* §5-8　变形体的虚功原理

虚功原理是力学中的一个基本原理。虚位移原理和虚力原理是它的两个逆定理。由虚位移原理可以导出力的平衡条件，由虚力原理可以导出变形的协调条件。引入弹性体的本构关系后，由虚位移原理和虚力原理可以导出一系列能量原理，用于分析弹性结构各种力学问题。

针对刚体体系这一特殊情况建立的虚功原理（虚位移原理和虚力原理）已经在§3-8和§5-1中分别介绍。本节进一步讨论变形体体系的一般情况，建立变形体体系的虚功原理、虚位移原理和虚力原理。在刚体体系的虚功原理中，由于刚体的应变恒为零，内力所作的功恒为零，因此只需考虑外力所作的功。而在变形体体系的虚功原理中，由于变形体中存在应变，因而既要考虑外力，也要考虑内力所作的功。换句话说，还要补充考虑应力在变形上所作的内虚功，这是变形体体系虚功原理与刚体体系虚功原理唯一的不同之处。

变形体的虚功原理可表述如下：

设变形体在力系作用下处于平衡状态，又设变形体由于其他原因产生符合约束条件的微小连续变形，则外力在位移上所作外虚功 W 恒等于各个微段的应力合力在变形上所作的内虚功 W_i。

变形体的虚功原理可用式（5-16）表示，即

$$W=W_i$$

现先讨论变形体为单个杆件的情况，然后推广到杆件结构的一般情况。

1. 变形体虚功方程的应用条件

变形体虚功方程的应用条件是：力系应当满足平衡条件；位移应当符合支承情况并保持结构的连续性，或者说，位移应当满足变形连续协调条件。下面对这两方面的条件加以说明。

（1）力系的平衡条件

图5-29a所示直杆 AB 承受沿杆长分布的轴向荷载（集度为 p）和法向荷载（集度为 q）；A 端外力 M_A、F_{NA}、F_{QA} 和 B 端外力 M_B、F_{NB}、F_{QB}。如果杆件处于平衡状态，则图5-29b所示微段隔离体应满足平衡条件，即截面内力 M、F_N、F_Q 与分布荷载 p、q 之间应满足下列平衡微分方程：

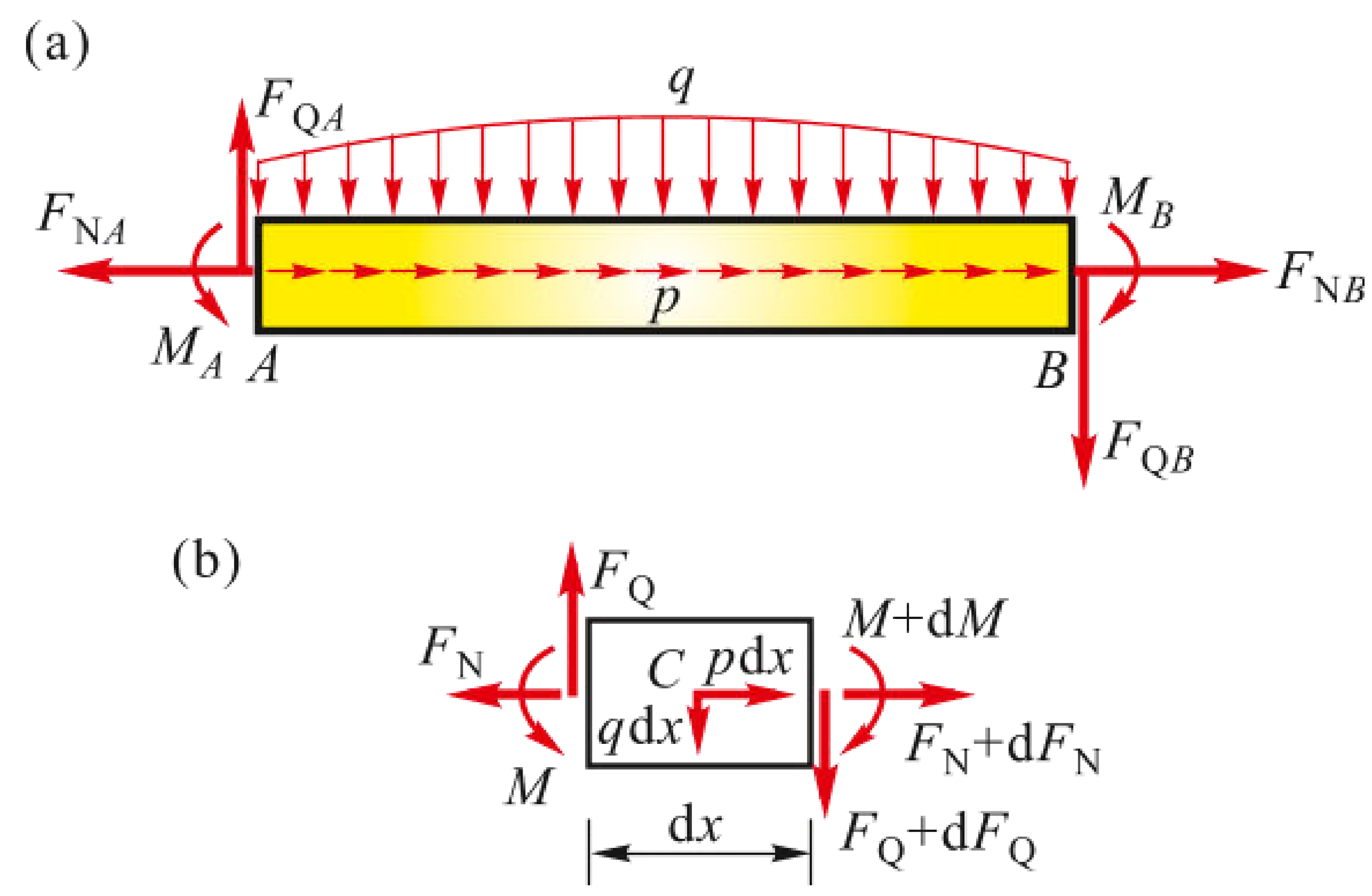

图　5-29

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}F_N+p\mathrm{d}x=0\\ \mathrm{d}F_Q+q\mathrm{d}x=0\\ \mathrm{d}M+F_Q\mathrm{d}x=0\end{aligned}\right\}\qquad(5-29)$$

（2）变形协调条件

图5-30a所示直杆 AB 的位移和变形情况可分述如下：

任一截面的位移可用三个位移分量来描述，即截面的角位移 θ、截面形心的轴向位移 u 和横向位移 w。杆轴切线的角位移 φ 可由 w 得出：

$$\varphi=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\qquad(5-30)$$

微段 dx 的变形可用三个应变分量来描述，即两端截面的相对转角 dθ、轴线的线应变 ε、截面平均切应变 γ_0（图 5-30b）。

位移分量与应变分量之间应满足下列关系式：

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{5-31}$$

$$\gamma_0=\varphi-\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta \tag{5-32}$$

此外，在杆端还应满足静力平衡或几何方面的边界条件。以 A 端为例，如为自由端，则截面 A 的 M、F_{N}、F_{Q} 应与 A 端给定的外力 M_A、$F_{\mathrm{N}A}$、$F_{\mathrm{Q}A}$ 相等；如为固定端，则截面 A 的 θ、u、w 应与支座 A 给定的位移 θ_A、u_A、w_A 相等；如为铰支端，则截面 A 的 M、u、w 应与 A 端给定的 M_A、u_A、w_A 相等。应变位移关系式和几何边界条件合在一起称为变形协调条件。

2. 变形体虚功方程

令图 5-29 中的平衡受力状态在图 5-30 中连续变形状态上作虚功。

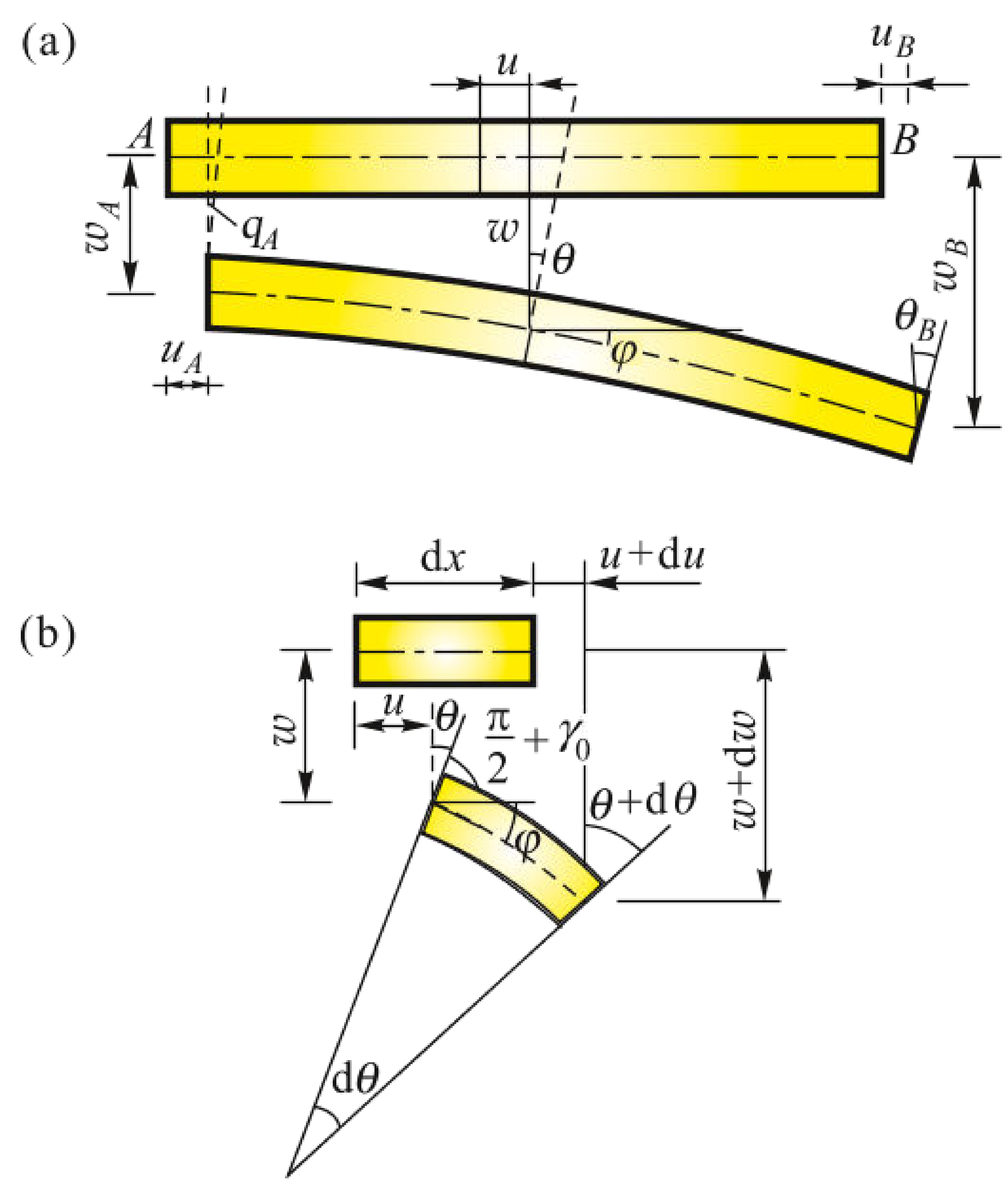

图 5-30

外力在位移上所作的外虚功为

$$W=(M_B\theta_B+F_{\mathrm{N}B}u_B+F_{\mathrm{Q}B}w_B)-(M_A\theta_A+F_{\mathrm{N}A}u_A+F_{\mathrm{Q}A}w_A)+\int_A^B(pu+qw)\,\mathrm{d}x \tag{5-33}$$

式中等号右边的前两项是杆端力作的虚功，第三项是分布荷载作的虚功。

微段 dx 两侧面的应力合力在变形上作的内虚功为

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{i}}=M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}x+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}x$$

因此，整个变形体的内虚功为

$$W_{\mathrm{i}}=\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}x+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}x) \tag{5-34}$$

将式(5-33)和式(5-34)代入式(5-16)，得到变形体虚功方程：

$$(M_B\theta_B+F_{\mathrm{N}B}u_B+F_{\mathrm{Q}B}w_B)-(M_A\theta_A+F_{\mathrm{N}A}u_A+F_{\mathrm{Q}A}w_A)+\int_A^B(pu+qw)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}x+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}x) \tag{5-35}$$

3. 变形体虚功方程的证明

现在对虚功方程式(5-35)加以证明。

首先，根据平衡微分方程式(5-29)，可知下面等式成立：

$$\int_A^B[(\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}+p\mathrm{d}x)u+(\mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}+q\mathrm{d}x)w+(\mathrm{d}M+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}x)\theta]=0$$

上式可改写为

$$\int_A^B(u\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}+w\mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}+\theta\mathrm{d}M)+\int_A^B(pu+qw+F_{\mathrm{Q}}\theta)\,\mathrm{d}x=0 \tag{a}$$

由于

$$u\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}+w\mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}+\theta\mathrm{d}M=\mathrm{d}(uF_{\mathrm{N}}+wF_{\mathrm{Q}}+M\theta)-(F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}u+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}w+M\mathrm{d}\theta)$$

故式(a)又可改写为

$$\left[uF_{\mathrm{N}}+wF_{\mathrm{Q}}+M\theta\right]\Big|_A^B-\int_A^B(F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}u+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}w+M\mathrm{d}\theta)+\int_A^B(pu+qw)\mathrm{d}x+\int_A^B F_{\mathrm{Q}}\theta\mathrm{d}x=0 \tag{b}$$

由应变位移关系式(5-31)、式(5-32),可知

$$\mathrm{d}u=\varepsilon\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}w-\theta\mathrm{d}x=\gamma_0\mathrm{d}x$$

代入式(b),得

$$\begin{aligned}&\left[F_{\mathrm{N}B}u_B+F_{\mathrm{Q}B}w_B+M_B\theta_B\right]-\left[F_{\mathrm{N}A}u_A+F_{\mathrm{Q}A}w_A+M_A\theta_A\right]+\int_A^B(pu+qw)\mathrm{d}x\\&=\int_A^B(F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}x+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}x+M\mathrm{d}\theta)\end{aligned} \tag{c}$$

式(c)就是式(5-35)。于是,变形体虚功方程式(5-35)得到了证明。

4. 推广

如果杆上除分布荷载外,还有集中荷载,只需在外虚功 W 中计入集中荷载 F_{P} 作的虚功 $\sum F_{\mathrm{P}}\Delta$($\Delta$ 是与 F_{P} 相应的位移),便得到推广的变形体虚功方程。

式(5-35)中只讨论了单个杆件的情况。现在进一步讨论杆件结构的情况。

对结构中每个杆件分别应用式(5-35),然后进行叠加,即得

$$\begin{aligned}&\sum\left[M\theta+F_{\mathrm{N}}u+F_{\mathrm{Q}}w\right]_A^B+\sum\int_A^B(pu+qw)\mathrm{d}s+\sum F_{\mathrm{P}}\Delta\\&=\sum\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}s+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}s)\end{aligned} \tag{d}$$

式中左边第一项是所有各杆杆端力所作虚功总和。现在将所有各杆的杆端截面分为两类:

第一类杆端截面是结构内部结点处的杆端截面(例如图 5-31 中杆件 1、2、3 的截面 A_1、A_2、A_3)。由于结点本身处于平衡状态,因此在同一结点周围各杆的杆端力组成一个平衡力系,它们在结点位移上所作虚功总和等于零。

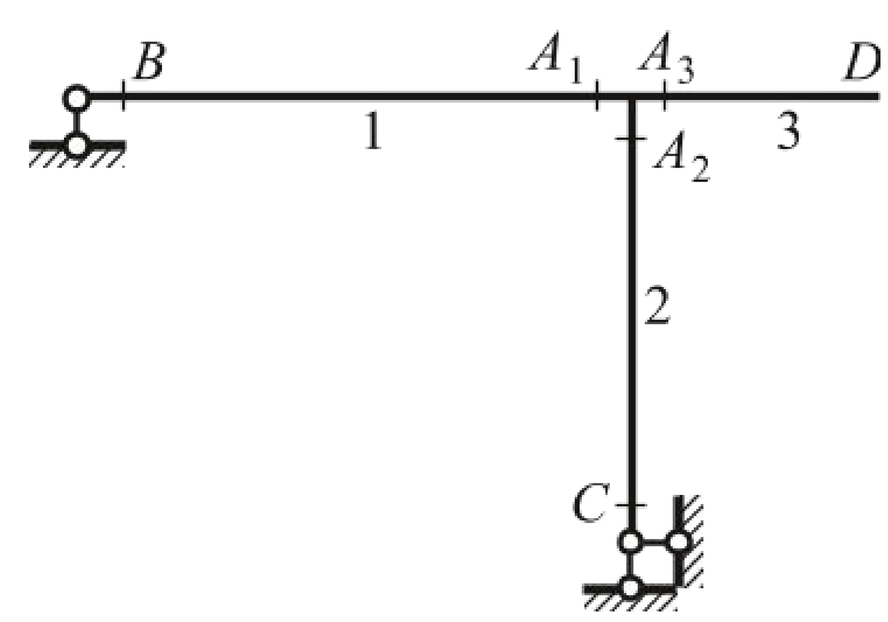

图 5-31

第二类杆端截面是结构的边界截面(例如图 5-31 中的截面 B、C、D)。这些杆端力的虚功总和就是结构边界外力的虚功,包括边界荷载和支座反力的虚功。其中,支座反力的虚功可记为 $\sum F_{\mathrm{R}K}c_K$,这里 $F_{\mathrm{R}K}$是支座反力,c_K 是与 $F_{\mathrm{R}K}$相应的支座位移。

通常,可将结构边界荷载所作虚功与各杆集中荷载的虚功统一表示为 $\sum F_{\mathrm{P}}\Delta$。于是,可得到杆件结构虚功方程的一般形式:

$$\begin{aligned}&\sum F_{\mathrm{P}}\Delta+\sum F_{\mathrm{R}K}c_K+\sum\int(pu+qw)\mathrm{d}s\\&=\sum\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}s+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}s)\end{aligned} \tag{5-36}$$

上式左边第一项和第三项分别表示集中荷载和分布荷载作的虚功。这两项也可合成一项,仍记为 $\sum F_{\mathrm{P}}\Delta$,则上式还可简写为(令 $\mathrm{d}\theta=\kappa\mathrm{d}s$)

$$\sum F_{\mathrm{P}}\Delta+\sum F_{\mathrm{R}K}c_K=\sum\int_A^B(M\kappa+F_{\mathrm{N}}\varepsilon+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0)\mathrm{d}s \tag{5-37}$$

最后,将虚功原理重述如下:

如果力系满足平衡方程,变形状态满足协调方程,则虚功方程(5-37)成立。

注意:在虚功原理中,虚功方程(5-37)只是必要条件,而不是充分条件,更不是充分必要条件。

由此引出一个想法:能否将虚功原理及其虚功方程(5-37)加以改造,使改造后的“虚功型方程”(指:用虚功形式表示的方程)成为变形协调方程或力系平衡方程的充分必要条件呢? 于是,就产生了下列两个“虚功型原理”——虚力原理和虚位移原理。

5. 虚力原理和虚位移原理(改造后的两个“虚功型原理”)

(1)虚力原理及其虚力方程

先介绍虚力方程[参看式(5-38)]。

令变形状态是待检查的对象(检查它是否满足变形协调方程),而力系是任意虚设的平衡力系。按照外虚功与内虚功相等的条件,写出虚功型方程,如式(5-38)所示:

任意虚设的平衡力系

$$\sum F_{\mathrm{P}}^{*}\Delta+\sum F_{\mathrm{R}K}^{*}c_{K}=\sum\int\left(M^{*}\kappa+F_{\mathrm{N}}^{*}\varepsilon+F_{\mathrm{Q}}^{*}\gamma_{0}\right)\mathrm{d}s \tag{5-38}$$

待检查的变形状态

这里,加*号的量表示虚设量。式(5-38)称为变形体虚力方程。

再介绍虚力原理(包含正反两方面内容)。

在虚设力系满足平衡方程并具有任意性的前提下,如果虚力方程(5-38)成立,则待检查的变形状态必满足变形协调方程。反之,在上述前提下,如果已知该变形状态满足变形协调方程,则虚力方程(5-38)必成立。综合起来,在上述前提下,虚力方程(5-38)是变形协调方程的充分必要条件[即式(5-38)与变形协调方程是等价方程;亦即式(5-38)是借用虚功形式表示的变形协调方程]。

关于虚力原理的详细证明,可参看卷Ⅱ §14-11。

单位荷载法(§5-2)就是应用这种虚功形式的变形协调方程来求位移Δ的。

(2)虚位移原理及其虚位移方程

先介绍虚位移方程[参看式(5-39)]。

令力系是待检查的对象(检查它是否满足平衡方程),而变形状态是任意虚设的协调变形状态。按照外虚功与内虚功相等的条件,写出虚功型方程,如式(5-39)所示:

任意虚设的协调变形状态

$$\sum F_{\mathrm{P}}\Delta^{*}+\sum F_{\mathrm{R}K}c_{K}^{*}=\sum\int\left(M\kappa^{*}+F_{\mathrm{N}}\varepsilon^{*}+F_{\mathrm{Q}}\gamma_{0}^{*}\right)\mathrm{d}s \tag{5-39}$$

待检查的力系

上式称为变形体虚位移方程。

再介绍虚位移原理(包含正反两方面内容)。

在虚设变形状态满足变形协调方程并具有任意性的前提下，如果虚位移方程(5-39)成立，则待检查的力系必满足平衡方程。反之，在上述前提下，如果已知该力系满足平衡方程，则虚位移方程(5-39)必成立。综合起来，在上述前提下，虚位移方程(5-39)是力系平衡方程的充分必要条件[即式(5-39)与力系平衡方程是等价方程；亦即式(5-39)是借用虚功形式表示的力系平衡方程]。

关于虚位移原理的详细证明，可参看卷Ⅱ §14-11。

单位支座位移法就是应用这种虚功形式的平衡方程来求支座反力的。

6. 单位支座位移法

考虑结构某个平衡受力状态，已知荷载 F_P 和各杆内力 M、F_N、F_Q，现在拟求某个支座反力(或约束反力)F_{R1}。

首先，根据拟求的支座反力 F_{R1}，虚设与之相应的单位支座位移 $c_1^*=1$(其余支座位移均设为零)，并确定由此单位支座位移引起的协调变形状态(包括与荷载 F_P 的相应位移 δ_{P1}^* 及应变 $\bar{\varepsilon}_1^*$、$\bar{\gamma}_{01}^*$、$\bar{\kappa}_1^*$)。

其次，将上述平衡受力状态和虚设的协调变形状态代入虚位移方程(5-39)，即得

$$F_{R1}=\sum\int(M\bar{\kappa}_1^*+F_N\bar{\varepsilon}_1^*+F_Q\bar{\gamma}_{01}^*)\,ds-\sum F_P\delta_{P1}^* \tag{5-40}$$

这就是应用单位支座位移法求结构支座反力 F_{R1} 的一般公式。

如果结构是静定结构，当虚设单位移支座位移时，结构只产生刚体体系的位移。此时，虚设应变为零，式(5-40)简化为

$$F_{R1}=-\sum F_P\delta_{P1}^*$$

此即在 §3-8 中已导出的式(d)，也即 $F_X=-\sum F_P\cdot\delta_P$。