Dag 11

Sem 3: 18, 19, 20 oktober.
Anmälan senast fredag. 8 oktober.

Motivera varför funktionen $f(x, y) = xy$ antar sitt största och sitt minsta värde på kurvan $x^2 + x^4y^4 + y^2 = 3$. Bestäm även motsvarande max- och minvärden.

Vanligaste motivationen

SATS. En kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar största och minsta värde.

Kompakt <-> sluten och begr.

$D = \{(x,y) : x^2 + x^4y^4 + y^2 = 3\}$

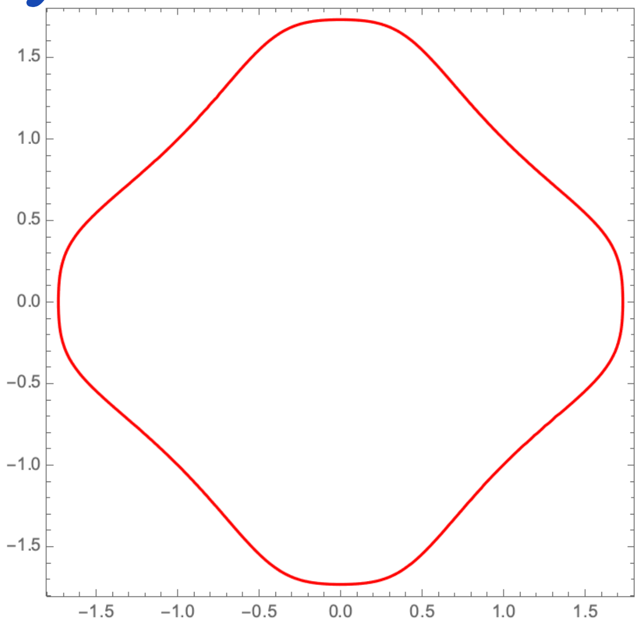
Sluten: nollställemängden till en kontinuerlig funktion är alltid sluten

$g(x,y) = x^2 + x^4y^4 + y^2 - 3$

$\underset{\geq 0}{x^2} + \underset{\geq 0}{x^4y^4} + \underset{\geq 0}{y^2} = 3$ alla termer är positiva

Följer att $x^2 \leq 3$ och $y^2 \leq 3$

D är innehållen i mängden
$\{(x,y) : |x| \le \sqrt{3}, |y| \le \sqrt{3}\}$



dvs D är begränsad

$g = x^2 + x^4y^4 + y^2 - 3$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)$$

$$\nabla g = \left(2x + 4x^3y^4, 4x^4y^3 + 2y\right)$$

$$0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x + 4x^3y^4 & 4x^4y^3 + 2y \end{vmatrix} =$$

$$y(4x^4y^3 + 2y) - x(2x + 4x^3y^4) = 2y^2 - 2x^2$$

$y^2 - x^2 = 0 \iff x = y$ eller $x = -y$

$(y - x)(y + x)$

$x = y \quad 2x^2 + x^8 - 3 = 0 \quad t = x^2$

$t \geq 0$

$t^4 + 2t - 3 = 0 \quad t = 1$

$$\begin{array}{r|l} & t^3 + t^2 + t + 3 \\ t - 1 & t^4 + 2t - 3 \\ & -(t^4 - t^3) \\ \hline & t^3 \\ & -(t^3 - t^2) \\ \hline & t^2 + 2t \\ & -(t^2 - t) \\ \hline & 3t - 3 \\ & -(3t - 3) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$t^4 + 2t - 3 = (t-1)\underbrace{(t^3 + t^2 + t + 3)}_{>0}$

$t = x^2 = 1$ Alltså $x = \pm 1$

Två punkter $(1,1)$ och $(-1,-1)$

$x = -y \quad 2x^2 + x^8 - 3 = 0$

$x = \pm 1 \quad (1,-1)$ och $(-1,1)$

$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 \quad f(1,-1) = f(-1,1) = -1$

max min

Motivera varför funktionen $f(x, y) = xy$ antar max och min under bivillkoret $x^4 + y^4 + 2xy = 4$, samt beräkna det maximala och det minimala värdet.

$g(x,y) = x^4 + y^4 + 2xy - 4 = 0$

AG: $\quad |2xy| \le x^2 + y^2 \qquad (x-y)^2 \ge 0$

$g(x,y) = x^4 + y^4 + 2xy \ge x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \qquad (> 4)$

Antingen $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{2}$ eller $\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{2}$

Sant om $x^2 > 4$ eller $y^2 > 4$

$D = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$

är innehållen i $[-2,2] \times [-2,2]$

Om $(x,y) \in D$

så måste $x^2 \le 4$ och $y^2 \le 4$

$x^2 \le 4$

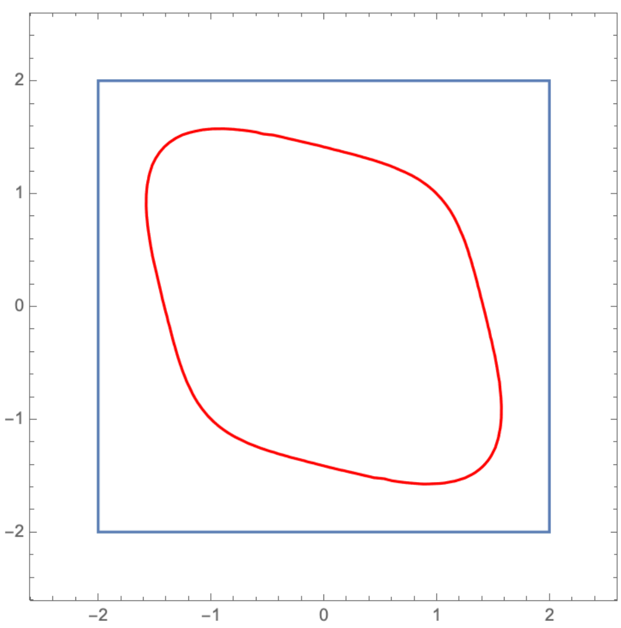
$\iff$

$-2 \le x \le 2$

$y^2 \le 4$

$\iff$

$-2 \le y \le 2$



Sats 5. *Låt $g(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och antag också att*

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y) = +\infty \quad (\textit{eller } -\infty).$$

Då gäller att varje nivåkurva $g(x,y) = k$ är en kompakt mängd.

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} (x^4+y^4+2xy)$$

$$x^4+y^4+2xy = r^4\underbrace{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}_{\geq \frac{1}{4}} + 2r^2\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\leq 1}$$

$$\geq \frac{1}{4}r^4 - 2r^2 \to +\infty \text{ när } r \to +\infty$$

$(1,1)$ $(-1,-1)$ $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$f=1$ $f=1$ $f=-2$ $f=-2$

max $=1$ min $=-2$

Avgör om funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ antar ett största och/eller ett minsta värde under bivillkoren $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 4$, $x, y, z > 0$. Bestäm max- och minvärden i förekommande fall.

$E = \{(x,y,z) : x, y, z > 0 \quad \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}}_{\text{lite större än } 1.} = 4\}$

$x = R$ (stort) $\quad \frac{1}{x}$ (litet)

$y = 1$

$z =$ "den positiva lösingen till $\frac{1}{x} + 1 + \frac{4}{z} = 4$"

$f(x,y,z) = x + y + z > R \quad$ Max saknas

$\sup = +\infty$

$\checkmark \; f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16}{3} < 6$

$E_0 = \{(x,y,z) \in E : \underbrace{x + y + z \le 6, \; x, y, z \ge 0}\}$

är kompakt.

$\inf_{E_0} f = \inf_{E} f$

$\quad \| $

$\min f$

$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$= x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} - 4\right)$

$F'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0$

$F'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0$

$F'_z = 1 - \frac{4\lambda}{z^2} = 0$

$F'_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} - 4 = 0$

$\begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \\ y = \sqrt{\lambda} \\ z = 2\sqrt{\lambda} \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{2\sqrt{\lambda}} - 4 = 0$

$4\sqrt{\lambda} = 1+1+2$ $\qquad \sqrt{\lambda} = 1$

En kritisk punkt: $\underline{(1,1,2)}$

$$\min_E f = f(1,1,2) = 4.$$

$\cancel{\nabla g = 0}$ $\qquad \nabla g = \left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}, -\frac{4}{z^2}\right) \neq \vec{0}$