Phép tính vi tích phân hàm 1 biến

① Vi phân = đạo hàm

② tích phân ⊂ nguyên hàm

giải tích

giới hạn hàm số

(K17 - 19

Chương 1. Giới hạn và hàm liên tục

Hàm số ①, ② : giải tích thực 1 biến thực

đạo hàm, tích phân của 1 biến thực

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

Ngày 13 tháng 1 năm 2022

Định nghĩa 1.1.1 (dãy số)

(1) Giả sử $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên và $\mathbb{R}$ là tập số thực. Ánh xạ

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n := u(n)$$

gọi một dãy số thực.

Dãy số trên được kí hiệu là $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hoặc $\{u_n\}$.

$\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$

thường kí hiệu

$\{u_n\}, \{u_k\}, \dots$

Dãy số K° đếm đc $\quad u_\alpha := \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ là K đếm được

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.1

(1) Giả sử $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên và $\mathbb{R}$ là tập số thực. Ánh xạ

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n := u(n) \end{aligned}$$

gọi một dãy số thực.

Dãy số trên được kí hiệu là $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hoặc $\{u_n\}$.

Phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của dãy.

Định nghĩa 1.1.1

(1) Giả sử $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên và $\mathbb{R}$ là tập số thực. Ánh xạ

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n := u(n) \end{aligned}$$

gọi một dãy số thực.
Dãy số trên được kí hiệu là $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hoặc $\{u_n\}$.
Phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của dãy.

(2) $\{u_n\}$ gọi là

- đơn điệu tăng (t.ư. tăng ngặt) nếu

$$u_n \leq u_{n+1} \text{ (t.ư. } u_n < u_{n+1}), \forall n \geq 1.$$

- đơn điệu giảm (t.ư. giảm ngặt) nếu

$$u_n \geq u_{n+1} \text{ (t.ư. } u_n > u_{n+1}), \forall n \geq 1.$$

- đơn điệu (t.ư. điệu ngặt) nếu nó là đơn điệu tăng (t.ư. tăng ngặt) hoặc đơn điệu giảm (t.ư. giảm ngặt).

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

(3) $\{u_n\}$ gọi là dừng nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n = u_{n_0}, \forall n > n_0$.

(3) $\{u_n\}$ gọi là dừng nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n = u_{n_0}$, $\forall n > n_0$.

(4) Dãy $\{u_n\}$ gọi là

- bị chặn trên nếu $\exists M$ sao cho $u_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.
- bị chặn dưới nếu $\exists m$ sao cho $u_n \geq m$, $\forall n \geq 1$.
- bị chặn nếu nó đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là

$$\exists A \geq 0 \text{ sao cho } |u_n| \leq A, \ \forall n \geq 1.$$

$-|m|-|M| \leq m \leq u_n \leq M \leq |m| + |M|$

$A = |m| + |M| \Rightarrow |u_n| \leq A$

$\Leftrightarrow -A \leq u_n \leq A$

(3) $\{u_n\}$ gọi là dừng nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n = u_{n_0}, \ \forall n > n_0$.

(4) Dãy $\{u_n\}$ gọi là
- bị chặn trên nếu $\exists M$ sao cho $u_n \leq M, \ \forall n \geq 1$.
- bị chặn dưới nếu $\exists m$ sao cho $u_n \geq m, \ \forall n \geq 1$.
- bị chặn nếu nó đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là
$$\exists A \geq 0 \text{ sao cho } |u_n| \leq A, \ \forall n \geq 1.$$

Ví dụ 1.1.2

Giả sử $a, d \in \mathbb{R}$. Xét dãy số cộng với công sai d: $u_n = a + (n-1)d$.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

(3) $\{u_n\}$ gọi là dừng nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n = u_{n_0}, \forall n > n_0$.

(4) Dãy $\{u_n\}$ gọi là

- bị chặn trên nếu $\exists M$ sao cho $u_n \leq M, \ \forall n \geq 1$.
- bị chặn dưới nếu $\exists m$ sao cho $u_n \geq m, \ \forall n \geq 1$.
- bị chặn nếu nó đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là

$$\exists A \geq 0 \text{ sao cho } |u_n| \leq A, \ \forall n \geq 1.$$

Ví dụ 1.1.2

Giả sử $a, d \in \mathbb{R}$. Xét dãy số cộng với công sai d: $u_n = a + (n-1)d$.

$u_1 = a$, $u_2 = a + d_1$, $u_3 = a + 2d_1$

$\boxed{u_n = u_{n-1} + d}$

Nếu $d > 0$ thì dãy tăng.
Nếu $d < 0$ thì dãy giảm.
Nếu $d = 0$ thì dãy dừng.

Ví dụ 1.1.3

Giả sử $a, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Xét dãy số nhân với công bội q: $u_n = aq^{n-1}$

$\{u_n\}$ bị chặn $\Leftrightarrow \exists A > 0: |u_n| \leq A \quad \forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow |a||q|^{n-1} \leq A \Leftrightarrow |q|^{n-1} \leq \dfrac{A}{|a|} \Leftrightarrow |q| \leq 1$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Ví dụ 1.1.3

Giả sử $a, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Xét dãy số nhân với công bội q: $u_n = aq^{n-1}$

~~Nếu~~ $|q| \leq 1$ ~~thì~~ dãy bị chặn.
~~Nếu~~ $|q| > 1$ ~~thì~~ dãy không bị chặn.

Ví dụ 1.1.3

Giả sử $a, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Xét dãy số nhân với công bội q: $u_n = aq^{n-1}$

Nếu $|q| \leq 1$ thì dãy bị chặn.
Nếu $|q| > 1$ thì dãy không bị chặn.

Định nghĩa 1.1.4 (dãy con)

Cho dãy số $\{u_n\}$ và $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ là một dãy tăng ngặt các số tự nhiên. Dãy số

$$u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_k}, \ldots$$

gọi là dãy con của dãy $\{u_n\}$ đã cho và viết $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hay $\{u_{n_k}\}$.

$\{u_n\} \subset \mathbb{R}$ là tập con

$\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Ví dụ 1.1.3

Giả sử $a, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Xét dãy số nhân với công bội q: $u_n = aq^{n-1}$

Nếu $|q| \leq 1$ thì dãy bị chặn.
Nếu $|q| > 1$ thì dãy không bị chặn.

Định nghĩa 1.1.4 (dãy con)

Cho dãy số $\{u_n\}$ và $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ là một dãy tăng ngặt các số tự nhiên. Dãy số

$\{u_n\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots\}$

$$u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots$$

gọi là dãy con của dãy $\{u_n\}$ đã cho và viết $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hay $\{u_{n_k}\}$.

Ví dụ 1.1.5

Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy số thực. Khi đó $\{u_{2n}\}$ và $\{u_{2n-1}\}$ là dãy con của $\{u_n\}$.

Định nghĩa 1.1.6 (giới hạn của dãy số) ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$.

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ (ε) sao cho

$$|u_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

Ta nói $\{u_n\}$ gọi là hội tụ về a và viết

$$\left(\lim_{n\to\infty} u_n = a\right) \text{ hay } \left(u_n \to a \text{ khi } n \to \infty\right).$$

$\lim u_n = a$, $u_n \longrightarrow a$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.6 (giới hạn của dãy số)

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ sao cho

$$|u_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

Ta nói $\{u_n\}$ gọi là hội tụ về a và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{hay} \quad u_n \to a \text{ khi } \ n \to \infty.$$

- Một dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ. Trường hợp trái lại ta nói dãy phân kỳ.

dãy số $\begin{cases} \text{hội tụ} \\ \text{phân kỳ} \end{cases}$

Định nghĩa 1.1.6 (giới hạn của dãy số)

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ sao cho

$$|u_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

tìm

Ta nói $\{u_n\}$ gọi là hội tụ về a và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{hay} \quad u_n \to a \text{ khi } n \to \infty.$$

Một dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ. Trường hợp trái lại ta nói dãy phân kỳ.

Ví dụ 1.1.7

Nếu c là hằng số và $u_n = c$, $\cancel{\forall n \geq n_0}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$.

$\forall \varepsilon > 0$, $|u_n - c| < \varepsilon \Leftrightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon$ $\forall n$ ∀ luôn đúng

Định nghĩa 1.1.6 (giới hạn của dãy số)

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ sao cho

$$|u_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

Ta nói $\{u_n\}$ gọi là hội tụ về a và viết

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{hay} \quad u_n \to a \text{ khi } \ n \to \infty.$$

Một dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ. Trường hợp trái lại ta nói dãy phân kỳ.

Ví dụ 1.1.7

Nếu c là hằng số và $u_n = c$, $\forall n \geq n_0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$.

Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước. Với mọi $n > N := n_0$, ta có

$$|u_n - c| = 0 < \varepsilon.$$

Do đó, bởi định nghĩa ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$.

Ví dụ 1.1.8

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

$u_n \qquad a$

$\lim u_n = a$

$\forall \varepsilon > 0$. Tìm N: $|u_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$

$|u_n - a| = |q^n| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \underbrace{\ln|q|}_{<0} < \ln\varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} = \log_{|q|}\varepsilon$

chọn $N > \log_{|q|}\varepsilon$ ta có $|u_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > N > \log_{|q|}\varepsilon$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Ví dụ 1.1.8

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có
$|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|q| < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ (vì $\ln|q| < 0$).
Chọn $N \in \mathbb{N}$ sao cho $N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. Khi đó, $\forall n > N$ ta có
$|q^n - 0| < \varepsilon$. Bởi định nghĩa ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Ví dụ 1.1.8

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có
$|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|q| < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ (vì $\ln|q| < 0$).
Chọn $N \in \mathbb{N}$ sao cho $N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. Khi đó, $\forall n > N$ ta có
$|q^n - 0| < \varepsilon$. Bởi định nghĩa ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Mệnh đề 1.1.9 (Một số tính chất cơ bản)

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$. Khi đó

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = a \pm b$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = ab$.

(3) Nếu $b \neq 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

(4) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$ thì $a \leq b$.

Các phép
Toán

Mệnh đề 1.1.10 (Nguyên lý kẹp)

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$ và $u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} w_n = a.$$

Mệnh đề 1.1.10 (Nguyên lý kẹp)

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$ và $u_n \le w_n \le v_n$, $\forall n \ge n_0$. Khi đó
$$\lim_{n\to\infty} w_n = a.$$

Ví dụ 1.1.11

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0 > |a|$, $\forall n \geq n_0$ ta có

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a^{n-n_0}}{(n_0+1)(n_0+2)\ldots n} \le \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0}$$

do $\lim \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0} = 0$ vì $\left|\frac{a}{n_0}\right| < 1$ $\Rightarrow \lim \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0} = 0$

(VD 1.1.8)

Mệnh đề 1.1.10 (Nguyên lý kẹp)

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$ và $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\forall n \geq n_0$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} w_n = a.$$

Ví dụ 1.1.11

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Chọn $n_0 > |a| + 1$ là số tự nhiên. Với mọi $n > n_0$ ta có

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{n_0}\right)\left(\frac{|a|}{n_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$\leq \left(\frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{n_0}\right)\left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0}$$

Do $0 \leq \frac{|a|}{n_0} < 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0} = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Mệnh đề 1.1.12 (Các tính chất của dãy hội tụ) đk cần để dãy h.tụ

Giả sử $\{u_n\}$ là dãy hội tụ. Khi đó.

(1) giới hạn của nó là duy nhất

* (2) mọi dãy con của nó đều hội tụ và có cùng giới hạn.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} u_n|$.

* (4) $\{u_n\}$ là bị chặn.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Mệnh đề 1.1.12 (Các tính chất của dãy hội tụ)

Giả sử $\{u_n\}$ là dãy hội tụ. Khi đó.

(1) giới hạn của nó là duy nhất

(2) mọi dãy con của nó đều hội tụ và có cùng giới hạn.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} u_n|$.

(4) $\{u_n\}$ là bị chặn.

Định lý 1.1.13 (Nguyên lý Bonzano-Weierstrass) đk đủ để dãy bị chặn

Mọi dãy bị chặn đều có ít nhất một dãy con hội tụ.

Định nghĩa 1.1.14 (Cận trên đúng)

Giả sử A là một tập con của $\mathbb{R}$.

(1) Số q gọi là một cận trên của A nếu $a \leq q, \ \forall a \in A$.

Định nghĩa 1.1.14 (Cận trên đúng)

Giả sử A là một tập con của $\mathbb{R}$.

(1) Số q gọi là một cận trên của A nếu $a \leq q, \ \forall a \in A$.

(2) Nếu q là cận trên thoả mãn

$$q \leq x \text{ với mọi cận trên } x \text{ của } A$$

thì q gọi là cận trên đúng của A và ký hiệu $q = \sup A$.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.14 (Cận trên đúng)

Giả sử A là một tập con của $\mathbb{R}$.

(1) Số q gọi là một cận trên của A nếu $a \leq q, \ \forall a \in A$.

(2) Nếu q là cận trên thoả mãn
$$q \leq x \text{ với mọi cận trên } x \text{ của } A$$
thì q gọi là cận trên đúng của A và ký hiệu $q = \sup A$.

(3) Nếu $\sup A = q \in A$ thì ta nói q là phần tử lớn nhất của A, ký hiệu là $\max A$.

$\text{Max } A = \sup A \in A$

Sup A k° biết thuộc A hay k°

Định nghĩa 1.1.14 (Cận trên đúng)

Giả sử A là một tập con của $\mathbb{R}$.

(1) Số q gọi là một cận trên của A nếu $a \leq q, \ \forall a \in A$.

(2) Nếu q là cận trên thoả mãn

$$q \leq x \text{ với mọi cận trên } x \text{ của } A$$

thì q gọi là cận trên đúng của A và ký hiệu $q = \sup A$.

(3) Nếu $\sup A = q \in A$ thì ta nói q là phần tử lớn nhất của A, ký hiệu là $\max A$.

Định nghĩa 1.1.15 (Cận dưới đúng)

Giả sử A là một tập con của $\mathbb{R}$ và đặt $-A := \{-a : a \in A\}$. Số $\inf A := -\sup(-A)$ được gọi là cận dưới đúng của A.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Ví dụ 1.1.16

(1) Với $A = [0, 1]$ ta có $\max A = \sup A = 1$, $\min A = \inf A = 0$.

q là cận trên của A $\Leftrightarrow q \geq x \; \forall x \in A \Leftrightarrow q \geq 1$

$\Rightarrow \sup A = 1 \in A \Rightarrow \text{Max } A = 1$

q là cận dưới của A $\Leftrightarrow q \leq x \; \forall x \in A \Leftrightarrow q \leq 0$

$\Rightarrow \inf A = 0 \in A \Rightarrow \text{Min } A = 0$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Ví dụ 1.1.16

(1) Với $A = [0, 1]$ ta có $\max A = \sup A = 1$, $\min A = \inf A = 0$.

(2) Với $A = (0, 1)$ ta có $\sup A = 1, \inf A = 0$ trong khi $\max A$ và $\min A$ không tồn tại.

q là cận trên $\Leftrightarrow q \geq x, \forall\, 0 < x < 1 \Leftrightarrow q \geq 1$

$\sup A = 1 \notin A = (0,1)$

$\Longrightarrow$ Max A k' $\exists$.

Ví dụ 1.1.16

(1) Với $A = [0, 1]$ ta có $\max A = \sup A = 1$, $\min A = \inf A = 0$.

(2) Với $A = (0, 1)$ ta có $\sup A = 1, \inf A = 0$ trong khi $\max A$ và $\min A$ không tồn tại.

(3) Với $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ta có $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = 0$ trong khi $\min A$ không tồn tại.

Ví dụ 1.1.16

(1) Với $A = [0, 1]$ ta có $\max A = \sup A = 1$, $\min A = \inf A = 0$.

(2) Với $A = (0, 1)$ ta có $\sup A = 1, \inf A = 0$ trong khi $\max A$ và $\min A$ không tồn tại.

(3) Với $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ta có $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = 0$ trong khi $\min A$ không tồn tại.

Mệnh đề 1.1.17 (Tính hội tụ của dãy đơn điệu)

(1) Nếu $\{u_n\}$ là một dãy tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup u_n$.

(2) Nếu $\{u_n\}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf u_n$.

Định nghĩa 1.1.18 (số e.)

Xét dãy số $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Khi đó $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 3. Dãy hội tụ tới số vô tỷ $e = 2,718281828\ldots$

$u_n < u_{n+1} < 3 \quad \forall n \geq 1$

$\exists\ e := \lim_{n \to \infty} u_n = 2,71828\ldots$

$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dạng 1^∞

Định nghĩa 1.1.18 (số e.)

Xét dãy số $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Khi đó $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 3. Dãy hội tụ tới số vô tỷ $e = 2,718281828\ldots$

Định nghĩa 1.1.19 (giới hạn riêng)

Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số thực. Nếu có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ tới a thì a được gọi là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$.

VD $u_n = (-1)^n$, $\{u_n\} = \{\underbrace{-1}_{u_1}; \underbrace{1}_{u_2}; \underbrace{-1}_{u_3}; \underbrace{1}_{u_4}; \underbrace{-1}_{u_5}; \ldots\}$

$u_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \to -1$

$u_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \to 1$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.18 (số e.)

Xét dãy số $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Khi đó $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 3. Dãy hội tụ tới số vô tỷ $e = 2,718281828\ldots$

Định nghĩa 1.1.19 (giới hạn riêng)

Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số thực. Nếu có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ tới a thì a được gọi là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$.

Mệnh đề 1.1.20 (Sự tồn tại giới hạn riêng lớn nhất, nhỏ nhất)

(1) Nếu $\{u_n\}$ bị chặn trên thì nó có giới hạn riêng lớn nhất

$\limsup\limits_{n\to\infty} u_n =$ $$\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n := \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq 1} u_{n+k}\right).$$

(2) Nếu $\{u_n\}$ bị chặn dưới thì nó có giới hạn riêng nhỏ nhất

$\liminf\limits_{n\to\infty} u_n =$ $$\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n := \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq 1} u_{n+k}\right).$$

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Mệnh đề 1.1.21 (Một số tính chất của giới hạn riêng lớn nhất, nhỏ nhất)

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (u_n + v_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n$.

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (u_n + v_n) \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n$.

(3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-u_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

mối liên hệ giữa gh riêng lớn nhất và gh riêng nhỏ nhất

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Mệnh đề 1.1.21 (Một số tính chất của giới hạn riêng lớn nhất, nhỏ nhất)

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} v_n.$

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) \geq \varliminf\limits_{n\to\infty} u_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} v_n.$

(3) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-u_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n.$

Mệnh đề 1.1.22 (ĐK cần và đủ để dãy hội tụ)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \underset{=a}{u_n} \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} u_n = \varliminf_{n\to\infty} u_n = a$$

Mệnh đề 1.1.21 (Một số tính chất của giới hạn riêng lớn nhất, nhỏ nhất)

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(u_n + v_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ v_n.$

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(u_n + v_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ v_n.$

(3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-u_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n.$

$\{u_n\} = \{0; 1; 0; 1; 0, \dots\}$
$\quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5$

$u_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

$u_{n+k} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n+k \text{ lẻ} \\ 1 & \text{nếu } n+k \text{ chẵn} \end{cases}$

$\overline{\lim}\ u_n = \inf\limits_{n\ge 1}\left(\sup\limits_{k\ge 0} u_{n+k}\right) = \inf\limits_{n\ge 1}\left(\underbrace{\sup\{0, 1\}}_{1}\right) = 1$

Mệnh đề 1.1.22

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n.$

Ví dụ 1.1.23

Xét dãy $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$. Do $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n = 1$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ u_n = 0$ nên dãy $\{u_n\}$ phân kỳ.

1.1. Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.24

(1) Nếu $\forall M > 0$, $\exists n_0$ sao cho $u_n > M$, $\forall n > n_0$ thì ta nói $\{u_n\}$ có giới hạn dương vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(2) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = +\infty$ thì ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn âm vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

VD 1.1.23 $\quad u_{2n} = 1 \to 1$, $u_{2n-1} = 0 \to 0$

1, 0 là các giới hạn riêng

$0 \le u_n \le 1$, nếu $u_{n_k} \to a$ thì $0 \le a \le 1$

a là 1 gh riêng

Định nghĩa 1.1.24

(1) Nếu $\forall M > 0$, $\exists n_0$ sao cho $u_n > M$, $\forall n > n_0$ thì ta nói $\{u_n\}$ có giới hạn dương vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(2) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = +\infty$ thì ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn âm vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Ví dụ 1.1.25

Xét $u_n = n$ và $v_n = -n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$.

Định nghĩa 1.1.24

(1) Nếu $\forall M > 0$, $\exists n_0$ sao cho $u_n > M$, $\forall n > n_0$ thì ta nói $\{u_n\}$ có giới hạn dương vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(2) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = +\infty$ thì ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn âm vô cùng và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$

Ví dụ 1.1.25

Xét $u_n = n$ và $v_n = -n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$.

Chú ý 1.1.26

(1) Dãy số có giới hạn vô hạn $\pm\infty$ không được coi là hội tụ.

(2) Một dãy không bị chặn trên (hoặc dưới) có thể coi là có giới hạn riêng bằng $+\infty$ (hoặc $-\infty$).

1.2. Giới hạn hàm số

Định nghĩa 1.2.1 (giới hạn hàm số)

Giả sử $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta nói:

(1) f có *giới hạn trái* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } a - \delta < x < a \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

x dần tới a, đều nhỏ hơn a

Định nghĩa 1.2.1 (giới hạn hàm số)

Giả sử $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta nói:

(1) f có *giới hạn trái* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } a - \delta < x < a \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ta kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to a - 0$, hoặc $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \ell$.

1.2. Giới hạn hàm số

Định nghĩa 1.2.1 (giới hạn hàm số)

Giả sử $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta nói:

(1) f có *giới hạn trái* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

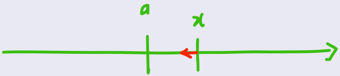
$$\forall x \in A, \text{ nếu } a - \delta < x < a \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ta kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to a - 0$, hoặc $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \ell$.

(2) f có *giới hạn phải* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } a < x < a + \delta \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ta kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to a + 0$, hoặc $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \ell$.



1.2. Giới hạn hàm số

Định nghĩa 1.2.1 (giới hạn hàm số)

Giả sử $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta nói:

(1) f có *giới hạn trái* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$\forall x \in A, \text{ nếu } a - \delta < x < a \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Ta kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to a - 0$, hoặc $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \ell$.

(2) f có *giới hạn phải* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi biến số x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$\forall x \in A, \text{ nếu } a < x < a + \delta \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Ta kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to a + 0$, hoặc $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \ell$.

(3) f có giới hạn $\ell \in \mathbb{R}$ tại điểm a nếu nó có các giới hạn phải và giới hạn trái tại điểm a và đều bằng ℓ, tức là
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \ell.}$$

1.2. Giới hạn hàm số

(4) f có *giới hạn* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi x tiến ra ∞ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } x > M \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to \infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

1.2. Giới hạn hàm số

(4) f có *giới hạn* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi x tiến ra ∞ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } x > M \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to \infty$, hoặc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

(5) f có *giới hạn* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi x tiến ra $-\infty$ nếu

$$\lim_{x \to \infty} [f(-x)] = \ell.$$

Kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to -\infty$, hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

(4) f có *giới hạn* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi x tiến ra ∞ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in A, \text{ nếu } x > M \quad \text{thì} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to \infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

(5) f có *giới hạn* bằng $\ell \in \mathbb{R}$ khi x tiến ra $-\infty$ nếu

$$\lim_{x\to\infty} [f(-x)] = \ell.$$

Kí hiệu $f(x) \to \ell$ khi $x \to -\infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Chú ý

Giới hạn hàm số có thể định nghĩa thông qua giới hạn dãy số nhờ mối liên hệ sau đây

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall x_n \to a,\ x_n \in A \setminus \{a\}, \text{ ta có } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

f k° có gh khi $x \to x_0 \Leftrightarrow x_n \to a,\ y_n \to a$ mà $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$

1.2. Giới hạn hàm số

Định lý 1.2.2 (Các phép toán về giới hạn hàm số)

Cho $f, g : A \to \mathbb{R}$ là hai hàm số xác định trên A. Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Khi đó:

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M$;

(2) $\lim_{x\to a}(c.f)(x) = c.L$, với c là hằng số;

(3) $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = L.M$

(4) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$, với điều kiện $M \neq 0$.

Định lý 1.2.2 (Các phép toán về giới hạn hàm số)

Cho $f, g : A \to \mathbb{R}$ là hai hàm số xác định trên A. Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Khi đó:

(1) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = L + M$;

(2) $\lim\limits_{x \to a} (c.f)(x) = c.L$, với c là hằng số;

(3) $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = L.M$

(4) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L}{M}$, với điều kiện $M \neq 0$.

Ví dụ 1.2.3

Tính các giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$.

$\frac{0}{0}$

1.2. Giới hạn hàm số

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2+4}{2+2} = \frac{3}{2}.$$

hàm lt tại

Mọi hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó

Hàm sơ cấp cơ bản: đa thức, phân thức, mũ, lượng giác và các hàm ngược của nó

Hàm sơ cấp: Hàm số cơ bản $+, -, \cdot, :$ và hợp thành

Vd.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

K0 là sơ cấp

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2+4}{2+2} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 1.2.4

Tính giới hạn $L = \lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$.

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2+4}{2+2} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 1.2.4

Tính giới hạn $L = \lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$.

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2+x+1) - 3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{2.1+1}{(1+1)(1+1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 1.2.5

Tính giới hạn sau $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$.

Ví dụ 1.2.5

Tính giới hạn sau $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}$.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}{x(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 1.2.5

Tính giới hạn sau $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$.

$L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}{x(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 1.2.6

Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$.

Ví dụ 1.2.5

Tính giới hạn sau $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}{x(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 1.2.6

Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

1.2. Giới hạn hàm số

Ví dụ 1.2.7

Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x}$.

Ví dụ 1.2.7

Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x}$.

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} - \frac{(\sqrt[3]{1+2x}-1)(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1)}{x(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} - \frac{1+2x-1}{x(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Định lý 1.2.8 (Nguyên lý kẹp giới hạn)

Cho $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ là ba hàm số xác định trên A. Giả sử hai điều kiện sau đây được thỏa mãn

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in A \setminus \{a\}$;

(2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Định lý 1.2.8 (Nguyên lý kẹp giới hạn)

Cho $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ là ba hàm số xác định trên A. Giả sử hai điều kiện sau đây được thỏa mãn

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in A \setminus \{a\}$;

(2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Ví dụ 1.2.9

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos \frac{1}{x}$.

$\to 0$ $\to \infty$

1.2. Giới hạn hàm số

Định lý 1.2.8 (Nguyên lý kẹp giới hạn)

Cho $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ là ba hàm số xác định trên A. Giả sử hai điều kiện sau đây được thỏa mãn

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in A \setminus \{a\}$;

(2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Ví dụ 1.2.9

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos \dfrac{1}{x}$.

Với mọi $x \neq 0$ ta có $-|x|^3 \leq x^3 \cos \dfrac{1}{x} \leq |x|^3$. Do $\lim\limits_{x \to 0} |x|^3 = 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta có $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos \dfrac{1}{x} = 0$.

1.3. Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.3.1 (hàm số liên tục)

Cho hàm số f xác định trên tập A. Ta nói f là

(1) *liên tục* tại điểm $a \in A$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(2) liên tục trên A nếu nó liên tục tại mọi điểm $a \in A$.

① f xác định tại a

② $\exists \lim_{x \to a} f(x) = \ell$

③ $\ell = f(a)$

Định nghĩa 1.3.1 (hàm số liên tục)

Cho hàm số f xác định trên tập A. Ta nói f là

(1) *liên tục* tại điểm $a \in A$ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(2) liên tục trên A nếu nó liên tục tại mọi điểm $a \in A$.

Ví dụ 1.3.2

Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ h^0 s.c cấp

là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$x < 0$: $f(x) = 0$ lt

$x > 0$: $f(x) = x$ lt

$x = 0$: $0 \leq f(x) \leq |x|$ và $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ $\Rightarrow$ lt tại 0

1.3. Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.3.1 (hàm số liên tục)

Cho hàm số f xác định trên tập A. Ta nói f là

(1) *liên tục* tại điểm $a \in A$ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(2) liên tục trên A nếu nó liên tục tại mọi điểm $a \in A$.

Ví dụ 1.3.2

Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \end{cases}$

là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

tức là $\exists\, x_0, x_1 \in [a, b] : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \;\forall x \in [a, b]$

Định lý 1.3.3 (Weierstrass về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất)

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$.

Định lý 1.3.4 (Cantor về tính liên tục đều)

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f liên tục đều trên $[a, b]$, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta.$$

K0 phụ thuộc x, y

1.3. Hàm số liên tục

Định lý 1.3.4 (Cantor về tính liên tục đều)

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f liên tục đều trên $[a, b]$, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta.$$

Nhận xét 1.3.5 (về hàm số không liên tục đều)

Hàm f không liên tục đều trên tập A nếu và chỉ nếu $\exists \varepsilon_0 > 0$ và $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$ sao cho $|x_n - y_n| \to 0$, nhưng $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

$\Leftrightarrow \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset A : x_n - y_n \to 0, \ f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

VD: $f(x) = \frac{1}{x}$ ko lt đều trên $(0,1)$

$x_n = \frac{1}{n}, \ y_n = \frac{1}{2n}$ ta có $x_n - y_n = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ Hàm k lt đều trên $(0,1)$

$f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n \longrightarrow -\infty$

1.3. Hàm số liên tục

Định lý 1.3.4 (Cantor về tính liên tục đều)

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f liên tục đều trên $[a, b]$, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta.$$

Nhận xét 1.3.5 (về hàm số không liên tục đều)

Hàm f không liên tục đều trên tập A nếu và chỉ nếu $\exists \varepsilon_0 > 0$ và $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$ sao cho $|x_n - y_n| \to 0$, nhưng $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Định lý 1.3.6 (Bolzano về giá trị trung gian của hàm liên tục)

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

(1) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì $\exists c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

(2) Với mọi λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \lambda$.

Ví dụ 1.3.7

Xét tính liên tục của hàm số sau trên miền xác định $\mathbb{R}$ của nó

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.7

Xét tính liên tục của hàm số sau trên miền xác định $\mathbb{R}$ của nó

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

- Xét tại các điểm $a \neq 0$ ta có

  $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = a\sin\frac{1}{a} = f(a)$$

  nên hàm f liên tục tại các điểm $a \neq 0$.

Ví dụ 1.3.7

Xét tính liên tục của hàm số sau trên miền xác định $\mathbb{R}$ của nó

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

- Xét tại các điểm $a \neq 0$ ta có
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = a\sin\frac{1}{a} = f(a)$$
nên hàm f liên tục tại các điểm $a \neq 0$.
- Xét tại điểm $a = 0$. Vì $-|x| \leq \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$, $\forall x \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta có
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$
Do đó, f cũng liên tục tại điểm 0.

Ví dụ 1.3.8

Xét tính liên tục đều của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.3.8

Xét tính liên tục đều của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Xét hai dãy số $x_n = n + \frac{1}{n}$ và $y_n = n, \ \forall n \geq 1$. Ta có

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Tuy nhiên

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2, \ \forall n \geq 1.$$

Vậy hàm số $f(x) = x^2$ không liên tục đều trên tập $A = \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.3.9

Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1 = 2\cos x$ có nghiệm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{3})$

Ví dụ 1.3.9

Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1 = 2\cos x$ có nghiệm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{3})$

Sử dụng định lý giá trị trung gian của hàm số liên tục.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 1 - 2\cos x$. Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, \frac{\pi}{3}]$ và $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi^2}{9} > 0$ nên $f(0)f(\frac{\pi}{3}) < 0$.

Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại một điểm $c \in (0, \frac{\pi}{3})$ sao cho $f(c) = 0$.

Vậy phương trình $x^2 + 1 = 2\cos x$ có nghiệm $x = c \in (0, \frac{\pi}{3})$

Ví dụ 1.3.10

Cho hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho $f(c) = c$.

Ví dụ 1.3.10

Cho hàm số $f : [0,1] \to [0,1]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho $f(c) = c$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x,\ x \in [0,1]$, thì g cũng liên tục trên đoạn $[0,1]$.
Ta có

$$g(0) = f(0) \geq 0 \text{ và } g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

- Nếu $g(0) = 0$ thì chọn $c = 0$ ta có $f(0) = 0$.
- Nếu $g(1) = 0$ thì chọn $c = 1$ ta có $f(1) = 1$.
- Nếu $g(0) > 0$ và $g(1) < 0$ thì ta có $g(0)g(1) < 0$ nên theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g(c) = 0$, hay $f(c) = c$.

1.4. Bài tập

Bài 1.1

Dùng định nghĩa chứng minh:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2+1} = 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-3)^n}{4^n} = 0$.

1.4. Bài tập

Bài 1.1

Dùng định nghĩa chứng minh:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2+1} = 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-3)^n}{4^n} = 0$.

Bài 1.2

Tính giới hạn của các dãy số sau

(1) $x_n = \dfrac{n^2+n-3}{2n^2+2n+2}$

(2) $x_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n+3\sqrt[3]{n}}$.

(3) $x_n = \sqrt{n^2+3n} - n$

(4) $x_n = n - \sqrt[3]{n^3-3n^2}$.

(5) $x_n = \dfrac{2.3^n - 4^n}{2^{2n+1} - 2^n}$

(6) $x_n = \dfrac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}$.

1.4. Bài tập

Bài 1.3

Tính các giới hạn sau

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + 2\cos n}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \cos n^2}{n + \sin n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 + \sin n}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

1.4. Bài tập

Bài 1.3

Tính các giới hạn sau

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + 2\cos n}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\cos n^2}{n+\sin n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

Bài 1.4

Cho hai dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$ thỏa mãn $u_n \leq a, v_n \leq b, \forall n \geq 1$ và

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$.

Bài 1.5

(1) Dùng đẳng thức

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x + C_n^n$$

để chứng tỏ rằng $(x+1)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}x^2, \quad \forall n \geq 2, x > 0.$

(2) Dùng nguyên lý kẹp chứng minh rằng, với $a > 1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$$

1.4. Bài tập

Bài 1.5

(1) Dùng đẳng thức

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x + C_n^n$$

để chứng tỏ rằng $(x+1)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}x^2, \quad \forall n \geq 2, x > 0.$

(2) Dùng nguyên lý kẹp chứng minh rằng, với $a > 1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$$

Bài 1.6

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $\Delta := b^2 - 4ac < 0$. Giả sử $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là hai dãy số sao cho

$$\lim_{n\to\infty} (au_n^2 + bu_n v_n + cv_n^2) = 0.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Bài 1.7

Chứng minh các dãy sau đơn điệu tăng và bị chặn trên (từ đó suy ra dãy hội tụ).

(1) $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

(2) $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

1.4. Bài tập

Bài 1.7

Chứng minh các dãy sau đơn điệu tăng và bị chặn trên (từ đó suy ra dãy hội tụ).

(1) $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

(2) $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Bài 1.8

Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức quy nạp

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\ , \quad n \geq 1.$$

(1) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi 2.

(2) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng.

(3) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.4. Bài tập

Bài 1.9

Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi công thức quy nạp

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

1.4. Bài tập

Bài 1.9

Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi công thức quy nạp

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 1.10

Hãy chỉ ra hai dãy con hội tụ tới hai giới hạn riêng khác nhau của các dãy số sau, từ đó suy ra các dãy số đó phân kỳ.

(1) $x_n = (-1)^n\left(3 + \dfrac{3}{n}\right)$. (2) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Bài 1.11

(1) Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2} - x_n) = 0$.

(2) Áp dụng chỉ ra dãy $\{\sin n\}$ phân kỳ.

Bài 1.

(1) Với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý,

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2}(\frac{3}{2\varepsilon} - 1).$$

Chọn $n_0 = [\frac{1}{2}(\frac{3}{2\varepsilon} - 1)] + 1$. Khi đó với mọi $n > n_0$ ta có

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

(2) Tương tự (1), người học tự giải.

(3) Với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, ta cần chỉ ra n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có

$$\left|\frac{2+(-3)^n}{4^n}\right| < \varepsilon.$$

Muốn vậy ta đánh giá rộng hơn. Ta có

$$\left|\frac{2+(-3)^n}{4^n}\right| \leq \frac{2+3^n}{4^n} < \frac{2.3^n}{4^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{\frac{3}{4}}(\frac{\varepsilon}{2}).$$

Từ đó chọn $n_0 = [\log_{\frac{3}{4}}(\frac{\varepsilon}{2})] + 1$.

Bài 2.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$

(6) Dùng công thức tổng của cấp số nhân,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2^{n+1}-1)}{3^{n+1}-1} = 0.$$

Bài 3.

Dùng nguyên lý kẹp giữa.

(1) $0 \le \left|\dfrac{\sin n + 2\cos n}{n}\right| \le \dfrac{|\sin n|}{n} + \dfrac{2|\cos n|}{n}$. Từ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sin n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cos n|}{n} = 0$$

suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + 2\cos n}{n} = 0.$$

(2) Chia cả tử và mẫu cho n, từ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \cos n^2}{n + \sin n} = 1.$$

(3) Đặt $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Khi đó

$$n \text{ lần số hạng cuối cùng} \le u_n \le n \text{ lần số hạng đầu tiên}$$

tức là

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

(4) Từ $\sqrt[n]{2} \le \sqrt[n]{3+\sin n} \le \sqrt[n]{4}$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n} = 1$.

Bài 4.

Với mọi $n \geq 1$ ta có

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n).$$

Dùng nguyên lý kẹp giữa suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$. Tương tự cũng có $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = b$.

Bài 5.

(1) Do $x > 0$ nên (1) là hiển nhiên.

(2) Do $a > 1$ nên có $b > 0$ để $a = 1 + b$. Áp dụng (1) với $x = b$ ta có

$$a^n = (1+b)^n > \frac{n(n+1)}{2} b^2.$$

Do đó

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{b^2(n+1)}.$$

Bởi nguyên lý kẹp giữa ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$

Tương tự cũng có

$$a^n = (1+b)^n > C_n^3 . b^3.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$

Bài 6.

Viết $a(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2) = (au_n + \frac{bv_n}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}v_n^2$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} 0 \leq (au_n + \frac{bv_n}{2})^2 \leq a(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2) \\ 0 \leq -\frac{\Delta}{4}v_n^2 \leq a(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2). \end{cases}$$

Từ đó cùng với nguyên lý kẹp giữa ta có điều phải chứng minh.

Bài 7.

(1) Hiển nhiên dãy là tăng. Với mọi số tự nhiên $k \geq 1$ ta có $k^2 > k(k-1)$. Do đó

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Do đó $x_n < 2, \quad \forall n \geq 1$. Vậy dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi 2.

(2) Tương tự (1).

Bài 8.

Có thể chứng minh trực tiếp bằng quy nạp hoặc chỉ ra rằng

$$x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Bài 9.

$$\begin{cases} u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}} \\ u_{n-1}^2 = u_{n-2}^2 + \frac{1}{2^{n-2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_2^2 = u_1^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra

$$u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Bài 10.

(1) Xét hai dãy con có chỉ số chẵn và lẻ,

$$x_{2k} = 3 + \frac{3}{2k} \quad \text{và} \quad x_{2k+1} = -(3 + \frac{3}{2k+1}).$$

Khi đó

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 3 \quad \text{và} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = -3.$$

(2) Tương tự (1), $\lim_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = 1$.

Bài 11.

(1) Hiển nhiên.

(2) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x = a$. Khi đó theo (1)

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$. Lại bởi (1) ta có

$$\lim_{n\to\infty} (\cos(n+1) - \cos(n-1)) = 0.$$

Khi đó lại suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. Điều này không xảy ra vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.