Semaine 12 : Réduction

Hussein El gouch

Exercice 1 : Polynôme caractéristique évalué en une autre matrice

Enoncé :

(1) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.

(2) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

—

Exercice 2 : Puissance d'une matrice et polynôme d'endomorphisme

Enoncé :

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Exercice 3 : Endomorphisme et valeurs propres

Enoncé :

Soit $E = C([0;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose

$$T(f) : x \in [0;1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt.$$

(a) Vérifier que T est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

—

Exercice 4 : Décomposition de l'espace

Enoncé :

Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [1; r]$, $E_i = \ker(a - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

avec $\mathrm{a}_i = a_{Ei}$

Montrer que pour tout $t \in [1; r]$, $V \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|e^{a_i t}\| \leq e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{|t^k|}{k!} \|a_i - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}\|^k.$$

Exercice 5 : Décomposition de l'espace vectoriel

Soit $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$.

On pose :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i,$$

où N_i est stable par a, et :

$$N_i = \ker\big((a - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\big).$$

À démontrer :

1. $\dim(N_i) = m_i$.

Exercice 6

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ et Φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ déterminé par :

$$\Phi(M) = AM - MB \quad \text{pour tout } M \in M_n(\mathbb{C}).$$

(a) Soient α une valeur propre de A et β une valeur propre de B. Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de Φ.

(b) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $\chi_A(M)$ n'est-elle pas inversible ?

(c) Soit λ une valeur propre de Φ. Montrer qu'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

Exercice 7 - Valeurs propres distinctes

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de f sont simples.
2. Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.
3. La famille $\{Id, f, \ldots, f^{n-1}\}$ est libre.

—

Exercice 8 - Application au calcul d'un déterminant circulant

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes, et soient A, J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que J est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. Déterminer un polynôme Q tel que $A = Q(J)$.
3. En déduire le déterminant de A.

—

Exercice 9 - Semblable sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Démontrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $QAQ^{-1} = B$.

—

Exercice 10 - Dimension du commutant

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n. On note C_f le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in C_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. En déduire que $\dim(C_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.
3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}$ est une base de C_f.

—

Exercice 11 - Matrice nilpotente

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère $\phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto MB - BM$.
   (a) Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
   (c) En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

—

Exercice 12 - Simultanément trigonalisables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$.

1. Montrer que les matrices A et B ont au moins un vecteur propre en commun.
2. Établir que les matrices A et B sont simultanément trigonalisables.

—

Exercice 13 - Diagonalisation simultanée

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$, et que f et g sont diagonalisables.

1. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. Montrer que les endomorphismes induits par g sur chaque sous-espace propre de f sont diagonalisables.
3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de g et f sont diagonales, autrement dit, qu'on peut diagonaliser *simultanément* f et g.

—