Föreläsningar öfver

ANALYTISK GEOMETRI

för de svenske Lärjungar, der önska sig tilegna

STJERNORNES MATHEMATIQUE

hvarjemte full Vetskap åstunda om Mechanismerne för

LUSTIGA HUSET

Utgifne och Redigerade af

Princessan QIMH XANTCHA

uti Nådens År 1789

Innehåll

Kapitel 1

Vektorprodukt

I hela detta kompendium antar vi alla koordinater givna med avseende på en ON-bas e_1, e_2 i planet eller e_1, e_2, e_3 för rummet. På så sätt gäller den enkla och trevliga formeln för skalärprodukt:

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by \qquad \text{respektive} \qquad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz.$$

Skalärprodukten multiplicerar ju, som bekant, ihop två vektorer till en *skalär* (reellt tal). Vi skall nu visa, hur man multiplicerar ihop två vektorer i rummet till en ny *vektor*. Detta är den så kallade *vektorprodukten*, vilken endast existerar i tre dimensioner. Några geometriska användningsområden ges i övningarna; fler kommer i senare kapitel.

§1. Orientering

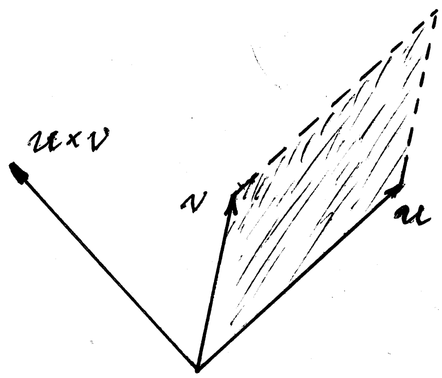
För tre vektorer u, v, w i rummet gäller precis ett av nedanstående fall.

- Vektorerna u, v, w ligger i samma plan. Vi säger då också, att de är **linjärt beroende**.

- Vektorerna u, v, w, tagna i denna ordning, ligger som högra handens tumme, pekfinger, långfinger. Vi säger då, att vektorerna *i denna ordning* är **högerorienterade** (eller **positivt orienterade**).

- Vektorerna u, v, w, tagna i denna ordning, ligger som vänstra handens tumme, pekfinger, långfinger. Vi säger då, att vektorerna *i denna ordning* är **vänsterorienterade** (eller **negativt orienterade**).

Observera, att om trippeln (u, v, w), i denna ordning, är högerorienterad, så är även tripplarna (v, w, u) och (w, u, v) högerorienterade, under det att tripplarna (u, w, v), (w, v, u) och (v, u, w) är vänsterorienterade. Man måste alltså vara uppmärksam på ordningen.



Figur 1: Vektorprodukten. Notera, hur u, v, $u \times v$ ligger som högra handens tumme, pekfinger, långfinger.

§2. Definition av vektorprodukten

Definition 1. — **Vektorprodukten** $u \times v$ av två tredimensionella vektorer u och v definieras entydigt av följande geometriska egenskaper. (Se Figur 1.)

(1) *Riktning.* Vektorprodukten $u \times v$ må vara vinkelrät mot både u och v.

(2) *Längd.* Längden av vektorprodukten $|u \times v|$ må vara lika med arean av den parallellogram, som uppspänns av u och v.

(3) *Orientering.* Om u och v inte är parallella, så må vektorerna u, v, $u \times v$ ligga högerorienterade, tagna i denna ordning.

Om vektorerna u och v *är* parallella, så spänner de upp en urartad parallellogram med arean noll. Det följer då av egenskap (2), att vektorprodukten måste sättas till $u \times v = \vec{0}$, och man behöver inte bekymra sig om varken riktning eller orientering.

Exempel 1. — Antag, att ON-basen e_1, e_2, e_3 är högerorienterad. Geometriskt inser man då, att

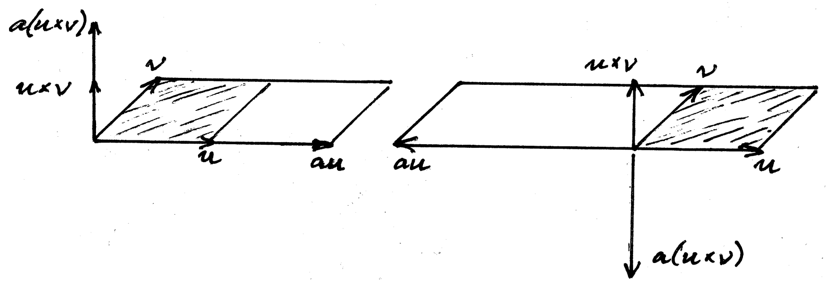
$$e_1 \times e_2 = e_3, \qquad e_2 \times e_3 = e_1, \qquad e_3 \times e_1 = e_2.$$

För att få exempelvis $e_1 \times e_2 = e_3$, måste det visas, att e_3 har de tre egenskaper, som vektorprodukten $e_1 \times e_2$ enligt definitionen skall ha.

(1) Vektorn e_3 är vinkelrät mot både e_1 och e_2, precis som vektorprodukten $e_1 \times e_2$ skall vara.

(2) Vektorn e_3 har längden 1, vilket är detsamma som arean av den *kvadrat*, som e_1 och e_2 uppspänner.

(3) Vektorerna e_1, e_2, e_3 antogs vara högerorienterade, och av vektorprodukten kräver vi ju, att $e_1, e_2, e_1 \times e_2$ skall ligga högerorienterade.



FIGUR 2: Homogenitet för vektorprodukten (vänster sida illustrerar $a > 0$; höger sida fallet $a < 0$).

Vektorn e_3 har alltså de önskvärda egenskaperna, och är därför den sökta vektorprodukten $e_1 \times e_2$. △

§3. Räknelagar för vektorprodukten

Vi fastlägger nu de algebraiska räknelagarna för vektorprodukten.

SATS 1. — *Följande räknelagar gäller för vektorprodukten, där $u, v, w \in \mathbf{R}^3$ är vektorer och $a \in \mathbf{R}$ en skalär.*

(a) *Distributivitet.*

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w \qquad \textit{och} \qquad w \times (u + v) = w \times u + w \times v.$$

(b) *Homogenitet.*

$$au \times v = a(u \times v) = u \times av.$$

(c) *Antikommutativitet.*

$$v \times u = -u \times v.$$

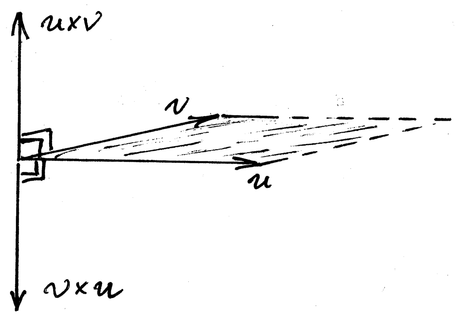
Bevis. Distributiviteten är svårast att verifiera geometriskt och vi avstår.

För homogeniteten studerar vi Figur 2. Vi övertygar oss om, att $a(u \times v)$ har de tre egenskaper, som enligt definitionen karakteriserar vektorprodukten $au \times v$:

(1) Vektorn $a(u \times v)$ är vinkelrät mot au och v. Detta är klart, ty $u \times v$ är vinkelrät mot u och v, och konstanten a bidrar bara med att förlänga eller förkorta denna vektor (och eventuellt byta riktning).

(2) Längden $|a(u \times v)|$ är arean av parallellogrammen, som uppspänns av au och v. Detta följer av, att $|u \times v|$ är arean av parallellogrammen, som uppspänns av u och v. Se Figur 2.

(3) Vektorerna au, v, $a(u \times v)$ är högerorienterade. Detta kan man också lista ut av Figur 2.



Figur 3: Antikommutativitet för vektorprodukten.

Det följer då, att $a(u \times v)$ är lika med $au \times v$, som ju definieras av dessa tre egenskaper.

Antikommutativiteten illustreras i Figur 3. Vektorprodukterna $u \times v$ och $v \times u$ är bägge vinkelräta mot u och v, och de har samma längd, nämligen arean av den skuggade parallellogrammen, och de har orienterats enligt definition, så att trippeln $u, v, u \times v$ är högerorienterad, och likaledes $v, u, v \times u$. Vi ser att $v \times u = -u \times v$. $\square$

Vi varnar för, att vektorprodukten *inte* uppfyller associativa lagen. Vanligen är

$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w).$$

Å andra sidan kommer vi sällan eller aldrig att behöva multiplicera ihop tre vektorer, så denna defekt hos vektorprodukten vållar i regel inga bekymmer.

Nästa uppdrag är att finna en explicit formel.

Sats 2. — *I en högerorienterad ON-bas e_1, e_2, e_3 ges vektorprodukten av formeln*

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - y_3 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Bevis. Det följer helt allmänt, att

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \times (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3)$$

enligt Distributiva lagen är lika med

$$\begin{aligned}(x_1 e_1 \times y_1 e_1) + (x_1 e_1 \times y_2 e_2) + (x_1 e_1 \times y_3 e_3)& \\ + (x_2 e_2 \times y_1 e_1) + (x_2 e_2 \times y_2 e_2) + (x_2 e_2 \times y_3 e_3)& \\ + (x_3 e_3 \times y_1 e_1) + (x_3 e_3 \times y_2 e_2) + (x_3 e_3 \times y_3 e_3)&,\end{aligned}$$

vilket enligt Homogena lagen skrivs om till

$$\begin{aligned}x_1 y_1 (e_1 \times e_1) + x_1 y_2 (e_1 \times e_2) + x_1 y_3 (e_1 \times e_3)& \\ + x_2 y_1 (e_2 \times e_1) + x_2 y_2 (e_2 \times e_2) + x_2 y_3 (e_2 \times e_3)&\end{aligned}$$

$$+ x_3y_1(e_3 \times e_1) + x_3y_2(e_3 \times e_2) + x_3y_3(e_3 \times e_3),$$

vilket enligt Antikommutativa lagen, jämte $v \times v = \vec{0}$, transformeras till

$$(x_2y_3 - x_3y_2)(e_2 \times e_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)(e_3 \times e_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)(e_1 \times e_2).$$

Eftersom vår bas e_1, e_2, e_3 enligt förutsättningen valdes ortonormerad och högerorienterad, så kan vi nyttja formlerna i Exempel 1, och får

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3,$$

som önskat. □

En mnemoniskt stöd kan vara, att räkna ut vektorprodukten som en "determinant"

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

(exempelvis med Sarrus' regel). Denna "formel" är emellertid rent nonsens, och bör aldrig förekomma i en renskriven matematisk lösning. Det är inte tillåtet att stoppa in vektorer i en determinant som ovan. Däremot fungerar formeln utmärkt som *minnesregel* och *algoritm* för att räkna ut vektorprodukten.

Exempel 2. — Vektorprodukten

$$(1, 1, 0) \times (1, 2, 3) = (3, -3, 1)$$

kan räknas ut (på s.k. kladdpapper) med hjälp av "determinanten"

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 1 & 2 & e_2 \\ 0 & 3 & e_3 \end{vmatrix} = 3e_1 - 3e_2 + e_3. \qquad \triangle$$

Hädanefter kommer vi ständigt att förutsätta en högerorienterad ON-bas, så att vi alltid kan nyttja de enkla formlerna för skalärprodukt och vektorprodukt.

§4. Geometrisk tolkning av determinanten

Med hjälp av vektorprodukten kan vi ge en efterlängtad geometrisk tolkning av determinanten. Vi börjar med 2×2-fallet. Om u och v är tvådimensionella vektorer (i planet), kommer vi att skriva $\det(u, v)$ för determinanten, som har koordinaterna för u och v till kolonner.

Sats 3. — *De tvådimensionella vektorerna u och v uppspänner en parallellogram med arean A. Då gäller att determinanten*

$$\det(u,v) = \begin{cases} A & \textit{om } v \textit{ ligger moturs från } u; \\ 0 & \textit{om } v \textit{ och } u \textit{ är parallella;} \\ -A & \textit{om } v \textit{ ligger medurs från } u. \end{cases}$$

Vektorn v kan förstås alltid anses ligga både moturs och medurs från u. I satsen menar vi det håll, som ger *närmaste* vägen.

Bevis. Beteckna $u = (x_1, x_2)$ och $v = (y_1, y_2)$. Deras determinant är

$$\det(u,v) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Genom att lägga till en djupdimension, skulle vi även kunna tänka oss $u = (x_1, x_2, 0)$ och $v = (y_1, y_2, 0)$ som tredimensionella vektorer. Arean av parallellogrammen de uppspänner ges då av vektorproduktens längd:

$$A = |u \times v| = |(x_1, x_2, 0) \times (y_1, y_2, 0)| = |(0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)| = |x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Determinantens tecken måste undersökas. Geometriskt är det lätt att övertyga sig om att, då v ligger moturs från u, så kommer vektorprodukten (p.g.a. högervridningen) att peka uppåt, alltså ha positiv z-koordinat. Talet $x_1y_2 - x_2y_1$ är då positivt, och vi har

$$\det(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1 = |x_1y_2 - x_2y_1| = A.$$

De andra fallen följer på samma vis. □

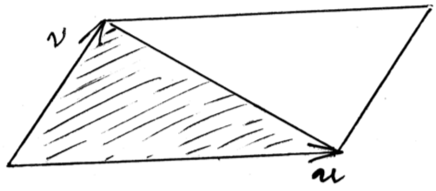
Determinanten av en matris B betyder alltså den tecknade arean av parallellogrammen, som uppspänns av *kolonnerna* i B. På grund av symmetriegenskapen $\det B = \det B^\mathsf{T}$, betyder $\det B$ också arean av den parallellogram, som uppspänns av *raderna* i B.

Exempel 3. — Två vektorer u och v uppspänner i Figur 4 en parallellogram. Rör vi oss i två dimensioner, så ges, enligt satsen, parallellogrammens area av vektorernas determinant. I tre dimensioner kan vi tillgripa vektorprodukten. Arean ges av längden av denna, alltså

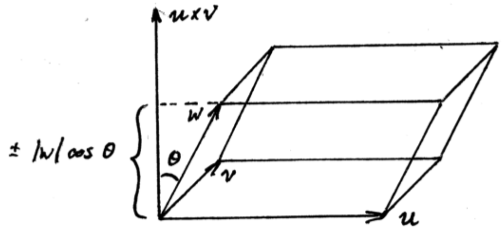
$$|u \times v|.$$

Den skuggade triangelns area är hälften av detta, alltså

$$\frac{1}{2}|u \times v|. \qquad \triangle$$



FIGUR 4: Area av parallellogram och triangel.



FIGUR 5: Volym av parallellepiped.

Vi övergår nu till 3×3-determinanten. Tre vektorer u, v och w uppspänner i Figur 5 en parallellepiped. Vi skall visa, att dess volym kan beräknas med hjälp av determinanten $\det(u, v, w)$, varuti vektorerna u, v och w bildar kolonner (eller rader; sak samma).

SATS 4. — *De tredimensionella vektorerna u, v och w uppspänner en parallellepiped med volymen V. Då gäller att determinanten*

$$\det(u, v, w) = \begin{cases} V & \text{om } u,\ v,\ w \text{ ligger positivt orienterade;} \\ 0 & \text{om } u,\ v,\ w \text{ ligger i samma plan;} \\ -V & \text{om } u,\ v,\ w \text{ ligger negativt orienterade.} \end{cases}$$

Bevis. Beviset löper via den s.k. **skalära trippelprodukten**

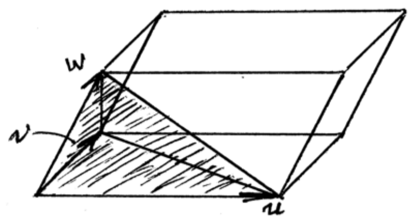
$$(u \times v) \cdot w,$$

som vi nu undersöker både algebraiskt och geometriskt. Med beteckningarna

$$u = (x_1, x_2, x_3), \qquad v = (y_1, y_2, y_3), \qquad w = (z_1, z_2, z_3)$$

kan den skalära trippelprodukten beräknas rent algebraiskt:

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot w &= \Big((x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)\Big) \cdot (z_1, z_2, z_3) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot (z_1, z_2, z_3)\end{aligned}$$



FIGUR 6: Volym av tetraeder.

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Trippelprodukten är alltså lika med determinanten $\det(u, v, w)$.

Vi tolkar nu trippelprodukten geometriskt. Se Figur 5. Enligt definitionen av skalärprodukt är

$$(u \times v) \cdot w = |u \times v||w| \cos\theta.$$

Kvantiteten $|u \times v|$ är arean av basytan i parallellepipeden.

Om u, v, w ligger positivt orienterade, så är $0^\circ \leqslant \theta < 90^\circ$ och $\cos\theta > 0$. Parallellepipedens höjd är då $|w|\cos\theta$, vilket betyder att trippelprodukten är precis volymen V (basytan gånger höjden).

Om vektorerna ligger negativt orienterade, är $90^\circ < \theta \leqslant 180^\circ$ och $\cos\theta < 0$. Parallellepipedens höjd är då $-|w|\cos\theta$, vilket betyder att trippelprodukten är $-V$.

Slutligen, om $\theta = 90^\circ$, så ligger u, v och w i samma plan. Trippelprodukten är då noll (och ävenså volymen V). $\square$

Sammanfattningsvis är alltså volymen av parallellepipeden, som uppspänns av vektorerna u, v och w, lika med *absolutbeloppet* av deras determinant, alltså

$$|\det(u, v, w)|.$$

Determinantens tecken ger information om vektorernas inbördes lägen. Positiv determinant betyder, att vektorerna u, v, w, tagna i denna ordning, ligger positivt orienterade. Negativ determinant betyder negativ orientering.

EXEMPEL 4. — Vektorerna u, v och w uppspänner i Figur 6 en tetraeder. Dess volym är en sjättedel av parallellepipedens, alltså

$$\frac{1}{6}|\det(u, v, w)|.$$

Ty om parallellepipeden har basytan B och höjden h, så är dess volym Bh. Tetraedern har samma höjd h, men halva basytan $\frac{1}{2}B$, så att dess volym är $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}B \cdot h = \frac{1}{6}Bh$. $\triangle$

Exempel 5. — De tre vektorerna $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ och $(0,1,1)$ spänner upp en parallellepiped. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

så har denna volymen 2. Minustecknet betyder att vektorerna, i given ordning, ligger negativt orienterade. Tetraedern, som de spänner upp, har volymen

$$\frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}. \qquad \triangle$$

Övningar

1. Verifiera, att om trippeln (u, v, w) är högerorienterad, så är även tripplarna (v, w, u) och (w, u, v) högerorienterade, medan tripplarna (u, w, v), (w, v, u) och (v, u, w) är vänsterorienterade.

2. Beräkna vektorprodukterna

$$(1,1,2) \times (1,1,1) \qquad \text{och} \qquad (1,1,1) \times (1,1,2).$$

   Kommentera resultatet i relation till Sats 1.

3. Givet den högerorienterade ON-basen e_1, e_2, e_3, verifiera att
   (a) $(e_1 \times e_2) \times e_3 = e_1 \times (e_2 \times e_3)$;
   (b) $(e_1 \times e_2) \times e_2 \neq e_1 \times (e_2 \times e_2)$.

4. Sök arean av parallellogrammen, som uppspänns av vektorerna $(1,-1,1)$ och $(1,1,1)$.

5. Visa, att vektorerna $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ och $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ är ortogonala och har längden 1. Utvidga dem sedan till en ON-bas e_1, e_2, e_3, som är
   (a) högerorienterad;
   (b) vänsterorienterad.

6. Finn arean av triangeln med hörn i $(1,1,1)$, $(2,1,2)$ och $(1,2,3)$.

7. En triangel har två hörn $(1,0,1)$ och $(1,-1,0)$. Det tredje hörnet ligger på linjen $(x,y,z) = (t,t,t)$. Vilken är dess minsta möjliga area?

8. Utred för vilka värden på den reella konstanten a, som de tre vektorerna

$$(1,a,a), \qquad (a,1,a) \qquad \text{och} \qquad (a,a,a)$$

   ligger i samma plan.

9. Låt b vara ett reellt tal, och betrakta de tre vektorerna

$$u = (1, 1, b), \qquad v = (1, -1, 1 + b) \qquad \text{och} \qquad w = (b, b, b).$$

   (a) Finn volymen av parallellepipeden, som uppspänns av dem.
   (b) För vilka värden på b utgör vektorerna u, v, w en bas för rummet?
   (c) För vilka värden på b utgör vektorerna u, v, w en positivt orienterad bas?

10. Betrakta två vektorer u och v i rummet.

   (a) Visa, att arean av parallellogrammen de uppspänner ges av

$$|u||v| \sin \theta,$$

   varest θ betecknar vinkeln mellan vektorerna.

   (b) Bevisa *Lagranges identitet:*

$$|u|^2|v|^2 = |u \times v|^2 + (u \cdot v)^2.$$

11. Tre vektorer u, v och w i rummet uppfyller ekvationen

$$u + v + w = \vec{0}.$$

Visa, att

$$u \times v = v \times w = w \times u.$$

12. Utred, för vilka värden på de reella konstanterna a och b, som de tre vektorerna

$$(a, b, b), \quad (b, a, b) \quad \text{och} \quad (b, b, a)$$

är linjärt beroende.

Kapitel 2

Linjer och plan

Vi skall nu studera geometrien för linjer och plan i rummet.

§1. Linjens ekvation

Givet en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och en vektor $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, så beskriver punkterna

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma), \qquad t \in \mathbf{R},$$

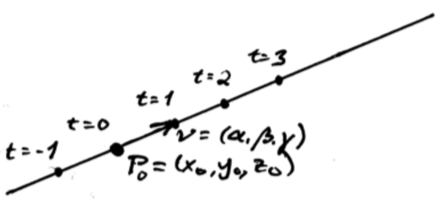
en *linje* i rummet. Se Figur 1. Vektorn (α, β, γ) säges vara en **riktningsvektor** för linjen. Punkterna ovan beskriver hela linjen, då parametern t genomlöper alla reella tal.

Man kan tänka på ekvationen ovan som beskrivande en rymdfarkosts bana (vilket ofta kommer att ske i övningarna). Parametern t tolkas då naturligt som tiden. Farkosten rör sig i en rät linje med riktning beskriven av vektorn (α, β, γ), och befinner sig i punkten (x_0, y_0, z_0) vid tiden $t = 0$.

Linjens ekvation är absolut inte entydigt bestämd. Varje multipel av (α, β, γ) är också en riktningsvektor, och vilken punkt som helst på linjen kan tjäna till startpunkt.

Exempel 1. — Linjen genom punkterna $P = (1, 1, 2)$ och $Q = (2, -3, 5)$ har en riktningsvektor $\overrightarrow{PQ} = (1, -4, 3)$. Utgår vi från P som startpunkt, så blir en ekvation för linjen

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(1, -4, 3), \qquad t \in \mathbf{R}.$$



Figur 1: Linjen.

Man kan också, till exempel, utgå från Q som startpunkt och använda $\overrightarrow{QP} = (-1, 4, -3)$ som riktningsvektor, vilket ger ekvationen

$$(x, y, z) = (2, -3, 5) + s(-1, 4, -3), \qquad s \in \mathbf{R}. \qquad \triangle$$

För linjer i planet finns två alternativ. Ett är att, precis som ovan, beskriva linjen genom punkten (x_0, y_0) med riktningsvektor (α, β) genom parameterekvationen

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Ett annat sätt är, att ge linjens ekvation på *allmän form:*

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

där a och b inte båda är noll. Om $b \neq 0$ är denna ekvivalent med

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

som torde vara välbekant från skolan (k-värde $-\frac{a}{b}$ och m-värde $-\frac{c}{b}$). Emellertid täcker formen (1) även in vertikala linjer, svarande mot $b = 0$ och $a \neq 0$.

För att se, hur parameterformen och allmänna formen låter sig transformeras uti varandra, ger vi två exempel.

Exempel 2. — Linjen med parameterekvationen

$$(x, y) = (1, -1) + t(1, 2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

kan skrivas på allmän form genom elimination av parametern t:

$$x - 1 = t = \frac{y + 1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - y - 3 = 0. \qquad \triangle$$

Exempel 3. — Linjen med allmänna ekvationen $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$ kan omstöpas i parameterform genom att artificiellt introducera en parameter. Enklast är att helt enkelt döpa om någon av variablerna x eller y till parameter. Införes t.ex. $t = y$, fås $x = 2 - 2t$, det vill säga parameterekvationen

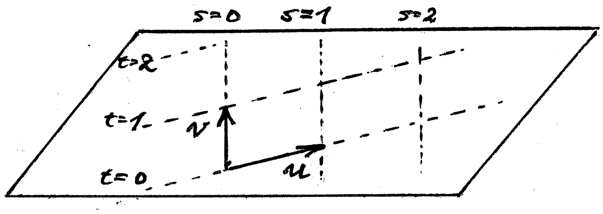
$$(x, y) = (2 - 2t, t) = (2, 0) + t(-2, 1). \qquad \triangle$$

§2. Planets ekvation

Givet en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och två vektorer $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ och $v = (\zeta, \eta, \theta)$, så beskriver punkterna

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(\alpha, \beta, \gamma) + t(\zeta, \eta, \theta), \qquad s, t \in \mathbf{R},$$

ett *plan* i rummet. Se Figur 2. Vektorerna (α, β, γ) och (ζ, η, θ) säges vara **rikt-**



Figur 2: Riktningsvektorer för planet.

ningsvektorer för planet. Punkterna ovan beskriver hela planet, då parametrarna s och t genomlöper alla reella tal.

Det är klart, att ekvationen ovan, planets **parameterekvation**, är långt ifrån entydigt bestämd. Vilken som helst punkt i planet kan tagas till "startpunkt" och vilka två vektorer som helst kan nyttjas som riktningsvektorer. Parameterekvationen är alltså under all kritik. Visserligen är inte heller linjens parameterekvation entydig, vilket vi ju såg i förra avsnittet, men dels är svårigheterna mindre för linjer, dels erbjuds det inget fullgott alternativ för att beskriva linjer i rummet.

För plan finns dock en mycket bättre och smidigare ekvation, som dessutom har förtjänsten att vara nästan entydig. Utgångsläget är nu ett annat, nämligen att beskriva det plan, som passerar genom en fix punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och är ortogonalt mot vektorn $n = (A, B, C)$. Se Figur 3. Punkten $P = (x, y, z)$ ligger i planet om och endast om vektorn

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

är vinkelrät mot vektorn n. Detta ger ekvationen

$$0 = (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0).$$

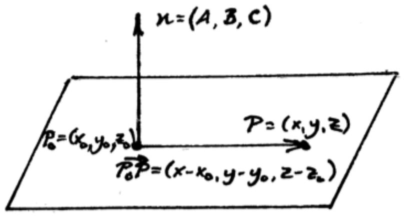
Sätter vi nu $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, är detta ekvivalent med

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

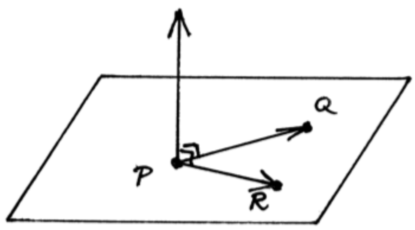
vilken är planets **normalekvation**. Vektorn (A, B, C) är en **normalvektor** till planet.

Som synes innehåller normalekvationen endast fyra konstanter mot parameterekvationens nio, vilket torde räcka för att övertyga om dess förträfflighet. När vi under kursen talar om eller frågar efter "planets ekvation" utan vidare kvalifikation, är det alltid normalekvationen som avses. Vägen dit kan dock ibland gå via parameterekvationen, som i Metod 1 i exemplet som följer.

Exempel 4. — Vi söker ekvationen för planet genom punkterna $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$ och $R = (0, 1, -1)$. Se Figur 4. Det finns åtminstone tre olika sätt att göra detta på, nyttjande olika begrepp i kursen. Läsaren ombedes välja sin favorit.



FIGUR 3: Normalvektor för planet.



FIGUR 4: Tre punkter i planet.

Metod 1: Gauss-elimination av parameterekvationen. Vektorerna

$$\overrightarrow{PR} = (-1, 0, -1) \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$$

ligger i planet. En punkt i planet är till exempel $P = (1, 1, 0)$. En parameterekvation för planet är därför

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + s(-1, 0, -1) + t(-1, 1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 1 - s - t \\ y &= 1 + t \\ z &= - s + t. \end{cases}$$

Variablerna s och t löses ut med Gauss-elimination till

$$\begin{cases} s &= 2 - x - y \\ t &= y - 1 \\ 0 &= x + 2y - z - 3. \end{cases}$$

Den sista ekvationen är planets ekvation på normalform.

Metod 2: Vektorprodukt. Vektorerna

$$\overrightarrow{PR} = (-1, 0, -1) \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$$

ligger i planet. Som normalvektor kan därför tagas vektorprodukten

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -1) \times (-1, 1, 1) = (1, 2, -1),$$

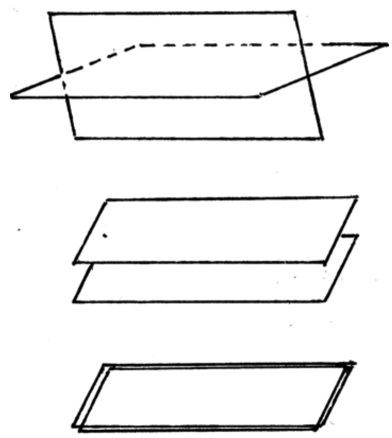
emedan denna ju, per konstruktion, är vinkelrät mot både $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PQ}$. Planets ekvation är därför på formen $x + 2y - z + D = 0$. Som punkten $P = (1, 1, 0)$ tillhör planet, måste $D = -3$. Planets ekvation är alltså $x + 2y - z - 3 = 0$.

Metod 3: Determinant. Punkten $X = (x, y, z)$ ligger i planet om och endast om vektorerna

$$\overrightarrow{PX} = (x - 1, y - 1, z), \qquad \overrightarrow{PR} = (-1, 0, -1) \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$$

är linjärt beroende. Detta inträffar precis då determinanten av de tre vektorerna är noll, vilket direkt ger planets ekvation

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - z - 3. \qquad \triangle$$



Figur 5: Skärande, parallella och sammanfallande plan.

§3. Incidens mellan plan

Vi skall nu studera det fundamentala problemet, att undersöka hur linjer eller plan kan ligga i förhållande till varandra i rummet.

För två plan i rummet finns tre möjligheter, skisserade i Figur 5. De kan skära varandra längs en linje, vara parallella eller också sammanfalla. För att finna vilketdera gäller, sätt ihop planens ekvationer till ett ekvationssystem och lös detta.

Exempel 5. — Planen $x - z = 2$ och $x + y + z = 1$ skär varandra längs linjen

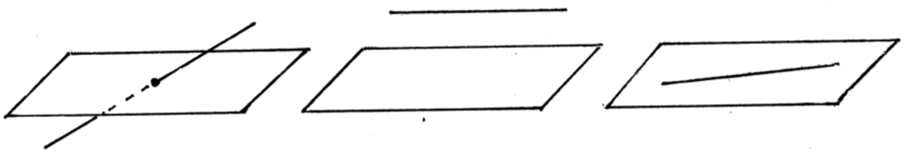
$$\begin{cases} x - z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -1 - 2t \\ z &= t. \end{cases} \qquad \triangle$$

Exempel 6. — Planen $-x + y - 3z = 1$ och $2x - 2y + 6z = 1$ är parallella, ty ekvationssystemet

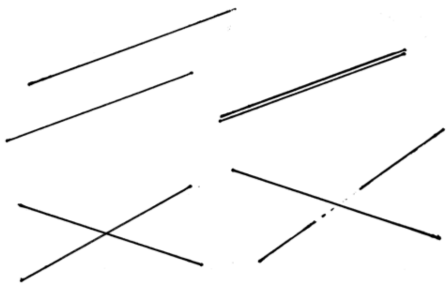
$$\begin{cases} -x + y - 3z &= 1 \\ 2x - 2y + 6z &= 1 \end{cases}$$

saknar lösning. △

Här finner vi alltså den geometriska tolkningen av ett ekvationssystem! Ett system med tre obekanta och två ekvationer betyder skärningen mellan två plan i rummet. Ett system med tre ekvationer och tre obekanta skulle förstås betyda skärningen mellan tre plan. Är det inte märkvärdigt, hur de algebraiska begreppen alltid lyckas få geometrisk betydelse, och hur allting i den linjära algebran, liksom magiskt, tycks hänga ihop?



FIGUR 6: Linje skärande, parallell med, respektive liggande inuti ett plan.



FIGUR 7: Parallella, sammanfallande, skärande och skeva linjer.

§4. Incidens mellan linje och plan

För en linje och ett plan i rummet finns också tre möjligheter, skisserade i Figur 6. Linjen kan skära planet i en unik punkt, vara parallell med planet, eller också ligga inuti planet.

EXEMPEL 7. — Vi undersöker linjen $(x, y, z) = (1 - t, 1 + t, 2 + t)$ och planet $2x + y - z = 0$. En godtycklig punkt på linjen är $(1 - t, 1 + t, 2 + t)$, vilken substitueras i planets ekvation:

$$0 = 2(1 - t) + (1 + t) - (2 + t) = 1 - 2t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{1}{2}.$$

Linjen skär alltså planet i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. △

§5. Incidens mellan linjer

För två linjer i rummet finns däremot fyra möjligheter, skisserade i Figur 7. Förutom fallen, då linjerna är parallella, sammanfallande eller skärande, tillkommer här en fjärde möjlighet. Linjerna kan nämligen passera förbi varandra, utan att för den skull vara parallella. (Tänk på planskilda korsningar på motorvägen.) Man säger då, att linjerna är **skeva**.

EXEMPEL 8. — Två rymdfarkoster färdas längs linjerna

$$(x, y, z) = (1 - t, 2 + t, -1 - 3t) \quad \text{respektive} \quad (x, y, z) = (2 - t, -1 + 2t, -2t),$$

där t är tiden. För att undersöka, huruvida de kolliderar, kan vi helt enkelt sätta motsvarande koordinater lika, och lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 - t &= 2 - t \\ 2 + t &= -1 + 2t \\ -1 - 3t &= -2t, \end{cases}$$

vilket saknar lösning. Farkosterna kolliderar inte; de befinner sig aldrig på samma plats vid samma tidpunkt.

Låt oss nu i stället undersöka om banorna skär varandra. Vi vill nu veta, huruvida farkosterna passerar samma punkt i rymden, oavsett om de råkar passera samtidigt eller ej (vilket vi redan vet, att de inte gör). Eftersom tiderna t nu kan vara olika, *utbyter vi parametern i ena ekvationen mot en ny bokstav* s och löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 - s &= 2 - t \\ 2 + s &= -1 + 2t \\ -1 - 3s &= -2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = 1 \\ t = 2. \end{cases}$$

Vid tidpunkterna 1 respektive 2 passerar därför farkosterna den gemensamma punkten $(0, 3, -4)$. △

Exempel 9. — Linjerna

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + s(-1, 1, 0) \qquad \text{och} \qquad (x, y, z) = (-1, -1, 0) + t(1, 1, -1)$$

saknar skärning, ty ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 - s &= -1 + t \\ s &= -1 + t \\ -1 &= -t \end{cases}$$

saknar lösning. Linjerna är ej heller parallella, eftersom riktningsvektorerna $(-1, 1, 0) \nparallel (1, 1, -1)$. De är alltså skeva. △

Övningar

1. (a) Ange tre punkter på linjen $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, 2, 3)$.
   (b) Ligger punkten $(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{9}{2})$ på linjen?
2. Ange en ekvation för linjen genom punkterna $(3, -6, -5)$ och $(4, -3, -3)$.
3. Ange en ekvation för linjen genom punkterna $(1, 1)$ och $(-1, 2)$
   (a) på parameterform;
   (b) på allmän form.

4. (a) Ange tre punkter i planet $3x + y - z = 1$.
   (b) Ligger punkten $(-4, 7, -4)$ i planet?

5. Bestäm ekvationen för planet genom punkterna

$$(1, 2, 0), \qquad (0, 1, 1) \qquad \text{och} \qquad (2, -1, -3).$$

6. Ligger de fyra punkterna

$$(-1, -1, 0), \qquad (0, 4, 1), \qquad (1, 0, -1) \qquad \text{och} \qquad (1, -3, -2)$$

i samma plan?

7. Betrakta de fyra punkterna

$$A = (1, 2, 3), \quad B = (7, 1, 3), \quad C = (4, 3, 1) \quad \text{och} \quad D = (-2, 4, 1).$$

   (a) Visa, att fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram.
   (b) Beräkna dess area.
   (c) Bestäm ekvationen för planet den ligger i.

8. Ange ekvationen för det plan, som går genom punkten $(1, -1, 2)$ och innehåller linjen

$$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 2, -3).$$

9. Ekvationen $(x, y) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$ beskriver en linje i planet. Visa, att dess riktningskoefficient (k-värde) är $\frac{\beta}{\alpha}$.

10. Ekvationen $ax + by + c = 0$ beskriver en linje i planet på allmän form. Visa, att vektorn (a, b) är ortogonal mot linjen. (Jämför med planets ekvation på normalform.)

11. Undersök, hur planen $2x+y-3z = 5$ och $x+2y-z = 4$ ligger i förhållande till varandra.

12. Undersök, hur linjerna

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + s(1, -1, 2) \qquad \text{och} \qquad (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 1, 1)$$

ligger i förhållande till varandra.

13. Undersök linjerna

$$\begin{aligned} &(x, y, z) = (1, -4, 5) + s(15, -21, 33) \\ \text{och} \quad &(x, y, z) = (6, -11, 16) + t(-65, 91, -143). \end{aligned}$$

14. (a) Bestäm ekvationen för planet genom punkterna

$$(1,1,1), \qquad (-2,-1,2) \qquad \text{och} \qquad (0,0,1).$$

(b) Avgör, huruvida linjen $(x,y,z) = (1,1,0) + t(1,1,2)$ skär detta plan, och bestäm i så fall var.

15. De tre rymdrebellerna Lukas Molnpromenerare, Hans Ensamvarg och prinsessan Laila färdas med sina rymdskepp längs de tre linjerna

$$\begin{aligned} l &: (x,y,z) = (4,0,4) + t(-2,1,-2) \\ h &: (x,y,z) = (4,4,4) + t\left(-1,2,-\frac{1}{2}\right) \\ p &: (x,y,z) = (12,-12,8) + t(2,-4,1), \end{aligned}$$

där $t \in \mathbf{R}$ betyder tiden (som alltså kan vara negativ).

(a) Avgör, hur de tre linjerna ligger i förhållande till varandra i rymden: om de är sammanfallande, parallella, skärande eller skeva.

(b) Avgör, huruvida två rymdskepp någonsin möts i samma punkt, och ange i så fall var och när detta inträffar.

20

Kapitel 3

Vinklar och avstånd

I detta kapitel skall vi nu lösa konkreta geometriska problem gällande beräkning av vinklar och avstånd.

§1. Vinklar

Vinklar mellan linjer och plan låter sig med lätthet beräknas. Vinkeln mellan två linjer är helt enkelt vinkeln mellan deras riktningsvektorer. Vinkeln mellan två plan är densamma som vinkeln mellan deras normalvektorer.

Mellan en linje och ett plan är vinkeln obetydligt svårare att beräkna. Vi visar med ett exempel, hur det går till.

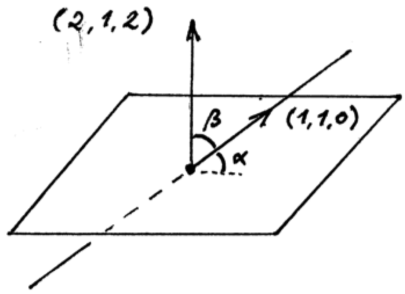
Exempel 1. — Planet $2x + y + 2z = 999$ och linjen

$$(x, y, z) = (344, 566, 788) + t(1, 1, 0)$$

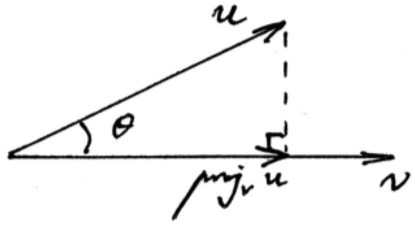
måste skära varandra någonstans, ty linjens riktningsvektor $(1, 1, 0)$ är inte vinkelrät mot planets normalvektor $(2, 1, 2)$ (skalärprodukten är ej noll). Se Figur 1. Vinkeln β mellan linjen och planets normal fås av

$$\cos \beta = \frac{(1,1,0) \cdot (2,1,2)}{|(1,1,0)||(2,1,2)|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

så att $\beta = 45^\circ$. Vinkeln mellan planet och linjen är $\alpha = 90^\circ - \beta = 45^\circ$. △



Figur 1: Vinkel mellan linje och plan.



FIGUR 2: Projektion av vektor.

§2. AVSTÅND TILL PLAN

Vi ger nu en systematisk genomgång av de olika metoderna för avståndsberäkning i rummet. Ett fundamentalt verktyg är följande formel, en av mycket få formler i algebrakursen man faktiskt bör lära sig utantill.

SATS 1 (PROJEKTIONSFORMELN). — *Projektionen av vektorn u på vektorn v ges av formeln*

$$\operatorname{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v.$$

Bevis. Vi ser i Figur 2, att projektionen $\operatorname{proj}_v u$ kännetecknas av tre egenskaper: (1) den är parallell med v, (2) den "pekar åt samma håll" som u och (3) dess längd är $|u||\cos\theta|$. Vi visar nu, att $\frac{u\cdot v}{|v|^2}v$ har dessa tre egenskaper, och alltså är lika med den sökta projektionen $\operatorname{proj}_v u$.

(1) Eftersom $\frac{u\cdot v}{|v|^2}$ är en skalär (ett tal), så ser vi direkt, att $\frac{u\cdot v}{|v|^2}v$ är en multipel av v.

(2) Vidare är

$$\frac{u \cdot v}{|v|^2} v = \frac{|u||v|\cos\theta}{|v|^2} v = \frac{|u|\cos\theta}{|v|} v.$$

Om θ är spetsig, så är $\cos\theta > 0$, varför denna vektor pekar åt samma håll som både v och u. Om θ är trubbig, så är $\cos\theta < 0$, och vektorn pekar åt motsatt håll som v, det vill säga återigen åt samma håll som u. Fallet med rät vinkel θ lämnas åt läsaren att begrunda.

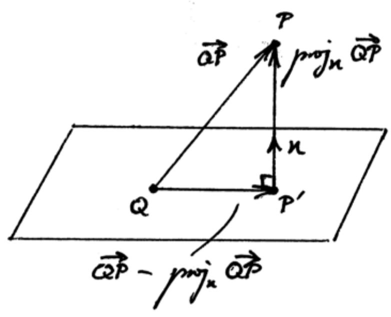
(3) Slutligen är

$$\left|\frac{u \cdot v}{|v|^2} v\right| = \frac{|u||v||\cos\theta|}{|v|^2}|v| = |u||\cos\theta|,$$

så att vektorn $\frac{u\cdot v}{|v|^2}v$ även har rätt längd. □

EXEMPEL 2. — Vi söker avståndet mellan planet $x + y + 2z = 3$ och punkten $P = (-1, 3, 3)$. Se Figur 3. Utgå från någon punkt i planet, säg $Q = (0, 3, 0)$. Projektionen av vektorn $\overrightarrow{QP} = (-1, 0, 3)$ på planets normalvektor $n = (1, 1, 2)$ är

$$\operatorname{proj}_n \overrightarrow{QP} = \frac{(-1, 0, 3) \cdot (1, 1, 2)}{|(1, 1, 2)|^2}(1, 1, 2) = \frac{5}{6}(1, 1, 2)$$



FIGUR 3: Avstånd från punkt till plan.

enligt Projektionsformeln. Avståndet från P till planet är därför

$$\left|\frac{5}{6}(1,1,2)\right| = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

Vidare är projektionen av $\overrightarrow{QP} = (-1,0,3)$ ned i planet

$$\overrightarrow{QP} - \mathrm{proj}_n \overrightarrow{QP} = (-1,0,3) - \frac{5}{6}(1,1,2) = \frac{1}{6}(-11,-5,8),$$

så att den punkt i planet, som ligger närmast punkten P, är

$$P' = (0,3,0) + \frac{1}{6}(-11,-5,8) = \frac{1}{6}(-11,13,8). \qquad \triangle$$

Antag nu, att vi söker avståndet mellan två parallella plan. Avståndet är konstant överallt, och vi kan därför välja valfri punkt P i det ena planet, och söka avståndet mellan P och det andra planet med metoden ovan.

Samma sak gäller, när vi söker avståndet mellan ett plan och en linje parallell med detta. Välj någon punkt P på linjen och sök avståndet mellan P och planet.

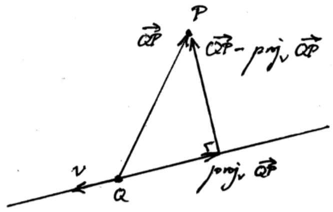
EXEMPEL 3. — Linjen

$$(x,y,z) = (-1,3,3) + t(1,1,-1)$$

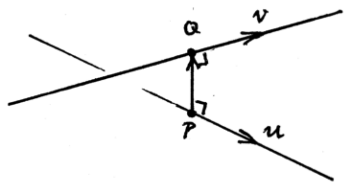
är parallell med planet $x+y+2z = 3$, ty linjens riktningsvektor $(1,1,-1)$ är *vinkelrät mot* planets normalvektor $(1,1,2)$ (skalärprodukten är noll). Avståndet mellan dem är därför detsamma som avståndet mellan planet och punkten $P = (-1,3,3)$ på linjen, vilket vi beräknade i exemplet ovan. $\triangle$

§3. AVSTÅND TILL LINJER

För att finna avståndet mellan en punkt P och en linje, kan man återigen nyttja Projektionsformeln. Metoden är väsentligen densamma, som för avståndet mellan en punkt och ett plan. Se Figur 4.



Figur 4: Avstånd från punkt till linje.



Figur 5: Avstånd mellan linjer.

(1) Utgå från valfri punkt Q på linjen, och beräkna vektorn $\overrightarrow{QP}$.
(2) Beräkna dess projektion $\operatorname{proj}_v \overrightarrow{QP}$ på linjens riktningsvektor v.
(3) Avståndet mellan punkten och linjen ges av

$$\left|\overrightarrow{QP} - \operatorname{proj}_v \overrightarrow{QP}\right|.$$

Helt annorlunda går man tillväga, då man önskar beräkna avståndet mellan två linjer. Här hjälper inte Projektionsformeln.

Exempel 4. — Linjerna

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + s(2, 1, -1) \qquad \text{och} \qquad (x, y, z) = (9, 0, 4) + t(4, -1, 1)$$

är skeva. Detta inses därav, att de ej skär varandra (lätt räkning), samt det faktum att riktningsvektorerna $u = (2, 1, -1)$ och $v = (4, -1, 1)$ ej är parallella. Låt oss beräkna kortaste avståndet mellan dem.

Se Figur 5. En godtycklig punkt på vardera linjen är

$$P = (-1 + 2s,\ s,\ 2 - s) \qquad \text{respektive} \qquad Q = (9 + 4t,\ -t,\ 4 + t).$$

Där avståndet är som minst, skall vektorn

$$\overrightarrow{PQ} = (10 - 2s + 4t,\ -s - t,\ 2 + s + t)$$

vara vinkelrät mot både u och v. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = (2, 1, -1) \cdot (10 - 2s + 4t,\ -s - t,\ 2 + s + t) = 18 - 6s + 6t \\ 0 = (4, -1, 1) \cdot (10 - 2s + 4t,\ -s - t,\ 2 + s + t) = 42 - 6s + 18t, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s - t = 3 \\ s - 3t = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

De två punkter på linjerna, som ligger närmast varandra, är

$$P = (1, 1, 1) \qquad \text{och} \qquad Q = (1, 2, 2).$$

Avståndet mellan linjerna är

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(0, 1, 1)| = \sqrt{2}. \qquad \triangle$$

Övningar

1. Betrakta de två linjerna

$$(x, y, z) = (2 - t, 2 - t, -1 + 2t)$$
$$(x, y, z) = (-1 - 3t, -t, 1 - 2t).$$

   (a) Visa, att de skär varandra i en punkt, och bestäm skärningspunktens koordinater.

   (b) Bestäm skärningsvinkeln.

2. Bestäm vinkeln mellan planen $x - 2y - 2z = -3$ och $x + 4y + z = 5$.

3. (a) Visa, att planet $4x - 11y - 5z = -21$ skär linjen

$$(x, y, z) = (2, 3, 1) + t(1, 1, 4)$$

   i en punkt och bestäm denna.

   (b) Beräkna skärningsvinkeln.

4. Prinsessan Laila har kommit i besittning av ritningarna till kejsar Pampatines kraftfulla dator Dödshjärnan. Hennes rymdskepp stormas av Rymdimperiets trupper, men hennes två trogna robotar $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{C}^3$ lyckas fly med de hemliga ritningarna ombord på en liten sond, som skjuts ut ur moderskeppet i riktning mot planeten Tentooine. (Här kommer de sedermera att möta den blivande rymdrebellen Lukas Molnpromenerare, som bor på en bondgård på Tentooine tillsammans med sin gammelmoster.)

   Robotarnas skepp följer banan

$$(x, y, z) = (5, 5, 6) + t(1, 1, 4), \qquad t \geqslant 0,$$

   tills de kraschar på planeten Tentooines yta med ekvationen

$$4x - 11y - 5z + 128 = 0.$$

   (a) Bestäm i vilken punkt robotarnas rymdskepp kraschlandar.

   (b) Beräkna nedslagsvinkeln (den spetsiga vinkeln mellan rymdskeppets bana och marken).

5. Slemklumpen Baba Butt har kidnappat rymdrebellen Hans Ensamvarg på grund av obetalda spelskulder. Som straff skall han kastas i den bottenlösa brunnen ute i öknen på planeten Tentooine, där ett ohyggligt odjur med en massa tentakler dväljes.

   Planeten Tentooines yta beskrivs av planet $-x + y + z = 4$. Punkterna med $-x + y + z < 4$ är i underjorden; punkterna med $-x + y + z > 4$ är ovan jord. Den bottenlösa brunnens mynning befinner sig i punkten $(2, 3, 3)$.

(a) Baba Butt tänker dumpa Hans Ensamvarg i brunnen från en punkt, som ligger exakt avståndet $\sqrt{12}$ ovanför brunnen (räknat ortogonalt mot planetens yta). Vilken punkt är detta?

(b) Baba Butt flyger rakt till denna punkt från sitt palats i $(-6, -1, -1)$. Ange en ekvation för den linje, Baba Butt måste färdas längs.

(c) Beräkna den spetsiga vinkeln mellan linjen och Tentooines yta.

6. Visa, att de två planen $x + y + z = 1$ och $x + y + z = 2$ är parallella, och sök avståndet dem emellan.

7. Visa, att linjen $(x, y, z) = (2, 3, -1) + t(3, -1, 0)$ är parallell med planet $x + 3y - 2z - 15 = 0$. Sök avståndet mellan dem.

8. Beräkna avståndet från punkten $(3, -1, 0)$ till det plan, som går genom punkterna $(2, -3, 0)$ och $(2, -2, 2)$, samt är parallellt med linjen

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + t(1, 1, -1).$$

9. Vilken punkt i planet genom punkterna $(1, 3, -1)$, $(1, 1, 0)$ och $(-1, 3, 2)$ ligger närmast punkten $(7, 1, 5)$?

10. Rymdrebellerna Lukas Molnpromenerare och Hans Ensamvarg är ute på bevakningsuppdrag. Var och en av dem spejar över ett plan i rymden, med order att nedskjuta alla fientliga farkoster inom detta. I Rymdimperiets officiella koordinater har dessa plan ekvationerna

$$x + 2y + 3z = 1 \qquad \text{respektive} \qquad -x - y + z = 2.$$

(a) Prinsessan Laila är en nyckelperson i frihetskampen, och skall därför stå under dubbel bevakning. Vilken linje skall hon färdas längs, för att beskyddas av båda rymdrebellerna?

(b) Imperiets ondskefulle kejsare Pampatine färdas längs linjen

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(2, 2, -2).$$

Visa, att han därmed undviker upptäckt av den ene av rebellerna, och ange vilken.

(c) Beräkna avståndet mellan kejsar Pampatines bana och planet denne rebell bevakar.

11. (a) Rymdrebellen prinsessan Laila är ute i strid. Hennes rymdskepp ligger i koordinaterna $(-2, 4, 5)$. Rymdimperiets ondskefulle kejsar Pampatine befinner sig ombord på sin stjärnkryssare, som ligger i planet $x + 2y + 3z = 6$. Bestäm den punkt i stjärnkryssarens plan, som ligger närmast prinsessan Laila.

(b) Prinsessan Laila avfyrar en projektil längs linjen

$$(x, y, z) = (-2, 4, 5) + t(2, -1, -1).$$

Avgör, huruvida hon träffar stjärnkryssaren, som har formen av en triangel, bestämd av ekvationerna

$$x + 2y + 3z = 6, \qquad x, y \geqslant -1, \qquad x + 7y \leqslant 1.$$

12. Beräkna det kortaste avståndet från punkten $(1, 2, 3)$ till linjen

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + t(-1, 2, -1).$$

Bestäm även den närmaste punkten på linjen.

13. Beräkna det kortaste avståndet mellan linjerna

$$(x, y, z) = t(-3, 3, 1) \qquad \text{och} \qquad (x, y, z) = (-1, 0, 0) + t(1, 1, 1).$$

14. Rymdrebellerna Lukas Molnpromenerare och Hans Ensamvarg färdas med sina rymdskepp längs linjerna

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, 2, 1) \quad \text{respektive} \quad (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, -4, 1),$$

där t betyder tiden.

(a) Avgör, huruvida deras banor är sammanfallande, parallella, skeva eller skärande. Om de skär varandra, skall skärningspunkten anges.

(b) I origo befinner sig Rymdimperiets ondskefulle kejsare Pampatine med sin kraftfulla dator Dödshjärnan. Han önskar förinta Lukas Molnpromenerare, då denne befinner sig som närmast origo på sin bana. Därför programmerar han Dödshjärnan att beräkna vid vilken tidpunkt detta inträffar, vilken den närmaste punkten är samt avståndet till denna punkt. Hjälp kejsar Pampatine att besvara dessa frågor.
(Kejsar Pampatine torde dock bli förbaskad över svaret.)

15. Den ondsinte kejsar Pampatine har tillfångatagit prinsessan Laila. För att tvinga henne till lydnad och samtidigt imponera i största allmänhet, tänker han låta sin kraftfulla dator Dödshjärnan förinta hennes hemplanet Algebran med koordinaterna $(-1, 1, -3)$.

(a) Kejsar Pampatine befinner sig i punkten $(3, -4, 5)$ och avfyrar sina dödsbringande kanoner längs linjen

$$(x, y, z) = (3, -4, 5) + t(-1, 1, -2), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Visa, att planeten Algebran överlever.

(b) På vilket avstånd passerar kanonsalvan planeten Algebran?

(c) Vilken linje *borde* kejsar Pampatine ha siktat längs, för att träffa planeten Algebran?

16. Härled en formel för avståndet från punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$ till planet $Ax + By + Cz + D = 0$.

17. En linje passerar genom punkten P och har riktningsvektor v. Motivera geometriskt, att avståndet till linjen från punkten Q ges av

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times v|}{|v|}.$$

Kapitel 4

Geometrisk tolkning av linjära avbildningar

En vanlig reell funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avbildar varje reellt tal på ett nytt tal. Exempelvis avbildar kvadreringsfunktionen $x \mapsto x^2$ talet 2 på 4, medan talet 1 avbildas på sig själv. Geometriskt transformerar alltså funktionen varje punkt på reella tallinjen till en ny punkt. Vi skall nu vidga våra vyer och studera funktioner eller avbildningar i flera dimensioner. Analytikerna brukar tala om *funktioner*, medan algebraikerna föredrar termen *avbildning*.

En avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ transformerar således varje punkt (eller vektor) i planet till en ny punkt (eller vektor) i planet. En avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tar varje punkt (vektor) i rummet till en ny punkt (vektor) i rummet.

Funktioner och avbildningar finns det gott om. Många komplicerade sådana (polynomiella, rationella, trigonometriska, cyklometriska, ...) studeras inom den endimensionella analysen. Nu är ju detta linjär algebra, och vi skall därför nöja oss med, att studera den allra enklaste klassen av avbildningar i flera dimensioner, de *linjära*. Det finns emellertid en tillräckligt rikhaltig flora av dessa.

En reell funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är linjär, om den ges av en simpel formel

$$y = ax,$$

där a är någon konstant. (Inom analysen brukar visserligen även funktioner av typen $y = ax + b$ anses vara linjära; så ej inom algebran.) På motsvarande sätt ges en linjär avbildning i flera dimensioner av en formel

$$Y = AX,$$

där A nu är en *matris* (och X och Y är kolonnmatriser).

Många geometriska transformationer visar sig vara linjära till sin natur, exempelvis projektioner, speglingar och rotationer. Mer komplicerade funktioner behandlas inom den flerdimensionella analysen.

§1. Avbildningsmatriser

Definitionen av en linjär avbildning är något teknisk:

Definition 1. — En avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (eller $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$) är **linjär** om

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

för alla skalärer $a, b \in \mathbf{R}$ och alla vektorer $u, v \in \mathbf{R}^2$ (eller $u, v \in \mathbf{R}^3$).

Vårt första mål är att beskriva linjära avbildningar med hjälp av matriser. Låt alltså $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning. Antag, att

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

är en godtycklig vektor i planet. Enligt lineariteten avbildas u på

$$T(u) = T(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2).$$

Den transformerade vektorn $T(u)$ beror alltså entydigt på bilderna $T(e_1)$ och $T(e_2)$ av de två basvektorerna. Sätt $T(e_1) = (a, b)$ och $T(e_2) = (c, d)$:

$$T(u) = x_1(a, b)+x_2(c, d) = (ax_1+cx_2, bx_1+dx_2) = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Då vektorer skrivs som kolonnmatriser, betyder alltså avbildningen T helt enkelt multiplikation med **avbildningsmatrisen**

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

vars kolonner är bilderna $T(e_1)$ och $T(e_2)$. Motsvarande gäller för en avbildning i rummet:

Sats 1. — *Den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (eller $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$) uttrycks med formeln*

$$Y = AX,$$

där kolonnmatrisen X ger koordinaterna för en vektor u, kolonnmatrisen Y ger koordinaterna för $T(u)$, och kolonnerna i avbildningsmatrisen A är $T(e_1)$, $T(e_2)$ (och $T(e_3)$).

Exempel 1. — Som ett första exempel kan vi betrakta den tredimensionella avbildningen T med matrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Direkt ur matrisen kan vi avläsa, att basvektorerna e_1, e_2 och e_3 avbildas på $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$ respektive $(1, 0, 0)$ (kolonnerna i T). Väljer vi någon annan vektor, exempelvis $u = (2, 1, 0)$, så transformeras den till

$$T(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Två naturliga problem inställer sig nu.

1. Hur kan en given avbildningsmatris tolkas geometriskt?

2. Hur bestäms matrisen för en given geometrisk avbildning?

Dessa frågeställningar utredes i de kommande avsnitten.

§2. Lustiga huset

Här följer några enkla geometriska exempel på linjära avbildningar i planet. Se Figur 1.

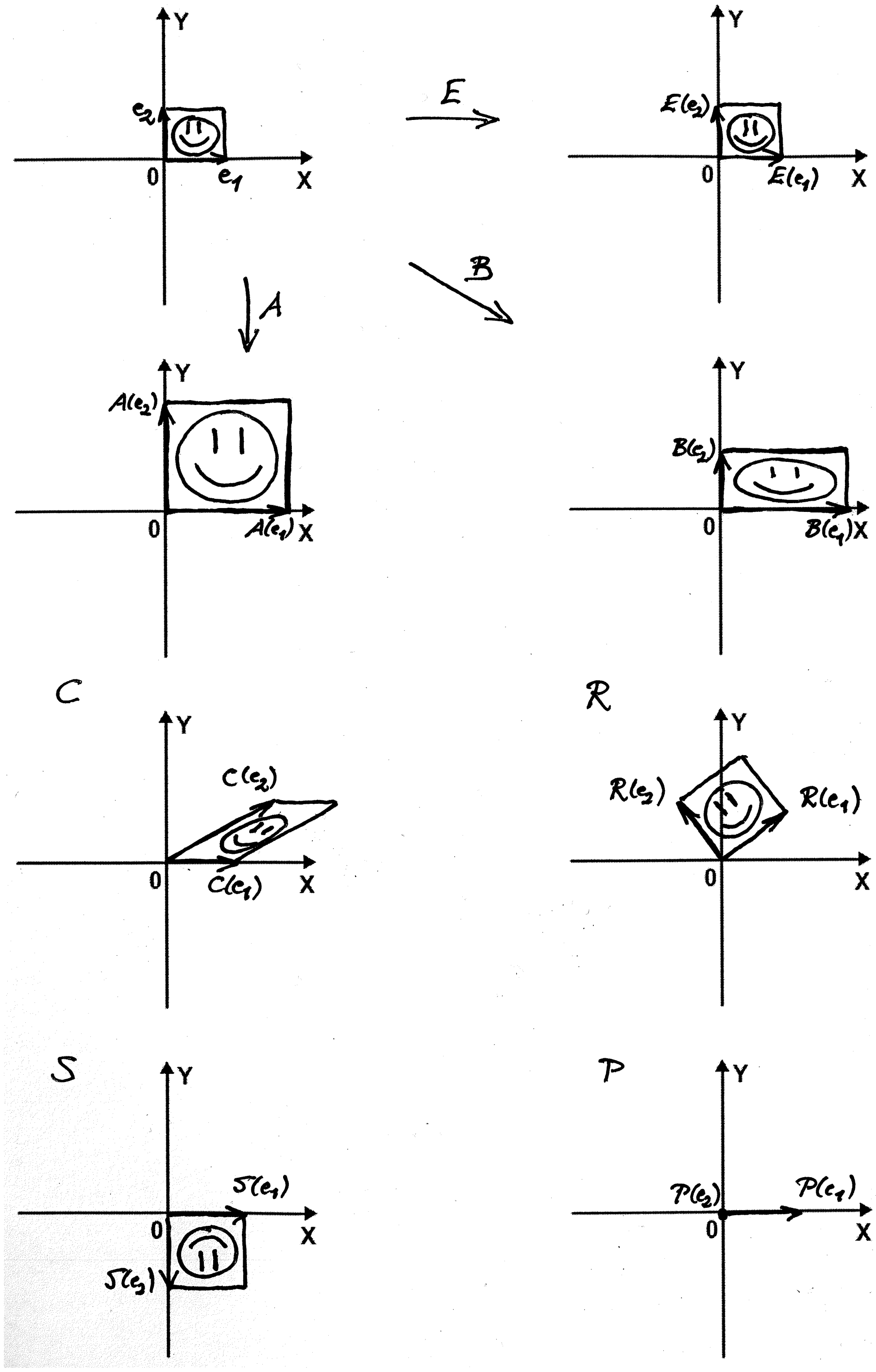
1. *Identitetsavbildningen:*
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Här är $E(e_1) = (1, 0) = e_1$ och $E(e_2) = (0, 1) = e_2$. Alla vektorer (och punkter) avbildas på sig själva.

2. *Skalning* med faktorn 2:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Här är $A(e_1) = (2, 0) = 2e_1$ och $A(e_2) = (0, 2) = 2e_2$. Alla vektorer sträcks ut till dubbla sin längd.

3. *Töjning* med faktorn 2 i x-led:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Här är $B(e_1) = (2, 0) = 2e_1$ och $B(e_2) = (1, 0) = e_2$. Avbildningen töjer varje vektor horisontellt med faktorn 2. Den vertikala komponenten påverkas inte.

4. *Skjuvning* med faktorn 2 i x-led:
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Här är $C(e_1) = (1, 0)$ och $C(e_2) = (2, 1)$.

5. *Vridning* vinkeln θ (positiv vinkel betyder moturs):
$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



Figur 1: Exempel på linjära avbildningar.

6. *Spegling* i x-axeln:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. *Projektion* på x-axeln:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§3. Basbyte

Givet en bas, så ges en linjär avbildning av multiplikation med avbildningsmatrisen enligt formeln $Y = AX$. Men avbildningsmatrisen är inte fix, utan *förändrar utseende när man byter bas.* I de föregående avsnitten angav vi alla våra avbildningsmatriser i standardbasen $e_1 = (1, 0)$ och $e_2 = (0, 1)$ i planet (och motsvarande för rummet) och angav våra avbildningar med avseende på denna. Vi identifierade, något slarvigt, avbildningen med dess matris. I fortsättningen kommer det att vara viktigt att skilja på *avbildningen*, som är rent geometrisk, och *avbildningsmatrisen*, som i allra högsta grad är beroende av koordinatsystemet. På samma sätt är det viktigt, att särskilja den rent geometriska *vektorn* och dess *koordinater* i någon bas.

Nu ämnar vi noga beskriva effekterna av ett basbyte på avbildningsmatrisen. Metoden för att analysera en godtycklig avbildning är nämligen, att *byta till någon bas, i vilken avbildningsmatrisen antager en särskilt enkel form.*

Vi påminner om de allmänna principerna för basbyte. I planet arbetar vi ständigt med koordinater givna relativt *standardbasen* e_1, e_2. Den förutsättes alltid ortonormerad och positivt orienterad (för att få enkla formler för skalär- och vektorprodukt). Införandet av en ny bas enligt

$$\begin{cases} e_1' = ae_1 + be_2 \\ e_2' = ce_1 + de_2 \end{cases}$$

kodas av *basbytesmatrisen*

$$Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Observera, att basbytesmatrisens första kolonn ges av *den nya första basvektorn*, &c. I en avbildningsmatris ges, enligt samma princip, första kolonnen av *bilden av första basvektorn*, &c.

Koordinatbyte sker enligt formeln

$$X = QX',$$

där kolonnmatrisen X anger koordinaterna för en vektor i den gamla basen och X' anger koordinaterna för samma vektor i den nya basen.

Antag nu, att den linjära avbildningen T ges av matrisen A i standardbasen. Om kolonnmatrisen X ger koordinaterna för vektorn u i standardbasen och Y ger koordinaterna för $T(u)$, så gäller att

$$Y = AX.$$

Efter koordinatbytet har u koordinaterna X' och $T(u)$ koordinaterna Y'. Sambanden $X = QX'$ och $Y = QY'$ ger

$$QY' = Y = AX = AQX' \qquad \Leftrightarrow \qquad Y' = Q^{-1}AQX'.$$

I de nya koordinaterna beskrivs alltså avbildningen T av multiplikation med matrisen $Q^{-1}AQ$, vilket därför är avbildningsmatrisen i den nya basen:

Sats 2. — *Låt en avbildning ha matrisen A i någon bas. Avbildningsmatrisen i en ny bas, där basbytet kodas av basbytesmatrisen Q, är*

$$A' = Q^{-1}AQ.$$

Exempel 2. — Avbildningen T har matrisen

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. För att analysera denna geometriskt, inför vi en ny bas enligt

$$\begin{cases} e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}((1+\sqrt{2})e_1 + e_2) \\ e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(-e_1 + (1+\sqrt{2})e_2). \end{cases}$$

Basbytesmatrisen är

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

vilken är ortogonal, ty det verifieras enkelt att $QQ^\mathsf{T} = E$. Den nya basen är alltså ortonormerad.

Avbildningsmatrisen i den nya basen är nästan övernaturligt simpel (givet det invecklade basbytet):

$$A' = Q^{-1}AQ = Q^\mathsf{T}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den nya ortonormerade basen e_1', e_2' avbildas alltså på $T(e_1') = e_1'$ respektive $T(e_2') = -e_2'$, varav vi sluter, att T betyder spegling i e_1'. △

I exemplet var det väsentligt för den geometriska tolkningen, att den *nya basen var ortonormerad*. Spegling sker nämligen alltid ortogonalt mot den linje eller det plan, som speglas i. I en snedvinklig bas skulle matrisen A' inte längre betyda spegling, utan något mer komplicerat ("sned spegling", eller vad man nu skall kalla det). Av denna anledning vill man oftast byta till en ny ortonormerad bas.

Läsaren ställer sig kanske med rätta frågan, hur man får sina avbildningsmatriser att antaga en så behaglig form, som i exemplet ovan. Hur finner man den magiska basen? Svaret ges inte här, men det finns en systematisk metod (teorien för *diagonalisering* och *egenvektorer*), som undervisas i mer avancerade kurser i linjär algebra.

§4. Sammansättning och invers

Avslutningsvis skall vi ge en geometrisk tolkning av matrismultiplikation och matrisinvers.

Låt F och G vara linjära avbildningar i planet (eller rummet). Avbildningen

$$FG(u) = F(G(u)),$$

kallas den **sammansatta avbildningen** FG. Observera noga ordningen. *Avbildningen FG transformerar först med G, sedan med F.*

Sats 3. — *Antag avbildningen F ha matrisen A och avbildningen G matrisen B. Den sammansatta avbildningen FG har då matrisen AB.*

Bevis. Låt vektorn u ha koordinaterna X. Då har $G(u)$ koordinaterna BX, och $FG(u) = F(G(u))$ har koordinaterna $A(BX) = ABX$. Avbildningen FG har alltså avbildningsmatrisen AB. □

Exempel 3. — I Lustiga huset beundrade vi matriserna för vridning vinkeln θ och töjning faktorn 2 i horisontell led:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningen, som består i att först töja och sedan vrida, har matrisen

$$RB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -\sin\theta \\ 2\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observera ordningen. Önskar vi först vrida och därefter töja, får vi matrisen

$$BR = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Resultatet beror, som synes, av ordningen (matrismultiplikation är ej kommutativ). △

Låt oss nu betrakta en enskild linjär avbildning F. Om det till varje vektor v finns precis en vektor u, sådan att $F(u) = v$, är avbildningen F **inverterbar** med inversen F^{-1}, som avbildar

$$F^{-1}(v) = u.$$

Avbildningen F transformerar, och F^{-1} transformerar tillbaka.

Sats 4. — *Avbildningen F är inverterbar precis då dess avbildningsmatris A är inverterbar, och inversen F^{-1} har då avbildningsmatrisen A^{-1}.*

Bevis. Att det till varje v hör precis ett u, sådant att $F(u) = v$, betyder på matrisspråk, om vektorerna u och v erhåller koordinaterna X respektive Y, att det till varje kolonnmatris Y hör precis en kolonnmatris X, sådan att $Y = AX$. Ekvationssystemet $Y = AX$ skall alltså vara entydigt lösbart för varje högerled Y, vilket är ekvivalent med existensen av matrisinversen A^{-1} enligt Linjära algebrans huvudsats. I sådant fall är $X = A^{-1}Y$, vilket betyder att A^{-1} är matrisen för F^{-1}. □

Exempel 4. — Vi vet sedan tidigare, att matrisen

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

betyder vridning vinkeln θ moturs (om $\theta > 0$). Geometriskt inser vi, att den inversa transformationen R_θ^{-1} bör *vrida tillbaka*, således innebära en vridning vinkeln θ *medurs*. Mycket riktigt finner vi algebraiskt, att R_θ har inversen

$$R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}. \qquad \triangle$$

Exempel 5. — En spegling är alltid sin egen invers, vilket man inser geometriskt. Man kan också inse det algebraiskt. En spegling i exempelvis ett plan, som i lämplig ON-bas är $e_1'e_2'$-planet, har nämligen matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

som tydligen är sin egen invers. △

Exempel 6. — En projektion kan däremot aldrig vara inverterbar. Om det tredimensionella rummet pressas ned på ett linje eller ett plan, så kan uppenbarligen inte transformationen omvändas. Flera punkter (oändligt många) projiceras ju på *samma* punkt i linjen eller planet. Åter kan detta inses algebraiskt. Projektion på ett exempelvis ett plan, som i lämplig ON-bas är

$e_1'e_2'$-planet, har nämligen matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tydligen i avsaknad av invers. △

Vi avslutar detta kapitel med den definitiva versionen av Linjära algebrans huvudsats, en vacker förening av teoriens alla centrala begrepp.

Sats 5 (Linjära algebrans huvudsats). — *Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande utsagor är ekvivalenta.*

(a) *Matrisen A är inverterbar.*

(b) *Determinanten* $\det A \neq 0$.

(c) *Ekvationssystemet $AX = B$ är entydigt lösbart för varje högerled B.*

(d) *Kolonnerna i A utgör en bas, så att A beskriver ett basbyte.*

(e) *En linjär avbildning $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med A som matris (i någon bas) är inverterbar.*

Bevis. Enligt föregående sats är (a) ekvivalent med (e). Ekvivalensen av (a)–(d) kände vi redan innan. □

Övningar

1. Betrakta avbildningen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestäm bilderna av basvektorerna under T.

   (b) Bestäm bilden av vektorn $(1, 1)$.

   (c) Vilka vektorer avbildas på $(1, 0)$?

2. (a) Hur transformeras smileyn (se Figur 1) under avbildningen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

   (b) Hur transformeras smileyn under avbildningen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}?$$

3. Tolka geometriskt avbildningarna

(a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$;

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Avbildningen T har matrisen

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

(a) Visa, att en ny ortonormerad bas ges av

$$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + 2e_2) \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2e_1 + e_2). \end{cases}$$

(b) Bestäm matrisen A' för T i denna nya bas.

(c) Tolka avbildningen geometriskt.

5. Låt T vara den linjära avbildning, som i standardbasen har matrisen

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Inför en ny bas enligt

$$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3) \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \\ e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3). \end{cases}$$

Visa, att denna nya bas är ortonormerad.

(b) Finn avbildningsmatrisen för T i den nya basen.

(c) Tolka avbildningen T geometriskt.

6. Avbildningen T har matrisen

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Vad är matrisen för T i den bas, som ges av

$$\begin{cases} e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases} ?$$

Tolka avbildningen geometriskt. (Detta är möjligt, ehuru den nya basen ej är ortonormerad.)

7. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa, att följande bas är ortonormerad:

$$\begin{cases} e_1' = (0, 1, 0) \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, -1) \\ e_3' = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, 3). \end{cases}$$

(b) Finn avbildningsmatrisen för T i denna bas.

(c) Tolka avbildningen geometriskt.

8. (a) Visa, att vektorerna

$$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \\ e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \end{cases}$$

beskriver en ny bas i rummet.

(b) Avgör, om denna nya bas är ortonormerad.

(c) Avgör, huruvida den är höger- eller vänsterorienterad (positivt eller negativt orienterad).

(d) Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn avbildningsmatrisen i basen e_1', e_2', e_3'.

(e) Tolka avbildningen geometriskt.

9. Låt T vara den linjära avbildning, som har avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avgör om T är inverterbar, och bestäm i så fall matrisen för T^{-1}.

10. Låt R_α och R_β vara vridning vinklarna α respektive β. Verifiera algebraiskt (genom att multiplicera ihop matriserna) sambandet

$$R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta.$$

Tolka detta geometriskt.

11. Visa följande för en linjär avbildning T:

(a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ för alla vektorer u, v;

(b) $T(au) = aT(u)$ för alla vektorer u och reella tal a;

(c) $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

12. Visa, att avbildningen

$$T(x,y) = (x + y^2, 2x + y)$$

inte är linjär.

Kapitel 5

Algebraisk framställning av linjära avbildningar

Vi beskriver nu, för tre mycket vanliga typer av geometriska avbildningar, hur avbildningsmatrisen låter sig beräknas. Dessa är *projektion*, *spegling* och *rotation* (vridning).

§1. Projektion

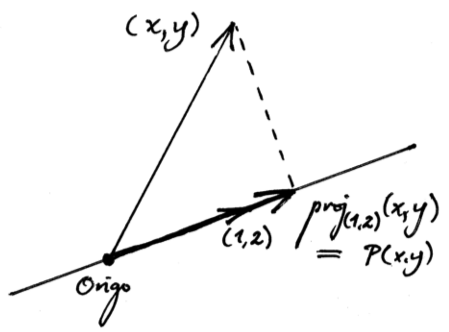
Vi skall inleda med att studera projektion på en linje och på ett plan. Det är mycket viktigt att notera, att den linje eller det plan, som man projicerar på, *måste passera genom origo*. Eljest kommer inte origo att projiceras på sig själv, och detta är ett nödvändigt krav på en linjär avbildning (övning 4.11 i förra avsnittet).

Vi påminner om det viktiga verktyget *Projektionsformeln*

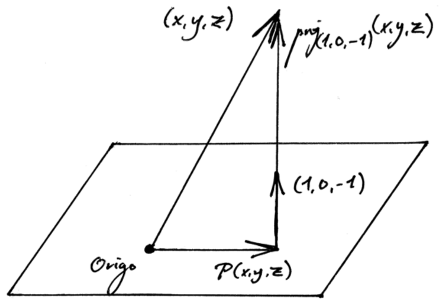
$$\operatorname{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v,$$

som ger projektionen av vektorn u på vektorn v.

Exempel 1. — Vi söker matrisen för projektionen P på linjen $(x, y) = t(1, 2)$. Se Figur 1. En godtycklig vektor (x, y) projiceras på



Figur 1: Projektion på linjen $(x, y) = t(1, 2)$.



Figur 2: Projektion på planet $x - z = 0$.

$$P(x,y) = \operatorname{proj}_{(1,2)}(x,y) = \frac{(x,y)\cdot(1,2)}{|(1,2)|^2}(1,2) = \frac{x+2y}{5}(1,2)$$
$$= \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatrisen är därför $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. △

Exempel 2. — Vi söker matrisen för projektionen P på planet $x - z = 0$. Se Figur 2. Projektionen av en godtycklig vektor (x,y,z) på planets normalvektor $(1,0,-1)$ är

$$\operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,-1)}{|(1,0,-1)|^2}(1,0,-1) = \frac{x-z}{2}(1,0,-1)$$

och projektionen ned i planet ges av

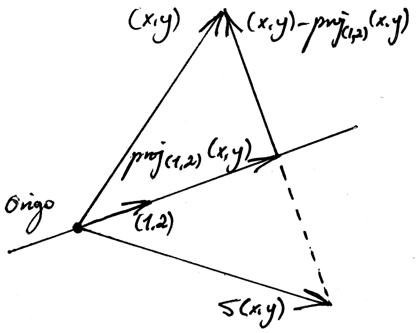
$$P(x,y,z) = (x,y,z) - \operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{x-z}{2}(1,0,-1)$$
$$= \frac{1}{2}(x+z, 2y, x+z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+z \\ 2y \\ x+z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatrisen är därför

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

§2. Spegling

För spegling används väsentligen samma metod som för projektion. Åter gäller, att den linje eller det plan vi speglar i, måste passera genom origo, för att avbildningen skall vara linjär.



Figur 3: Spegling i linjen $(x, y) = t(1, 2)$.

Exempel 3. — Vi söker matrisen för speglingen S i linjen $(x, y) = t(1, 2)$. Se Figur 3. Projektionen av vektorn (x, y) på linjen är, enligt Exempel 1,

$$\operatorname{proj}_{(1,2)}(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y).$$

Projektionen på linjens normalvektor är

$$(x, y) - \operatorname{proj}_{(1,2)}(x, y),$$

varför speglingen av (x, y) i linjen är

$$\begin{aligned} S(x,y) &= (x,y) - 2\Big((x,y) - \operatorname{proj}_{(1,2)}(x,y)\Big) = 2\operatorname{proj}_{(1,2)}(x,y) - (x,y) \\ &= \frac{2}{5}(x+2y, 2x+4y) - (x,y) = \frac{1}{5}(-3x+4y, 4x+3y) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Speglingsmatrisen är därför $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. △

§3. Rotation

Vridning i planet vinkeln θ moturs kring origo har, som vi tidgare sett, matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exempel 4. — Matrisen för vridning vinkeln 60° moturs är

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ △

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGUR 4: Rotation vinkeln θ kring x-axeln, y-axeln respektive z-axeln.

Rotation kring en linje i rummet är en mera komplicerad procedur. Vi betraktar först det enklaste fallet, nämligen rotation vinkeln θ moturs kring z-axeln. Konventionen är, att positivt θ betyder rotation *moturs, sett från spetsen av* e_3. Negativ vinkel betyder rotation medurs. Vi inser ganska enkelt, att matrisen för denna avbildning är

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvektorerna e_1 och e_2 vrides på samma sätt som tidigare (första och andra kolonnerna); deras z-koordinater är 0 även efter rotationen. Basvektorn e_3 påverkas inte av rotationen, utan avbildas på sig själv (tredje kolonnen).

Matriser för rotation kring samtliga koordinataxlar finns uppställda i Figur 4. (Observera särskilt minustecknets placering vid rotation kring y-axeln!)

Rotation kring en godtycklig vektor v kan nu behandlas genom att byta till en ny *positivt orienterad* ortonormerad bas e_1', e_2', e_3', där $e_3' = \frac{v}{|v|}$ är en enhetsvektor, som pekar åt samma håll som v. I denna nya bas är nämligen avbildningsmatrisen på ovanstående enkla form. Basen måste vara positivt orienterad för att undvika teckenfel, då det är tal om moturs och medurs.

EXEMPEL 5. — Låt oss finna matrisen för rotation kring linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ vinkeln 90° moturs, sett från spetsen av $(1, 1, 1)$.

Som första steg inför vi en ny ortonormerad bas. Tredje basvektorn fås genom att normera $(1, 1, 1)$:

$$e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

En vektor som är vinkelrät mot denna är till exempel $(1, -1, 0)$, vilken normeras till $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Som andra basvektor måste vi då ta

$$e_2' = e_3' \times e_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Nu blir nämligen e_3', e_1', e_2' positivt orienterade, och därför också e_1', e_2', e_3'. Vektorn e_2' får automatiskt längden 1, ty om e_3' och e_1' är ortogonala med längden 1, spänner de upp en kvadrat med arean 1.

I denna nya bas är avbildningsmatrisen

$$A' = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basbytesmatrisen är

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

och eftersom bytet sker mellan ortonormerade baser, är denna matris ortogonal, det vill säga

$$Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen i standardbasen är således

$$A = QA'Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

eftersom $A' = Q^{-1}AQ$ enligt formeln för basbyte. △

Övningar

1. Bestäm matrisen för projektion på linjen $x + y = 0$ (i planet).
2. (a) Bestäm matrisen för projektion på linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$, och finn därefter projektionen av vektorn $(1, 2, 3)$.
   (b) Bestäm matrisen för spegling i linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$, och finn därefter spegelbilden av vektorn $(1, 2, 3)$.
3. (a) Bestäm matrisen för projektion på planet $x + 2y + z = 0$.
   (b) Bestäm matrisen för spegling i planet $x + 2y + z = 0$.
4. Bestäm matrisen för vridning vinkeln 30° medurs i planet, och finn därefter vad vektorn $(1, 2)$ vrides till.
5. Finn matrisen för rotation vinkeln 90° moturs kring x-axeln (i rummet).
6. Finn matrisen för rotation vinkeln 90° moturs kring vektorn $(1, 2, 2)$.
7. Finn matrisen för rotation vinkeln 45° moturs kring vektorn $(0, 1, 1)$.

8. Låt T betyda spegling i planet

$$-3x + y - z = 0.$$

   (a) Finn avbildningsmatrisen för T i standardbasen.

   (b) Är avbildningen T inverterbar? Motivera svaret.

9. Bestäm matrisen för den avbildning, som består i att först spegla i linjen $(x, y) = t(2, 1)$ och sedan vrida vinkeln 45° moturs.

10. Avbildningen T består av projektion på xz-planet, följd av rotation vinkeln 135° moturs kring z-axeln.

   (a) Finn avbildningsmatrisen för T.

   (b) Finn bilden av vektorn $(1, 1, 2)$ under T.

   (c) Avgör, huruvida T är inverterbar.

11. (a) Verifiera för någon speglingsmatris S (från ett exempel eller övning), att

$$S^2 = E.$$

   Tolka detta geometriskt.

   (b) Verifiera för någon projektionsmatris P, att

$$P^2 = P.$$

   Tolka detta geometriskt.

Facit

1.1 Handviftning.

1.2 $(-1, 1, 0)$ resp. $(1, -1, 0)$, vilket stämmer med antikommutativa lagen.

1.3a Vänsterledet är $e_3 \times e_3 = \vec{0}$ och högerledet är $e_1 \times e_1 = \vec{0}$.

1.3b Vänsterledet är $e_3 \times e_2 = -e_1$ och högerledet är $e_1 \times \vec{0} = \vec{0}$.

1.4 Arean är $|(1, -1, 1) \times (1, 1, 1)| = |(-2, 0, 2)| = 2\sqrt{2}$.

1.5a Enda möjligheten är att taga $e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3, 0, -3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

1.5b Enda möjligheten är att taga $e_3 = -e_1 \times e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

1.6 $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

1.7 Minsta arean $\frac{1}{2}$ erhålles då $t = 1$.

1.8 Vektorerna ligger i samma plan om och endast om determinanten

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = a + a^3 - 2a^2 = a(a-1)^2,$$

vilket inträffar precis då $a = 0$ eller $a = 1$.

1.9a Volymen är absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & b \\ b & 1+b & b \end{vmatrix} = 2b^2 - 2b,$$

således $|2b^2 - 2b|$.

1.9b Vektorerna utgör en bas precis då $2b^2 - 2b \neq 0$, alltså då $b \neq 0, 1$.

1.9c Basen är positivt orienterad precis då $2b^2 - 2b > 0$, vilket sker då $b < 0$ eller $b > 1$.

1.10a Höjden från spetsen av v mot u har längden $|v|\sin\theta$.

1.10b $|u\times v|^2+(u\cdot v)^2=(|u||v|\sin\theta)^2+(|u||v|\cos\theta)^2=|u|^2|v|^2$.

1.11 Av sambandet $w=-u-v$ följer det, att

$$\begin{aligned} v\times w &= v\times(-u-v) \\ &= v\times(-u)+v\times(-v) && \text{(distributiva lagen)} \\ &= -v\times u-v\times v && \text{(homogena lagen)} \\ &= -v\times u && (v\times v=\vec{0}) \\ &= u\times v && \text{(antikommutativa lagen).} \end{aligned}$$

På samma sätt visas det, att $w\times u=u\times v$.

Alternativ lösning. Man kan också resonera geometriskt. Om två av vektorerna u, v och w är parallella, så måste de alla tre vara det. I så fall är alla angivna vektorprodukter nollvektorn.

Låt oss då antaga, att vektorerna inte är parallella. Den givna ekvationen betyder, att vektorerna u, v och w kan bilda sidor i en triangel. Vektorprodukten $u\times v$ är då vinkelrät mot denna triangel. Dess längd är lika med triangelns dubbla area. Slutligen pekar den "uppåt", förutsatt man tänker sig vektorerna u, v och w löpa triangeln runt moturs. (Rita figur!) Samma egenskap karakteriserar vektorerna $v\times w$ och $w\times u$, och de måste då alla tre sammanfalla.

1.12 Vektorerna är linjärt beroende precis då deras determinant försvinner. Det ger ekvationen

$$0=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=a^3+2b^3-3ab^2$$

med rötterna $a=b$ eller $a=-2b$. Detta kan inses på flera sätt.

En metod är att leka litet med ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 &= a^3+2b^3-3ab^2=a^3-ab^2+2b^3-2ab^2 \\ &= a(a+b)(a-b)+2b^2(b-a)=(a-b)\Big(a(a+b)-2b^2\Big) \\ &= (a-b)(a^2-b^2+ab-b^2)=(a-b)\Big((a+b)(a-b)+b(a-b)\Big) \\ &= (a-b)^2(a+b+b)=(a-b)^2(a+2b). \end{aligned}$$

Vi avläser rötterna till $a=b$ och $a=-2b$.

En annan metod är att först observera, att $a=b$ löser ekvationen $a^3+2b^3-3ab^2=0$. Då skall, enligt Faktorsatsen, $a-b$ vara en faktor. Polynomdivision ger

$$0=a^3+2b^3-3ab^2=(a-b)(a^2+ab-2b^2).$$

Ånyo är $a = b$ en lösning till $a^2 + ab - 2b^2 = 0$, så att $a - b$ även här är en faktor. Ännu en polynomdivision ger då

$$0 = a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = (a-b)^2(a+2b),$$

och vi avläser rötterna $a = b$ och $a = -2b$. (Ekvationen $a^2 + ab - 2b^2 = 0$ kan också lösas som en vanlig andragradsekvation.)

En tredje metod är att beräkna determinanten, inte med Sarrus' regel, utan genom Gauss-elimination följd av Laplace-utveckling:

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ 0 & b-a & a-b \end{vmatrix} && \text{(Rad 3 − rad 2)} \\
&= (a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} + (a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} && \text{(Utveckling efter rad 3)} \\
&= (a-b)(ab-b^2) + (a-b)(a^2-b^2) \\
&= (a-b)^2 b + (a-b)^2(a+b) \\
&= (a-b)^2(a+2b).
\end{aligned}$$

Vektorerna är sålunda linjärt beroende precis då $a = b$ eller $a = -2b$.

2.1a T.ex. $(1, 1, 0)$, $(2, 3, 3)$ och $(3, 5, 6)$, som svarar mot $t = 0, 1, 2$.

2.1b Ja ($t = -\frac{3}{2}$).

2.2 T.ex. $(x, y, z) = (3, -6, -5) + t(1, 3, 2)$.

2.3a T.ex. $(x, y) = (1, 1) + t(-2, 1)$.

2.3b $x + 2y - 3 = 0$.

2.4a T.ex. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, -1)$ och $(0, 2, 1)$.

2.4b Nej.

2.5 $3x - y + 2z - 1 = 0$.

2.6 Ja; planet är $2x - y + 3z = -1$.

2.7a Sidorna är lika långa och parallella, ty

$$\overrightarrow{AB} = (6, -1, 0) = \overrightarrow{DC} \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{BC} = (-3, 2, -2) = \overrightarrow{AD}.$$

2.7b Arean är

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(6, -1, 0) \times (-3, 2, -2)| = |(2, 12, 9)| = \sqrt{229}.$$

2.7c En normalvektor till planet är $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, 12, 9)$, så att ekvationen för planet är på formen $2x + 12y + 9z = k$, där konstanten k bestäms genom substitution av t.ex. punkten A i ekvationen:

$$k = 2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 53.$$

Planets ekvation är $2x + 12y + 9z = 53$.

2.8 $x - y - z = 0$.

2.9 Elimineras t, fås ekvationen $y = y_0 - \frac{\beta x_0}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}x$.

2.10 En parameterform är $(x, y) = (\frac{-c-bt}{a}, t) = (-\frac{c}{a}, 0) + t(-\frac{b}{a}, 1)$. Riktningsvektorn $(-\frac{b}{a}, 1)$ är ortogonal mot (a, b).

2.11 Skärande längs linjen $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(5, -1, 3)$.

2.12 Linjerna är skeva.

2.13 Linjerna sammanfaller.

2.14a $x - y + z = 1$.

2.14b Skärningspunkten är $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ (för $t = \frac{1}{2}$).

2.15a Vi ser, att $-2(-1, 2, -\frac{1}{2}) = (2, -4, 1)$, så att linjerna h och p är parallella eller sammanfallande. För att undersöka vilketdera, kan man till exempel pröva om punkten $(4, 4, 4)$ på h även ligger på l:

$$\begin{cases} 4 = 12 + 2t \\ 4 = -12 - 4t \\ 4 = 8 + t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = -4.$$

Linjerna sammanfaller alltså.

Linjerna l och $h = p$ har uppenbart icke-parallella riktningsvektorer, varför de är skärande eller skeva. De visar sig vara skeva, ty ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4 - 2s = 12 + 2t \\ s = -12 - 4t \\ 4 - 2s = 8 + t \end{cases}$$

saknar lösning.

Sammanfattningsvis färdas alltså Hans Ensamvarg och prinsessan Laila längs samma linje, medan Lukas Molnpromenerares bana är skev mot denna.

2.15b Om två rymdrebeller någonsin skall mötas i samma punkt, måste det vara Hans Ensamvarg och prinsessan Laila. Sätt deras ekvationer lika:

$$\begin{cases} 4 - t &= 12 + 2t \\ 4 + 2t &= -12 - 4t \\ 4 - \frac{1}{2}t &= 8 + t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{8}{3}.$$

Hans Ensamvarg och prinsessan Laila möts alltså vid tidpunkten $t = -\frac{8}{3}$ i punkten $(\frac{20}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{16}{3})$.

3.1a Med parametern s för den första linjen, fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2 - s &= -1 - 3t \\ 2 - s &= -t \\ -1 + 2s &= 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s &= \frac{3}{2} \\ t &= -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Linjerna skär varandra i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$.

3.1b Linjernas riktningsvektorer har skalärprodukten

$$(-1, -1, 2) \cdot (-3, -1, -2) = 0,$$

varför linjerna är ortogonala.

3.2 135° eller 45°.

3.3a $\frac{1}{3}(5, 8, -1)$ (för $t = -\frac{1}{3}$).

3.3b 30°.

3.4a Insättning av rymdskeppets koordinater i Tentooines ekvation ger

$$0 = 4(5 + t) - 11(5 + t) - 5(6 + 4t) + 128 = 63 - 27t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{7}{3}.$$

Rymdskeppet kraschar i punkten $(\frac{22}{3}, \frac{22}{3}, \frac{46}{3})$.

3.4b Vinkeln θ mellan planetens normal och robotarnas bana ges av

$$\cos\theta = \frac{(4, -11, -5) \cdot (1, 1, 4)}{|(4, -11, -5)||(1, 1, 4)|} = \frac{-27}{\sqrt{162}\sqrt{18}} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 120^\circ.$$

Detta är den trubbiga vinkeln; den spetsiga är $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Nedslagsvinkeln är därför $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

3.5a Punkterna rakt ovanför och under brunnen beskrivs av linjen

$$(x, y, z) = (2, 3, 3) + k(-1, 1, 1).$$

Avståndet till brunnen i $(2,3,3)$ skall vara precis $\sqrt{12}$, varav

$$\sqrt{12} = |k(-1,1,1)| = |k|\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad |k| = 2.$$

Prövning visar att den sökta punkten är

$$P = (2,3,3) + 2(-1,1,1) = (0,5,5)$$

(eftersom den uppfyller villkoret $-x+y+z > 4$).

3.5b Vektorn mellan Baba Butts palats $B = (-6,-1,-1)$ och $P = (0,5,5)$ är $\overrightarrow{BP} = (6,6,6)$. En riktningsvektor för linjen är då $(1,1,1)$. Linjens ekvation är till exempel

$$(x,y,z) = (-6,-1,-1) + t(1,1,1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

3.5c Vinkeln θ mellan linjens riktningsvektor $(1,1,1)$ och Tentooines normalvektor $(-1,1,1)$ ges av

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(-1,1,1)}{|(1,1,1)||(-1,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Vinkeln är $\theta = \arccos\frac{1}{3}$, en spetsig vinkel. Den sökta spetsiga vinkeln mellan linjen och planet är då $90^\circ - \arccos\frac{1}{3}$.

3.6 Deras normalvektorer är parallella. Avståndet är $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.7 Linjens riktningsvektor är vinkelrät mot planets normalvektor. Avståndet är $\frac{2}{\sqrt{14}}$.

3.8 Planets ekvation är $3x - 2y + z = 12$ och avståndet är $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

3.9 Planets ekvation är $3x + y + 2z = 4$ och närmaste punkten är $(1,-1,1)$.

3.10a Prinsessan Lailas bana fås från ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x-y+z=2 \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+z=2 \\ y+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5+5t \\ y=3-4t \\ z=t. \end{cases}$$

3.10b Substitueras kejsar Pampatines koordinater i ekvationen för Lukas Molnpromenerares plan, fås

$$1 = (1+2t) + 2(1+2t) + 3(-2t) = 3.$$

Linjen och planet saknar skärning.

3.10c Tag valfri punkt i Lukas Molnpromenerares plan, t.ex. $Q = (1, 0, 0)$. Vektorn till en godtycklig punkt $P = (1 + 2t, 1 + 2t, -2t)$ på kejsar Pampatines bana är

$$\overrightarrow{QP} = (2t, 1 + 2t, -2t).$$

Projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på planets normalvektor är

$$\text{proj}_{(1,2,3)} \overrightarrow{QP} = \frac{(2t, 1 + 2t, -2t) \cdot (1, 2, 3)}{|(1, 2, 3)|^2}(1, 2, 3) = \frac{2}{14}(1, 2, 3) = \frac{1}{7}(1, 2, 3)$$

enligt Projektionsformeln. Det sökta avståndet, mellan kejsar Pampatines bana och Lukas Molnpromenerares plan, är då

$$|\text{proj}_{(1,2,3)} \overrightarrow{QP}| = \left|\frac{1}{7}(1, 2, 3)\right| = \frac{1}{7}\sqrt{14}.$$

3.11a Tag punkten $P = (6, 0, 0)$ i planet och låt $L = (-2, 4, 5)$ vara Lailas koordinater. Projektionen av vektorn $\overrightarrow{LP} = (8, -4, -5)$ på planets normalvektor $(1, 2, 3)$ ges av Projektionsformeln:

$$\text{proj}_{(1,2,3)}(8, -4, -5) = \frac{(8, -4, -5) \cdot (1, 2, 3)}{|(1, 2, 3)|^2}(1, 2, 3) = -\frac{15}{14}(1, 2, 3).$$

Närmaste punkten i planet är då

$$(-2, 4, 5) - \frac{15}{14}(1, 2, 3) = \frac{1}{14}(-43, 26, 25).$$

3.11b Vi finner först i vilken punkt projektilen träffar stjärnkryssarens plan:

$$6 = (-2 + 2t) + 2(4 - t) + 3(5 - t) = 21 - 3t \quad \Leftrightarrow \quad t = 5.$$

Projektilen passerar då planet $x + 2y + 3z = 6$ vid tiden $t = 5$ i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (8, -1, 0)$.

Det är klart, att denna punkt uppfyller olikheterna, som definierar stjärnkryssaren, ty $x_0, y_0 \geqslant -1$ och $x_0 + 7y_0 = 1$. Prinsessan Laila kommer alltså att träffa stjärnkryssaren, precis i hörnet.

3.12 Avståndet är $2\sqrt{3}$ och närmaste punkten är $(-1, 0, 1)$.

3.13 $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

3.14a Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + s = 1 - t \\ 1 + 2s = -4t \\ s = 1 + t \end{cases}$$

har en entydig lösning $s = \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$. Linjerna skär varandra därför i punkten $(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})$.

3.14b Vektorn $u = (1, 1, 0)$ går från origo till punkten $(1, 1, 0)$ på Lukas Molnpromenerares bana. Projektionen på linjens riktningsvektor är

$$u' = \frac{(1, 1, 0) \cdot (1, 2, 1)}{|(1, 2, 1)|^2}(1, 2, 1) = \frac{3}{6}(1, 2, 1) = \frac{1}{2}(1, 2, 1).$$

Projektionen av u på en vektor vinkelrät mot linjen är därför

$$u - u' = (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 2, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Punkten $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ på Lukas Molnpromenerares bana ligger sålunda närmast origo. Han passerar denna punkt vid tiden $t = -\frac{1}{2}$. Avståndet från origo till denna punkt är

$$\left|\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Ypperligt skottläge, således — en halv tidsenhet för sent!)

3.15a Algebran ligger ej i skottlinjen, ty ekvationssystemet

$$\begin{cases} -1 &= 3 - t \\ 1 &= -4 + t \\ -3 &= 5 - 2t \end{cases}$$

saknar lösning.

3.15b Låt $P = (3, -4, 5)$ vara kejsar Pampatines koordinater och $A = (-1, 1, -3)$ vara planeten Algebrans. Projektionen av vektorn $\overrightarrow{PA} = (-4, 5, -8)$ på skottlinjen är

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{(-1,1,-2)} \overrightarrow{PA} &= \frac{(-4, 5, -8) \cdot (-1, 1, -2)}{|(-1, 1, -2)|^2}(-1, 1, -2) \\ &= \frac{25}{6}(-1, 1, -2) \end{aligned}$$

enligt Projektionsformeln. Kortaste avståndet mellan Algebran och skottlinjen är därför

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{PA} - \operatorname{proj}_{(-1,1,-2)} \overrightarrow{PA}\right| &= \left|(-4, 5, -8) - \frac{25}{6}(-1, 1, -2)\right| \\ &= \left|\frac{1}{6}(1, 5, 2)\right| = \frac{1}{6}\sqrt{30}. \end{aligned}$$

3.15c En ekvation för linjen genom P och A är exempelvis

$$(x, y, z) = (3, -4, 5) + t(-4, 5, -8), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

3.16 $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3.17 Om θ betecknar vinkeln mellan v och $\overrightarrow{PQ}$, så är det sökta avståndet $|\overrightarrow{PQ}| \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{PQ}||v| \sin\theta}{|v|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times v|}{|v|}$.

4.1a $T(1,0) = (1,-1)$, $T(0,1) = (-3,4)$

4.1b $(-2,3)$

4.1c $(4,1)$

4.2a Spegling i linjen $x = y$.

4.2b (Rita figur.)

4.3a $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$ betyder vridning 30° moturs.

4.3b $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix}$ betyder vridning 45° medurs.

4.3c Töjning faktorn 2 horisontellt och faktorn 3 vertikalt.

4.3d Projektion på xy-planet.

4.4a Basbytesmatrisen $Q = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal, ty $QQ^{\mathsf{T}} = E$.

4.4b $A' = Q^{-1}AQ = Q^{\mathsf{T}}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.4c Projektion på vektorn e_1'.

4.5a Basbytesmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

är ortogonal, ty $QQ^{\mathsf{T}} = E$.

4.5b $A' = Q^{-1}AQ = Q^{\mathsf{T}}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5c Avbildningen betyder projektion på $e_2'e_3'$-planet.

4.6 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Töjning med faktorn 2 längs e_2' och töjning med faktorn 3 längs e_3'.

4.7a Basbytesmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

är ortogonal, ty

$$QQ^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = E.$$

4.7b Avbildningsmatrisen i den nya basen är

$$A' = Q^{-1}AQ = Q^\mathsf{T}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.7c Avbildningen betyder spegling i $e_1'e_3'$-planet, alltså planet med normalvektor $(3, 0, -1)$ (i standardkoordinater).

4.8a Basbytesmatrisen är

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\det Q = -1 \neq 0$, är detta en giltig basbytesmatris och kolonnerna e_1', e_2', e_3' ger en ny bas (Linjära algebrans huvudsats).

4.8b Vi verifierar att $Q^\mathsf{T}Q = E$, vilket visar att basen är ortonormerad.

4.8c Basen är vänsterorienterad, ty $\det Q = -1 < 0$.

4.8d Den nya avbildningsmatrisen är

$$A' = Q^{-1}AQ = Q^\mathsf{T}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.8e Avbildningen töjer faktorn 2 längs e_3' (och lämnar riktningarna e_1', e_2' oförändrade).

4.9 Inversen existerar med matris $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.10 Vridning först vinkeln β och sedan vinkeln α betyder sammantaget vridning vinkeln $\alpha + \beta$.

4.11a Sätt $a = b = 1$ i definitionen.

4.11b Sätt $v = \vec{0}$ i definitionen.

4.11c Sätt $a = b = 0$ i definitionen.

4.12 Till exempel är $T(0,1) = (1,1)$ och $T(0,2) = (4,2)$. För en linjär avbildning måste $T(0,2) = 2T(0,1)$.

5.1 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2a $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(2,2,2)$.

5.2b $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $(3,2,1)$.

5.3a $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5.3b $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

5.4 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$.

5.5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.6 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5.7 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

5.8a Projektionen av vektorn $u = (x, y, z)$ på planets normal ges av Projektionsformeln:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{(x,y,z)\cdot(-3,1,-1)}{|(-3,1,-1)|^2}(-3,1,-1) = \frac{-3x+y-z}{11}(-3,1,-1) \\ &= \frac{1}{11}(9x-3y+3z, -3x+y-z, 3x-y+z). \end{aligned}$$

Spegelbilden av u i planet är

$$\begin{aligned} u - 2u' &= (x,y,z) - \frac{2}{11}(9x-3y+3z, -3x+y-z, 3x-y+z) \\ &= \frac{1}{11}(-7x+6y-6z, 6x+9y+2z, -6x+2y+9z), \end{aligned}$$

varur speglingsmatrisen avläses till

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

5.8b En spegling är alltid sin egen invers. (Man kan också lätt kontrollera, att determinanten är nollskild.)

5.9 Speglingen är $S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, vridningen är $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och den sökta matrisen är $RS = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

5.10a Projektionen har matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och rotationen har matrisen

$$R = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ & 0 \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sammansatta avbildningen har därför matrisen

$$T = RP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.10b Bilden är vektorn

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.10c Rotationen R är inverterbar, men inte projektionen P, och därför inte heller den sammansatta avbildningen $T = RP$. Man kan också kontrollera direkt, att det $T = 0$.)

5.11a Spegling två gånger i samma plan (eller linje) är ekvivalent med att inte transformera alls.

5.11b Projektion två gånger ned i samma plan (eller linje) är ekvivalent med att projicera en gång.