MatAn: Ugeseddel 2

Frederik Ravn Klausen

Blok 1, 2023-2024

Dette er den anden ugeseddel. Formatet af sedlen er som ugeseddel 1 med den undtagelse, at der på denne seddel også er opgaver til ugens aflevering (se nedenfor). Afleveringen afleveres ved forelæsningen i uge 3 (tirsdag d.19/9 kl. 10) i hånden eller printet til forelæsningen. Hvis du skriver på computer skal du bruge LaTex.

Indhold

I sidste uge havde vi om følger og rækker. Det er enormt vigtigt at forstå og have et fleksibelt forhold til konvergens af følger. I denne uge tager vi fat på kontinuitet af funktioner. Funktionsbegrebet er et af de vigtigeste koncepter i matematikken.

I denne uge starter vi med at se på funktioner af en variabel og på dens maxima og minima. I senere uger skal vi udvide denne diskussion til flere variable. Funktionerne er ikke nødvendigvis så pæne som $x, \sin x$ eller $\exp x$, så inden vi går igang, skal vi se på forskellige eksempler og diskutere grundlæggende egenskaber, som kontinuitet (tirsdag, TL 5,1). Vores forståelse af talfølger hjælper os her! På torsdag ser vi på maxima og minima (TL 5.2-5.4).

Øvelser til tirsdag

1. Lav et bevis fra definitionen for at følgen defineret ved $a_n = 5n^{-5} + 3$ konvergerer mod 3.

2. Bestem om følgende rækker er divergente eller konvergente

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. k-NN og følger.

Vi kigger i et konstrueret setup på k-NN algoritmen. Lad $x_1, \dots x_n$ være stokastiske variable der er fordelt uniformt på $[0, 2]$. Hvis $x_i \leq 1$ klassificerer vi den som grøn ($y_i = 0$) og hvis $x_i > 1$ klassificerer vi den som rød ($y_i = 1$). Nu vil vi klassificere et punkt $x = 1.1$ ved hjælp af k-NN algoritmen for $k = 1$ ved hjælp af dataen $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$.

(a) Bevis at sandsynligheden for klassificere $x = 1.1$ korrekt som rød går mod 1 når $n \to \infty$.

Hint: Forsøg ikke at regne sandsynlighederne ud!

(b) Hvis $x = 1.01$ går sandsynligheden for at klassificere punktet korrekt som rød går mod 1 når $n \to \infty$. Virker det for alle punkter? Hvad vil du intuitivt sige om konvergenshastigheden?

4. Følgende opgave udspringer fra MLA noternes side 28, hvor der betragtes en mulig fordelingsfunktion på mængden af binary decision trees. Vi viser at noterne faktisk giver en veldefineret fordelingsfunktion. Betragt funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(a) Hvad er funktionens definitionsmængde? Er funktionen kontinuert på sin definitionsmængde? Bestem to tal $A, B \in \mathbb{R}$ således at

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

(Hint: opstil et passende ligningssystem for de to ubekendte tal A og B. Dette er et eksempel på partiel brøk-dekomposition).

(b) Betragt nu talrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

Redegør for at rækken er konvergent med grænseværdi 1. (Hint: opskriv følgen af afsnitssummer. Kan du afgøre et generelt udtryk?)

Øvelser til torsdag

1. Kontinuitet I

   (a) De hyperbolske funktioner for er defineret som $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, og $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, for $x \in \mathbb{R}$. Særligt $\tanh(x)$ er vigtigt i machine learning, da det er en activation function, som bruges indenfor neurale netwærk. Argumenter for at de hyperbolske funktioner $\sinh, \cosh$ og $\tanh$ er kontinuerte for alle $x \in \mathbb{R}$ ved at bruge regnereglerne.

   (b) Kig på funktionen f defineret ved $f(x) = 6x + 3$ for $x \in \mathbb{R}$. Er den kontinuert? Vælg et kontinuitetspunkt i din valgte funktion og lav et $\epsilon - \delta$ bevis for at funktionen er kontinuert i dette punkt.

   (c) En anden activation function er heaviside funktionen som er defineret ved

   $$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

   Vælg et diskontinuitetspunkt og vis diskontinuiteten ved brug af talfølgeargumentet.

   (d) Vis Sætning 5.1.10 a) i TL, dvs. at hvis a er kontinuitetspunkt for f, så gælder at $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ for alle talfølger med $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Kontinuitet II

   (a) Vis at sigmoid activation function er kontinuert ved hjælp TL Sætning 5.1.5. Du må bruge, at $\exp x$ er kontinuert.

   (b) Løs opgave TL 5.1.11 a)

   (c) Vis at ethvert polynom af ulige grad har mindst en reel rod.

3. Begrænset

   (a) Vis at $\sin x$ er begrænset, men at $\tan x$ ikke er (brug den geometriske definition af de trigonometriske funktioner).

   (b) Definér en ubegrænset funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uden kontinuitetspunkter.

   (c) Betragt funktionen $f(x) = \frac{\exp x}{\exp x + 1}$ og vis at den er begrænset.

4. Maximalpunkter

   (a) Bestem antallet af maximal- og minimalpunkter af $f(x) = x^2$ i tre tilfælde: $A = [0, 1]$, $A = (0, 1)$ og $A = \mathbb{R}$. Illustrér dit resultat i en graf.

(b) Lad $p(x)$ være et polynomium. Vis, at $f(x) := p(\sin x)$ har et minimum på $[-1, 1]$. Tegn grafen af et eksempel.

(c) For hvert $x \in \mathbb{R}$ lad $f(x)$ være summen til talrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ (hvis den er konvergent i x). Vis at f er begrænset. Hvad er fs maximum? (Dette spørgsmål er ikke nemt — Eulers formel skal bruges. Opgaven bliver nemmere, hvis sin erstattes med cos.)

5. Grænseværdier

   (a) Betragt Heavisidefunktionen f og vis ved hjælp af definitionen at $\lim_{x^- \to 0} f(x) = 0$ og $\lim_{x^+ \to 0} f(x) = 1$.

   (b) Bestem grænseværdien $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ved hjælp af regnereglerne for grænseværdier.

Aflevering

Dette er den første aflevering. I må gerne snakke med hinanden om afleveringerne, men I skal udfærdige besvarelserne hver for sig. I kan enten gøre det med latex (andre computerprogrammer er desværre ikke tilladt) eller ved at skrive i hånden. Brug den næste side som forside.

Deadline på afleveringen er tirsdag kl 10 ved forelæsningen. Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af, og med henvisning til, relevante resultater i pensum (herunder opgaver regnet ved øvelserne).

1. Talfølger

   (a) Lav et bevis fra definitionen af konvergens for at følgen defineret ved $a_n = 3n^{-2}$ for $n \geq 1$ konvergerer og for at følgen $a_n = (-1)^n$ for $n \geq 1$ ikke gør.

   (b) Lad $a_1 = 1$ og $a_n = \frac{1}{\log n}$, for $n \geq 2$, være leddene i nulfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vis eksplicit konvergens af denne nulfølge, dvs. vis at for alle $\epsilon > 0$ findes et N, sådan at for alle naturlige tal n med $n \geq N$ gælder:
$$|a_n - 0| < \epsilon.$$

   (c) Tegn en graf over de første 10 led i talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med led $a_n = \frac{2n^2+n}{2+n^2}$. Bestem bagefter grænseværdien.

   (d) Konstruer en divergent talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sådan at talfølgen $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $b_n = a_n^2$ er konvergent.

2. Gambling

   Du går på kasino med 1 kr. på lommen. Du spiller kvit eller dobbelt igen og igen. Med 50% sandsynlighed får du dine penge fordoblet og med 50% sandsynlighed mister du alt (men du får lov at spille videre om 0 kr. hver gang).

(a) Bestem sandsynligheden for at du har 0 kr. efter at have spillet n gange. Kald den p_n.

(b) Konvergerer følgen $\{p_n\}$? Bestem i så fald grænseværdien ved at bruge definitionen.

(c) Bestem hvor mange penge du i gennemsnit har efter at have spillet n gange. Kald de tal du får for g_n.

(d) Konvergerer følgen $\{g_n\}$? Bestem i så fald grænseværdien ved at bruge definitionen.
Hint: I sproget fra SS og ML kurserne kan vi sige at den stokastiske variabel X_n fortæller hvor mange penge du har efter n spil. Hvilke værdier tager X_n og med hvilke sandsynligheder? Gennemsnittet beregnes som $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{v:\text{værdi af } X_n} v\mathbb{P}[X_n = v]$. Du har bestemt $\mathbb{P}[X_n = 0]$ ovenfor.

3. Talrækker

(a) Argumentér for at talrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} - (\frac{-1}{2})^n$ er konvergent. Beregn summen.

(b) Benyt integraltesten til at vise at den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.

(c) Afgør om følgende rækker konvergerer eller divergerer:

i. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+1}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5+6}}$

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(n)|$

v. $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\frac{1}{n})|$

MatAn: Aflevering 1 (Uge 2)

Navn:

KU-ID:

Holdnummer: