Seminarieuppgift 10, Algebra 8 + Analys 6

Ville Wassberg

April 2021

1 Algebra 8

Uppgift: För vilka a är vektorerna (1,1,1), (1,2,a+1) och (1,a+2,1) linjärt oberoende? Då bildar de en bas i rummet. Bestäm koordinaterna för vektorn u = (2a,a,0) i denna bas.

Om vektorerna, som jag kallar v_1, v_2 och v_3, är oberoende innebär det att trippelprodukten inte blir noll, vilket är detsamma som om jag stoppar in vektorerna som kolonner i en 3x3 matris där determinanten inte är lika med 0. Så jag gör det:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a+2 \\ 1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1\to r_3]{r_2-r_1\to r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = (-a(a+1)) = 0 \Leftrightarrow a = 0, -1$$

Alltså är vektorerna linjärt oberoende och bildar en bas i rummet när $a \neq 0 \vee -1$. För att bestämma koordinaterna för u i v_1, v_2 och v_3 så behöver jag lösa systemet där $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 2 & a+2 & a \\ 1 & a+1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1\to r_3]{r_2-r_1\to r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a+1 & -a \\ 0 & a & 0 & -2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a}r_3\to r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a+1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_3\to r_2]{r_1-r_3\to r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & a+1 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a+1}r_2\to r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1-r_2\to r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a+2-\frac{2-a}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a}{a+1} \end{array}\right)$$

Alltså är:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a+2 \\ 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a+2-\frac{2-a}{a+1} \\ -2 \\ \frac{2-a}{a+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

och koordinaterna för u i basen (v_1, v_2, v_3) är; $(2a+2-\frac{2-a}{a+1}, -2, \frac{2-a}{a+1})$.

2 Analys 6

Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}$ **på området** $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$**.**

Jag behöver alltså undersöka funktionen i: i) Där derivatan av funktionen är 0, ii) där derivatan inte är definierbar och iii) randpunkter. Eftersom att funktionen är en kvot så kommer derivatan att ha nämnaren i kvadrat och när den inte är definierad är när $x^2 + y^2 = 1$ vilket är utanför domänet, så ii) behövs ej utföras.

i)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}\right) = \frac{-x^4 + x^2(3-2y^2) - y^4 + y^2}{(1-x^2-y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}\right) = \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} = 0$$

Eftersom att antingen y eller x behöver vara 0 för att uppfylla att derivatan med avseende på y är 0 så tittar jag på de två fallen i täljaren på derivatan med avseende på x:

$$y = 0 \to -x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 0, \pm\sqrt{3}$$

$$x = 0 \to -y^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0, 0, \pm 1$$

Här syns det att endast punkten (0,0) är inom domänet, så vi kollar det:

$$f(0,0) = 0$$

iii) Randpunkter: Eftersom att den kan betraktas som en cirkelskiva med radien 1/4 i xy-planet så kan jag sätta $x = \frac{1}{2}cos(t), y = \frac{1}{2}sin(t)$. Jag sätter $h(t) = f(\frac{1}{2}cos(t), \frac{1}{2}sin(t))$ där $0 < 2\pi$.

$$h(t) = \frac{\frac{1}{2}cos(t)(\frac{1}{4})}{3/4} = \frac{1}{6}cos(t)$$

$$h'(t) = -\frac{1}{6}sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \pi$$

$$h(0) = \frac{1}{6}$$

$$h(\pi) = -\frac{1}{6}$$

Därmed har vi fått ut största och minsta värde till funktionen, som är $\frac{1}{6}$ och $-\frac{1}{6}$, respektive.