作业 7：理论推导题

推导李代数小 se(3)的指数映射。

我们知道对于大 SE(3)，其对应的李代数为小 se(3)。其定义如下

$$\mathfrak{se}(3)=\left\{\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6,\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{R}^3,\boldsymbol{\phi}\in\mathfrak{so}(3),\boldsymbol{\xi}^\wedge=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}^\wedge & \boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0}^T & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}\right\}$$

证明 1：

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)=\begin{bmatrix}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n\boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$

证明 2：

令 ρ = θ a，那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n=\frac{\sin\theta}{\theta}I+\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+\frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge\triangleq\boldsymbol{J}.$$

提示：

参考《视觉 SLAM 十四讲》P68-71 页内容。参考 SO(3) 的泰勒展开，然后合并奇偶数项级数