LinDatAlg - Projekt B

Alexander Husted - wqg382@alumni.ku.dk - Hold 13

20. juli 2023

Indhold

1

1.1 a

Betragt den lineære transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ givet ved

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestem en basis for $\ker T$ (kernen af T) og angiv dimensionen af dette underrum.

For at finde nulrummet af T, sættes A på reduceret rækkeechelinform, ved at anvendelse af følgende rækkeoperationer:

1. $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$
2. $2r_1 + r_3 \to r_3$
3. $r_1 + r_4 \to r_4$
4. $-2r_2 + r_3 \to r_3$
5. $-\frac{3}{2}r_2 + r_4 \to r_4$
6. $\frac{1}{2}r_2 \to r_1$

Herved fås matricen:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derfra fås løsnignen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Herved fås følgende basis for nulrummet:

$$Ker\,T = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

Dimmensionen for basis:
$n - rank A = nullity \Rightarrow 4 - 2 = 2$

1.2 b

(b) Bestem en basis for ran T (billedet af T) og angiv dimensionen af dette underrum.

Basis for søjlerummet af T består af de kolonner i A, hvor der er pivot 1-taller i A'. A' er udledt i 1.a, vi ser at der er pivot 1-taller i koloner 1 og 2. Altså er basis for søjlerummet af T:

$$Ran\,T = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \}$$

1.3 c

(c) Bestem en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som tilhører både ker T og ran T.

Vi ser at summen af vektorene i $kerT$ er lig summen af vektorene i $ranT$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed kan vi løse følgende ligning ved at sætte $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$:

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da har vi at x ligger i både $kerT$ og $ranT$ når:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4 d

(d) Vis, at der gælder $\mathbf{YAX} = \mathbf{Y'A}_{11}\mathbf{X'}$.

(*Vink:* Benyt blokmatrixmultiplikation; se evt. afsnit 2.1.5 i lærebogen.)

Udtrykket vises ved kontrol. De to vilkålige matricer sættes til henholdsvis:
$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Da fås højresiden til:

$$Y'A_{11}X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Og venstre siden til:

$$YAX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Da begge sider af lighedstegnet giver samme svar har vi:

$$YAX = Y'A_{11}X'$$

1.5 e

(e) Find en 4×2 matrix $\mathbf{X}$ og en 2×4 matrix $\mathbf{Y}$ som opfylder $\mathbf{YAX} = \mathbf{I}_2$.

Vi ved fra forgående opgave at matrixmultiplicationen fjerner blok A_{12}, A_{21}, A_{22}. Derfor kan vi nøjes med at finde den inverse til A_{11}.

$$[A_{11}|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_2|A_{11}^{-1}]$$

Da A_{11} er en kvadratisk matrix er A_{11}^{-1} både en højre og en venstre invers. Derfor kan vi sætte $Y' = A_{11}^{-1}$ og $X' = I_2$. Da for vi:

$$X = \begin{bmatrix} I_2 \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der kontrolleres:

$$YAX = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 2

2.1 a

Det oplyses, at nedenstående vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^4$ er lineært uafhængige, og derfor udgør de en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ for underrummet $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses desuden, at $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ er en anden basis for $\mathcal{U}$ og at basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ er:

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem vektorerne $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ og $\mathbf{c}_3$.

$c_1, c_2 \ og \ c_3$ kan udledes fra basisskiftmatricen $P_{B \leftarrow C}$. Herved gælder det at:

$$c_1 = -b_2 + b_3 \Rightarrow c_1 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = -b_1 + b_2 + b_3 \Rightarrow c_2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = b_1 + b_3 \Rightarrow c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Herved har vi:

$$\{c_1, c_2, c_3\} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \}$$

2.2 b

(b) Bestem basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Basisskift matricen $P_{C\leftarrow B}$ er den inverse af $P_{B\leftarrow C}$.

$$[P_{B\leftarrow C}|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Venstresiden sættes på rækkereduceret echelonform ved anvendelse af følgende rækkeoperationer:

1. $r_1 \leftrightarrow r_2$
2. $-r_1 \to r_1$
3. $-r_1 + r_3 \to r_3$
4. $-r_2 \to r_2$
5. $-2r_2 + r_3 \to r_3$
6. $r_3 + r_2 \to r_2$
7. $r_2 + r_1 \to r_1$

Herved fås matricen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Altså har vi:

$$P_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 c

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ betragtes vektoren $\mathbf{u}_a = (1, 1, a, -a)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Vis, at $\mathbf{u}_a$ tilhører underrummet $\mathcal{U}$ og bestem koordinatvektorerne $[\mathbf{u}_a]_\mathcal{B}$ og $[\mathbf{u}_a]_\mathcal{C}$.

Hvis U_a Kan skrives som en linearkombination af b_1, b_2 og b_3, er den en del af underummet $\mathcal{U}$, fordi $\mathcal{U}$ består af spannet af b_1, b_2 og b_3. For at kontrollere dette findes koordinaten til U_a med henhold til basen $\mathcal{B}$.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} b_1 & b_2 & b_3 & U_a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{array}\right]$$

Der udføres følgende rækkeoperationer:

1. $-r_1 + r_2 \rightarrow r_2$
2. $-r_2 + r_3 \rightarrow r_3$
3. $-r_3 \rightarrow r_3$
4. $-r_3 + r_4 \rightarrow r_4$
5. $-r_3 + r_2 \rightarrow r_2$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Herved får vi:

$$[U_a]_\mathcal{B} = b_1 + ab_2 - ab_3$$

Derudover bliver vi bedt om at finde $[U_a]_\mathcal{C}$, dette gøres ved samme metode.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -1 & -a \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dermed får vi:

$$[U_a]_\mathcal{C} = (-a+1)c_1 + c_2 + 2c_3$$

2.4 e

Endelig betragtes x_3x_4-planen i $\mathbb{R}^4$, dvs. underrummet $\mathcal{V} = \{(0,0,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

(e) Vis, at fællesmængden $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ er en linie gennem origo og bestem en retningsvektor for denne.

For at finde fællesmængden finder vi en linearkombination af $\mathcal{U}$ sådan at den ligger i $\mathcal{V}$

$$v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 \in \mathcal{V}$$

$$v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 =$$

$$v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Nøglen til at løse opgaven er at få de to øverste rækker til at give 0.
Vi ser i første række at $v_1 = 0$. Herefter løses anden række $v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_3$. Vi ser i tredje række at $v_2 = x_3$ derfor må $v_3 = -x_3$
Herved fås retningsvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ 0 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

Vi ser at linjen går igennem origo idet $x_3 = 0$ giver nulvektoren.

3 3

3.1 a

(a) Bestem en 4×4 matrix $\mathbf{F}$ som opfylder

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

(*Vink:* Ved tryk på parallelforskydes rumskibet med vektoren $\overrightarrow{CS} = \binom{s_1 - c_1}{s_2 - c_2}$.)

Vi skal bestemme en vektor $\begin{bmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ S_1^F \\ S_1^F \end{bmatrix}$ Som repræsentere skibets centrum og spids efter der trykkes på pil-frem.
Det er opgivet i opgaven at vi skal parallel forskyde skibet med vektoren $\vec{CS}$. Altså har vi:

$$c_1^F = c_1 + s_1 - c_1 \Rightarrow c_1^F = s_1$$

$$c_2^F = c_2 + s_2 - c_2 \Rightarrow c_2^F = s_2$$

$$s_1^f = s_1 + s_1 - c_1 \Rightarrow s_1^f = 2s_1 - c_1$$

$$s_2^f = s_2 + s_2 - c_2 \Rightarrow s_2^f = 2s_2 - c_2$$

Herved får vi følgende matrix F:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 b

(b) Gør rede for, at der gælder formlerne

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbf{L}_\theta$ og $\mathbf{R}_\theta$ er følgende 4×4 matricer:

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Følgende vink/oplysninger må frit benyttes:

- *Ved tryk på* $\boxed{\leftarrow}$ *er rumskibets centrum uændret, så* $c_1^L = c_1$ *og* $c_2^L = c_2$.
- *Rotationsmatricen* $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ *drejer som bekendt en vektor* θ *grader* ***mod uret*** *omkring* ***origo****.* *Ved tryk på* $\boxed{\leftarrow}$ *drejes vektoren* $\overrightarrow{CS} = \left(\begin{smallmatrix} s_1-c_1 \\ s_2-c_2 \end{smallmatrix}\right)$*, som går fra rumskibets centrum til dets spids,* θ *grader mod uret omkring* ***rumskibets centrum****. Dette betyder at* $\left(\begin{smallmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} s_1-c_1 \\ s_2-c_2 \end{smallmatrix}\right)$. *Regn nu videre på dette udtryk og bestem* s_1^L *og* s_2^L *udtrykt ved* c_1, c_2, s_1, s_2.
- *Matricen* $\mathbf{R}_\theta$ *kan bestemmes når først* $\mathbf{L}_\theta$ *er fundet ved at benytte, at* $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{L}_{-\theta}$.

Vi har at de to øverste rækker i begge matricer L_θ og R_θ er korrekte da det gælder at rumskibets centrum er uændret når vi drejer omkring origo. Det gælder for spids-vektorene at de ændre sig som følgende når vi drejer:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix}$$

Herved får vi

$$\begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ sin(\theta)c_2 - sin(\theta)s_2 - cos(\theta)c_1 + cos(\theta)s_1 + c_1 \\ -sin(\theta)c_1 - sin(\theta)s_1 - cos(\theta)c_2 + cos(\theta)s_2 + c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Overstående er udledt i Maple. Vi kan se at det er tilsvarende til:

$$\begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = L_\theta \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Hvorfra vi har:

$$L_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

For at finde en matrix for at dreje med uret sættet har vi $R_\theta = L{-}\theta$. Vi ved at $cos(\theta) = cos(-\theta)$ og vi ved $sin(-\theta) = -sin(\theta)$. Da for vi:

$$L_{-\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & 1 - cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} = R_\theta$$

3.3 c

(c) Lad $\theta = 30^\circ$ og antag, at rumskibet er i sin startposition, dvs. $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$.

Bestem positionen af rumskibets centrum og spids efter følgende tastkombination (der læses fra venstre mod højre):

$$\boxed{\leftarrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\uparrow}$$

(Man får brug for at multiplicere et antal 4×4 matricer i en passende rækkefølge. Hertil kan man fx benytte udvalgte funktioner fra Opgave 4, altså programmeringsopgaven, i Projekt A.)

Vi har at positionen efter taste trykket er givet ved en knap-matrix ganget med positionen. Derfor skal matricerne ganges på positionen i omvendt rækkefølge af hvornår de bliver trykket.

$$FR_\theta FR_\theta R_\theta FFL_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,67 \\ 3,10 \\ 1,23 \\ 3,60 \end{bmatrix}$$

Overstående koordinater til skibets center og spids er udledt i Maple.

3.4 d

(d) Lad stadigvæk $\theta = 30^\circ$. Forklar hvorfor der gælder $(\mathbf{R}_\theta)^{12} = \mathbf{I}_4$ (4×4 enhedsmatricen).

Vi har at hvis vi drejer 30 grader 12 gange, så har vi drejet 360 grader. Ergo må positionen være uændret hvilket svare til at gange positionen med enhedsmatricen.