MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Algebra
VT21

Dag 23

(1) **Introduktion.** Vilken eller vilka av följande avbildningar $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är linjära? ($\vec{v}$ är en godtycklig fix vektor.)

$$a) \quad T_1(\vec{u}) = -\vec{u}, \qquad b) \quad T_2(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{e}_1, \qquad c) \quad T_3(\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Svar: T_1 och T_3 är linjära.

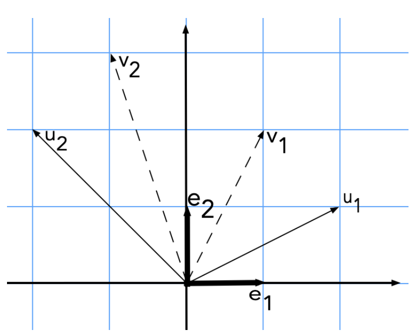
(2) **Representerande matriser.** Vad blir matrisen för avbildningen $T_1(\vec{u}) = -\vec{u}$ från föregående uppgift? (Med avseende på den vanliga ON-basen i $\mathbb{R}^3$.)

Svar: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(3) **Exempel 1.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som, givet ON-basen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, har egenskapen att vektorn (x, y, z) avbildas på vektorn (y, z, x). Vad blir matrisen A för avbildningen T? Försök även tänka på hur denna avbildning ska tolkas geometriskt.

Svar: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rotation ett tredjedels varv runt axeln (t, t, t).

(4) **Exempel 2.** Bestäm matrisen med avseende på standardbasen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ till den linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar vektorn $\vec{u}_1$ på $\vec{v}_1$ och $\vec{u}_2$ på $\vec{v}_2$ (se bild)



Svar: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$

(5) **Basbyten.** Konstruera en ortogonal 3x3-matris (ON-matris) Q, sådan att den sista kolonnen är parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svar: T ex $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

(6) **Exempel 3.** Beräkna matriserna för rotation med vinkeln $\pi/2$ runt den axel genom origo som har riktningsvektor $(1, 1, 1)$, genom att använda matrisen i föregående uppgift. (Det finns två stycken som svarar mot de olika rotationsriktningarna.)

Svar: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

/Boris Shapiro, 210402/