Push down automata (PDA)

م. محمد تقالة

مقدمة

- **ما الهدف من استخدام Push down Automata؟**

مثلاً يكون لدينا سلاسل محارف ونريد معرفة انتماء هذه السلاسل للغة معينة بأبسط طريقة فبعد القيام بوضع قواعد لمعرفة الانتماء حيث هذه القواعد ستساعدنا على الحل

- **إن Push down Automata هي أنسب وأبسط طريقة والتي تعتبر مكافئة لهدف خوارزمية CYK**

- التعريف الرياضي: معرف على السباعية التالية: $(Q\ ,\ \Sigma,\ \Gamma,\ q_0\ ,\ \delta\ ,Z_0\ ,F)$

حيث:

- Q : مجموعة جميع حالات الأوتومات.
- Σ : الأبجدية المعرفة على الأوتومات.
- Γ : أبجدية رموز المكدس.
- q_0 : الحالة الابتدائية للأوتومات.
- δ : تابع الانتقال.
- Z_0 : رمز خاص من رموز أبجدية المكدس يدل على أن المكدس فارغ.
- F : مجموعة الحالات النهائية.

تم إضافة رمز جديد Z_0 وهو رمز جديد يساعد ويسهل الحل

- نعبر عن تابع الانتقال δ بالشكل:

$$(Current\ state, input, current\ stack\ top) \rightarrow (new\ state, new\ stack\ top)$$

يفيد في:

التعرف على سلسلة فيما إذا كانت تنتمي إلى لغة معينة أم لا حيث يتم قبول السلسلة في لغة عند تحقيق أحد الشروط:

1. فراغ المكدس
2. أن تنتهي السلسلة عند حالة نهائية.
3. عند تحقق الشرطان 1 و 2 معاً.

"وهذه الشروط متكافئة ونختار الشرط المناسب حسب حاجة المسألة"

▪ طريقة عمل المكدس:

إذا كنا عند الحالة q وكان الدخل a على سبيل المثال والمكدس يحوي X مثلاً فننتقل إلى الحالة p ونعبر عن عمليات المكدس كالتالي، حيث لدينا ثلاث عمليات أساسية في المكدس وهي:

1. Push: ونعبر عنها كالتالي: $(q,a,X) \to (p,XX)$
2. Pop: ونعبر عنها كالتالي: $(q,a,X) \to (p,\varepsilon)$
3. Nothing: ونعبر عنها كالتالي: $(q,a,X) \to (p,X)$

▪ لتكن لدينا اللغة $L=\{a^i b^j c^k \,; j+i=k\}$ صمم الأوتومات الذي يعرف هذه اللغة:

توضيح قبل الحل: يكون المكدس فارغاً في البداية ثم يتم إدخال السلسلة المراد التأكد منها حيث يتم التحرك محرف محرف (أي إدخال البيانات إلى المكدس كل محرف على حدى)

▪ لتكن لدي العلاقة:

(المنطلق) $(q,a,X) \to (p,\underbrace{X\,X})$ (المستقر)

الحالة التي أبدأ وأكمل منها

الدخل الوارد

المعلومات الموجودة في المكدس

الحالة الجديدة

ماذا سيتغير في المكدس

▪ حل المثال:

1. ستكون فائدة المكدس كونه ذاكرة حيث سنعلم عدد كل من a و b الذين سيتم إدخالهم لمعرفة عدد الـ c الناتج
2. حيث كلما أدخلت محرف a ستخزن القيمة وكذلك الأمر عند الـ b

▪ متى سنعلم أن السلسلة تنتمي أو لا؟

▪ عند الوصول لنهاية السلسلة أي أن يكون المكدس فارغ

الحالة البدائية

المكدس فارغ

الحالة التي انتقلنا إليها

$(q_0\,,a,Z_0) \to (q_1\,,XZ_0)$

الدخل الأول

نضيف لقمة المكدس محرف جديد وليكن X

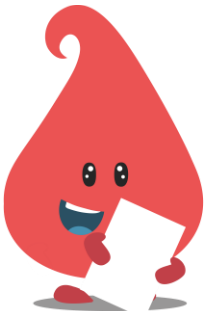
سنعبر عن كل من bga داخل المكدس ب X

▪ هنا نكون بداية في الحالة البدائية q_0 والمكدس فارغ

▪ أدخلنا الرمز a فتم الانتقال إلى حالة جديدة وهي q_1

$$(q_1, a, XZ_0) \to (q_1\ , \mathrm{XX})$$

- نلاحظ البقاء في الحالة q_1 لأنه أتى الدخل a نفسه ولم يأت دخل جديد.



$$(q_0, \mathrm{b}, Z_0) \to (q_2\ , XZ_0)$$
$$(q_1, \mathrm{b}, X) \to (q_2\ , \mathrm{XX})$$

- هنا لدينا حالتين:

1. إما q_0 وجاءها رمز b انتقلت فوراً للحالة q_2 وتم استبدال b بـX
2. أو q_1 وجاءها رمز b انتقلت فوراً للحالة q_2 وتم استبدال b بـX

- ملاحظة: لمَ انتقلت q_0 إلى q_2 فوراً ولم تنتقل لـ q_1 ؟

هنا لأن السلسلة حصراً تبدأ بـ a وليس a أو b لذلك يجب أن يسبق الدخل b دخل a .

$$(q_1, c, X) \to (q_3\ , \varepsilon)$$
$$(q_2, c, X) \to (q_3\ , \varepsilon)$$

- q_1 وجاءها دخل c سيتم الوصول فوراً لنهاية السلسلة ويصبح المكدس فارغاً
- q_2 وجاءها دخل c سيتم الوصول فوراً لنهاية السلسلة ويصبح المكدس فارغاً

$$(q_3, c, X) \to (q_3\ , \varepsilon)$$

ملاحظة الرمز X يدل على a و b داخل المكدس

- ومنه حالات الـ PDA كاملة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&(q_0, a, Z_0\ ) \to (q_1, XZ_0\ )\\
&(q_0, b, Z_0\ ) \to (q_2\ , XZ_0\ )\\
&(q_1, a, XZ_0) \to (q_2\ , XX)\\
&(q_1, b, X) \to (q_2\ , XX)\\
&(q_2, b, X) \to (q_2\ , XX)\\
&(q_1, c, X) \to (q_3\ , \varepsilon)\\
&(q_2, c, X) \to (q_3\ \ , \varepsilon)\\
&(q_3, c, X) \to (q_3\ , \varepsilon)
\end{aligned}$$

ملاحظة:

1. في حال تم الوصول لنهاية السلسلة والمكدس فارغ إذاً السلسلة تنتمي لـ اللغة.
2. في حال تم الوصول لنهاية السلسلة والمكدس لا يزال ممتلئاً فالسلسلة لا تنتمي لـ اللغة.
3. في حال السلسلة لم تنته والمكدس لايزال ممتلئ فالسلسلة أيضاً لا تنتمي.

- لو كان $k \leq k+1$: سيتم إضافة هذه القاعدة إلى القواعد السابقة:

$$(q_3, c, Z_0) \rightarrow (q_3\ , Z_0)$$

- وهذا يعني أن قمة المكدس فارغة.

$$(q_0, c, Z_0) \rightarrow (q_3\ , Z_0)$$

مثال 2: صمم أوتومات PDA يقبل هذه اللغة: $L = \{a^i\, b^j c^k d^l : i = l\ , j = k\ ; i, j \geq 0\}$

الحل: نبدأ بمناقشة حالات الدخل لتصميم الأوتومات:

تذكرة:

نقوم بربط كل محرف بحالة خاصة به:

$a \rightarrow q_1,$
$b \rightarrow q_2\ ,$
$c \rightarrow q_3\ ,$
$d \rightarrow q_4$

1. يكون المكدس فارغ Z_0 والحالة الابتدائية q_0 .
   - ممكن أن تبدأ السلسلة بـ a أي $i \neq 0$،
     عندها نضيف A إلى المكدس: $(q_0, a, Z_0) \rightarrow (q_1, AZ_0)$
   - ويمكن أن تبدأ السلسلة بـ b أي $i = 0$ ،
     عندها نضيف B إلى المكدس: $(q_0, b, Z_0) \rightarrow (q_2, BZ_0)$
2. أن تكون قمة المكدس فيها A أي تمت قراءة a من السلسلة بعد ذلك:
   - ممكن أن نضيف محارف أخرى من a ويصبح كالتالي: $(q_1, a, A) \rightarrow (q_1, AA)$
   - أو أن نقرأ محرف b فنضيفه إلى المكدس برمز مختلف وليكن B ويصبح: $(q_1, b, A) \rightarrow (q_2, BA)$
3. أن تكون قمة المكدس فيها B أي تمت قراءة محرف b من السلسلة، عندها:
   - ممكن أن نقرأ محارف b أخرى:

$$(q_2, b, B) \rightarrow (q_2, BB) \ldots \ast$$

   - أو أن نقرأ محرف c : حسب تسلسل محارف الكلمة $(a \ldots b \ldots c)$
     نتذكر شرط اللغة أن $k = j$ أي (عدد محارف b = عدد محارف c) ، ولضمان ذلك فإننا عند قراءة محارف b سنقوم بعملية push على المكدس، كما في الخطوة السابقة ($\ast$) أما عند قراءة محارف c فسنقوم بعملية معاكسة وهي pop لمحارف b أيضاً.
   - وعند قراءة آخر محرف c نكون قد حذفنا آخر محرف b من المكدس ونحقق الشرط ونعبر عنها كالتالي:

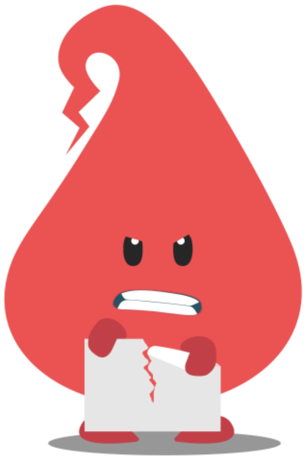
$$(q_2, c, B) \rightarrow (q_3, \varepsilon)$$

   - نتابع قراءة محارف c إلى أن تنتهي: $(q_3, c, B) \rightarrow (q_3, \varepsilon)$
4. أن تكون قمة المكدس فيها A ونقرأ محرف d مباشرة أي $j = k = 0$ "لا يوجد محارف b و c"
   ونكون في الحالة q_1 ، عندها: أيضاً كل قراءة لـ d يقابلها حذف لـ a من المكدس حسب الشرط: $i = l$

$$(q_1, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$$

5. أن يكون $j > 0$ أي تمت قراءة b و c وانتهينا عند الحالة q_3 وأصبحت قمة المكدس A ونريد قراءة محارف d
   بعمل pop لمحارف a عند كل قراءة لـ d : $(q_3, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$
   نتابع بقراءة محارف d إلى أن تنتهي السلسلة: $(q_4, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$

- ومنه يكون Push Down Automata:



- $(q_0, a, Z_0) \rightarrow (q_1, AZ_0)$
- $(q_0, b, Z_0) \rightarrow (q_2, BZ_0)$
- $(q_1, a, A) \rightarrow (q_1, AA)$
- $(q_1, b, A) \rightarrow (q_2, BA)$
- $(q_2, b, B) \rightarrow (q_2, BB)$
- $(q_2, c, B) \rightarrow (q_3, \varepsilon)$
- $(q_3, c, B) \rightarrow (q_3, \varepsilon)$
- $(q_3, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$
- $(q_4, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$
- $(q_1, d, A) \rightarrow (q_4, \varepsilon)$

- يتم القبول هنا على مكدس فارغ: أي نقبل السلسلة إذا أصبح المكدس فارغاً.

“One day you’ll leave this world behind.

So live a life you will remember”

Avicii – The Nights

انتهت المحاضرة