MatAn: Ugeseddel 6

Frederik Ravn Klausen

blok 1, 2023-2024

Indhold

I denne uge taler vi om funktioner i flere variable. På tirsdag starter vi med at se på hvordan man tager en grænseværdi og hvordan situationen er anderledes fra den i en dimension. En god forståelse for grænseværdier er afgørende for analyse, da fundamentale koncepter, som kontinuitet og differentiabilitet er defineret ved en grænseprocess. Da man kan aflede en funktion i flere variable i flere retninger, introducerer vi begreberne retningsafledede. Vi læser TOK 2.1-2.4.

På torsdag skal vi se, at den retningsafledede kan udregnes ved hjælp af gradienten og at vigtige koncepter fra analyse af funktioner i en variabel har et analog for funktioner i flere variable. Så finder vi at lokale maksima og minima kan undersøges ved hjælp af gradienten og dens højere ordens version, Hessematricen. Da Hessematricen er en matrix kan vi undersøge dens egenskaber ved hjælp af lineær algebra. Specielt finder vi at det anden afledts kriterium for funktioner i en variabel ($f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$) medfører at a er lokal minimum) generaliseres til en gradient som forsvinder og en Hessematrix som er positiv definit (alle egenværdier >0). Jeg anbefaler læserækkefølgen TOK 2.4, 3.1, 2.5, 3.2, EHM 6.4-6.6. EHM kan findes på absalon i liste over bøger og er en kapitel i Analyse 0 bogen.

Øvelser til tirsdag

1. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være defineret ved $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ for positive x og $f(x) = 0$ ellers. Vis at f er uendeligt ofte differentiabel i alle punkter. Udregn et par led i Taylorrækken om 0.
2. Bevis at $\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}\cdot n} = 0$. For alle $N \geq 2$. Kan du give to forskellige beviser?
3. Lav to lister $X = [X_0, \ldots, X_{N-1}]$ og $Y = [Y_0, \ldots, Y_{N-1}]$ ved sample Unif$[0, 1]$ variable. Udregn den periodiske foldning af de to lister både ved at definere den direkte og ved at bruge FFT. Hvor stor skal N være før FFT er 100 gange hurtigere?

Øvelser til torsdag

1. Mængder i $\mathbb{R}^n$
   (a) TOK Opgave 2.3 a) - c)
   (b) Opgave 2.4 a)
   (c) Opgave 2.4 b)
2. Følger og grænseværdier
   (a) Opgave 2.6 b), Opgave 2.7, Opgave 2.11 a)-b)

3. (a) Opgave 2.14 a)-d)
   (b) Opgave 2.15 a), b). Brug direkte definitionen af den retningsafledede
   (c) Opgave 2.16 a)

Aflevering

Afleveringsreglerne er de samme som i sidste uge.

1. Betragt potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$.
   (a) Find konvergensradius r. Konvergerer potensrækker i endepunkterne?
   (b) Vis, ved hjælp af Weierstrass M-test, at potensrækken konvergerer uniformt på intervallet $(-\frac{3}{10}, \frac{3}{10})$.
   (c) Vis, at potensrækken ikke konvergerer uniformt på intervallet $(-r, r)$.

2. Potensrækker

   Betragt potensrækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

   hvor ln betegner den naturlige logaritme.

   a) Vis, at potensrækkens konvergensradius er $r = 1$.

   b) Vis, at potensrækken konvergerer i det venstre endepunkt $x = -r$, men ikke i det højre $x = r$. Vis, at potensrækkens sumfunktion f er kontinuert på $[-r, r)$.

   c) Afgør, om potensrækken konvergerer uniformt på det afsluttede interval $[-r, 0]$.

3. Udregn DFT af en konstant funktion. Fortolk.

4. Betragt funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ der er givet ved $f(x) = A \cdot 1[x \leq \pi]$ (dvs. funktionen er A for $x \leq \pi$ og 0 for $x > \pi$. Hvis man i fysiklokalet sætter den spænding for osciloscopet kaldes den firkantspænding. Prøv at google. Udregn fourierkoefficienterne. Forklar den gif der er her: `https://da.wikipedia.org/wiki/Signalgenerator#/media/Fil:SquareWave.gif`

5. I lineær regression har vi datapunkterne $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$. Vi ønsker at fitte den bedste rette linje gennem punkterne. $y = a \cdot x + b$. Men hvad er den bedste rette linje? Vi kigger på de mindste kvadraters metode. Dvs. at summen

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

   er mindst mulig.

   (a) Find kritiske punkter for S. Finder du maksimum eller minimum?
   (b) I matematisk finans er den vigtigste formel $\beta = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$. Hvad har den med lineær regression at gøre?

MatAn: Aflevering 5 (Uge 6)

Navn:

KU-ID:

Holdnummer: