Examen de Logique 1 – GLIN402 – session 1

15 Mai 2013

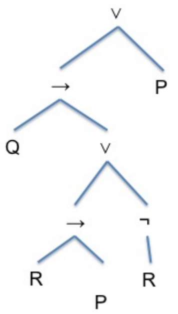
Durée : 2h. Tout document autorisé. Pas de calculatrice.
La note tiendra le plus grand compte de la manière dont vous aurez rédigé vos démonstrations et vos explications.

Question 1 (2 points) *Soit la formule :*

$$(Q \to (R \to P) \vee \neg R) \vee P$$

a. Dessinez l'arborescence de cette formule.

Cf. l'arborescence ci-dessous



b. Dites si elle est valide, contingente ou insatisfiable en justifiant votre réponse.

Contingente :
Un unique contre-modèle $I(P) = 0,\ I(Q) = I(R) = 1$.
Les 7 autres interprétations sont modèles.

Question 2 (2 points) *Modéliser en logique des propositions les phrases suivantes :*

1. *Jamais il ne me rencontre sans me dire bonjour.*

   R="il me rencontre"
   B="il me dit bonjour"
   F="il est fâché"
   $\neg(R \wedge \neg B)$ *ou une forme sémantiquement équivalente*

2. *Lorsqu'il ne me dit pas bonjour, c'est qu'il est fâché.*

   $(\neg B \to F)$ *ou une forme sémantiquement équivalente*

3. *Il s'arrange pour ne jamais me rencontrer lorsqu'il est fâché.*

   $(F \to \neg R)$ *ou une forme sémantiquement équivalente*

4. *Ou bien on va se dire bonjour ou bien il est fâché.*

$((B \vee F) \wedge (\neg B \vee \neg F))$ *ou une forme sémantiquement équivalente.*

Question 3 (2,5 points) *Soit l'argumentaire suivant :*

A - Nous perdrons les voix des agriculteurs si nous ne poursuivons pas notre politique de soutiens des prix.
B - A moins d'entreprendre des réformes structurelles, il y aura surproduction si nous conservons cette politique.
C - Nous avons besoin des voix des agriculteurs pour être réélus.
D - À l'avenir, il faut éviter à tout prix toute surproduction.
E - Donc si nous sommes réélus, il nous faudra mettre en place des réformes structurelles.

Ce raisonnement est-il correct ? Pour justifier votre réponse vous :

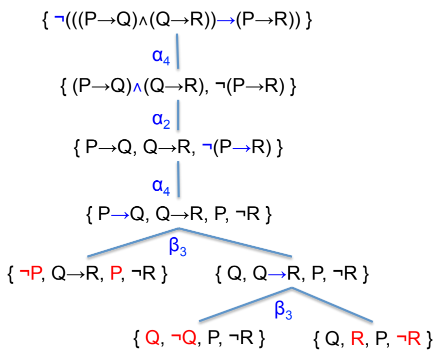
1. *modéliserez le problème en logique des propositions (en précisant bien quel est le problème de logique des propositions qui se pose).*
2. *résoudrez le problème posé par une méthode de votre choix.*

Avec les propositions élémentaires v = "avoir la voix des agriculteurs", p = "poursuivre notre politique", f = "faire des réformes structurelles", r = "être réélus", s = "existence d'une surproduction", le raisonnement sera correct si $\{A, B, C, D\} \models E$ *avec :*
A = $(\neg p \rightarrow \neg v)$
B = $(\neg f \rightarrow (p \rightarrow s))$
C = $(r \rightarrow v)$
D = $\neg s$
E = $(r \rightarrow f)$
Le raisonnement est correct, car, par exemple, par la méthode de résolution on a la forme clausale : $\{p, \neg v\}, \{f, \neg p, s\}, \{\neg r, v\}, \{\neg s\}, \{r\}, \{\neg f\}$ *qui permet d'obtenir la clause vide en utilisant toutes les clauses.*

Question 4 (2 points) *En utilisant la méthode des tableaux sémantiques montrez que la formule suivante est* **valide** *(après avoir développé votre tableau, vous indiquerez quelles propriétés vous permettent de conclure à la validité de la formule) :*

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

Cf. par exemple le développement du tableau ci-dessou de la négation de la formule.
plus préciser que toutes les feuilles sont fermées donc la formule dont on a développé le tableau est insatisfiable et donc la formule d'origine qui en est sa négation est valide.



Question 5 (2 points) *Montrez que la formule suivante est* **satisfiable** *en utilisant la méthode de résolution (vous détaillerez bien toutes les étapes et indiquerez quelles propriétés vous permettent de conclure à la satisfiabilité de la formule) :*

$$\neg((\neg C \to (D \to (\neg A \wedge B))) \to (A \to B)) \wedge (C \to D)$$

Forme clausale : $\{\{a\}, \{\neg b\}, \{\neg a, c, \neg d\}, \{b, c, \neg d\}, \{\neg c, d\}\}$
Application de la résolution : on ne peut que produire la clause $\{c, \neg d\}$ *(et éventuellement les clauses tautologiques* $\{c, \neg c\}$ *et* $\{d, \neg d\}$*)*
Conclusion : toutes les clauses produites, i.e. on ne peut pas fabriquer de nouvelles clauses par résolution, et on a pas produit clause vide, donc la formule est satisfiable.

Question 6 (5 points) *On appelle* conjonction positive*, une formule constituée d'une conjonction de symboles propositionnels. Par exemple, les formules suivantes sont des conjonctions positives :* $A = p \wedge (q \wedge p)$*,* $B = r \wedge s$ *et* $C = (p \wedge q) \wedge r$*. On note* $symbProp$ *la fonction qui associe à une formule bien formée l'ensemble de ses symboles propositionnels. On a :* $symbProp(A) = \{p, q\}$*,* $symbProp(B) = \{r, s\}$ *et* $symbProp(C) = \{p, q, r\}$*.*

1. *Montrez que* $\{\neg A, C\}$ *est contradictoire.*

   Une colonne de 0 *dans table de vérité (sur* p, q, r*) de* $\neg A \wedge C$ *(ou tout autre méthode)*

2. *Montrez que* $\{\neg B, C\}$ *est consistant.*

   $I(p) = I(q) = I(r) = 1$ *et* $I(s) = 0$ *est un modèle.*

3. *Soit* F *et* G *deux conjonctions positives, démontrez que :* $\{F, \neg G\}$ *est consistant si et seulement si* $symbProp(G) \not\subseteq symbProp(F)$*.*

   Sens direct :
   (par contradiction) $\{F, \neg G\}$ *consistant et supposons que* $symbProp(G) \subseteq symbProp(F)$*. Il existe une interprétation* I *telle que* $v(F, I) = v(\neg G, I) = 1$*; on a donc* $v(G, I) = 0$ *et il existe donc un symbole* g *de* G *tel que* $I(g) = 0$*. Si* $symbProp(G) \subseteq symbProp(F)$ *on a* g *est l'un des symboles de* F *et donc* $v(F, I) = 0$ *d'où contradiction.*
   Sens retour :
   (par démonstration directe) $symbProp(G) \not\subseteq symbProp(F)$ *donc il existe au moins un symbole de* G *qui n'est pas dans* F*. Soit l'interprétation* I *qui met à* 0 *ce symbole et à* 1 *tous les autres symboles. On a* $v(F, I) = 1$ *et* $v(G, I) = 0$ *et donc* $v(\neg G, I) = 1$*.*
   C.Q.F.D.

4. *Soit* F *et* $G_1 \ldots G_n$ *des conjonctions positives, démontrez que :* $\{F, \neg G_1 \ldots \neg G_n\}$ *est consistant si et seulement si pour tout* i *de* 1 *à* n *on a* $\{F, \neg G_i\}$ *consistant.*

   Sens direct.
   (par démonstration directe) $\{F, \neg G_1 \ldots \neg G_n\}$ *consistant, donc il existe une interprétation* I *telle que* $v(F, I) = 1$ *et pour tout* i *de* 1 *à* n $v(\neg G_i, I) = 1$*. On a donc pour tout* i *de* 1 *à* n $\{F, \neg G_i\}$ *consistant.*
   Sens retour.
   (on démontre la contraposée : Si $\{F, \neg G_1 \ldots \neg G_n\}$ *est contradictoire alors il existe* i *de* 1 *à* n *tel que* $\{F, \neg G_i\}$ *est contradictoire)* $\{F, \neg G_1 \ldots \neg G_n\}$ *contradictoire donc quelque soit l'interprétation* I*, on a soit* $v(F, I) = 0$ *soit un* G_i *(*$i \in 1..n$*) est tel que* $v(\neg G_i, I) = 0$*. Dans les deux cas* I *n'est pas un modèle commune de* F *et de* $\neg G_i$*. Donc il existe bien* i *de* 1 *à* n *tel que* $\{F, \neg G_i\}$ *est contradictoire.*
   C.Q.F.D.

Question 7 (3 points) *Soit les prédicats (avec leur arité) : Creutzfeld/1, Manger/2, Bœuf/1, Farine/1, Français/1. Utilisez les pour modéliser en logique des prédicats les énoncés suivants :*

A- *Aucun bœuf n'est nourrit qu'avec des farines animales.*

$\neg\exists x(Boeuf(x) \land \forall y(Manger(x,y) \rightarrow Farine(y)))$

B- *Si un bœuf a consommé des farines animales c'est qu'il n'est pas français.*

$\forall x(Boeuf(x) \land \exists y(Manger(x,y) \land Farine(y)) \rightarrow \neg Francais(x))$

C- *Personne ne peut contracter la maladie de Creutzfeld-Jacob sans avoir consommé de bœuf.*

$\neg\exists x(Creutzfeld(x) \land \neg\exists y(Manger(x,y) \land Boeuf(y)))$

Question 8 (1,5 point) *Montrez que la formule suivante est contingente (a est une constante) :*

$$(P(a) \land \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \land P(y))))$$

Un modèle, par exemple : $D = \{d\}$, $I(a) = d$, $I(P) = \{(d,1)\}$, $I(R) = \{((d,d),1)\}$.
Un contre-modèle, par exemple : $D = \{d\}$, $I(a) = d$, $I(P) = \{(d,0)\}$, $I(R) = \{((d,d),1)\}$.

Question 9 (2 points bonus) *Montrez que la formule suivante est valide :*

$$((\forall v\exists w\neg R(v,w) \rightarrow \neg\forall x\forall y\neg S(x,y)) \rightarrow (\exists x\exists z S(x,z) \lor \exists x\forall y R(x,y)))$$

Par exemple développement du tableau suivant de la négation de la formule, où toutes les feuilles sont fermées :