas de beau panier sont roux.*

Donnez une phrase en langage naturel correspondant aux formules suivantes :

- $\forall x(BP(x) \rightarrow \neg Roux(x))$
- $\neg \exists x(Roux(x) \wedge Chat(x))$

Question 8 (2 points + 2 points bonus sur la question c.) *Soit la propriété suivante :*

« Soit A une fbf sans quantificateur, ni constante ayant $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ *pour ensemble de variables. La fermeture universelle de A notée* $A^\star$ *(i.e.* $A^\star = \forall x_1 \forall x_2 .... \forall x_n(A)$*) est satisfiable si et seulement si elle est satisfiable sur un domaine à un seul élément. »*

Soit $A_1 = ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow \neg(Q(y) \vee P(x, x)))$

a. *Donnez une interprétation I sur le domaine* $D = \{a, b\}$ *telle que v(*$A_1^\star$*,I)=1.*
b. *Définissez à partir de l'interprétation I précédente, une interprétation J sur le domaine D'={a} telle que v(*$A_1^\star$*,J)=1.*
c. *Finalement, démontrez la propriété.*