



大千世界、缤纷万物从微观世界分析都是无限问题。如一座桥梁、一栋建筑,从原子形态出发,其原子数量是无穷多的,而有限单元法顾名思义,就是将固体力学、流体力学、热学等工程问题宏观地简化为有限单元求解。工程问题的求解精度取决于简化程度。以一段弧长计算为例,如图 3-1 所示。

从图 3-1 中可知,为求曲线 b 的长度,分别采用了多段线 a 与多段线 c 两种方式,从拟合的程度来看,显然多段线 a 在曲线过渡阶段采用了更多的直线线段逼近曲线过渡,其拟合程度优于多段线 c ,故 a 方案的长度相比方案 c 更接近曲线 b 的长度,所以对于弧长计算问题,只要多段线的数量越多,其长度与弧线越接近。

图 3-1 是一个简单的求解弧长的案例,有限元的计算过程要比弧长计算复杂许多,例如平面薄板问题,如图 3-2 所示。

一块薄板,一端固定,另一端受一均布载荷 q 。为求薄板的位移与应力,根据有限单元法求解思路,首先将薄板划分为两个单元,每个单元由 4 个节点构成。单元 1 由 a 、 b 、 c 、 d 共 4 个节点构成,单元 2 由 i 、 j 、 k 、 m 共 4 个节点构成,首先对单元 1 和单元 2 进行受力分析,分别计算两个单元的刚度矩阵 k 及载荷向量 f ,其次组装单元 1 和单元 2 进行整体分析求得结构的位移,如图 3-3 所示。

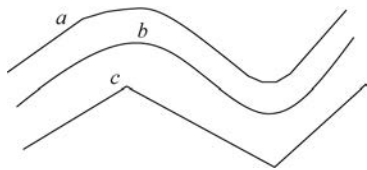


图 3-1 计算曲线长度

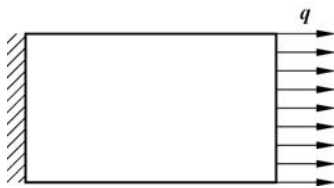


图 3-2 平面薄板问题

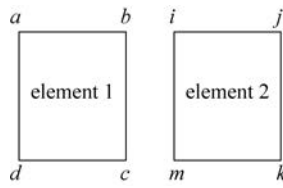


图 3-3 平面薄板单元分解

一般静力学有限元方程推导有直接法和能量法。梁、杆结构难度低于板壳结构,故通常可以直接采用直接法导出梁杆结构的有限元方程,而板壳结构和实体结构存在大量的偏微分方程组,直接法很难适用于此类结构,故通常采用能量法导出其有限元方程。本章分别通过一个简单的杆系结构介绍两种方法的导出过程。

3.1 直接法推导杆系结构的刚度矩阵

一根一维杆一端固定,另一端受到一集中拉力 F 的作用,如图 3-4 所示。

将杆划分为一个单元,根据式(1-42)变换其形式得

$$|\mathbf{F}| = \Delta L \cdot \frac{E \cdot A}{x} \quad (3-1)$$

式中: $\frac{E \cdot A}{x}$ 为杆刚度。

因整个杆构件仅划分为一个单元,故其单元形式如图 3-5 所示。

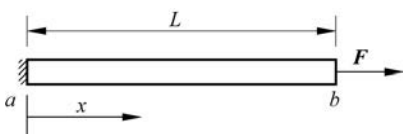


图 3-4 杆受轴向载荷作用

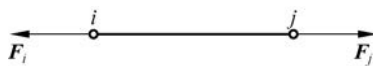


图 3-5 杆单元形式

分析单元受力规律,根据式(3-1)得到 i 节点与 j 节点的平衡方程为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = (u_i - u_j) \times \frac{E \cdot A}{L} \\ \mathbf{F}_j = (-u_i + u_j) \times \frac{E \cdot A}{L} \end{cases} \quad (3-2)$$

式中: \mathbf{F}_i 、 \mathbf{F}_j 分别为 i 节点与 j 节点的节点力;

u_i 、 u_j 分别为 i 节点与 j 节点的位移;

L 为杆单元的长度。

写成矩阵形式得

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

将式(3-3)改写成静力学的典型方程得

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3-4)$$

式中: \mathbf{K} 为刚度矩阵,其表达式为 $\frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$\{\mathbf{U}\}$ 为位移向量,其表达式为 $\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$;

$\{\mathbf{F}\}$ 为载荷向量,其表达式为 $\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}$ 。

【例 3-1】 如图 3-4 所示结构,其弹性模量 $E = 210\,000\text{MPa}$,面积 $A = 100\text{mm}^2$, $F = 10\,000\text{N}$,结构长度 $L = 200\text{mm}$,将其在长度方向平均分为两个杆单元,采用有限单元法求

解其 b 点和中间节点位移及应力应变。

将结构划分为两个单元,单元划分后的节点及受力形式如图 3-6 所示。

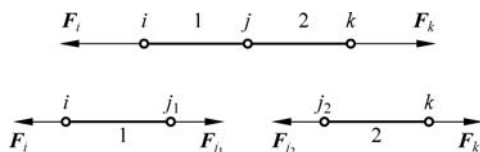


图 3-6 杆结构分解后的形式

本例采用两个杆单元求解结构位移和应力应变,故首先分别求得每个单元的刚度矩阵与静力平衡方程,然后将两个平衡方程根据单元分布形式组装为一个方程,最终通过求解方程的根得到结构位移。

根据式(3-3)求 1 号单元的静力平衡方程:

$$\frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{j_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_{j_1} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

式中: L_1 为 1 号杆单元的长度;

u_i 为 1 号单元 i 节点的位移;

u_{j_1} 为 1 号单元 j 节点的位移;

F_i 为 1 号单元 i 节点的载荷;

F_{j_1} 为 1 号单元 j 节点的载荷。

根据式(3-3)求 2 号单元的静力平衡方程:

$$\frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j_2} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j_2} \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

式中: L_2 为 2 号杆单元的长度;

u_{j_2} 为 2 号单元 j 节点的位移;

u_k 为 2 号单元 k 节点的位移;

F_{j_2} 为 2 号单元 j 节点的载荷;

F_k 为 2 号单元 k 节点的载荷。

每个单元的刚度矩阵和平衡方程可以通过已经推导的公式轻而易举地得到,而在组装总刚度矩阵和静力平衡方程时则应当根据每个结构的单元划分情况进行组装。对于图 3-6 的两个单元,从左到右的节点依次是 i 、 j 、 k ,其中 j 节点为 1 号单元和 2 号单元的共有节点,则静力平衡方程的位移向量和载荷向量从上到下依次按 i 、 j 、 k 顺序进行排列。

本结构为一维杆单元,故每个节点仅有 1 个自由度,两个单元共 3 个节点,则整个刚度矩阵应当为 3×3 的矩阵,最终的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

将 1 号单元相对应的式(3-5)扩充为 3×3 的矩阵,因为 1 号单元不包含 k 节点,故涉及 k 节点的一行均用 0 代替,同时对应的列也采用 0 代替,如式(3-8)所示。

$$\frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

将 2 号单元相对应的式(3-6)扩充为 3×3 的矩阵,因为 2 号单元不包含 i 节点,故涉及 i 节点的一行均用 0 代替,同时对应的列也采用 0 代替,如式(3-9)所示。

$$\frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

将式(3-8)和式(3-9)的总刚矩阵相加即可求得本结构的静力平衡方程:

$$\frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

值得注意的是,由于划分单元是在长度方向均分的,故单元长度 $L_1 = L_2 = 100\text{mm}$,式(3-10)总刚矩阵左侧的分母可以写为 L_1 或 L_2 ,本例中写为 L_1 。

由于式(3-10)的总刚矩阵 \mathbf{K} 的行列式等于 0,故式(3-10)为无解的,这是因为总刚矩阵是由两个单元的刚度矩阵组装而来的,组装过程并未考虑到节点 i 的固定约束,从图 3-6 可知,节点 i 的位移等于 0 是已知条件,故应将式(3-10)的第 1 行和第 1 列去除,得到

$$\frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j \\ F_k \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

将 $E = 210\,000$ 、 $A = 100$ 、 $L_1 = 100$ 代入式(3-11),求得两个根分别为

$$u_j = 0.0476\text{mm} \quad u_k = 0.0952\text{mm}$$

根据力学理论可知,式(1-42)即为杆结构的位移函数,而位移函数的一阶导数即为杆的应变,对式(1-42)求一阶导数得

$$\epsilon = \frac{F}{E \cdot A} \quad (3-12)$$

由式(3-12)可知,整根杆的应变处处相等,即

$$\epsilon = \frac{F}{E \cdot A} = \frac{10\,000}{210\,000 \times 100} = 4.76\text{e} - 4$$

由式(1-41)求杆应力为

$$\sigma = E \times \epsilon = 210\,000 \times 4.76\text{e} - 4 = 100\text{MPa}$$

使用 MATLAB 编程求解本例位移,代码如下:

```
% Filename: example3A1
clc
syms E A L_1 L_2 K F K_1 K_2
```

```

E = 210000;           % 弹性模量
A = 100;              % 杆截面的面积
L_1 = 100;            % 1 号单元长度
L_2 = 100;            % 2 号单元长度
F = [0;10000];        % 载荷向量
K_1 = [1 -1; -1 1];   % 1 号单元刚度矩阵
K_2 = [1 -1; -1 1];   % 2 号单元刚度矩阵
MATRIX_EX = zeros(2,1); % 创建维度为 2×1 的 MATRIX_EX 矩阵, 所有元素均为 0
K_1 = [K_1, MATRIX_EX]; % 扩展 K_1 矩阵
K_2 = [MATRIX_EX, K_2]; % 扩展 K_2 矩阵
MATRIX_EX = zeros(1,3); % 创建维度为 1×3 的 MATRIX_EX 矩阵, 所有元素均为 0
K_1 = [K_1; MATRIX_EX]; % 扩展 K_1 矩阵
K_2 = [MATRIX_EX; K_2]; % 扩展 K_2 矩阵
K = (E * A) / L_1 * (K_1 + K_2); % 形成总刚矩阵
K = K(2:3, 2:3);       % 考虑边界条件后删除第 1 行第 1 列得到新的总刚矩阵
U = K \ F;             % 求解位移

```

3.2 能量原理推导杆系结构的刚度矩阵

能量法在有限单元法中推导静力平衡方程更具普适性, 本节仍根据图 3-4 所示结构采用能量原理推导出杆单元的静力平衡方程。

在介绍能量原理之前, 首先需引出网格形函数概念。

一个一维杆单元如图 3-7 所示。



图 3-7 杆单元

假设杆单元的两个节点 i 和 j 的节点位移均已求得, 那

i 、 j 两个节点之间其他部位的位移可根据式(3-13)计算:

$$u = a_0 + a_1 x \quad (3-13)$$

式(3-13)所表达的是: 杆单元任意一点的位移是杆长 x 的函数, 但函数有两个未知量, 即 a_0 和 a_1 , 所以需要先将这两个未知量求出。

根据已知条件知:

$$\begin{cases} u(x) \big|_{x=0} = a_0 \\ u(x) \big|_{x=L} = a_0 + a_1 \cdot L \end{cases} \quad (3-14)$$

当 $x=0$ 时, 位于 i 节点, 描述的是 u_i 位移, 当 $x=L$ 时, 位于 j 节点, 描述的是 u_j 位移。故式(3-14)经过移项改写为

$$\begin{cases} a_0 = u_i \\ a_1 = \frac{u_j - u_i}{L} \end{cases} \quad (3-15)$$

通过式(3-15)已经求得了两个未知量 a_0 和 a_1 , 现在将式(3-15)代回式(3-13)得

$$u = u_i + \frac{u_j - u_i}{L} x = u_i + \frac{u_j \cdot x}{L} - \frac{u_i \cdot x}{L} \quad (3-16)$$

整理归类得

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}}{L} + \frac{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{x}}{L} = \mathbf{u}_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mathbf{u}_j \frac{x}{L} \quad (3-17)$$

式(3-17)中 \mathbf{u}_i 后的系数 $\left(1 - \frac{x}{L}\right)$ 及 \mathbf{u}_j 后的系数 $\frac{x}{L}$ 称为“形函数”, 式(3-17)的含义是: 在求得 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{u}_j 后, 杆单元内任意一点的位移与 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{u}_j 两个节点的位移量有关。

由材料力学可知, 杆单元的应变是位移函数的一阶导数:

$$\epsilon = \frac{d}{dx} \left[\mathbf{u}_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mathbf{u}_j \frac{x}{L} \right] = -\frac{\mathbf{u}_i}{L} + \frac{\mathbf{u}_j}{L} \quad (3-18)$$

杆单元的应力与载荷及杆截面面积有关:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3-19)$$

则杆的应变能可表示弹性模量和应变所表达的函数:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \cdot dV = \int_V \frac{1}{2} E \cdot \epsilon \cdot \epsilon \cdot dV \quad (3-20)$$

将式(3-18)代到式(3-20):

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \cdot \left(-\frac{\mathbf{u}_i}{L} + \frac{\mathbf{u}_j}{L}\right) \cdot \left(-\frac{\mathbf{u}_i}{L} + \frac{\mathbf{u}_j}{L}\right) dV = \frac{1}{2} E \int_V \left[\left(\frac{\mathbf{u}_i}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_j}{L}\right)^2 - \frac{2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{L^2} \right] dV \quad (3-21)$$

由于微元体积 $dV = A \cdot dl$, 故

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \left[\left(\frac{\mathbf{u}_i}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_j}{L}\right)^2 - \frac{2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{L^2} \right] dV = \frac{1}{2} E \cdot A \int_0^L \left[\left(\frac{\mathbf{u}_i}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_j}{L}\right)^2 - \frac{2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{L^2} \right] dl \quad (3-22)$$

将其积分, 得

$$U = \frac{1}{2} E \cdot A \cdot L \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{u}_i}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_j}{L}\right)^2 - \frac{2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{L^2} \right] \quad (3-23)$$

而杆单元上外力所做外力势能为

$$W = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{u}_j \quad (3-24)$$

杆单元总的势能则为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} E \cdot A \cdot L \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{u}_i}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_j}{L}\right)^2 - \frac{2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{L^2} \right] - (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{u}_j) \quad (3-25)$$

从以上公式可以看出, 势能是位移 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{u}_j 的函数。根据最小势能原理, 当结构处于稳定的平衡状态时, 其总势能最小, 根据高等数学求极值方法, 可以令势能 Π 分别对 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{u}_j 求一阶偏导等于 0, 从而求得极小值(具体是极小值还是极大值需要对其二次求导, 这里不深入探讨, 有兴趣读者可以自行查阅资料)。

令势能 Π 对 \mathbf{u}_i 求一阶偏导等于 0 得

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} E \cdot A \cdot L \cdot \left[\left(\frac{u_i}{L} \right)^2 + \left(\frac{u_j}{L} \right)^2 - \frac{2u_i \cdot u_j}{L^2} \right] - (F_i \cdot u_i + F_j \cdot u_j) \right)}{\partial u_i} \\ &= \frac{EA}{L} (u_i - u_j) - F_i = 0\end{aligned}\quad (3-26)$$

令势能 Π 对 u_j 求一阶偏导等于 0 得

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} E \cdot A \cdot L \cdot \left[\left(\frac{u_i}{L} \right)^2 + \left(\frac{u_j}{L} \right)^2 - \frac{2u_i \cdot u_j}{L^2} \right] - (F_i \cdot u_i + F_j \cdot u_j) \right)}{\partial u_j} \\ &= \frac{EA}{L} (-u_i + u_j) - F_j = 0\end{aligned}\quad (3-27)$$

将式(3-26)和式(3-27)写成矩阵形式:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}\quad (3-28)$$

至此采用能量原理推出一维杆单元的静力学典型方程,其过程虽然比直接法推导过程烦琐,但其过程更具备普适性,梁单元、壳单元及实体单元形函数构造过程相比杆单元更为复杂,但其推导过程与杆单元类似。

3.3 非线性问题及其求解方法

静力学问题本质上都是非线性的,线性是非线性的一个特例,它需要满足:①材料本构是线弹性的;②结构不存在大变形;③加载边界条件性质不变。当任意一条不满足时其将变为非线性问题。

非线性结构通常分为 3 类:材料非线性、几何非线性(大变形)和状态非线性(接触)。

3.3.1 材料非线性

材料的应力-应变关系呈现曲线状态是一种典型的材料非线性,如图 3-8 所示。常见的非线性材料有钢筋混凝土结构、橡胶结构等。

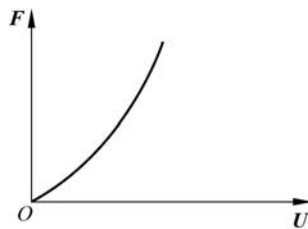


图 3-8 材料非线性

3.3.2 几何非线性

当结构受载后其变形状态远离结构初始状态即有可能引起结构非线性响应,一般几何非线性包含大应变、大挠度和应力刚化。

在日常生活中,钓鱼过程中鱼竿的变化是典型的几何非线性现象,鱼上钩后,鱼竿将出现大挠度,此时鱼竿的力臂减小,力与位移的关系不再保持线性关系,而是呈现非线性状态,如图 3-9 所示。

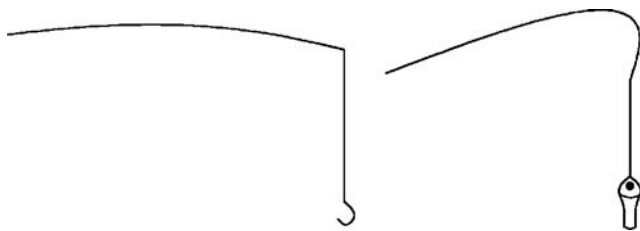


图 3-9 几何非线性



图 3-10 应力刚化现象

应力刚化指的是结构在外力作用下其刚度明显增大,比较典型的案例是一根钢丝绳在无预应力状态时,施加载荷位于钢丝绳中部,其下挠值远大于有预应力状态的钢丝绳,如图 3-10 所示。

3.3.3 状态非线性

状态非线性发生于多个零部件之间的相互接触或单个零部件由于自身发生大变形导致其自接触,由于接触的发生导致结构刚度发生变化,如图 3-11 所示。

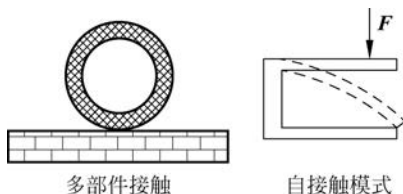


图 3-11 状态非线性

3.3.4 非线性方程求解方法

对于线性静力学问题,刚度矩阵在整个结构受载期间其刚度矩阵为常数,可通过式(3-29)求解

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3-29)$$

而对于非线性静力学,由于刚度矩阵在整个结构受载期间不再保持为常数,其表现为

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3-30)$$

从式(3-30)可知,力学平衡方程中刚度矩阵是位移的函数。为求解式(3-30),常用两种方法,分别为增量法和牛顿-拉弗森迭代法。

1. 增量法

增量法顾名思义,就是将载荷切分为多个载荷量,每施加一个载荷增量,计算结构的位移、应变和应力等场量,在每个增量计算过程中,刚度矩阵是线性的,即增量法是用多个线性

替代非线性曲线,如图 3-12 所示。

以欧拉折线法为例:假设一个载荷分为 n 个增量,则所有的载荷为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{F}_i \quad (3-31)$$

每增加一个载荷增量,则必然产生对应位移 $\Delta \delta_i$,因此当 n 个载荷全部施加后,总的位移为

$$\delta_n = \delta_{n-1} + \Delta \delta_n \quad (3-32)$$

在计算第 n 个位移增量时,刚度矩阵取上一级载荷增量结束时的线性刚度矩阵 \mathbf{K}_{n-1} ,即第 n 级载荷开始的线性刚度矩阵为

$$[\mathbf{K}]_{n-1} \{\Delta \delta\}_n = \{\Delta \mathbf{F}\}_n \quad (3-33)$$

整个欧拉折线法求解过程为

$$\begin{cases} \{\Delta \delta\}_n = [\mathbf{K}]_{n-1}^{-1} \{\Delta \mathbf{F}\}_n \\ \{\delta\}_n = \{\delta\}_{n-1} + \{\Delta \delta\}_n \end{cases} \quad (3-34)$$

欧拉折线法计算过程简单,但由于采用线性刚度矩阵逼近非线性行为,所以随着载荷级数的增加其偏离曲线的程度变大。

2. 牛顿-拉弗森迭代法

牛顿-拉弗森迭代法与增量法类似,同样需要多次计算不断逼近且刚度矩阵亦为线性,但与增量法不同的是,牛顿-拉弗森法不是增量过程而是迭代过程,如图 3-13 所示。

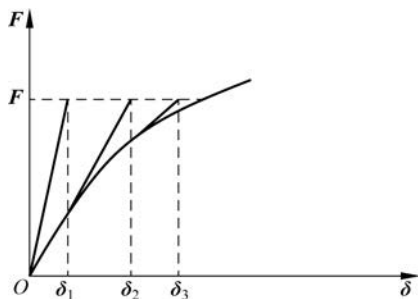


图 3-13 牛顿-拉弗森迭代法示意图

牛顿-拉弗森迭代法首先施加一级载荷 \mathbf{F} ,取其第 1 次的刚度矩阵 \mathbf{K}_0 。求得初始近似位移:

$$\{\delta_1\} = [\mathbf{K}_0]^{-1} \{\mathbf{F}\} \quad (3-35)$$

通过初始位移计算得到结构应变、应力进而求得各节点的载荷 \mathbf{F}_1 。用对应于 δ_1 的即时切线刚度矩阵 \mathbf{K}_1 ,在载荷 $\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$ 作用下求得位移增量 $\Delta \delta_2$,即

$$\{\Delta \delta_2\} = [\mathbf{K}_1]^{-1} \{\Delta \mathbf{F}_1\} \quad (3-36)$$

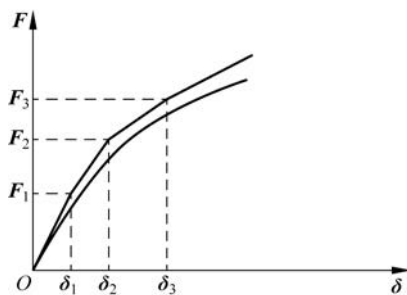


图 3-12 增量法计算过程示意图

第 2 次的位移近似值为

$$\{\delta_2\} = \{\delta_1\} + \{\Delta\delta_2\} \quad (3-37)$$

重复以上步骤,直到最后一次的位移近似值与上一次位移近似值相近,则计算结束。

牛顿-拉弗森求解非线性方程组由于其具有收敛速度快、误差可知可控等优点已成为求解非线性方程组的主要计算方法。

3. 收敛准则

为了判断非线性方程组求解结果是否可以结束,必然诞生出一系列收敛准则,当结果满足收敛条件时判定结果收敛,计算成功;反之则判定结果发散,计算失败。在实际应用中常用两种判定方法:其一为不平衡节点力,其二为位移增量。

由于非线性方程组计算过程实际上是计算多个线性方程组的过程,所以收敛准则必然涉及向量及范数计算。

取一列向量 $\mathbf{V} = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ \cdots \ V_n]^T$,则该向量可定义以下 3 个范数。

(1) 各元素绝对值之和

$$\|\mathbf{V}\|_1 = \sum_{i=1}^n |V_i| \quad (3-38)$$

(2) 各元素平方和的根

$$\|\mathbf{V}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n V_i^2} \quad (3-39)$$

(3) 元素中绝对值的最大者

$$\|\mathbf{V}\|_\infty = \max_n |V_i| \quad (3-40)$$

一旦求得范数并选定,即可使用范数与预先指定的一个数相互比较,如果小于指定的数,则为收敛,以不平衡节点力为判定依据,即

$$\|\mathbf{P}_{\text{RESULT}}\| = \alpha \|\mathbf{P}\| \quad (3-41)$$

式中: $\|\mathbf{P}_{\text{RESULT}}\|$ 为求得范数,为 $\|\mathbf{V}\|_1$ 、 $\|\mathbf{V}\|_2$ 或 $\|\mathbf{V}\|_3$;

α 为指定的一个小数,称为收敛允许值;

$\|\mathbf{P}\|$ 为施加的载荷(已经化为节点荷载)向量的范数。