

LinDatAlg - Projekt C

Alexander Husted - wqg382@alumni.ku.dk - Hold 13

20. juli 2023

Indhold

1		2
1.1	a	2
1.2	b	3
1.3	c	3
1.4	d	4
1.5	e	5
2		6
2.1	a	6
2.2	b	7
2.3	c	8
2.4	d	9
2.5	e	10
3		11
3.1	a	11
3.2	b	12
3.3	c	13

1

1.1 a

Opgave 1 (25%)

Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & -6 & -13 \\ -4 & 12 & -16 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en QR-faktorisering af \mathbf{A} .Lad $\mathcal{U} = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$. Herfra anvendes gram-schmidt til at finde den ortogonale basis for \mathcal{U} :

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Vi beregner nu:

$$q'_2 = u_2 - (u_2 \cdot q_1)q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi:

$$q_2 = \frac{q'_2}{\|q'_2\|} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Endelig beregnes:

$$\begin{aligned} q'_3 &= u_3 - (u_3 \cdot q_1)q_1 - (u_3 \cdot q_2)q_2 = \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -15 \\ -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dermed har vi:

$$q_3 = \frac{q'_3}{\|q'_3\|} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -15 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Herved fås matricen:

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Vi har at:

$$Q^T = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Herved kan vi finde R, ved at indsætte på formen $Q^T A = R$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & -6 & -13 \\ -4 & 12 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

1.2 b

Betragt nu underrummet (hyperplanen) $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^4$ udspændt af søjlerne i matricen **A**.

(b) Bestem projektionsmatricen **P** for underrummet \mathcal{U} .

Det gælder at projektionsmatricen er givet ved $P = QQ^T$, her anvendes Q fra opgave 1.a:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{49} & -\frac{16}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{4}{49} \\ -\frac{16}{49} & \frac{33}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{4}{49} \\ -\frac{16}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{33}{49} & \frac{4}{49} \\ \frac{4}{49} & \frac{4}{49} & \frac{4}{49} & \frac{48}{49} \end{bmatrix}$$

1.3 c

(c) Betragt vektoren $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^4$.

Bestem den ortogonale projektion af \mathbf{x} på underrummet \mathcal{U} .

Bestem spejlingen af \mathbf{x} i underrummet \mathcal{U} .

$$Proj_{\mathcal{U}}(v) = \frac{v \cdot u_1}{\|u_1\|} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{\|u_2\|} u_2 + \frac{v \cdot u_3}{\|u_3\|} u_3 =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}}{\left(\sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2}\right)^2} \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}}{\left(\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2}\right)^2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{5}{7}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ \frac{12}{49} \end{bmatrix}$$

Herved har vi at den ortogonale projektion af \mathbf{x} på underrummet \mathcal{U} er:

$$Proj_{\mathcal{U}}(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ \frac{12}{49} \end{bmatrix}$$

Spejlingen af \mathbf{v} i \mathcal{U} er givet ved:

$$refl_{\mathcal{U}} = 2 \cdot proj_{\mathcal{U}}(v) - v \Rightarrow$$

$$refl_{\mathcal{U}} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ -\frac{1}{49} \\ \frac{12}{49} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{47}{49} \\ -\frac{47}{49} \\ -\frac{47}{49} \\ \frac{24}{49} \end{bmatrix}$$

1.4 d

(d) Bestem en ortonormal basis for underrummet \mathcal{U}^\perp (det ortogonale komplement til \mathcal{U}).

Det gælder fra Theorem 4.10 at:

$$(\text{col}A)^\perp = \text{null}A^T$$

Herfra beregnes:

$$A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 8 & -6 & 12 \\ 1 & 8 & -13 & -16 \end{bmatrix}$$

For at finde nulrummet af A^T sættes den på reduceret række-echelonform.

1. $r_1 = -\frac{r_1}{5}$
2. $r_2 = r_2 - r_1$
3. $r_3 = r_3 - r_1$
4. $r_2 = \frac{5r_2}{42}$
5. $r_1 = r_1 + \frac{2r_2}{5}$
6. $r_3 = r_3 - \frac{42r_2}{5}$
7. $r_3 = -\frac{r_3}{7}$
8. $r_1 = r_1 + \frac{2r_3}{3}$
9. $r_2 = r_2 + \frac{2r_3}{3}$

Hvilket giver matricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hermed fås løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså har vi følgende ortogonale komplement til \mathcal{U} :

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.5 e

Lad $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \mathbf{q}_3)$ være Q-matricen i QR-faktoriseringen fra delspørgsmål (a) og lad $\{\mathbf{q}_4\}$ være den ortonormale basis for underrummet \mathcal{U}^\perp fundet i delspørgsmål (d). Betragt så matricen

$$\mathbf{B} = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \mathbf{q}_3 | \mathbf{q}_4) \quad \text{samt vektoren} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

(e) Bestem \mathbf{B}^{-1} , altså den inverse til matricen \mathbf{B} .

Bestem $\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|$, altså normen af vektoren $\mathbf{B}\mathbf{v}$.

(Vink: Man behøver ikke at regne ret meget.)

Bestem den inverse af \mathbf{B}

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -4 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -4 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -4 \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Vi kontrollere om matricen er ortogonal, med henhold til definition 4.9. Hvis dette er tilfældet gælder det at $B^{-1} = B^T$:

$$B^T = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -4 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså har vi at:

$$B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -4 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem normen af $\mathbf{B}\mathbf{v}$

Da vi nu ved at vi har med en ortogonal matrix at gøre kan Theorem 4.7 anvendes til at finde $\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|$

$$\|\mathbf{B}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2 + \sqrt{7}^2 + \sqrt{11}^2} = \sqrt{25} = 5$$

2

2.1 a

Lad A være matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem samtlige egenverdier for A og indtegn dem i den komplekse plan.

For at finde egenverdierne skal man bruge det karakteristiske polynomium fra definition 6.2:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) \Rightarrow$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

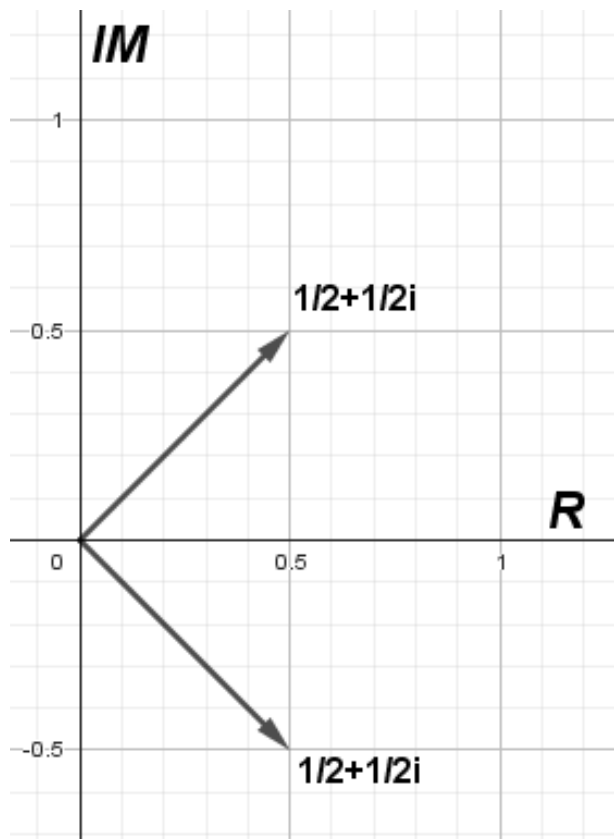
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}$$

Herfra løses den karakteristiske ligning:

$$p(\lambda) = 0$$

Formelen for andengradsligninger anvendes:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 \pm i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \end{cases}$$



2.2 b

(b) Bestem for hver egen værdi λ det tilhørende egenrum E_λ .

Vi starter med at bestemme egenrummet for λ_1

$$(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow$$

$$(A - \frac{1}{2} + i\frac{1}{2})x = 0$$

Dette er det samme som:

$$\text{null}(A - \frac{1}{2} + i\frac{1}{2})$$

Vi stater med at bringe totalmatricen på reduceret rækkeechelonform

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$1. \ r_1 = 2ir_1$$

$$2. \ r_2 = r_2 + \frac{r_1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Herved fås løsningen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Herved har vi at egenrummet til egen værdien λ_1 er $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

Egen værdien for λ_2 udregnes i Maple og er $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

2.3 c

(c) Bestem komplekse tal α og β som opfylder:

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Totalmatricen opstilles med egenrummene på venstresiden og vektoren \mathbf{v} på højresiden.

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

1. $r_1 = -ir_1$
2. $r_2 = r_2 - r_1$
3. $r_2 = \frac{r_2}{2}$
4. $r_1 = r_1 + r_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

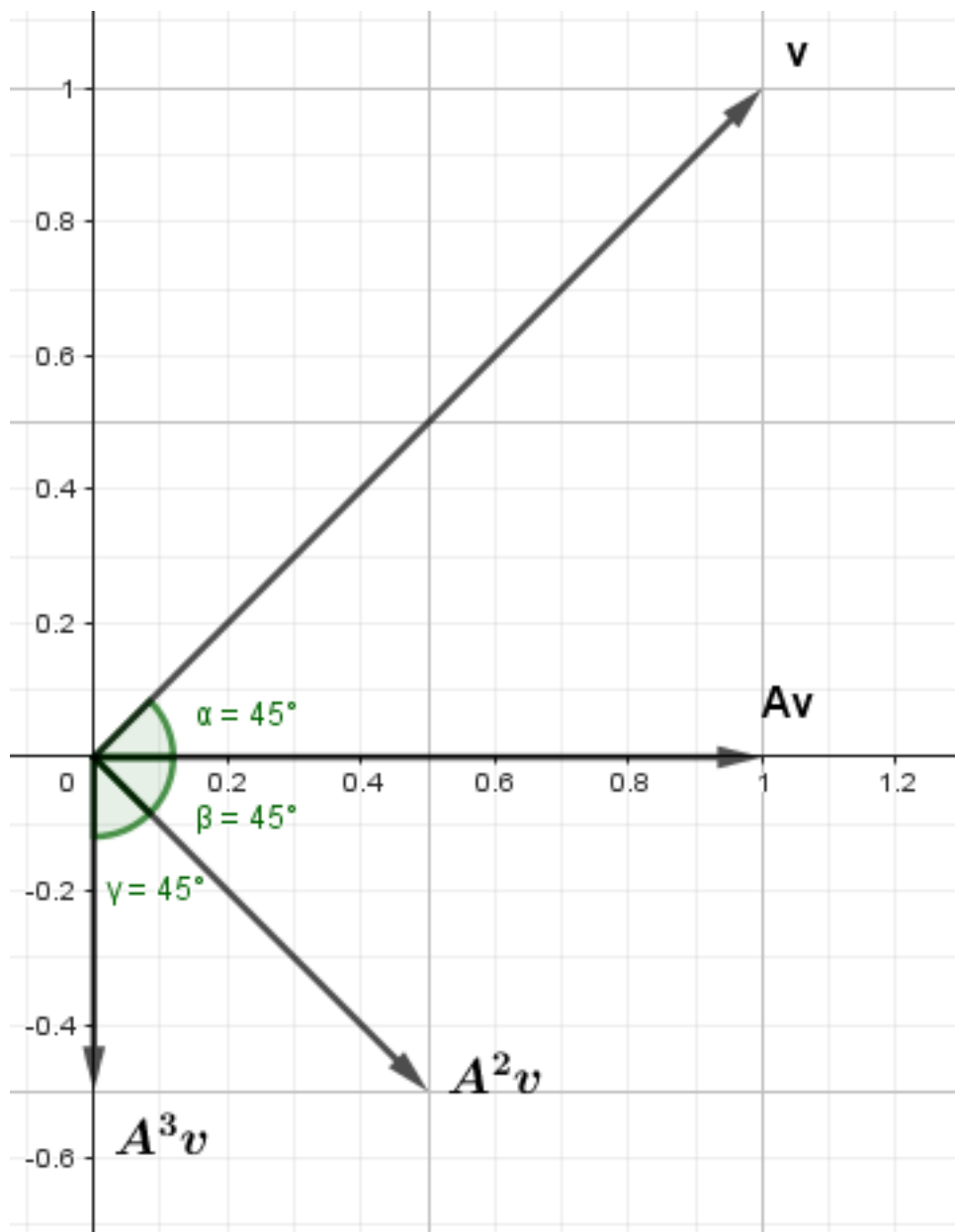
Altså har vi:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

2.4 d

(d) Skitsér vektorerne v , Av , A^2v og A^3v i XY -planen.

Hvilken vinkel synes der at være mellem v og Av , mellem Av og A^2v , og mellem A^2v og A^3v ?



2.5 e

(c) Brug (c) til at vise, at der for et vilkårligt $k \in \mathbb{Z}$ gælder:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{v} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{k-1}} \begin{pmatrix} \sin((k+1)\pi/4) \\ \cos((k+1)\pi/4) \end{pmatrix}.$$

[Vink: Vis formelen:

$$\left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} = \cos((k+1)\pi/4) \pm i \sin((k+1)\pi/4)$$

ved at bruge Theorem 8.4 i lærebogen og benyt den senere i udregningen!]

Vi starter med at vise formelen. Vi har at polarformen af $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ er:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Det gælder ifølge Theorem 8.4 at:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{k+1} = \cos\left((k+1)\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left((k+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

Altså må det gælde at:

$$\left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} = \cos\left((k+1)\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left((k+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

Nu hvor formelen er vist kan opgaven løses:

$$A^k v = \alpha A^k \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \beta A^k \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det gælder at $A^k v = \lambda^k v$ og vi viste i opgave c at $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$:

$$A^k v = \alpha \lambda_1^k \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \lambda_2^k \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^k v = \lambda_1^{k+1} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2^{k+1} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ omskrives til polarform. Hvorfra vi får: $\lambda_1 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{(2)}}$ og $\lambda_2 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{(2)}}$

$$A^k v = \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^k v = \frac{\cos((k+1)\frac{\pi}{4}) + i\sin((k+1)\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}^k} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\cos((k+1)\frac{\pi}{4}) - i\sin((k+1)\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}^k} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^k v = \frac{1}{(\sqrt{2})^{k-1}} \begin{bmatrix} \sin(k+1)\frac{\pi}{4} \\ \cos(k+1)\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

3

3.1 a

- (a) Benyt mindste kvadraters metode (eng: *method of least squares*) til at bestemme forskriften for den bedste rette linie, $\ln y \simeq at + b$, gennem punkterne $(t, \ln y)$ fra TABEL 2.

(Vink: Se §4.4.1 Example 4 i lærebogen. Det er i orden at benytte fx en af funktionerne fra Projekt A til matrixmultiplikation.)

Den stiplede graf på FIGUR 2 er grafen for den lineære funktion $t \mapsto at + b$, hvor a og b er de konstanter, som er bestemt ovenfor.

Vi tager værdierne i tabel 2 og indsætter i ligningen $\ln(y) = at + b$ og får dermed følgende ligningssystem:

$$(S) = \begin{cases} b + 2010a = 35.481 \\ \vdots \\ b + 2023a = 43.056 \end{cases}$$

Lad herfra $Ax=b$ være matrix formen af (S), hvor:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2010 \\ 1 & 2011 \\ 1 & 2012 \\ 1 & 2013 \\ 1 & 2016 \\ 1 & 2018 \\ 1 & 2020 \\ 1 & 2022 \\ 1 & 2023 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 35.381 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \\ 42.140 \\ 43.056 \end{bmatrix}$$

Ved kontrol i Maple ser vi at $\text{rank } A = 2$, derfor har systemet en unik løsning givet ved:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T B$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 18145 & 9 \\ 36582527 & 18145 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{18145}{1718} & \frac{36582527}{1718} \\ \frac{9}{1718} & -\frac{18145}{1718} \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 351.844 \\ 709452.45 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T B = \begin{bmatrix} -966.8031210 \\ 0.4989348 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{bmatrix}$$

Herved fås følgende tilnærmede forskrift:

$$\ln(y) = 0.4989348t - 966.8031210$$

3.2 b

(b) Begrund, at der gælder følgende tilnærmede forskrift for funktionen $y = y(t)$:

$$y = y(t) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)} \quad (*)$$

(Vink: Man har tilnærmelsen $\ln y \simeq at + b$ for de i delspørgsmål (a) fundne konstanter a og b . Tag nu eksponentialfunktionen på begge sider af lighedstegnet. Regn med alle decimaler.)

Den stiplede graf på FIGUR 1 er grafen for eksponentialfunktionen $t \mapsto 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)}$ fundet i (*) ovenfor.

$$e^{\ln(y)} = e^{0.498t - 966.803} \Rightarrow$$

$$y = e^{0.498t - 966.803}$$

Der kontrolleres med forskellige værdier af t , for at se hvor tæt de to forskrifter er på hinanden. Dette gøres i Excel hvor l1 er den oversående forskrift og l2 er forskriften fra opgaven (*):

t	l1	l2	t	l1	l2
2010	4,56E+15	4,56E+15	2010	4,559E+15	4,560E+15
2011	7,51E+15	7,51E+15	2011	7,508E+15	7,511E+15
2012	1,24E+16	1,24E+16	2012	1,237E+16	1,237E+16
2013	2,04E+16	2,04E+16	2013	2,037E+16	2,038E+16
2014	3,35E+16	3,36E+16	2014	3,354E+16	3,356E+16
2015	5,52E+16	5,53E+16	2015	5,524E+16	5,528E+16
2016	9,10E+16	9,10E+16	2016	9,098E+16	9,104E+16
2017	1,50E+17	1,50E+17	2017	1,498E+17	1,500E+17
2018	2,47E+17	2,47E+17	2018	2,468E+17	2,470E+17
2019	4,06E+17	4,07E+17	2019	4,065E+17	4,068E+17
2020	6,69E+17	6,70E+17	2020	6,694E+17	6,700E+17
2021	1,10E+18	1,10E+18	2021	1,103E+18	1,104E+18
2022	1,82E+18	1,82E+18	2022	1,816E+18	1,818E+18
2023	2,99E+18	2,99E+18	2023	2,991E+18	2,994E+18
2024	4,93E+18	4,93E+18	2024	4,925E+18	4,931E+18

De to tabeller viser y -værdierne i rundet til henholdsvis 2 og 3 decimaler. Vi ser at forskrifterne forudsiger tilnærmelsesvis de samme værdier.

Excel koden for l1 og l2 er:

l1: = EKSP((0,498934807916181) * D3 - 966,803121071013)

l2: = 4,56 * 10^15 * EKSP(0,499 * (D3 - 2010))

3.3 c

- (c) Benyt tilnærmelsen (*) til at give et estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kunne præstere i år 2000.

Det historiske faktum er, at verdens bedste supercomputer i år 2000 var IBM ASCI White, og denne kunne præstere $7.226 \cdot 10^{12}$ FLOPS.

Benyt tilnærmelsen (*) til at give et estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kan præstere i år 2030.

Her genanvendes tabellen fra opgave b, der skal dog udelukkende fokuseres på l2, da det er tilnærmelsen (*)

t	l1	l2
2000	3,105E+13	3,103E+13
2030	9,830E+19	9,845E+19