Exercices

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose :

$$B = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

(a) Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.
(b) Montrer que $I + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Exercice 2

Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ soient premiers entre eux. Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que :

$$UA + VB = I_n.$$

Exercice 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

(a) Montrer que A est inversible.
(b) En supposant de plus que $a_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 4

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Exercice 5

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 6

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$f^n = 0 \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq 0.$$

(a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E.
(b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.
(c) En déduire que :

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 7

Matrices de trace nulle

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.