Semaine 11 : Polynôme d'endomorphsime, début réduction

Hussein El gouch

Exercice 1 : Matrices nilpotentes et trace des puissances

Enoncé :
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.
—

Exercice 2 : Polynôme caractéristique de la comatrice

Enoncé :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique de la comatrice de A.
—

Exercice 3 : Puissances triangulaires supérieures

Enoncé :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geq 2$, A^k est triangulaire supérieure.
Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que A est inversible ?
—

Exercice 4 : Polynôme caractéristique évalué en une autre matrice

Enoncé :

(1) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
(2) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

—

Exercice 5 : Puissance d'une matrice et polynôme d'endomorphisme

Enoncé :
Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.
—

Exercice 6 : Endomorphisme et valeurs propres

Enoncé :
Soit $E = C([0;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose

$$T(f) : x \in [0;1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt.$$

(a) Vérifier que T est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

—

Exercice 7 : Décomposition de l'espace

Enoncé :
Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [1;r]$, $E_i = \ker(a - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

Montrer que pour tout $t \in [1;r]$, $V \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|e^{at}\| \leq e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|t^k|}{k!} \|a_i - \lambda \mathrm{id}_{E_i}\|^k.$$

Exercice 8 : Décomposition de l'espace vectoriel

Soit $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$.
On pose :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i,$$

où N_i est stable par a, et :

$$N_i = \ker\big((a - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\big).$$

À démontrer :

1. $\dim(N_i) = m_i$.

Exercice 9

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ et Φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ déterminé par :

$$\Phi(M) = AM - MB \quad \text{pour tout } M \in M_n(\mathbb{C}).$$

(a) Soient α une valeur propre de A et β une valeur propre de B. Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de Φ.

(b) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $\chi_A(M)$ n'est-elle pas inversible ?

(c) Soit λ une valeur propre de Φ. Montrer qu'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que $\lambda = \alpha - \beta$.