Generaliserade integraler

En viss integral kan vara generaliserad på flera olika sätt:

i) i oändligheten, dvs. oändligt integrations-intervall

ii) i punkter där integranden är obegränsad, antingen i det inre av integrationsområdet eller i någon av ändpunkterna

Strategi:

Dela upp integralen som en summa av integraler, där varje integral i summan bara är generaliserad på ett sätt.

Ex 1:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 + \lim_{R \to \infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - \underset{\to 0}{2\sqrt{\varepsilon}}) + \lim_{R \to \infty} (\underset{\to \infty}{2\sqrt{R} - 2})$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ konvergent} \; ; \; \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ divergent}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ är divergent}}$$

(2)

K2 8.2a)

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{x^3+1}{x^5+x^3+1}}_{f(x)}\,dx$$

generaliserad i ∞

$f(0)=1$, $f(x)>0$ för $x>0$

för stora x jämför med $x^3/x^5 = 1/x^2 = g(x)$

$$\lim_{R\to\infty}\int_A^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_A^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{A}-\underbrace{\frac{1}{R}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{A} \text{ konvergent}$$

jmf. krit. II: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^3+1}{x^5+x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2}{x^5+x^3+1} = 1$

$$\boxed{\int_0^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent} \Rightarrow \int_0^\infty f(x) \text{ konvergent enligt jmf. krit II}}$$

8.2c) $\int_1^\infty \frac{x^3}{e^x}dx$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ för alla $n \Rightarrow$ för varje n finns ett ω_n så att $e^x > x^n$ om $x>\omega_n$

$e^x > x^5$ om $x > \omega_5 \Rightarrow \underbrace{\int_1^{\omega_5}\frac{x^3dx}{e^x}}_{\text{ändlig}} + \underbrace{\int_{\omega_5}^\infty \frac{x^3dx}{e^x}}$

$\leq \int_{\omega_5}^\infty \frac{x^3}{x^5}dx$ konvergerar enligt 8.2a)

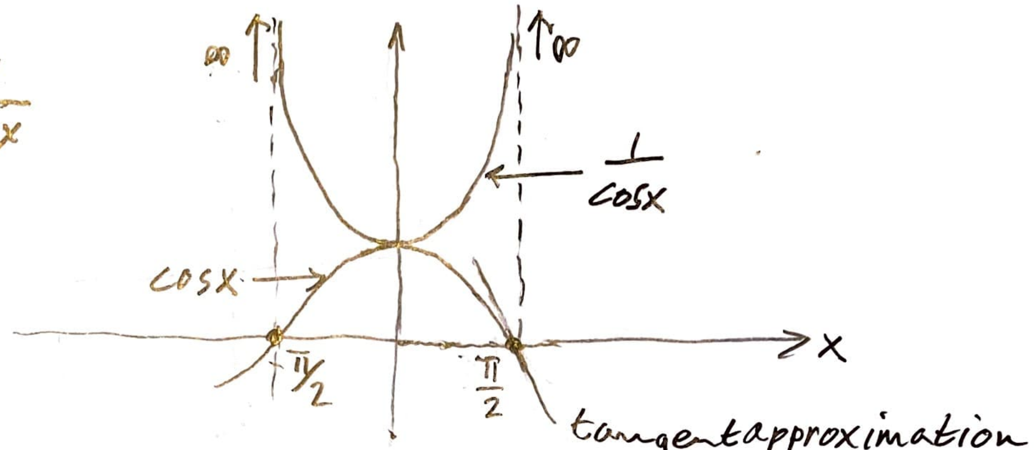
Enligt jmf. krit 1 konvergerar $\int_{\omega_5}^\infty \frac{x^3}{e^x}dx$ och alltså

$$\boxed{\text{är } \int_1^\infty \frac{x^3dx}{e^x} \text{ konvergent}}$$

③

8.2 f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$ generaliserad i $\pm\pi/2$

$f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$



Eftersom $\cos x$ är en jämn funktion, dvs $\cos(-x) = \cos x$ räcker det med att analysera $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$, som är generaliserad i $x = \pi/2$.

Nära $x = \pi/2$ kan $\cos x$ jämföras med tangenten i $x = \pi/2$

Taylorutv. i $x=a$: $\underbrace{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{"tangentapproximationen"}} + O((x-a)^2)$

$\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$ nära $x = \pi/2 \Rightarrow f(x)$ jämförs med $g(x) = \dfrac{1}{\pi/2 - x}$ nära $x = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\pi/2 - \varepsilon} \frac{dx}{\pi/2 - x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[-\ln(\pi/2 - x)\Big]_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln\varepsilon + \ln\pi/2 = +\infty \Rightarrow \int_0^{\pi/2} g(x)\,dx \text{ är } \underline{\text{divergent}}$$

jmf. krit II: $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\pi/2 - x}} = \left\{ u = \frac{\pi}{2} - x \right\} =$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos(\pi/2 - u)}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\cos(\pi/2 - u)} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1 \; ; \; 0 < 1 < \infty$$

$$\boxed{\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} \; \underline{\text{divergent}} \text{ enligt jmf. krit II}}$$

8.2g) $\displaystyle\int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}}_{f(x)}dx$; generaliserad i ∞ och $x=0$

Dela upp: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^A f(x)dx + \int_A^\infty f(x)dx$ generaliserad i ∞

i) $\int_0^A f(x)dx$ generaliserad i $x=0$

Std. gränsvärde

Nära noll är $\sin x = x + O(x^3)$ och $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ då $x \to 0$

Nära noll jämför $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}$ med $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^A g(x) = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^A = 2\sqrt{A} - \underset{\to 0}{2\sqrt{\varepsilon}} \to 2\sqrt{A} \text{ konvergent}$$

Jämf. krit II: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} \to 1$ då $x\to 0$

$\therefore$ $\int_0^A f(x)$ är konvergent enligt jämf. krit. II

ii) $\int_A^\infty f(x)dx$: $\displaystyle\int_A^\infty \frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}dx = \int_A^\infty \frac{e^{\sin x}}{x\sqrt{x}}dx - \int_A^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

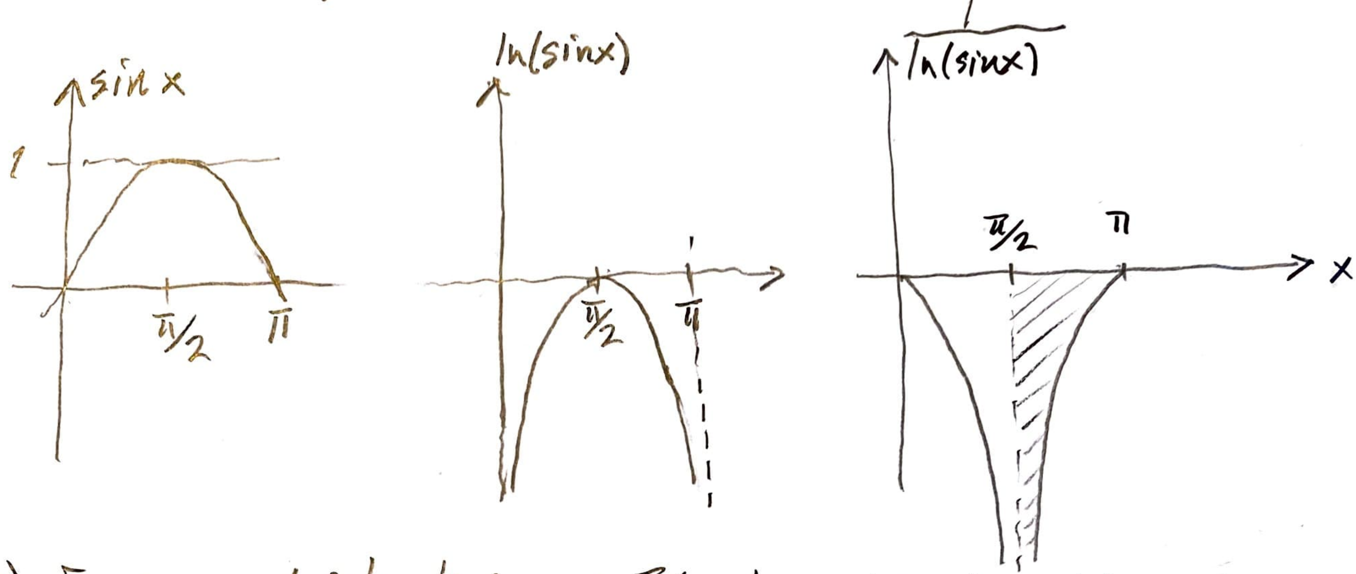
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_A^R = \frac{2}{A}$ konvergent

$0 < e^{-1} < e^{\sin x} < e \Rightarrow \displaystyle\int_A^\infty \frac{e^{\sin x}}{x\sqrt{x}}dx < e\int_A^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ konvergent

$\therefore$ $\int_A^\infty f(x)dx$ konvergent enligt jämf. krit. I

Alltså: $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx \text{ är konvergent}}$

8:2i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\ln(\sin x)}$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{\ln(\sin x)}$; generaliserad i $x=\frac{\pi}{2}$



$f(x)$ är symmetrisk kring $x=\pi/2$, dvs. $f(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)=f(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$

Räcker att undersöka $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx$

Taylorutveckla $\sin x$ kring $x=\pi/2$

$$h(x)=\underbrace{h(\pi/2)}_{=1}+\underbrace{h'(\pi/2)}_{=0}(x-\pi/2)+\frac{\overset{=-1}{h''(\pi/2)}}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\underbrace{\frac{h'''(\frac{\pi}{2})}{3!}}_{=0}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

$$\sin x = 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

$$\ln(\sin x)=\ln\Big(1-\underbrace{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)}_{x}\Big)$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)$$

$$\therefore \ln(\sin x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

Nära $x=\frac{\pi}{2}$ jämför vi $f(x)=\dfrac{1}{\ln(\sin x)}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\dfrac{2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

forts!

8.2 i forts.)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \frac{-2\,dx}{(x-\pi/2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{2}{x-\pi/2}\right]_{\pi/2+\varepsilon}^{\pi}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{2}{\varepsilon}\right) = -\infty$$

$$\boxed{\int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\,dx \text{ är } \underline{\text{divergent}}}$$

jmf. krit II $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\ln(\sin x)}}{-\frac{2}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} =$ (*) se alt nedan:

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{-1/2(x-\pi/2)^2 + O((x-\pi/2)^2)}}{-\frac{2}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\pi/2)^2}{(x-\pi/2)^2 + O((x-\frac{\pi}{2})^4)}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{1+O((x-\pi/2)^2)} = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{\pi} f(x)\,dx \text{ är divergent enligt jmf. krit II}}$$

Alternativ: $u = x - \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{\ln(\sin(u+\pi/2))}}{-\frac{2}{u^2}} = \lim_{u\to 0} -\frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{\ln(\cos u)} = -\frac{u^2}{2\ln(1-\frac{u^2}{2}+O(u^4))}$$

$$= \lim_{u\to 0} -\frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{(-\frac{u^2}{2}+O(u^4))} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{1+O(u^2)} = \underline{\underline{1}}$$