Räkneövning 9/9 – '21, Analys A

Serier – Konvergens eller Divergens: $\sum_1^\infty a_n$

1. Kolla att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, Annars divergent
2. Alternerande → Leibnitz

   $\sum_1^\infty (-1)^n a_n$, Om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ konvergent
3. Integralkriteriet
4. Jämför med enklare serier (jmf. krit I, II)
5. Rot- kvokriteriet

K2 8.1 f) $\sum_0^\infty \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^k = \sum_0^\infty (-1)^k \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^k =$

$= \sum_0^\infty (-1)^k \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)^k$; Alternerande serie

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)} = \underline{\underline{e^{-2}}} \neq 0$$

∴ Serien är divergent

8.2 k) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln(1+k)-\ln k}{\sqrt{k}} = \sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{k}}}_{a_k}$

Mc Laurin: $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Jämför med $\sum_{1}^{\infty} b_k$ där $b_k = \frac{1}{k\sqrt{k}} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_k$ konvergerar

$\left(\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \right.$ konvergent $\left. \right)$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\cancel{\sqrt{k}}} \cdot k\cancel{\sqrt{k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left[\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] = 1 \Rightarrow$$

$\boxed{\sum_{1}^{\infty} a_k \text{ är konvergent enligt jämförelsekriterium II}}$

8.2 l) $\sum_{2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln(k!)}}_{a_k}$; $k! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot k < k^k$

$\ln(k!) < k\ln k \Rightarrow \frac{1}{\ln(k!)} > \frac{1}{k\ln k}$

jämför med $\sum_{2}^{\infty} b_k$ där $b_k = \frac{1}{k\ln k}$

$\sum_{2}^{\infty} b_k$ divergent eftersom $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \left[\ln(\ln x)\right]_{2}^{\infty}$ divergerar

$\because a_k > b_k \Rightarrow$ $\boxed{\sum a_k \text{ divergerar enligt jämförelsekrit I}}$

8.2 m) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\ln k!)^2}}_{a_k}$

$$k! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k}_{} > 2^{k-1}$$

$$\ln(k!) > (k-1)\ln 2 \Rightarrow (\ln(k!))^2 > (k-1)^2 (\ln 2)^2$$

$$\frac{1}{(\ln(k!))^2} < \frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^2}$$

Jämför med $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} b_k$ där $b_k = \dfrac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^2}$

$$\sum_{2}^{\infty} b_k = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \text{ konvergent!}$$

$a_k < b_k \Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\sum_{2}^{\infty} a_k \text{ konvergent enligt jämförelsekrit. I}}$

8.2 o) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

Integralkrit: $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} =$

$$= \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}} \Rightarrow \underline{\text{Serien är konvergent}}$$

Lars Moberg