Chapter 18. Duality

Nguyen Huu Hoang

Ngày 29 tháng 3 năm 2024

1 Lagrange multiplier Method

Nếu chúng ta đưa được bài toán này về một bài toán không ràng buộc thì chúng ta có thể tìm được nghiệm bằng cách giải hệ phương trình đạo hàm theo từng thành phần bằng 0 (giả sử rằng việc giải hệ phương trình này là khả thi).

Điều này là động lực để nhà toán học Lagrange sử dụng hàm số:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x) \tag{1}$$

Người ta đã chứng minh được rằng điểm *optimal value* của bài toán (1) thỏa mãn điều kiện

$$\nabla \mathbf{x}, \lambda \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

2 Hàm đối ngẫu Lagrange

2.1 Lagrangian

Lagrangian cũng được xây dựng tương tự với mỗi nhân tử Lagrange cho mỗi (bất) phương trình ràng buộc:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \nu) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \nu_j h_j(x)$$

2.2 Hàm đối ngẫu Lagrange

Hàm đối ngẫu Lagrange của bài toán tối ưu là 1 hàm của biến đối ngẫu, được định nghĩa là giá trị nhỏ nhất của Lagrangian theo x:

$$
\begin{aligned}
g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x, \lambda, \nu) && (2)\\
&= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \nu_j h_j(x) \right) && (3)
\end{aligned}
$$

Nếu Lagrangian không bị chặn dưới thì hàm đối ngẫu tại λ, ν sẽ nhận giá trị là $-\infty$

Đặc biệt quan trọng:

- inf được lấy trên miền $x \in \mathcal{D}$ tức là trên miền xác định của bài toán. Miền xác định này khác với feasible set. Thông thường feasible set là tập con của $\mathcal{D}$
- **Hàm đối ngẫu của 1 bài toán tối ưu bất kỳ là 1 hàm concave, bất kể bài toán ban đầu, có phải là convex hay không**

3 Bài toán đối ngẫu Larange (The Lagrange dual problem)

Có thể thấy với mỗi cặp (λ, ν) hàm đối ngẫu Lagrange cho ta 1 giá trị chặn dưới cho *optimal value* p^*. Vì ta luôn có tính chất chặn dưới cho giá trị tối ưu

$$g(\lambda, \nu) \leq p^* \qquad \forall \lambda \geq 0$$

Câu hỏi đặt ra là với giá trị λ và ν nào, chúng ta sẽ có 1 chặn dưới tốt nhất của p^*. Nói cách khác, ta cần giải bài toán:

$$\lambda^*, \nu^* = \arg\max_{\lambda, \nu} g(\lambda, \nu) \tag{4}$$

$$\text{subject to: } \lambda \succeq 0$$

Một nhận xét quan trọng: vì $g(\lambda, \nu)$ là concave và hàm ràng buộc $f_i(\lambda) = -\lambda$ là các hàm convex. Vậy bài toán trên là 1 bài toán tối ưu lồi. Chú ý bài toán đối ngẫu là lồi bất kể bài toán gốc có lồi hay không.

Bài toán này được gọi là Lagrange dual problem của bài toán gốc (primal problem) nghiệm của bài toán (4) là *dual optimal*

3.1 Strong Duality và Slater's constraint qualification

Nếu đẳng thức $p^* = d^*$ thỏa mãn, optimal Duality gap bằng 0, đó chính là strong dualilty. Cái này không thường xuyên xảy ra trong các bài toán tối ưu. Có rất nhiều nghiên cứu thiết lập các điều kiện, ngoài tính chất lồi để *strong duality* xảy ra. Đó gọi là *constraint qualifications.*

Một trong những *constraint qualifications* đơn giản nhất là **Slater's condition**

Định nghĩa: