- TD 4. Graphes Orientés -

- Exercice 1 - Forte connexité.

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. Une *composante fortement connexe* de D est un sous-ensemble X de V tel que pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin orienté de x à y, et tel que X est maximal par inclusion pour cette propriété. Lorsque V est une composante fortement connexe, on dit que D est *fortement connexe.*

Préciser les composantes fortement connexes des graphes orientés $D = (V, A)$ suivants :

a. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{12, 23, 31, 14, 34, 45, 54, 15, 26\}$.

b. $V = \{1, \dots, n\}$ et $A = \{ij \ : \ j - i = 2 \ mod \ n\}$.

- Exercice 2 - Graphes de de Bruijn.

Le graphe $B(l, b)$ a pour ensemble de sommets l'ensemble des mots de longueur l sur l'alphabet $\{0, \dots, b-1\}$. Les sommets $A = a_1a_2 \dots a_l$ et $B = b_1b_2 \dots b_l$ sont reliés par un arc AB si et seulement si $a_2 \dots a_l = b_1 \dots b_{l-1}$.

a. Représenter $B(3, 2)$.

b. Calculer n, le degré maximum sortant d et le diamètre orienté k du graphe $B(l, b)$.

c. Montrer que quelques soient l et b, le graphe $B(l, b)$ est fortement connexe.

- Exercice 3 - Parcours orientés.

On considère le cube H (hypercube de dimension 3, défini Exercice 1, fiche de TD 2) orienté de la façon suivante : $000, 001, 011, 010$ et $000, 001, 101, 100$ sont deux cycles orientés ; les autres arêtes incidentes à ces cycles sont orientées depuis eux ; et la dernière arête est orientée de 110 vers 111. Effectuer un parcours en profondeur orienté en partant du sommet 000, puis un parcours en largeur orienté en partant du sommet 100. En cas de choix, on prendra d'abord le mot de valeur (en base 2) la plus faible.

- Exercice 4 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

a. Si un graphe orienté ne contient pas de cycle orienté, alors son graphe sous-jacent est une forêt.

b. Si un graphe orienté D est fortement connexe, alors il contient un cycle orienté hamiltonien.

c. Dans un graphe orienté D, la distance orienté entre deux sommets x et y est toujours plus grande ou égale que la distance (non orienté) entre x et y dans le graphe sous-jacent $U(D)$.

- Exercice 5 - Algorithme de Tri Topologique.

a. Effectuer un tri-topologique du graphe orienté D d'ensemble de sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et d'ensemble d'arcs $\{15, 45, 21, 26, 23, 36, 43, 42, 56, 53, 41, 16\}$. On en fera tout d'abord une représentation planaire.

b. Combien D possède-t-il de tri-topologiques ? Justifier.

c. On considère l'algorithme suivant :

Tant que tous les sommets n'ont pas été visités.

Choisir r non visité.

Effectuer un parcours en profondeur de racine r (qui stoppe s'il découvre un cycle orienté).
Retourner les sommets par ordre inverse de date de fin.

Dérouler cet algorithme sur le graphe de la question a., en partant du sommet 1.

d. Écrire précisément l'algorithme de la question précédente. On nommera cet algorithme TRI-TOPOLOGIQUE(D). Il retournera un tri-topologique de D lorsque D en admet un, ou bien un cycle orienté de D sinon. Les voisins sortants des sommets v de D sont donnés sous forme de pile Vois$^+(v)$. Votre algorithme peut faire appel un à un algorithme de parcours en profondeur.

e. Etablir la complexité de l'algorithme.

f. Prouver la validité de l'algorithme.

- Exercice 6 - Graphes orientés eulériens.

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est *eulérien* si son graphe sous-jacent est connexe et si D vérifie la loi de Kirchhoff, c'est à dire que pour tout sommet v, on a $d^+(v) = d^-(v)$.

a. Montrer que les graphes de de Bruijn sont eulériens.

b. On suppose D eulérien. Soit X un sous ensemble de V contenant $a(X)$ arcs. Exprimer le nombre d'arcs orientés de X vers $V \setminus X$ en fonction de $a(X)$ et des degrés sortants des sommets de X.

c. En déduire que le nombre d'arcs orientés de X vers $V \setminus X$ est égal au nombre d'arcs orientés de $V \setminus X$ vers X.

d. En déduire que D est fortement connexe.

- Exercice 7 - Marches eulériennes.

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est dit *eulérien* si G est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair. On considère une marche M sur G passant au plus une fois par chaque arête et de longueur maximale.

a. Montrer que M est fermée, i.e. le sommet de départ est égal au sommet d'arrivée.

b. Supposons qu'une arête xy ne soit pas dans M. Montrer que M ne passe ni par x, ni par y.

c. Montrer alors que M passe par toutes les arêtes de G.

d. En déduire que G possède une orientation eulérienne.

- Exercice 8 - Digicodes.

Soit $l > 0$ un entier et $x > 0$ un entier. Un *mot digicode* (l, x) est un mot sur l'alphabet $\{0, \ldots, x-1\}$ dans lequel tout mot sur $\{0, \ldots, x-1\}$ de longueur l apparaît en tant que facteur.

a. Montrer qu'un mot digicode (l, x) a longueur au moins $x^l + l - 1$. Un mot digicode est *minimal* s'il possède ce nombre de lettres.

b. Proposer un mot digicode (2,2) minimal, puis (3,2) minimal.

c. Montrer qu'il existe un mot digicode (l, x) minimal pour toutes les valeurs de l et x. On pourra utiliser un graphe de de Bruijn.