LinDatAlg - Projekt A

Alexander Husted - wqg382@alumni.ku.dk - Hold 13

20. juli 2023

Indhold

1

1.1 a

Betragt ligningssystemet, hvor $a \in \mathbb{R}$,

$$x_1 + 2x_2 + ax_3 = a$$
$$ax_1 + ax_2 + 4ax_3 = 1$$
$$ax_1 + 2x_2 + 2a^2x_3 = 1.$$

(a) Foretag rækkeoperationerne (for $a \neq 0$)

$$-a\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2} \to \mathbf{r_2}$$
$$-a\mathbf{r_1} + \mathbf{r_3} \to \mathbf{r_3}$$
$$-{}^1\!/_a\,\mathbf{r_2} \to \mathbf{r_2}$$
$$-2(1-a)\,\mathbf{r_2} + \mathbf{r_3} \to \mathbf{r_3}$$

i den nævnte rækkefølge på totalmatricen for ligningssystemet og vis den herved fremkomne matrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ a & a & 4a & 1 \\ a & 2 & 2a^2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_2 - ar_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & -a & 4a - a^2 & 1 - a^2 \\ a & 2 & 2a^2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 - ar_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & -a & 4a - a^2 & 1 - a^2 \\ a & 2 - 2a & a^2 & 1 - a^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_2 \cdot (-\frac{1}{a})}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a - 4 & a - \frac{1}{a} \\ a & 2 - 2a & a^2 & 1 - a^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 - 2(1-a)r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a - 4 & a - \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 3a^2 - 10a + 8 & a^2 - 2a + \frac{2}{a} - 1 \end{array}\right]$$

Vi ser at efter rækkeoperationerne er blevet fortaget, står matricen på række echelon form.

1.2 b

Det oplyses, at den reducerede rækkeechelonform af totalmatricen, for $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4/3, 2\}$, er givet ved

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -(2a^2+4a-5)/(3a-4) \\ 0 & 1 & 0 & 2(a^2-1)/(3a-4) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2-1)/(a(3a-4)) \end{array}\right]. \quad (1)$$

(b) Løs ligningssystemet når $a = 2$. Kan den rækkereducerede totalmatrix i (1) bruges til at finde de løsninger der eventuelt måtte være når $a = 2$?

a indsættes i ligningssystemet efter rækkeoperationerene fra opgave a er fortaget. Disse operationer er nemlig defineret for a = 2.

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Løsningen for de variable:
$x_3 = t$
$x_2 - 2t = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2t + \frac{3}{2}$
$x_1 + 6t = -1 \Rightarrow x_1 = -6t - 1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6t-1 \\ 2t+\frac{3}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol om hvorvidt totalmatricen i figur 1 kan bruges til at finde en eventuel løsning når a = 2.
Det er opgivet at matricen ikke er defineret for a = 2, men a = 2 indsættes i figur 1 til kontrol.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -(2a^2+4a-5)/(3a-4) \\ 0 & 1 & -0 & 2(a^2-1)/(3a-4) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2-1)/(a(3a-4)) \end{array}\right] \xrightarrow{a=2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

Svaret kontrolleres ved at substituere t med $\frac{3}{4}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6t-1 \\ 2t+\frac{3}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \cdot \frac{3}{4} - 1 \\ 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Da ligningen går op har vi at figur 1 kan bruges til at finde løsninger når a = 2. Altså er figur 1 også defineret for $a \in 2$.

1.3 c

(c) Løs ligningssystemet når $a = 4/3$. Kan den rækkereducerede totalmatrix i (1) bruges til at finde de løsninger der eventuelt måtte være når $a = 4/3$?

a indsættes i ligningssystemet efter rækkeoperationerene fra opgave a er fortaget. Disse operationer er nemlig defineret for a $= \frac{4}{3}$.

$$\mathbf{M} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} - \frac{1}{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{18} \end{array}\right]$$

Det ses her at rank A $= 2 < 3 =$ rank M, hvilket i henhold til Theorem 1.3 betyder at M er inkonsekvent. Det ses også at figur 1 ikke er defineret for $a = \frac{4}{3}$ da $3a - 4 = 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 0$ og vi kan ikke have 0-division.

1.4 d

(d) Antag, at $a = 1$. Bestem den inverse matrix til koefficientmatricen $\mathbf{A}$ for ligningssystemet ved at bruge COMPUTATION p. 78 i lærebogen, og bestem herved samtlige løsninger til

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

A indsættes i koefficientmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ a & a & 4a \\ a & 2 & 2a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{a=2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi starter med at bestemme den inverse til A: A^{-1}:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I_3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3]{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{-\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Hermed har vi bestemt den inverse til A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denne kan endvidere anvendes til at løse ligningsystemet:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dermed fås løsningen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2

2.1 a

Det oplyses, at en ukendt 3×3 matrix $\mathbf{A}$, hvori der indgår en parameter $a \neq 0$ ved rækkeoperationerne ero_1, ero_2, ero_3 og ero_4 i denne rækkefølge kan omformes til enhedsmatricen.

ero_1: $2a\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ ($2a$ gange første række lægges til anden række),
ero_2: $3\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ (tredje række ganges med 3),
ero_3: $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$ (første og anden række ombyttes),
ero_4: $5/a\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1$ ($5/a$ gange tredje række lægges til første række).

(a) Bestem for hvert $i = 1,2,3,4$ den elementære matrix $\mathbf{E}_i$, som svarer til rækkeoperationen ero_i.

Argumentér for, at et af matrixprodukterne

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1,\ \mathbf{A}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4,\ \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{A} \text{ eller } \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$$

må være enhedsmatricen. Hvilket er der tale om? Angiv endnu et blandt disse fire produkter der giver enhedsmatricen.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Det er opgivet i opgaven at rækkeoperationerne ero1, ero2, ero3 og ero4 i denne rækkefølge kan omforme A til enhedsmatricen. Altså at $E_4E_3E_2E_1A$ må være enhedsmatricen.
Siden A er en 3x3 matrix må det altså gælde at: $X = E_4E_3E_2E_1$ er den inverse til A. Det gælder at: $XA = AX = I_3$
Hvilket betyder $AE_4E_3E_2E_1$ også giver enhedsmatricen.

2.2 b

(b) Bestem for hvert $i = 1,2,3,4$ den elementære matrix $\mathbf{E}_i^{-1}$ og brug disse til at bestemme $\mathbf{A}$.

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De inverse elementære matricer anvendes til at finde A:

$$A^{-1} = E_4E_3E_2E_1 \Rightarrow$$
$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} \Rightarrow$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.3 c

(c) Lad **X** være den 2×3 matrix hvis første hhv. anden række er række 1 hhv. række 2 i matricen $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ og sæt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis, at **X** er en venstre-invers til **B**.

Bestem endvidere alle venstre-inverser til **B**.

Har matricen **B** også en højre-invers?

Vi starter med at beregne X:

$$E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(E_4E_3)E_2E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{5}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(E_4E_3E_2)E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{15}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix} 2a & 1 & -\frac{15}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2a & 1 & -\frac{15}{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der kontrolleres om X er en venstre-invers til b:

$$XB = \begin{bmatrix} 2a & 1 & -\frac{15}{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da $XB = I_2$ kan det konstateres at X er en venstre-invers til B.
Find endvidere alle venstre-inverser til B. Vi tager udgangspunkt i den ukendte venstre invers X og matricen B

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For at finde venstre inversen til B skal følgende være opfyldt $XB = I_2$. Der opstilles en total matrice for følgende ligning:

$$XB = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2ax_2 \\ x_5 & x_4 - 2ax_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Såfremt at X er venstre invers til B, kan der opstilles følgende totalmatrice:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har hermed fundet alle venstre inverser til B:

$$\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der kontrolleres:

$$XB = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at X ikke er en højre invers til B da hverken $r = m$ eller $m \leq n$ gælder.

3

3.1 a

(a) Bestem nabomatricen (eng. *adjacency matrix*) $\mathbf{N}$ for denne orienterede graf.

Angiv antallet af veje fra knude 4 til knude 5 af længde netop 6.

Vink: det oplyses, at

$$\mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nabomatricen for grafen:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Antal veje fra knude 4 til knude 5 af længde 6:

$$N^3 \cdot N^3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 14 & 23 & 9 & 14 \\ 14 & 11 & 9 & 9 & 5 \\ 9 & 9 & 11 & 5 & 9 \\ 32 & 23 & 28 & 16 & 18 \\ 14 & 14 & 14 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Der aflæses i række 4 kolonne 5 af grafen N^3, og konstateres at der er 18 veje fra knude 3 til knude 5 af længde 6.

3.2 b

Vi tænker os nu, at grafen repræsenterer et web med 5 sider. De næste spørgsmål vedrører begreber defineret i dokumentet *"Google's page ranking"*.

(b) Opskriv linkmatricen $\mathbf{A}$ for grafen ovenfor.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 c

(c) Bestem en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som opfylder ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ og foretag på grundlag af dette en rangordning af siderne i webbet.

De to matricer opskrives:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Totalmatricen opskrives for $Ax = x \Rightarrow Ax - x = 0$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Der udføres rækkeoperationer indtil matricen står på reduceret echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ -\frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{6}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ -\frac{2}{3}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\frac{1}{6}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{12} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{18}{17}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{12} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{5}{9}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\frac{7}{18}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{17} & -\frac{15}{17} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{17}{8}\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{17} & -\frac{15}{17} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{8}{17}\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5 \\ \frac{6}{17}\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi får følgende løsninger til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{15}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser da at rangordningen på siderne er som følger (opgivet fra vigtigst til mindst vigtig):
side 1 (x_1), side 4 (x_4), side 2 (x_2), side 3 (x_3), side 5 (x_5)
Det bemærkes dog at side 2 og 3 har samme vigtighed.

4

Functions from BasicExtensions.py:
Der oprettes en hjælpe funktion som, tager et array som input og retturnere summen.

```
def _sum(input):
    sum = 0
    for i in input:
        sum = sum + i
    return sum
```

Det i'te element i j'te række bliver ganget med det i'te element i vektoren, hvorefter værdien tilføjes til lst. For hver række (j) bliver lst sammensat med array. I miljø 1 udenfor for-loopsene returneres array som en vektor.

```
def MatVecProduct(A: Matrix, v: Vector) -> Vector:
    array = []
    for j in range(0, len(A.Column(0))):
        lst = []
        for i in range (0, (len(A.Row(0)))):
            lst.append(A.Row(j)[i] * v[i])
        array.append(_sum(lst))
    return(Vector.fromArray(array))
```

Funktionen modtager to matricer A og B af dimension n x m og m x p som argument. Der oprettes en n x p matrice hvor alle elementer er lig 0. Element (k,j) bliver sat til at være summen af elmLst. elmLst består af alle elemter i række k i A-matricen ganget med alle elementer i kolonne j i B-matricen.

```

def MatrixProduct(A: Matrix, B: Matrix) -> Matrix:
    Arow = A.M_Rows
    Acol = A.N_Cols
    Bcol = B.N_Cols
    result = Matrix( Arow, Bcol )
    #Iterate over rows
    for k in range (0, Arow):
        #Iterate over columns / through rows
        for j in range (0, Bcol):
            elmLst = []
            #Calculate element
            for i in range (0, Acol):
                elmLst.append(A.__getitem__((k,i)) * B.__getitem__((
                    i,j)))
            result.__setitem__((k,j), _sum(elmLst))
    return result
```

Funktionen modtager en matrice A af dimension n x m som argument. Der oprettes en 0-matrix af dimension m x n. For hvert element (i,j) i A bliver elementet tilføjet på plads (j,i) i den nye matrix.

```
def Transpose(A: Matrix) -> Matrix:
    n = A.M_Rows
    m = A.N_Cols
    result = Matrix( m, n )
    for j in range (0, A.M_Rows):
        for i in range(0, A.N_Cols):
            result.__setitem__((i, j), A.__getitem__((j,i)))
    return(result)
```

For-loopet går igennem vektoren og tilføjer hvert element i anden potens til lst. Derfra returneres kvadratroden af summen af lst.

```
def VectorNorm(v: Vector) -> float:
    lst = []
    for i in range (0, v.__len__()):
        lst.append((v[i]) ** 2)
    return(math.sqrt(_sum(lst)))
```