2°. 对于单自由度结构体系受简谐振动，如何求解其响应？

答：$m\ddot{y}(t)+ky(t)=F_P$.　$F_P=F\sin\theta t$.

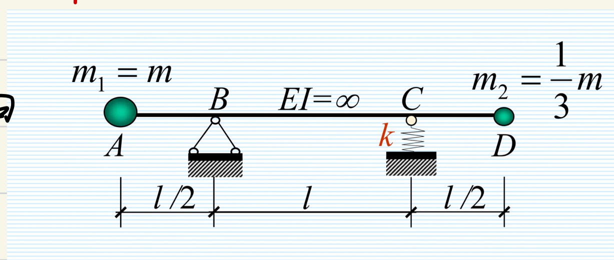
通解 ⇒ $y=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t+F\cdot\delta\dfrac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\sin\theta t$.

质点

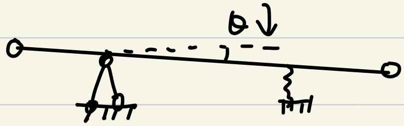
其中，ω为自振圆频率，δ为结构体系的柔度系数。C_1 C_2根据边界条件来求。

其中$\beta=\dfrac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}$，为动力放大系数。

3. 一些误区（与质点、系不等于多自由度）的问题.



回答：此结构体系实际上有一个自由度，即右下图中θ.



基础：$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$ ①　（$a_\tau=\frac{dv}{dt}$，$a_n=\frac{v^2}{\rho}$）

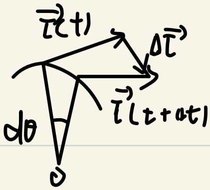
a_τ为切向加速度，a_n为法向加速度.

$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d\omega\cdot r}{dt}\cdot\dfrac{1}{r}=\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{1}{r}=\dfrac{a_\tau}{r}$.

（刚体转动 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$. 即 $v=\omega r\sin\theta$，$\theta=90°$，⇒ $v=\omega r$，且$a_\tau=\frac{dv}{dt}$.）

①的推导：

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d(v\vec{\tau})}{dt}=\dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$.　又 $\Delta t\to dt\to 0$时.



有 $d\vec{\tau} = 1\cdot d\theta\cdot\vec{n}$.

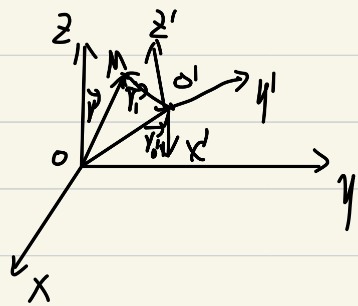
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v}{r}\frac{d\theta\times r}{dt}\vec{n}$$

$$= a_\tau\vec{\tau} + \frac{v}{r}\frac{ds}{dt}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}.$$

由此也可得出质点做圆周运动的加速度（相对惯性系而言的）.

而理论力学中所加 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$ （牵连运动是定轴转动时 且定轴通过O'）

推导过程（具体视理论力学P90）：



由 $\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}'$，对t求导，有：

$v_a = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$，而定轴过O'.

$\frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} = 0.$ $\Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}'$

→ 在动坐标系中对t求导. 即 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是恒矢量.

$\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$，又 $\vec{v}_r = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. 同理，有：

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

是以动系为参考系. 即 i,j,k 不变

$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}'$，再对t求导，有：

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$= \vec{a_r} + \vec{\omega}\times\vec{v_r} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{v_r} + \vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= \vec{a_r} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v_r}$$

$$= \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}.$$

故对于任何一个质点分析，若以动系为参考系，则会受到相应的惯性力 $(-ma)$

$-m\vec{a_e}$; $-m\vec{a_c}$ (科里奥利力)

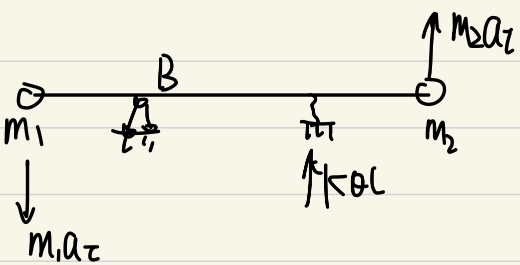
$-m\vec{a_e} = -m\cdot\vec{\alpha}\times\vec{r} - m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$-m\cdot\vec{\alpha}\times\vec{r}$ → 欧拉力 → 对应切向加速度

$-m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ → 离心力 → 对应法向加速度

即 $\vec{F} + (-m\vec{a_e}) + (-m\vec{a_c}) = m\vec{a_r}$. ($\vec{F}$ 为外力)

再回到此题：由于动点无相对动系的速度，故 $a_c = 0$



$\vec{a_e} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$

$a_\tau = \alpha\cdot r_1 = \ddot{\theta} r_1$ (由于[illegible]消掉，不考虑对B力矩)

$m_1 a_\tau = m\cdot\ddot{\theta}\cdot\frac{l}{2}$, $m_2 a_\tau = \frac{m}{3}\cdot\ddot{\theta}\cdot\frac{2l}{2} = \frac{1}{3}m\cdot\ddot{\theta}\,l$

对B点取矩，即 $\Sigma M_B=0$, $m_1a_1\cdot\frac{l}{2}+m_2a_1\frac{3l}{2}+k\alpha l\cdot l=0$

$\Rightarrow$ $m\ddot{\theta}l^2+k\theta l^2=0$, 即 $m\ddot{\theta}+k\theta=0$.

故 $w=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

由图可知其为简谐振动，运动方程可表示为 $y=A\sin(wt+\varphi)$

$\ddot{y}=-Aw^2\sin(wt+\varphi)$. 故运动过程中加速度 $a=w^2\times$位移

故下面老师所给答案中有 $I_1=m_1w^2A_1=mw^2\cdot\frac{l}{2}\cdot\alpha$，可直接得到惯性力大小。