Semaine 14 : Variables Aléatoires et Probas

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

a) Reconnaître la loi de T_1.

b) Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer le développement en série entière de $\frac{1}{(1-t)^m}$.

d) Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 3

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Soient α et λ des réels strictement positifs. Établir

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} > e^{n\lambda\alpha}\right).$$

b) En déduire que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leq e^{-n\alpha^2/2}.$$

Exercice 4 (Urnes d'Ehrenfest)

On considère deux urnes A et B ainsi que N boules numérotées de 1 à N. Initialement, toutes les boules sont dans l'urne B. À chaque pas de temps, on tire un numéro i entre 1 et N selon une loi uniforme et l'on transfère la boule i dans l'urne où elle n'est pas. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A au bout de n étapes. En particulier, X_0 vaut 0.

a) Déterminer la loi de X_1 et X_2.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la loi de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.

c) On note G_n la fonction génératrice de la variable X_n. Établir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(t) = tG_n(t) + \frac{1-t^2}{N} G_n(t).$$

d) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5 (Fonction caractéristique)

On appelle *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right).$$

a) Vérifier que φ_X est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

b) On suppose que X admet une espérance. Vérifier que φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de φ_X'.

c) Que peut-on dire si X est de variance finie ? Exprimer alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de φ_X.

d) **Application** : Retrouver les valeurs connues de l'espérance et de la variance d'une loi géométrique.

Exercice 6

Pour un entier $n \geq 2$, on donne une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi d'espérance μ. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$.

Exercice 7

Soient $p \in]0;1]$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

a) Calculer l'espérance de X_k.

b) On pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

c) Quelle est la limite de p_n, quand $n \to +\infty$?