Semaine 9 : Algèbre linéaire

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

(a) Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent.
(b) Déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 3

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
(a) Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

(b) Trouver u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que $\mathrm{rg}(u+v) < \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
(c) Trouver u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n. On note :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

(a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
(b) Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.
(c) Soit $\varphi_a : C(f) \to E$ définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.
(d) En déduire que :

$$C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) \iff \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = f \circ h.$$

Exercice 6

Soient f et g appartenant au dual de E tels que $\ker(f) = \ker(g)$.
Montrer qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f = \alpha \cdot g.$$

Exercice 7

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On considère les suites des noyaux et des images itérées de f :

(a) Montrer que la suite $\ker(f^p)$ est croissante et que la suite $\mathrm{Im}(f^p)$ est décroissante.

(b) Justifier qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\ker(f^n) = \ker(f^{n+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1}).$$

(c) Interpréter n en fonction de la dimension de E.