Semaine 16 : Topologie

Exercice 1 : Enveloppe convexe d'un compact

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n. Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle **enveloppe convexe de** F, et on note $\text{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R})^{n+1}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$, et on admet que $\text{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que si K est une partie compacte de E, alors $\text{Conv}(K)$ est aussi une partie compacte de E.

1) Démontrer que $\mathcal{H}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2) Définir une application continue $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$ telle que $\text{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.
3) Conclure.

Exercice 2 : Valeurs propres d'une matrice

Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 3 : Point fixe dans un compact

Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On considère une application $f : K \to K$ vérifiant

$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 4 : Application lipschitzienne et point fixe

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On considère $f : K \to K$, une application ρ-lipschitzienne, i.e., vérifiant

$$\forall x, y \in K, \|f(y) - f(x)\| \leq \rho \|y - x\|.$$

a) On suppose $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.
b) On suppose $\rho = 1$ et K convexe. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. On pourra introduire, pour $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x).$$

Exercice 5 : Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\varepsilon}.$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 6 : Suites de Cauchy

Une suite (u_n) de nombres réels est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2) On souhaite prouver la réciproque à la question précédente. Soit (u_n) une suite de Cauchy.
   2.1) Montrer que (u_n) est bornée.
   2.2) On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.
   2.3) Conclure.

Exercice 7 - Projection

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \operatorname{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

Exercice 8 - Un opérateur sur les fonctions continues

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_\infty$. Pour $f \in E$, on définit l'opérateur L par :

$$L(f) : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad L(f)(t) = \int_0^1 f(t+u) f(u) \, du.$$

1. Justifier que L est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que L est continue et calculer $\|L\|_{\mathrm{op}}$.