Forelæsning 8: Ortogonalt komplement, ortogonal projektion og Gram–Schmidt processen

LinAlgDat 2022/2023

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Ortogonalt komplement

Definition 4.10 (Ortogonale underrum)

To underrum $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ af $\mathbb{R}^n$ kaldes ortogonale hvis enhver vektor i $\mathcal{U}$ er ortogonal på enhver vektor i $\mathcal{V}$, dvs. hvis

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \qquad \text{for alle} \qquad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \ \text{ og } \ \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

I dette tilfælde skriver man $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$.

Eksempel (Ortogonale underrum)

Følgende to underrum $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ af $\mathbb{R}^3$ er ortogonale:

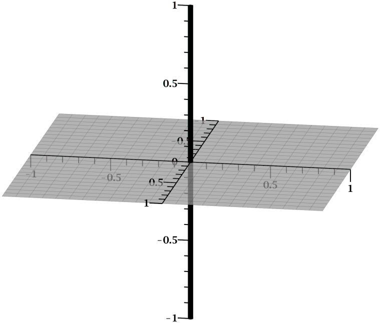
- $\mathcal{U} = x_1x_2$-planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \left\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\mathcal{V} =$ linien med retningsvektor $(0, 0, 1)$, altså x_3-aksen:

$$\mathcal{V} = \left\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Fordi for alle $\mathbf{u} = (x_1, x_2, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (0, 0, t) \in \mathcal{V}$ gælder $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.



Eksempel (Underrum som *ikke* er ortogonale)

Følgende to underrum $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ af $\mathbb{R}^3$ er *ikke* ortogonale:

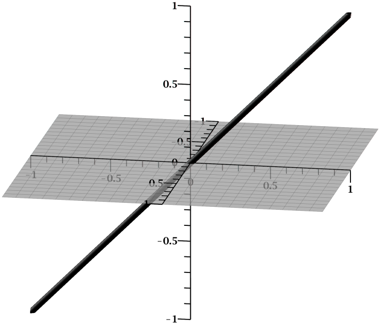
- $\mathcal{U} = x_1x_2$-planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \left\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\mathcal{V} =$ linien med retningsvektor $(0, 1, 1)$, dvs.

$$\mathcal{V} = \left\{(0, t, t) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Fordi fx er $\mathbf{u} = (0, 1, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (0, 1, 1) \in \mathcal{V}$ men $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1 \neq 0$.



Eksempel (Underrum som *ikke* er ortogonale)

Følgende to underrum $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ af $\mathbb{R}^3$ er *ikke* ortogonale:

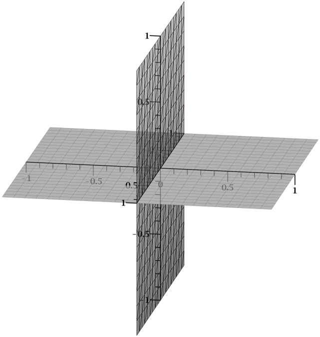
- $\mathcal{U} = x_1 x_2$-planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \left\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\mathcal{V} = x_1 x_3$-planen, dvs.

$$\mathcal{V} = \left\{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

Fordi fx er $\mathbf{u} = (1, 0, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (1, 0, 0) \in \mathcal{V}$ men $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1 \neq 0$.



Theorem 4.8 (Ortogonalitet af "span-underrum")

Lad $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ og $\mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ være underrum af $\mathbb{R}^n$. Da gælder $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$ netop hvis

$$\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{v}_j = 0 \qquad \text{for alle} \qquad i = 1, \ldots, p \;\text{ og }\; j = 1, \ldots, q.$$

I ord: For at checke ortogonalitet af to underrum, er det nok at checke om de to frembringersæt er ortogonale på hinanden.

Eksempel (Ortogonale “span-underrum”) 1/2

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sidste uge lærte vi at bestemme baser for diverse typer af underrum:

En basis for $\operatorname{null}\mathbf{A}$ er: $\quad \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En basis for $\operatorname{row}\mathbf{A}$ er: $\quad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Eksempel (Ortogonale "span-underrum") 2/2

Specielt gælder altså:

$$\operatorname{null}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \operatorname{row}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\operatorname{null}\mathbf{A} \perp \operatorname{row}\mathbf{A}\,.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \bullet \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \bullet \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \bullet \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{c}_3 = 0\,.$$

Og det checkes let; fx er

$$\mathbf{b}_1 \bullet \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Eksemplet illustrerer følgende generelle fænomen:

Ortogonalitet af nulrum og rækkerum

For enhver $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ gælder

$$\operatorname{null} \mathbf{A} \perp \operatorname{row} \mathbf{A} \,.$$

Det følger, at

$$\operatorname{null} \mathbf{A} \perp \operatorname{col} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \quad \text{og} \quad \operatorname{null} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \perp \operatorname{col} \mathbf{A} \,.$$

Definition 4.11 (Ortogonalt komplement)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Det ortogonale komplement $\mathcal{U}^\perp$ til $\mathcal{U}$ består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i $\mathcal{U}$, dvs

$$\mathcal{U}^\perp = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \right\} .$$

Thm. 4.9 (Egenskaber ved ortogonalt komplement)

For ethvert underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^n$ gælder:

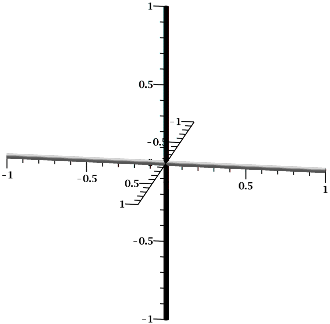
- $\mathcal{U}^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$.
- $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.

Eksempel (Ortogonalt komplement)

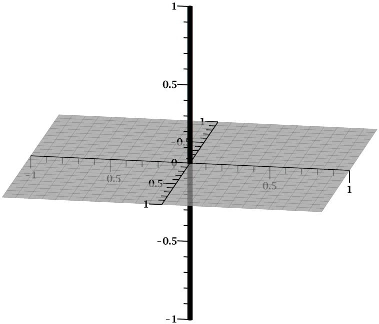
Betragt følgende tre underrum $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ og $\mathcal{W}$ af $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{(0,0,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\} && (x_3\text{-aksen})\\
\mathcal{V} &= \{(0,x_2,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} && (x_2\text{-aksen})\\
\mathcal{W} &= \{(x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} && (x_1x_2\text{-planen})
\end{aligned}$$

Da gælder: $\mathcal{V} \perp \mathcal{U}$ men $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$ og $\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$.



$\mathcal{V} \perp \mathcal{U}$ men $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$



$\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$

Vi har set, at der for enhver matrix **A** gælder:

$$\operatorname{null}\mathbf{A} \perp \operatorname{row}\mathbf{A} \qquad [\text{ og derfor vil } \operatorname{null}\mathbf{A} \subseteq (\operatorname{row}\mathbf{A})^{\perp}\,]$$

Theorem 4.10 (Formler for ortogonale komplementer)

For enhver matrix **A** gælder

$$(\operatorname{row}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{null}\mathbf{A}\,.$$

Det følger, at

$$(\operatorname{col}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

$$(\operatorname{null}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{row}\mathbf{A}$$

Bemærkning. For enhver $m \times n$ matrix **A** gælder

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} + \operatorname{nullity}\mathbf{A} = n \quad \text{dvs.} \quad \dim\big(\operatorname{row}\mathbf{A}\big) + \dim\big((\operatorname{row}\mathbf{A})^{\perp}\big) = n\,.$$

Vi skal senere se, at der for ethvert underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^n$ gælder

$$\dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{U}^{\perp} = n\,.$$

Eksempel (Basis for ortogonalt komplement) 1/2

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter først rækkerummet:

$$\mathcal{U} = \operatorname{row} \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^5 .$$

Vi har en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{U}^\perp = (\operatorname{row} \mathbf{A})^\perp \overset{!}{=} \operatorname{null} \mathbf{A} .$$

Vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

En basis for $\mathcal{U}^\perp$ er: $\qquad \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Eksempel (Basis for ortogonalt komplement) 2/2

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \operatorname{col} \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4 .$$

Vi har igen en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{V}^\perp = (\operatorname{col} \mathbf{A})^\perp \overset{!}{=} \operatorname{null} \mathbf{A}^\mathsf{T} .$$

Udregningen

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}-\text{Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

$$\text{En basis for } \mathcal{V}^\perp \text{ er:} \qquad \mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Theorem 4.11 (Dimension af ortogonalt komplement)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Så gælder:

$$\dim \mathcal{U}^\perp = n - \dim \mathcal{U}\,.$$

Ydermere gælder, at hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \text{ er en basis for } \mathcal{U}$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ er en basis for } \mathcal{U}^\perp \qquad (\text{hvor } \ell = n - k)$$

da er

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ en basis for } \mathbb{R}^n.$$

I ord: Hvis man samler baserne for $\mathcal{U}$ og $\mathcal{U}^\perp$ så fås en basis for $\mathbb{R}^n$.

Eksempel (Baser for ortogonale komplementer) 1/2

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi har fundet:

En basis for null $\mathbf{A}$ er: $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En basis for row $\mathbf{A}$ er: $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Eksempel (Baser for ortogonale komplementer) 2/2

Da null $\mathbf{A}$ og row $\mathbf{A}$ er hinandens ortogonale komplementer vil

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

ifølge Theorem 4.10 være en basis for $\mathbb{R}^5$.

Check:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}-\text{Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_5$$

Ortogonal projektion

Vi kender: Ortogonal projektion på et 1-dimensionalt underrum:

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} \qquad \text{hvor} \qquad \mathcal{U} = \mathrm{span}\{\mathbf{u}\}\,.$$

Vi skal lære om: Ortogonal projektion på et generelt underrum $\mathcal{U}$.

Definition 4.12 (Ortogonal projektion – generelt)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og antag at vi kender en ortogonal basis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ for $\mathcal{U}$. For enhver vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres nu:

- Den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k \quad (\in \mathcal{U})$$

- Komponenten af $\mathbf{v}$ ortogonal på $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \quad (\in \mathcal{U}^{\perp})$$

- Spejlingen af $\mathbf{v}$ i $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2\,\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

(Faktisk er spejlingen ikke defineret i lærebogen.)

Pointe: $\mathbf{v} = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ og $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Bemærkning. Hvis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{U}$ så er

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Eksempel (Ortogonal projektion på en plan)

Betragt følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Da $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en ortogonal basis for $\mathcal{U}$ er:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

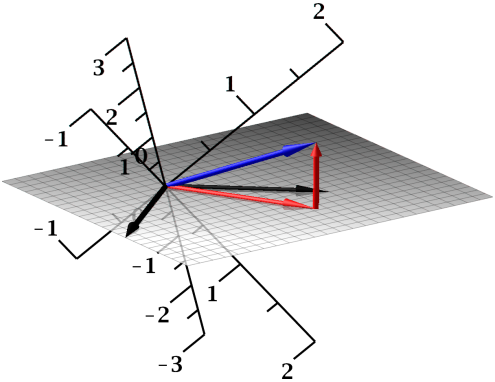
$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Check:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Illustration af eksemplet

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \operatorname{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Af illustrationen ovenfor fremgår, at $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ er den vektor i $\mathcal{U}$ som ligger tættest på (og derfor bedst tilnærmer) $\mathbf{v}$. Mere præcist:

Theorem 4.13 (Projektion som bedste tilnærmelse)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. For $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder uligheden

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})\|$$

for enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ som er forskellig fra $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Projektionsmatricen

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Det er geometrisk klart, at

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(-)\,,\ \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(-)\,,\ \mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(-)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

er lineære transformationer. Derfor findes $n \times n$ matricer

- **P** – projektionsmatricen for $\mathcal{U}$
- **C** – komponentmatricen for $\mathcal{U}$
- **R** – spejlingsmatricen for $\mathcal{U}$

som for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ opfylder:

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{Pv} \\ \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{Cv} \\ \mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{Rv} \end{aligned}$$

Spørgsmål. *Hvordan ser matricerne* **P**, **C** *og* **R** *ud?*

Formel for projektionsmatricen

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og antag at vi kender en orto**nor**mal basis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ for $\mathcal{U}$. Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_k)$$

Matricerne

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ \mathbf{R} &= 2\mathbf{P} - \mathbf{I} \end{aligned}$$

(hvor $\mathbf{I}$ er $n \times n$ enhendsmatricen) opfylder:

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{P}\mathbf{v} \\ \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{C}\mathbf{v} \\ \mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{R}\mathbf{v} \end{aligned}$$

for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix) 1/2

Vi har tidligere set, at vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

udgør en ortogonal basis for underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af $\mathbb{R}^3$.

Derfor vil de normerede vektorer

$$\mathbf{u}_1' = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.41 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \quad \text{og}$$

$$\mathbf{u}_2' = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

udgøre en ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix) 2/2

Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}_1' \mid \mathbf{u}_2') \simeq \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ for underrummet $\mathcal{U}$ er nu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.41 & -0.41 & 0.82 \\ 0.71 & 0.71 & 0.00 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

For vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(gen)finder vi

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathcal{U}$ er af en bestemt type, fx $\operatorname{row} \mathbf{A}$, $\operatorname{col} \mathbf{A}$ eller $\operatorname{null} \mathbf{A}$, så har vi lært af bestemme en basis for $\mathcal{U}$.

For at beregne ortogonale projektioner på $\mathcal{U}$ skal man bruge en ortonormal basis (eller en ortogonal basis) for $\mathcal{U}$.

Spørgsmål. Givet en (almindelig) basis for $\mathcal{U}$, er der så en metode til at konstruere en ortonormal basis for $\mathcal{U}$?

Svar. Ja! Brug Gram–Schmidt processen.

Algoritme (4.52): Gram–Schmidt processen

Lad $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ være lineært uafhængige vektorer, og dermed en basis for underrummet $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Definér vektorerne:

Normering af vektoren:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \qquad \mathbf{u}_1$$

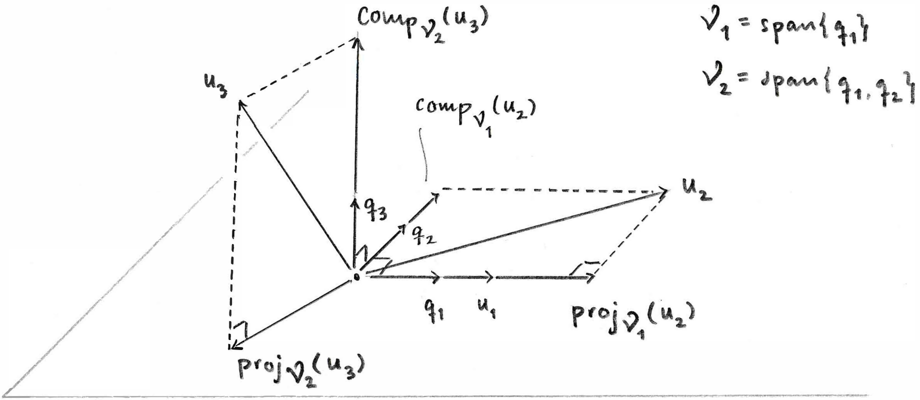
$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} \qquad \mathrm{comp}_{\mathrm{span}\{\mathbf{q}_1\}}(\mathbf{u}_2)$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} \qquad \mathrm{comp}_{\mathrm{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}}(\mathbf{u}_3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Da er $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ en ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

Illustration af Gram–Schmidt processen



Eksempel (Gram–Schmidt processen) 1/3

Betragt de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen giver:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner nu

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2' &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eksempel (Gram–Schmidt processen) 2/3

Dermed er

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2'}{\|\mathbf{q}_2'\|} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Endelig beregnes

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3' &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} - \left\{\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \left\{\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{\|\mathbf{q}_3'\|} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Eksempel (Gram–Schmidt processen) 3/3

Vi konkluderer, at

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormal basis for underrummet

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bemærkning. Eksemplet viser hvordan Gram–Schmidt processen fungerer i praksis. Men faktisk er $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ hele $\mathbb{R}^3$, så

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en simplere ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

QR-faktorisering

Ved at holde lidt nøjere regnskab med hvad der foregår i Gram–Schmidt processen kan man opnå følgende:

QR-faktorisering

Lad $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \cdots | \mathbf{u}_n)$ være en $m \times n$ matrix med $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$.
Brug Gram–Schmidt på søjlerne i $\mathbf{A}$ og definér tallene r_{ij} som følger:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1}{r_{22}}$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2}{r_{33}}$$

$$\vdots$$

Dvs.

$$r_{ij} = \mathbf{q}_i \bullet \mathbf{u}_j \quad \text{for} \quad i < j$$

$$r_{jj} = \|\mathbf{u}_j - r_{1j}\mathbf{q}_1 - r_{2j}\mathbf{q}_2 - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}\| =: \|\mathbf{q}_j'\|.$$

QR-faktorisering (fortsat)

Da opnås følgende QR-faktorisering af $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \underbrace{\left(\mathbf{q}_1 \middle| \mathbf{q}_2 \middle| \cdots \middle| \mathbf{q}_n\right)}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

hvor

- $\mathbf{Q}$ er en $m \times n$ matrix med ortonormale søjler, og
- $\mathbf{R}$ er en invertibel $n \times n$ øvre trekantsmatrix.

Ved løsning af problemer som kræver lineær algebra kan det, i datalogiske sammenhænge, være ganske tidsbesparende at lave QR-faktoriseringer af de involverede matricer.

Eksempel (QR-faktorisering) 1/2

Betragt 4×3 matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner (linje for linje):

$$r_{11} = \|\mathbf{u}_1\| \simeq 11.22 \qquad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \simeq \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2 \simeq 12.83 \qquad \mathbf{q}_2' = \mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 \simeq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.57 \\ 0.14 \\ -0.29 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{q}_2'\| \simeq 1.20 \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2'}{r_{22}} \simeq \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.48 \\ 0.12 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

Eksempel (QR-faktorisering) 2/2

$$r_{13} = \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_3 \simeq 13.63 \qquad \mathbf{q}_3' = \mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.20 \\ 0.10 \\ 0.40 \\ -0.30 \end{pmatrix}$$
$$r_{23} = \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{u}_3 \simeq 2.63$$

$$r_{33} = \|\mathbf{q}_3'\| \simeq 0.55 \qquad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{r_{33}} \simeq \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.18 \\ 0.73 \\ -0.55 \end{pmatrix}.$$

Vi har nu

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \left(\mathbf{q}_1 \middle| \mathbf{q}_2 \middle| \mathbf{q}_3\right) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.84 & -0.37 \\ 0.27 & 0.48 & 0.18 \\ 0.53 & 0.12 & 0.73 \\ 0.80 & -0.24 & -0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11.22 & 12.83 & 13.63 \\ 0 & 1.20 & 2.63 \\ 0 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

Mindste kvadraters metode

For $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor $\mathbf{x}$ som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b})\,.$$

For $\bar{\mathbf{x}}$ gælder altså

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathrm{col}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b}) \;=\; \mathrm{comp}_{\mathrm{col}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b}) \;\in\; (\mathrm{col}\,\mathbf{A})^{\perp} \;=\; \mathrm{null}\,\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

og dermed er

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}\,.$$

Den søgte vektor $\bar{\mathbf{x}}$ tilfredsstiller altså følgende ligningssystem:

Normalligningerne (*Normal equations*)

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$$

Men kan normalligningerne overhovedet løses?

Normalligningerne (*Normal equations*)

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$$

I det oprindelige inkonsistente ligningsystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{(hvor } \mathbf{A} \text{ er en } m \times n \text{ matrix)}$$

er der typisk flere ligninger end ubekendte ($m > n$) og $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$.

Theorem 4.16(a) (Løsning af normalligningerne)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Hvis $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ så er $n \times n$ matricen $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ invertibel og derfor har normalligningerne

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$$

den entydigt bestemte løsning

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}\,.$$

Dette $\bar{\mathbf{x}}$ kaldes mindste kvadraters løsning.

Vi opsummerer:

Mindste kvadraters metode (eller lineær regression)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix med $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$. Den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er mindste kvadraters løsning, dvs.

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}\,.$$

Bemærkning. Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix med $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$. Vi har

$$\operatorname{proj}_{\operatorname{col} \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

og derfor er

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$$

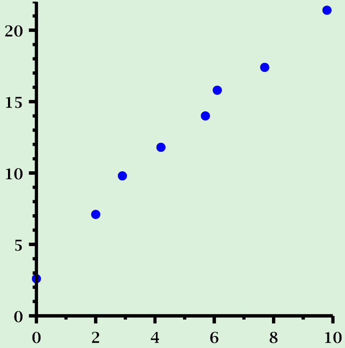
projektionsmatricen for underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{col} \mathbf{A}$.

(Hvis $\mathbf{A}$ er ortogonal, så er $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ og vi genfinder formlen $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$)

Eksempel (Mindste kvadraters metode) 1/3

Vi har givet følgende målepunkter:

x	0.0	2.0	2.9	4.2	5.7	6.1	7.7	9.8
y	2.6	7.1	9.8	11.8	14.0	15.8	17.4	21.4



Vi vil finde den bedste rette linie $y = ax + b$ gennem målepunkterne.

Eksempel (Mindste kvadraters metode) 2/3

Vi skal altså finde den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet:

$$\begin{cases} a \cdot 0.0 + b = 2.6 \\ a \cdot 2.0 + b = 7.1 \\ a \cdot 2.9 + b = 9.8 \\ a \cdot 4.2 + b = 11.8 \\ a \cdot 5.7 + b = 14.0 \\ a \cdot 6.1 + b = 15.8 \\ a \cdot 7.7 + b = 17.4 \\ a \cdot 9.8 + b = 21.4 \end{cases} \qquad \text{dvs.} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 2.9 & 1 \\ 4.2 & 1 \\ 5.7 & 1 \\ 6.1 & 1 \\ 7.7 & 1 \\ 9.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Mindste kvadraters metode) 3/3

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 255.08 & 38.40 \\ 38.40 & 8.00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & 2.9 & 4.2 & 5.7 & 6.1 & 7.7 & 9.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1.873 \\ 3.497 \end{pmatrix}.$$

Og den bedste rette linie gennem målepunkterne er derfor

$$y = \bar{a}x + \bar{b} = 1.873x + 3.497$$