MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Algebra
VT21

Dag 1

(1) **Talsystem.** Diskussionsfråga: När vi mäter olika storheter (t ex längd, tid, vikt eller temperatur) i praktiken, så anges i princip alltid mätetalen som rationella approximationer, vanligtvis som decimaltal med ett ändligt antal decimaler. Så om vi i praktiken alltid räknar med rationella tal, varför kan vi inte också i matematiken begränsa oss till att bara använda rationella tal och helt enkelt strunta i dom irrationella talen?

(2) **Axiomen för addition.** Den associativa lagen kan lite förenklat uttryckas som att parenteser är överflödiga när vi adderar flera termer. Vi kan sätta in eller ta bort parenteser var vi vill. Försök använda denna idé för att på ett enkelt sätt beräkna summan

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 10}.$$

(Ledning: Notera att $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots$)

(3) **Axiomen för multiplikation.** Beräkna nedanstående produkt och fundera på vilka räkneregler du använder.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right).$$

(4) **Binomialsatsen.** Beräkna med hjälp av Pascals triangel $\binom{9}{4}$ och $\binom{10}{7}$.

(5) **Exempel: binomialsatsen.** Beräkna konstanttermen i utvecklingen av

$$\left(2x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}.$$

(6) **Olikheter.** För vilka reella x gäller olikheten $x^2 > x$?

(7) **Aritmetiska och geometriska medelvärden.** Försök att bevisa olikheten

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

för alla positiva tal a, b, c, d. (Använd resultatet i video-avsnittet.)
Mer utmanande: Visa att

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

för alla positiva tal a, b, c. (Använd det föregående fallet!)

/Boris Shapiro, 210118/