Räkneövning 16/9-'21, Analys A

ÖPB2)

1.6 Rita mängderna i R^2

1.7 Bestäm randpunkter och inre punkter

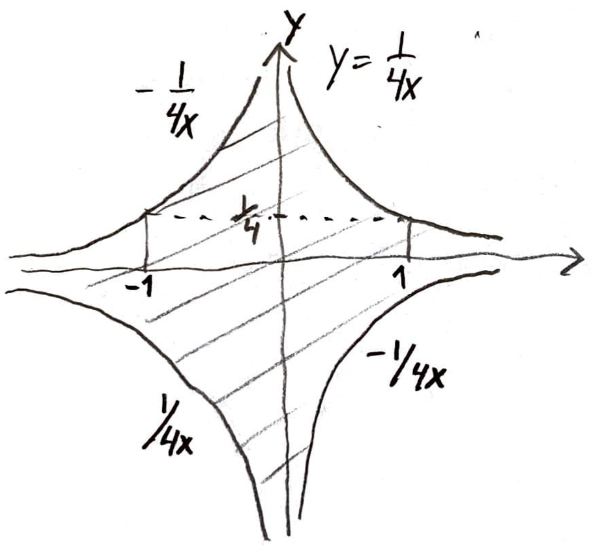
1.8 Är mängderna a) öppna b) slutna c) varken öppna eller slutna d) begränsade e) kompakta?

$M_4 = \{(x,y) : |xy| < 1/4\}$

$M_6 = \{(x,y) : |x+2y| \leq 2\}$

$M_8 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2 \leq -4-4x-4y-x^2-y^2$

M_4 $|xy| < 1/4 \Rightarrow$ randpunkter $|xy| = 1/4 \Rightarrow xy = \pm 1/4 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{4x}$



Inre punkter: $M_4 = \{(x,y) : |xy| < \frac{1}{4}\}$

Randen ingår ej i $M_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_4$ är öppen

Begränsad: Nej

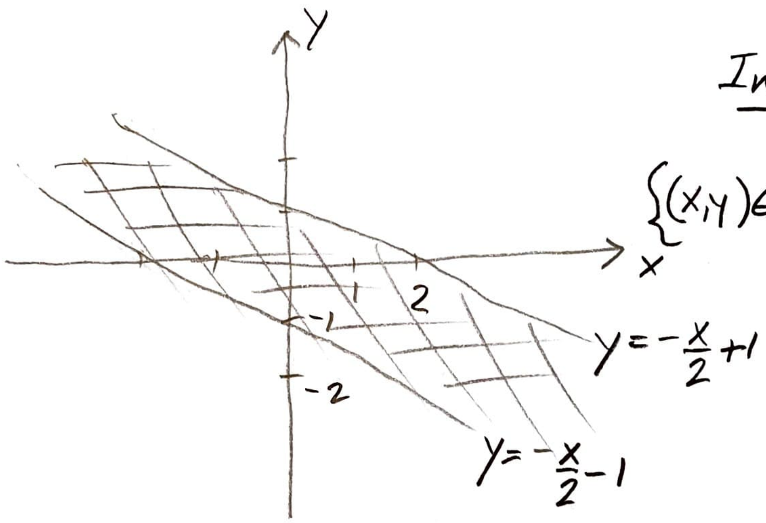
Kompakt: Nej

Öppna mängder innehåller bara inre punkter

Kompakta mängder är slutna och begränsade

M6 $\{(x,y): |x+2y| \le 2\}$

<u>Randpunkter</u> $|x+2y| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}+1 \\ x+2y = -2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}-1 \end{cases}$



<u>Inre punkter:</u>

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+2y| < 2\}$

$-2 < x + 2y < 2$

$\begin{cases} y < -\frac{x}{2}+1 \\ y > -\frac{x}{2}-1 \end{cases}$

Sluten: Ja
Öppen: Nej
Begränsad: Nej
Kompakt: Nej

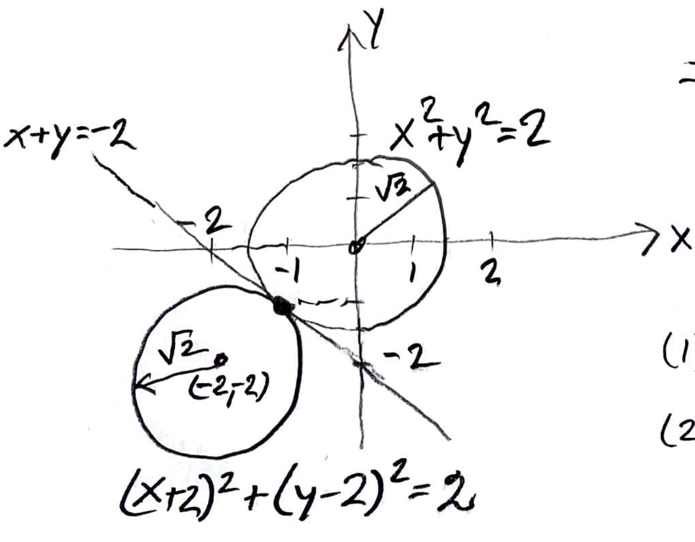
M8 $\{(x,y): x^2+y^2 \le 2 \le -4-4x-4y-x^2-y^2$

$\underline{x^2+y^2 \le 2}$; $2 \le -\underbrace{[4+4x+4y+x^2+y^2]}$

$-[(x+2)^2+(y+2)^2-4]$

$\Rightarrow \underline{(x+2)^2+(y+2)^2 \le 2}$

Medelpunkt $(-2,-2)$
radie: $\sqrt{2}$



$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 & (1) \\ (x+2)^2+(y+2)^2 = 2 & (2) \end{cases}$

(2): $\underbrace{x^2+y^2}_{=2}+4x+4y+6=0 \Rightarrow 4x+4y+8=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x+y=-2}$ dvs. $y=-2-x$

$x^2+y^2=2 \Rightarrow \quad x^2+(4+x^2+4x)=2 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0$

$\therefore x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

$y=-2-x \Rightarrow y=-2+1=-1 \Rightarrow (x,y)=(-1,-1)$

$\therefore$ En gemensam punkt $(-1,-1) \Rightarrow \underline{M_8=(-1,-1)}$

Randpunkt: $(-1,-1)$
Inre punkter: $\emptyset$
Öppen: Nej
Sluten: Ja

Begränsad: Ja
Kompakt: Ja

$\underline{1.24f)}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2+xy^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\boxed{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+xy^2}}}$

Polära koordinater: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r^2)}{r^2+r^3\cos\theta\sin^2\theta}$

$\underline{\text{MacLaurin}}$: $\lim_{r\to 0} \frac{r^2+O(r^4)}{r^2(1+r\cos\theta\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{1+\overset{\to 0}{O(r^2)}}{1+\underset{\to 0}{r\cos\theta\sin^2\theta}} = 1$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2+xy^2}} = \underline{\underline{e}}$

1.27e) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-(x+y)^2} = \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-(x^2+y^2+2xy)} =$

$= \{\text{Polära koordinater}\} = \lim\limits_{r\to\infty} r^2\cos\theta\sin\theta e^{-(r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta)}$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r^2}{2}\sin 2\theta\, e^{-r^2\underbrace{(1+\sin 2\theta)}_{\geq 0}}$

$\theta=0$ (x-axeln) $\Rightarrow \underline{0}$

$\theta=\pi/4$ $(y=x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r^2}{2}e^{-2r^2} = \underline{0}$

$\theta=\pi/2$ (y-axeln) $\Rightarrow \underline{0}$

$\theta=\frac{3\pi}{4}$ $(y=-x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{r\to\infty} -\frac{r^2}{2}e^0 \to \underline{-\infty}$

olika värden i olika riktningar

<u>Gränsvärdet existerar inte</u>

2.6b) Bestäm $f(x,y)$ så att $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \varphi(y)$

$\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int \frac{y}{x^2+y^2}dx = \left\{\begin{matrix} x=yt \\ dx=ydt\end{matrix}\right\} = \int \frac{y^2dt}{y^2(1+t^2)} = \arctan t$

$= \arctan(\frac{x}{y})$

$\therefore f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \varphi(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \varphi'(y) \underset{\uparrow \text{givet!}}{=} -\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi'(y)=0$

$\therefore \varphi(y) = C \in \mathbb{R}$

$\therefore$ <u>$f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + C$</u>

[eller $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}) + C'$]