Räkneövning 6/9-'21, Analys A

Supremum och Infimum för talföljder $\{a_n\}_1^\infty$:

Strategi:

1) Är $\{a_n\}_1^\infty$ växande, avtagande eller varken eller?

2) Beräkna $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \begin{cases} +\infty \\ \text{ändligt} \\ -\infty \end{cases}$

3) $\{a_n\}_1^\infty$ växande $\Rightarrow$ $\sup\{a_n\} = A = \begin{cases} +\infty \\ \text{ändligt} \end{cases}$

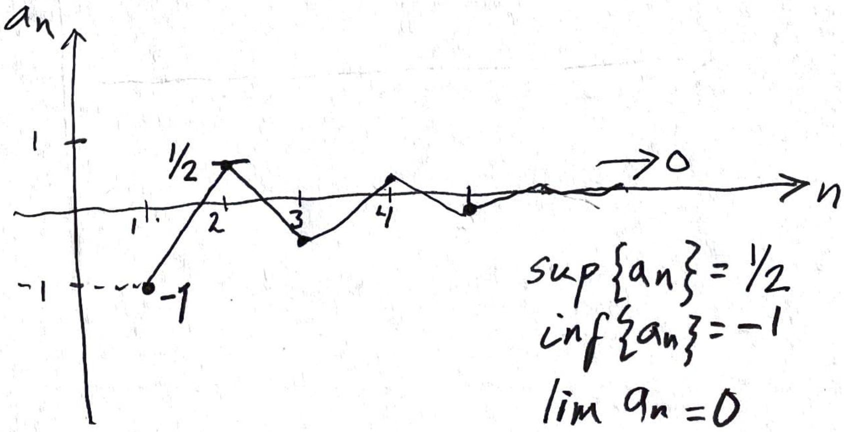
$\inf\{a_n\} = a_1$

4) $\{a_n\}_1^\infty$ avtagande $\Rightarrow$ $\inf\{a_n\} = A = \begin{cases} -\infty \\ \text{ändligt} \end{cases}$

$\sup\{a_n\} = a_1$

$\{a_n\}_1^\infty$ varken växande eller avtagande
$\Rightarrow$ ingen slutsats kan dras om sup och inf från ett ändligt gränsvärde

Ex: $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_1^\infty$



$\sup\{a_n\} = 1/2$

$\inf\{a_n\} = -1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ex. (3.7 alike) K1

a) $\left\{ \dfrac{4n}{9n-2} \right\}_1^\infty$ b) $\left\{ \left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{n/2} \right\}_1^\infty$

Bestäm sup och inf och avgör de antas

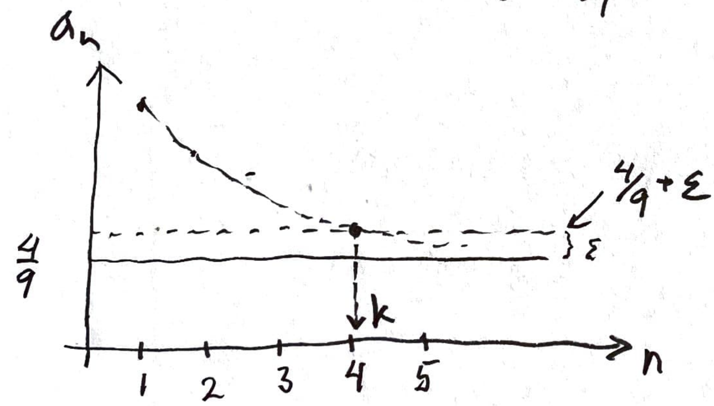
a) $a_n = \dfrac{4}{9-\frac{2}{n}} > \dfrac{4}{9}$

$a_{n+1} < a_n$, eftersom nämnaren blir större för växande n

$\therefore \{a_n\}_1^\infty$ är avtagande och nedåt begränsad

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4}{9} \Rightarrow$ {Monotona konvergenssatsen} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\{a_n\}_1^\infty = \dfrac{4}{9}$; antas inte



För varje $\varepsilon > 0$ finns ett k så att $\frac{4}{9} < a_n < \frac{4}{9} + \varepsilon$ då $n > k$

$\dfrac{4n}{9n-2} < \dfrac{4}{9} + \varepsilon \Rightarrow n > \underbrace{\dfrac{8+18\varepsilon}{81\varepsilon}}_{k}$

$\varepsilon = 1/1000 \Rightarrow n \geq 99$

$a_1 = \frac{4}{7}$ är det största värdet, vilket antas

$$\boxed{\begin{aligned} &\therefore \sup\{a_n\}_1^\infty = \tfrac{4}{7} \text{ som antas} \\ &\inf\{a_n\}_1^\infty = \tfrac{4}{9} \text{ ; antas inte} \end{aligned}}$$

b) $\left\{\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}_1^{\infty}$

$a_n=\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n/2} \overset{(n\geq 1)}{>} 0$ och $\{a_n\}_1^{\infty}$ är växande eftersom

$f'(x)>0$ då $f(x)=\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x/2}$ för $x\geq 1$;

$\sup\{a_n\}_1^{\infty}=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{(-2/3)}{n}\right)^n}_{\to e^{-2/3}}\right]^{1/2}=e^{-1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

[obs! $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\to e^a$ då $n\to\infty$]

$\therefore$ $\{a_n\}_1^{\infty}$ monotont växande och $\sup\{a_n\}=e^{-1/3}$

$a_1=(1-2/3)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$ är det minsta värdet i talföljden

$$\boxed{\begin{array}{l}\therefore\ \sup\{a_n\}=e^{-1/3}\approx 0{,}72,\ \text{antas ej}\\ \inf\{a_n\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58,\ \text{antas}\end{array}}$$

Alternativ:

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n/2}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{2}{3n}\right)}=\{\text{McLaurin}\}$

$=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\left[-\frac{2}{3n}+O(1/n^2)\right]}=\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{3}+O\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{1}{3}}$

K1
3.8

$$\sup M = \inf M = a$$

$$x \in M \Rightarrow a \le x \le a \Rightarrow x = a$$

$$y \in M \Rightarrow a \le y \le a \Rightarrow \underline{y = a = x}$$

$\therefore$ M innehåller bara ett element

K1
3.9 Visa att $\sup(f+g)(x) \le \sup f(x) + \sup g(x)$

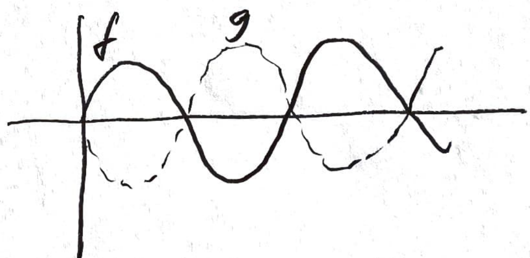
$$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\le \sup f} + \underbrace{g(x)}_{\le \sup g} \le \sup f(x) + \sup g(x)$$

$$\therefore \underline{\sup(f+g)(x) \le \sup f(x) + \sup g(x)}$$

(p.s.s för inf)

Ofta är minsta övre begränsningen av $f+g$ mindre än summan av deras suprema.

Ex: $f = \sin x$, $g = -\sin x$



$$f+g=0 \Rightarrow \sup(f+g) = \inf(f+g) = 0$$

Men $\sup f = \sup g = 1$ och $\inf f = \inf g = -1$

$$\therefore \sup(f+g) = 0 < \sup(f) + \sup(g) = 2$$

$$\inf(f+g) = 0 > \inf(f) + \inf(g) = -2$$

3,10) $\sup\{M\} = a \in \mathbb{R}$. Det finns en följd $\{x_n\}_1^\infty$ med $x_n \in M$ så att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Lösning:

$\sup\{M\} = a \Rightarrow \quad x_n \le a$ för alla $x_n \in M$

$a - \frac{1}{k}$ är inte en övre begränsning $\Rightarrow$

det finns ett $x_k \in M$ sådant att

$$a - \frac{1}{k} < x_k \le a$$

instängningslagen för gränsvärden ger

$$a < \lim_{k\to\infty} x_k \le a \text{, dvs.}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = a}$$