Semaine 13 : Probas

Hussein El gouch

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p+q=1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

a) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ? Reconnaître la loi.

b) Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

a) Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

b) Pour p nombre premier, on pose $A_p = p^{\mathbb{N}}$. Montrer que les A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.

c) Prouver que

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

d) La famille $(1/p)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Exercice 3

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération.

a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?

b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Exercice 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$.

Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0;1]$.

Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 6

Un pion avance sur un axe gradué par $\mathbb{Z}$ d'une case à la fois, soit vers la gauche, soit vers la droite, de manière équiprobable. Il part de 0. On note S_n la variable aléatoire indiquant sa case de passage à l'étape n et D_n le nombre de déplacements vers la droite après n étapes.

1. Loi de D_n.
2. Loi de S_n, la série $\sum P(S_n = 0)$ est-elle convergente ?
3. On définit l'événement A par « on passe une infinité de fois par 0 » et B son complémentaire. Montrer que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k > n} \{S_k \neq 0\} \right).$$

4. En déduire que A est un événement presque sûr.

Exercice 7 : Marche aléatoire et probabilité de retour

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de pas X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\, k \in \{0, \dots, n\}\}.$$

1. Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que :

$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k)\, P(S_{n-k} = 0_d).$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k)\, P(S_{n-k} = 0_d).$$

Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$. Par ailleurs, p est un élément de $]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = -1) = q.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$