7 Poissonfördelningen

Rep. X = # lyckade försök av n

$X \sim Bin(n,p)$, $p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

Ex. X = # besökare i affär under 30 min

Möjlig modell: $X \sim Bin(n,p)$ där n stort, p litet

Antag $E[X] = np$ känt,

säg $E[X] = \lambda$.

$X \sim Bin(n, \lambda/n)$

$n = 100.000$ $\lambda = 5$ $p = 0{,}00005$

$$P(X=10) = \binom{100.000}{10} 0.00005^{10} \cdot 0{,}99995^{99990}$$

Numeriskt krångligt.

Vad händer med $Bin(n, \lambda/n)$ då $n \to \infty$?

$$P(X=i) = \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{\lambda^i}{n^i} \cdot \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i} =$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\overbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}^{\to e^{-\lambda}}}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}_{\to 1}} \to \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Def. En s.v. X sägs vara Poissonfördelad med parameter $\lambda > 0$ om $P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Beteckning: $X \sim Po(\lambda)$

Koll: $\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\dots\right)}_{e^{\lambda}} = 1$

En Poissonfördelning kan vara en bra modell för:

- # tryckfel/sida
- # besök på hemsida/vecka
- # inkommande samtal till växel/månad

Allmänt: Följd av oberoende slumpmässiga händelser i tid eller rum.

Ex. X = # besökare i affär/30 min. $P(X=10)$?

$X \sim Bin(100.000, 0.00005)$ svårt

$X \sim Po(\underset{100.000 \cdot 0.00005}{5})$ ger $P(X=10) = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5}$ Inga problem!

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow E[X] = np \ (=\lambda)$

Sats. $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow E[X] = \lambda$

Bevis: $E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \overset{j=i-1}{=}$

$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow V(X) = np(1-p) \approx \overset{\lambda}{\widetilde{np}}$ om $p = \frac{\lambda}{n}$ litet.

Sats. $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow V(X) = \lambda$.

Bevis: $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{(i-1)!} e^{-\lambda} \overset{j=i-1}{=}$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \Big[\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}}_{E[Po(\lambda)]=\lambda} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}}_{\sum Po(\lambda)=1} \Big] = \lambda(\lambda+1)$$

$$\therefore V(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

Geometrisk och för-första-gången fördelning

Ex. X = # tärningskast till första sexan

$$P(X=i) = P\begin{pmatrix}\text{inte sexa i kast } 1,\dots,i-1 \\ \text{sexa i kast } i\end{pmatrix} = \left(1-\frac{1}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Allmänt: Oberoende upprepade försök.
Sannolikhet $p>0$ att lyckas i givet försök.

X = # försök till första lyckade

X antar värden $1, 2, \dots, \infty$

Slh. fkt. $p(i) = (1-p)^{i-1} p$.

Tänk om vi aldrig lyckas?

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Så X ändlig med sannolikhet 1.

Def. En s.v. med sannolikhetsfkt $p(i) = (1-p)^{i-1} p$ för $i = 1, 2, \dots$ och $p \in (0,1)$ sägs vara för-första-gången-fördelad.

Beteckning: $X \sim ffg(p)$

Ex. # tärningskast till första sexan $\sim ffg(1/6)$

Sats. $X \sim ffg(p) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$

Bevis. $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \underbrace{(1-p)}_{q}^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} =$

$= p \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' = p \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)' = p \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} q^i}_{\frac{1}{1-q}} - 1 \right)' =$

$= p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

Sats. $X \sim ffg(p) \Rightarrow V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ (Se boken s. 91)

X ffg(p), $Y = X - 1 =$ # misslyckade innan första lyckade

Y är geometriskt fördelad

$E[Y] = E[X] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ osv.

Negativ binomialfördelning

Oberoende försök. Sannolikhet p att lyckas i varje.

$X =$ # försök till r lyckade

(r=1 ger ffg-fördelning)

X antar värden $i = r, r+1, r+2, \ldots$

$X = i$ tex: $\underbrace{A^c A A^c \ldots A^c}_{\substack{r-1\ A \\ i-r\ A^c}} A$ slh. $p^{r-1} q^{i-r} p = p^r q^{i-r}$

alltid A sist

$\binom{i-1}{r-1}$ sätt att välja vilka försök som ska lyckas bland de $i-1$ första

$$\therefore\ p(i) = \binom{i-1}{r-1} p^r q^{i-r} \qquad i = r, r+1, r+2, \ldots$$

Beteckning: $X \sim \text{NegBin}(r, p)$

ggr vi ska lyckas; slh. lyckas i givet försök

$$E[X] = \frac{r}{p}, \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$ (Bevis senare.)