

寒假作业 小结报告

这篇文档将按照如下三个部分展开，第一部分将对论文的结构¹及其主要结果进行一个简要的介绍；第二部分用来说明一下我的主要工作——用 Matlab 生成文中的全部八张表格和一张图片；最后，第三部分是对工作结果的简要评述。

1 论文概述

1.1 行文结构

文章最重要的贡献是建立了对“GARCH 模型中回报率的平稳性 (Stationary)”这一假设的检验方法。

为了逐步展开这个问题，作者首先引用了 Nelson (1990) 关于 GARCH 模型存在“严格平稳” (Strictly Stationary) 的回报率解的充要条件： $\gamma_0 < 0$ (γ_0 是 GARCH 模型中若干参数的函数)。

在此基础上，作者本应顺势将 $\gamma_0 < 0$ 作为零假设，设法进行假设检验。但是作者又做了一层铺垫，以说明平稳性假设成立与否的必要性（也即说明其论文主要贡献的重要性）。

具体而言，作者发现用 QMLE 估计出的 GARCH(1,1)模型中的 α_0 和 β_0 的一致性和渐近正态性都不受平稳性存在与否的影响，而截距参数 ω_0 的一致性则需要平稳性假设成立作为前提。

在上面论述的基础上，作者开始介绍其主要贡献——对 GARCH 模型严格平稳性假设 ($\gamma_0 < 0$) 的检验。检验的套路符合通常假设检验的套路：先设定一个统计量 T_n ，然后根据置信度得到相应的拒绝域。至于统计量 T_n 的构建及其原理，可以直接参考原文。

并且不仅如此，作者还发现上述检验方法，不仅适用于 GARCH(1,1)，也适用于其他“非线性 GARCH 模型”（例如 GJR GARCH 模型）。

¹ CHRISTIAN FRANQC AND JEAN-MICHEL ZAKOIAN. STRICT STATIONARITY TESTING AND ESTIMATION OF EXPLOSIVE AND STATIONARY GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTICITY MODELS. Econometrica, Vol. 80, No. 2 (March, 2012), 821–861.

最后，在上述理论分析与数学推导完成以后，作者在第五部分使用了 Monte-Carlo 模拟实验来验证之前理论推导得到的结果。结果模拟得到的结果（表一至表八）可以说与理论推导完美符合，难怪能发 *Econometrica*。

1.2 主要结论

文章的主要结论在摘要和第六部分（结论）都有较为详细的叙述，这里简化整合归纳成两点，分别是：

第一，QMLE对于GARCH(1,1)的参数 α_0 和 β_0 的估计总是一致的，无需模型平稳性的假设；而参数 ω_0 的一致性则依赖于模型平稳性的假设，这也是之所以要检验这一假设的主要原因。

第二，作者提出的假设检验方法本身是一致的（这个我其实没太明白，也没有细究），且这个检验方法不仅适用于GARCH(1,1)，还适用于包括GJR GARCH在内的其它一些“非线性”GARCH模型。

2 工作说明

由于这次作业的主要任务是编写 Matlab 代码复现原文的表格和图片，于是在这里先简要介绍一下文章第五部分（模拟实验）中涉及到的八张表格和一张图片。

在介绍完作者文中的表格之后，我会放上自己的 code 跑出的数据，作为对比，方便参照。

2.1 表格一

表格一是为了展示上面提到的结论一，即“QMLE 对 GARCH 模型参数的估计结果中， α_0 和 β_0 的估计总是一致的，而参数 ω_0 的一致性则依赖于模型平稳性的假设”。

为此，作者选定了三组不同的参数初值，并将三个对应的 GARCH(1,1)模型记为“2nd”（二阶平稳， $\gamma_0 = -0.18$ ）、“ST”（平稳， $\gamma_0 = -0.038$ ）和“NS”（非平稳， $\gamma_0 = 0.078$ ），其中前两个模型是平稳的，而第三个模型非平稳。

然后作者分别取定用于估计得数据量为 200 和 4000，进行了 2x3，一共 6 组 QMLE 估计，每组做 1000 次取平均值。6 次估计的一阶偏差（Bias）和二阶偏差（MSE）分别如下所示：

TABLE I
BIAS (MEAN ERRORS) AND MSE (MEAN SQUARED ERRORS) FOR THE QMLE OF A GARCH(1, 1), WITH $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ^a

	2nd ($\gamma_0 = -0.180$)			ST ($\gamma_0 = -0.038$)			NS ($\gamma_0 = 0.078$)		
	ω	α	β	ω	α	β	ω	α	β
$n = 200$									
Bias	-0.21	0.01	0.01	-0.34	0.01	0.01	-0.51	0.02	0.02
MSE	0.58	0.01	0.01	1.10	0.02	0.02	3.77	0.03	0.03
$n = 4,000$									
Bias	0.00	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.00	-0.51	0.00	0.00
MSE	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	4.95	0.00	0.00

^aThe parameters $\theta_0 = (1, 0.3, 0.6)$, $\theta_0 = (1, 0.5, 0.6)$, and $\theta_0 = (1, 0.7, 0.6)$, correspond to second-order stationary (2nd), strict stationary (ST), and nonstationary (NS) models. Bias and MSE are computed over 1,000 independent simulations of length $n = 200$ or 4,000.

从中可以看到，6 组估计中对 α_0 和 β_0 的估计确实总是误差较小。而当 $n=4000$ （样本较大）的情形下，也只有在前两个模型（ $\gamma_0 < 0$ 的平稳模型）中，对参数 ω_0 的估计误差较小。至此，表格一给作者的第一个结论提供了有力的支持。

我得到的结果如下：

Replication of Table I

	2nd, $\gamma_0 = -0.18$			ST, $\gamma_0 = -0.038$			NS, $\gamma_0 = 0.078$		
$N=200$	ω	α	β	ω	α	β	ω	α	β
Bias	-0.20	0.01	0.01	-0.45	0.01	0.01	-0.53	0.03	0.03
MSE	0.56	0.01	0.01	1.60	0.02	0.02	4.11	0.02	0.02
$N=4000$	ω	α	β	ω	α	β	ω	α	β
Bias	-0.01	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.00	-0.47	0.00	0.00
MSE	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	3.97	0.00	0.00

2.2 表格二和表格三

在表格二和表格三中，作者分别针对平稳和非平稳的 GARCH(1,1)模型，进行了一个相对简单的假设检验——检验 β_0 是否小于 0.7。作者在两个模型中，分别给定了七个 β_0 的初值，然后对每个初值在样本数为 500，2000，4000 的三种情形下进行 1000 次假设检验以消除随机误差，计算出 7x3 共计 21 种情形下，1000 次拒绝原假设的频率（几乎可以视为概率），如下所示：

TABLE II
RELATIVE FREQUENCY OF REJECTION (IN %) FOR THE TEST (3.2) OF THE NULL HYPOTHESIS
 $H_0 : \beta_0 \leq 0.7$ AGAINST $H_1 : \beta_0 > 0.7^a$

n	β_0						
	0.61	0.64	0.67	0.70	0.73	0.76	0.79
500	3.5	4.3	5.2	8.9	12.6	26.8	49.6
2,000	0.3	0.6	1.8	6.8	18.3	53.1	91.5
4,000	0.2	0.3	1.0	5.5	27.7	76.9	99.0

^aHere $a = 0$, $b = 1$, and $c = 0.7$ in (3.1). The nominal level is $\alpha = 5\%$ when $\alpha_0 = 0.2$. The value $(\alpha_0, \beta_0) = (0.2, 0.7)$ corresponds to a stationary process.

TABLE III
RELATIVE FREQUENCY OF REJECTION (IN %) FOR THE TEST (3.2) OF THE HYPOTHESIS
 $H_0 : \beta_0 \leq 0.7$ AGAINST $H_1 : \beta_0 > 0.7$ WHEN $\alpha_0 = 0.5^a$

n	β_0						
	0.61	0.64	0.67	0.70	0.73	0.76	0.79
500	0.3	0.5	2.8	9.9	25.5	47.7	67.2
2,000	0.0	0.0	0.1	6.2	41.6	81.8	97.0
4,000	0.0	0.0	0.1	6.1	61.0	96.2	99.7

^aThe value $(\alpha_0, \beta_0) = (0.5, 0.7)$ corresponds to a nonstationary process.

作者没有在上述表格的基础上在定义或使用相关指标（例如犯第一类错误的概率，犯第二类错的概率，灵敏度，召回率，等等）来评判上述检验方法的优劣。不过从上述结果中直观考察，假设检验的结果可以说是令人满意的。此外，虽然作者认为这种检验对于平稳模型和非平稳模型都适用，但不难看出，这种假设检验方法似乎对于非平稳模型的表现要更胜一筹。

我得到的结果如下：

Replication of Table II

$n \setminus \beta_0$	0.61	0.64	0.67	0.70	0.73	0.76	0.79
500	3.1	3.0	4.2	7.7	13.7	25.9	50.1
2000	0.6	0.6	2.1	6.4	21.5	52.3	91.8
4000	0.0	0.3	1.3	7.1	28.8	77.9	99.5

Replication of Table III

$n \setminus \beta_0$	0.61	0.64	0.67	0.70	0.73	0.76	0.79
500	0.1	0.7	1.9	10.0	22.6	42.2	63.5
2000	0.0	0.0	0.3	6.8	36.3	76.9	92.4
4000	0.0	0.0	0.0	6.7	51.9	86.2	95.8

2.3 表格四和表格五

在上述表格二和表格三的相似框架下，作者分别将假设检验的 H_0 变成了我们关心的 $\gamma_0 < 0$ (严格平稳假设成立) / $\gamma_0 \geq 0$ (严格平稳假设不成立)。所不同的是，这里作者给定了 β_0 ，通过调整 α_0 的初值和样本的规模，各进行了 7x3 共计 21 组情形下的假设检验。

同样地，每种情形都重复 1000 次，以消除随机误差。下面表格中汇报的结果，就是这 1000 次重复中，拒绝原假设的 H_0 频率：

TABLE IV
RELATIVE FREQUENCY OF REJECTION (IN %) OF THE TEST (3.7) OF THE STATIONARITY
HYPOTHESIS $H_0: \gamma_0 < 0$ FOR THE GARCH(1, 1) MODEL WITH $\beta_0 = 0.8^a$

n	α_0						
	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	0.0	0.0	0.1	7.5	27.8	61.4	75.2
2,000	0.0	0.0	0.0	6.3	67.8	98.6	99.9
4,000	0.0	0.0	0.0	5.3	92.4	100.0	100.0

^aThe nominal level is $\alpha = 5\%$. The parameter $\alpha_0 = 0.2575$ corresponds to $\gamma_0 = 0$.

TABLE V
RELATIVE FREQUENCY OF REJECTION (IN %) FOR TESTING THE **NONSTATIONARITY**
HYPOTHESIS $H_0: \gamma_0 \geq 0$ WITH THE TEST (3.8) FOR THE GARCH(1, 1) MODEL WITH $\beta_0 = 0.8^a$

n	α_0						
	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	98.3	91.7	69.3	19.8	4.1	0.7	0.4
2,000	100.0	100.0	98.3	11.1	0.1	0.0	0.0
4,000	100.0	100.0	100.0	9.1	0.0	0.0	0.0

我得到的结果如下：

Replication of Table IV

$n \setminus \alpha_0$	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	0.0	0.0	0.0	5.6	28.1	54.1	67.6
2000	0.0	0.0	0.0	4.3	58.4	84.8	89.7
4000	0.0	0.0	0.0	3.9	77.2	92.3	93.9

Replication of Table V

$n \setminus \alpha_0$	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	98.3	90.1	71.3	21.0	5.2	1.9	0.8
2000	100.0	100.0	98.6	16.2	7.2	2.7	1.2
4000	100.0	100.0	100.0	15.7	5.7	2.3	0.5

2.4 表格六

表格六就是对一个“非线性”的Garch模型——GJR GARCH进行与表格四完全相同的假设检验 ($\gamma < 0$)，这里的 γ 与之前的 γ_0 在定义上稍有不同，不过都是有关（严格）平稳性的充要条件。假设检验得到的结果如下：

TABLE VI
RELATIVE FREQUENCY OF REJECTION (IN %) FOR THE TEST (3.8) OF THE STATIONARITY
HYPOTHESIS $H_0: \alpha < 0$ FOR A GJR MODEL^a

n	α_1						
	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	0.1	0.1	1.1	7.8	15.8	32.7	35.2
2,000	0.0	0.0	0.1	6.6	31.7	65.8	77.4
4,000	0.0	0.0	0.0	5.6	45.1	87.7	96.1

^aThe parameter $\alpha_1 = 0.2575$ corresponds to $\Gamma = 0$. The nominal level is $\alpha = 5\%$.

我得到的结果如下：

Replication of Table VI

$n \setminus \alpha_1$	0.18	0.20	0.22	0.2575	0.28	0.30	0.31
500	0.0	0.2	0.6	7.0	13.3	24.2	30.1
2000	0.0	0.0	0.1	4.6	26.7	56.2	64.7
4000	0.0	0.0	0.0	3.6	37.5	73.9	81.5

2.5 表格七和表格八

表格七和表格八都使用了真实的市场交易数据来进行建模（而不是人为的 Monte Carlo 实验）。表格七使用的数据是十三个市场的指数数据；表格八使用的则是各个公司单独的股票数据。

表格七和表格八的检验，零假设都是模型的平稳性假设成立，非常直观。得到的结果如下所示：

TABLE VII
TEST STATISTIC T_n OF THE STRICT STATIONARITY TESTS (3.7) AND (3.8)^a

CAC	DAX	DJA	DJI	DJT	DJU	FTSE	Nasdaq	Nikkei	SMI	SP500
-14.5	-15.8	-15.1	-13	-15.1	-14	-10.7	-8.5	-15.4	-23	-11.1

^aThe test statistic is the realization of a random variable which is asymptotically $\mathcal{N}(0, 1)$ distributed when $\gamma_0 = 0$, tends to $-\infty$ under the strict stationarity hypothesis $\gamma_0 < 0$, and tends to $+\infty$ when $\gamma_0 > 0$.

TABLE VIII
TEST STATISTIC T_n AND p -VALUES OF THE NONSTATIONARITY TEST (3.8) FOR STOCK RETURNS

	ICGN	MCBF	KV-A	BTC	CCME
n	928	868	1,221	908	469
$\hat{\alpha}_n$	0.581	0.023	0.143	0.508	0.413
$\hat{\beta}_n$	0.696	0.979	0.927	0.765	0.750
T_n	-2.297	0.024	1.120	0.491	0.457
p -value	0.011	0.510	0.869	0.688	0.676

从中，作者得到的结论是：对于股票市场的指数数据（表格七），非平稳的回报率假设应当被拒绝；而对于个别公司的股票数据（表格八），非平稳的回报率假设则可以被拒绝。

我得到的结果如下：

Replication of Table VII

CAC	DAX	DJA	DJI	DJT	DJU	FISE	Nasdaq	Nikkei	SMI	SP500
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14.5	15.8	15.1	13.0	15.1	14.0	10.7	58.9	15.4	23.0	11.1

Replication of Table VIII

	ICGN	MCBF	KV-A	BTC	CCME
n	928	868	1221	908	469
α_n	1.721	0.023	0.143	0.508	0.413
β_n	0.011	0.979	0.927	0.765	0.750
T_n	-19.700	0.000	1.100	0.500	0.500
p -value	0.000	0.490	0.831	0.712	0.676

2.6 图片一

下面的这张图片只是一个描述性统计，是MCBF股票的对数回报率的时间序列走势图，作为表格八中用到的五只股票的一个例子而已。

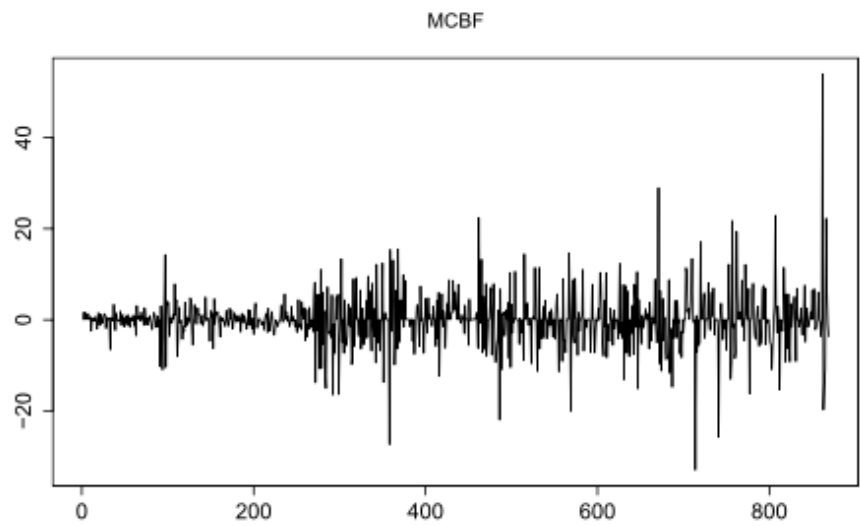
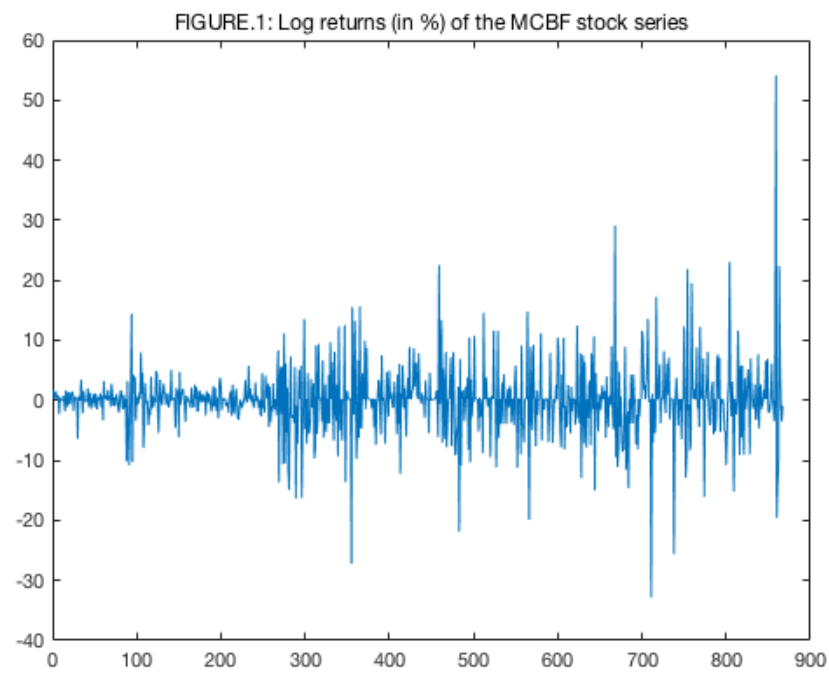


FIGURE 1.—Log returns (in %) of the MCBF stock series.

我得到的结果如下：

Replication of Figure I



3 结果评述

最后，仔细对比我得到的结果和作者文章中的结果，不难发现：

第一，绝大多数数据的结果吻合程度很高，并且从表格意义上的整体范围去看，作者想要通过表格表达的信息，都可以从我得到的数据中得到证实与支持。

第二，少数不吻合的数据的来由，我认为基本可以归结为随机误差的影响。首先是因为偏差不大，其次则是因为这些偏差并没有固定的方向，特别是没有偏向作者可能希望出现的方向。

第三，只有表格 8 中 ICGN 的一系列数据出了较大偏差，但考虑到其余四列数据均无偏差，我不认为是我的代码出现了问题，暂时还不清楚是什么原因，不过好在真是市场的数据并不影响作者这篇理论文章的任何结论。

综上所述，在编写代码，复制结果的过程中，我认为作者的这篇文章做得很扎实，结果也相当真实可信。

此外，我也对自己的工作感到基本满意。如果助教姐姐想要考察我的代码的编写过程，可以参见如下 github 仓库：

https://github.com/HutchinHuang/GARCH_Paper_Replication