Seminarieuppgift 11, Algebra 9 + Analys 7

Ville Wassberg

April 2021

1 Algebra 9

Bestäm matrisen för den linjära avbildning F i rummet som definieras av att u först speglas i planet genom origo som spänns upp av vektorerna $v_1 = (1, 0, 1)$ och $v_2 = (0, 1, 0)$ och sedan projiceras på planet $2x - y - 2z = 0$.

I och med att vektorerna spänner upp ett plan från origo så behövs inget basbyte göras. För att komma fram till matrisen som speglar i det första planet så behövs en normalvektor till planet, som kan fås fram genom kryssprodukten av de två uppspännande vektorerna v_1 och v_2, eftersom denna kommer att vara ortogonal med planet:

$$\overline{n} = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Speglingen är lika med en godtycklig vektor $u = (x, y, z)$ minus två gånger projektionen av u på normalen:

$$\begin{aligned} S(u) = \overline{u} - 2 \times proj_{\overline{n}}\, \overline{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\frac{(x, y, z) \cdot (-1, 0, 1)}{\sqrt{2^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nu behövs projektionen på planet 2x-y-2z=0 tas fram. Projektion på planet av en godtycklig vektor $\overline{u}$ kan ses som $\overline{u}$ minus projektionen av $\overline{u}$ på planets normal, som i det här fallet är $(2,-1,-2)$:

$$Proj_{plan}\ \overline{u} = \overline{u} - proj_{\overline{n}}\ \overline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{(x,y,z)\cdot(2,-1,-2)}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

För att göra speglingen först och projektionen sedan, så behöver systemet ha matrisen med speglingen närmst vektorn, såhär; $F(\overline{u}) = PS\overline{u}$. Då blir alltså matrisen för avbildningen F, när avbildningsmatrisen multipliceras från vänster;

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Analys 7

Beräkna dubbelintegralen I=$\int\int_D xy\ dxdy$ **där D är mängden** $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, xy \leq \frac{1}{2}\}$ **i det reella talplanet.**

Eftersom att område D kan betraktas som en kvadrant av en cirkelskiva i xy-planet, så blir det trevligare att integrera uppgiften i ett $r\theta - plan$ där r är radien och θ är vinkeln i positiv riktning. På så sätt kan jag skriva om område D till en rektangel på ett nytt område E med sidorna parallella med koordinataxlarna.

Därför sätter jag:

$$x = rcos(\theta)$$

$$y = rsin(\theta)$$

Eftersom

$$xy = r^2cos(\theta)sin(\theta) = \frac{1}{2}r^2sin(2\theta) = \frac{1}{2}$$

sätter jag;

$$E = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Nu kan jag istället skriva och räkna ut integralen som;

$$\int\int_E (r(\frac{1}{2}r^2sin(2\theta))\ drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 (r^3)\ dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(2\theta))\ d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{-cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$