MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Algebra
VT21

Dag 13

(1) **Introduktion.** Hur många lösningar har de ekvationssystem som bestäms av följande utvidgade matriser?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$$

Svar: Ingen, oändligt många.

(2) **Homogena ekvationssystem.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2w = 0, \\ 2x + 3y + z - w = 0, \\ x + 2y - 3z + 2w = 0. \end{cases}$$

Svar: $x = -\frac{1}{4}t, y = \frac{1}{4}t, z = \frac{3}{4}t, w = t.$

(3) **Inversa matriser, exempel.** Beräkna inversen till följande 2x2-matris med Gauss-elimination:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

(4) **Inversa matriser, allmän metod.** Beräkna inversen till följande 2x2-matris med Gauss-elimination:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(5) **Elementära matriser.** Skriv matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som en produkt av elementära matriser.

Svar: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(6) **Inhomogena ekvationssystem.** Temat i denna video har en geometrisk tolkning som vi ska återkomma till senare. Ekvationen $ax + by = c$ är ett mycket enkelt ekvationssystem med en ekvation och två obekanta. Men den kan också tolkas som ekvationen för en linje i planet (komplexa planet om så önskas). Hur kan vi geometriskt tolka påståendet att den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är en summa av en partikul rlösning och den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation?

Svar: Givet en punkt (x_0, y_0) p linjen så kan varje punkt (x, y) på linjen skrivas som $(x, y) = (x_0, y_0) + (u, v)$, d r (u, v) ligger p|aa linjen $ax + by = 0$ genom origo. .

(7) **Linj ra algebrans fundamentalsats.** En matris B kallas f r en v nster-invers till A om $BA = E$ och C kallas f r en h gerinvers till A om $AC = E$. Visa direkt, utan att anv nda hela teorin med Gauss-elimination etc, att om en kvadratisk matris A har b de v nster- och h gerinvers s m ste dessa vara lika (och allts utg ra en vanlig invers till A).

Svar: $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$.

/Boris Shapiro, 210225/