ÖPB21 2.65 f)

Räkneövning 4/10-2021 Analys A

$$Q(h_1,h_2,h_3)=h_1^2+2h_2^2+2h_3^2+2h_1h_2-2h_1h_3+2h_2h_3=$$

$$=\underbrace{h_1^2+2h_1(h_2-h_3)}+2h_2^2+2h_3^2+2h_2h_3=$$

$$=\overbrace{(h_1+(h_2-h_3))^2-(h_2-h_3)^2}+2h_2^2+2h_3^2+2h_2h_3$$

$$(h_1+h_2-h_3)^2-(h_2^2+h_3^2-2h_2h_3)+2h_2^2+2h_3^2+2h_2h_3$$

$$=(h_1+h_2-h_3)^2+\underbrace{h_2^2+h_3^2+4h_2h_3}_{(h_2+2h_3)^2-3h_3^2}=$$

$$\boxed{=(h_1+h_2-h_3)^2+(h_2+2h_3)^2-3h_3^2}$$

Tre kvadrater, olika tecken på koefficienterna $\Rightarrow$ indefinit

$$\begin{cases} Q(1,1,0)>0 \\ Q(3,-2,1)<0 \end{cases}$$

ÖPB 2.67

(2)

Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y$$

Lösning:

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 27y = 0 \Rightarrow 3y(x^2y+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2y=-9 \end{cases} \\ (2)\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 27x + 27 = 0 \Rightarrow x(2x^2y+27) + 27 = 0 \end{cases}$$

$\underline{y=0}$: $(2) \Rightarrow 27x + 27 = 0 \Rightarrow \underline{x=-1}$

$x^2y=-9$: $(2) \Rightarrow x(-18+27)+27=0 \Rightarrow \underline{x=-3} \Rightarrow \underline{y=-1}$

∴ $(-1,0)$ och $(-3,-1)$ är stationära punkter.

Punkternas karaktär

a) $\underline{(-1,0)}$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 \Rightarrow \underline{A} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \underline{0}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 27 \Rightarrow \underline{B} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) = \underline{27}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 \Rightarrow \underline{C=-2}$ i $(-1,0)$

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 54hk - 2k^2 =$$

$$= -2(k^2 - 27hk) = -2\left[\left(k - \frac{27}{2}h\right)^2 - \frac{27^2}{4}h^2\right] =$$

$$= \frac{27^2}{2}h^2 - 2\left(k - \frac{27}{2}h\right)^2 \Rightarrow$$

$Q(h,k)$ är indefinit $\Rightarrow (-1,0)$ är en $\underline{\text{sadelpunkt}}$

b) $(-3,-1)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 \Rightarrow \underline{A = -18}$ i $(-3,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 27 \Rightarrow \underline{B = -27}$ i $(-3,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 \Rightarrow \underline{C = -54}$ i $(-3,-1)$

$$Q(h,k) = -18h^2 - 2\cdot 27hk - 54k^2 = -18[h^2 + 3hk + 3k^2]$$

$$= -18\left[\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + \frac{12k^2}{4}\right] = \underline{-18\left[\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right]}$$

$3k^2$

$Q(h,k)$ är negativt definit $\Rightarrow$

$(-3,-1)$ är ett lokalt maximum

ÖPB2 2,68 b) Har $f(x,y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4$ lokalt extremvärde i origo?

Lösning: $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 12y + 4x^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 + 12x^2 \Rightarrow \underline{A = 8 \text{ i } (0,0)}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x + 18y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12 \Rightarrow \underline{B = 12 \text{ i } (0,0)}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18 \Rightarrow \underline{C = 18 \text{ i } (0,0)}$

Nästa blad!

i $(0,0)$:

$$Q(h,k) = 8h^2 + 24hk + 18k^2 = 8\left[h^2 + 3hk + \frac{9}{4}k^2\right] =$$

$$= 8\left[\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + \frac{9k^2}{4}\right] = \underline{8\left(h + \frac{3k}{2}\right)^2}$$

$Q(h,k) \geq 0$ men $Q(3,-2) = 0 \Rightarrow$

<u>$Q(h,k)$ är positivt semidefinit!</u>

Ingen slutsats kan dras! Vad gör vi nu?

$$f(x,y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4 = (2x+3y)^2 + x^4 \geq 0$$

för alla $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0 \Rightarrow$

<u>f har lokalt minimum i origo!</u>

2.68d) $f(x,y,z) = 1+x^2+2y^2+4z^2-2xy+6yz-2xz$

Har f lokalt <u>extremvärde</u> i origo?
(min eller max)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-2y-2z = 0 \text{ i origo} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y-2x+6z = 0 \quad -\!\!\shortparallel\!\!- \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 8z+6y-2x = 0 \quad -\!\!\shortparallel\!\!- \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 6$$

∴ Associerade kvadratiska formen är

$$Q(h,k,l) = \underline{2h^2} + 4k^2 + 8l^2 - \underline{4hk} - \underline{4hl} + 12kl =$$

$$= \underbrace{h^2 - 2hk - 2hl}_{} + 2k^2 + 4l^2 + 6kl =$$

$$[h-(k+l)]^2 - (k+l)^2 + 2k^2 + 4l^2 + 6kl =$$

$$= [h-k-l]^2 - k^2 - l^2 - 2kl + 2k^2 + 4l^2 + 6kl =$$

$$= (h-k-l)^2 + \underbrace{k^2+3l^2+4kl}_{(k+2l)^2-4l^2+3l^2} = \underline{(h-k-l)^2 + (k+2l)^2 - l^2}$$

<u>dvs $Q(h,k,l)$ är indefinit ⇒ sadelpunkt, dvs.</u>
<u>ingen extrempunkt i origo.</u>

Tenta 210414

a) Motivera varför det finns punkter på kurvan $x^2+y^2+x^2y^2=24$ där max och min till funktionen x^4+y^4 antas, samt
b) bestäm max och min

Lösning:

a) Kurvan utgör en kompakt mängd och $f(x,y)=x^4+y^4$ är kontinuerlig

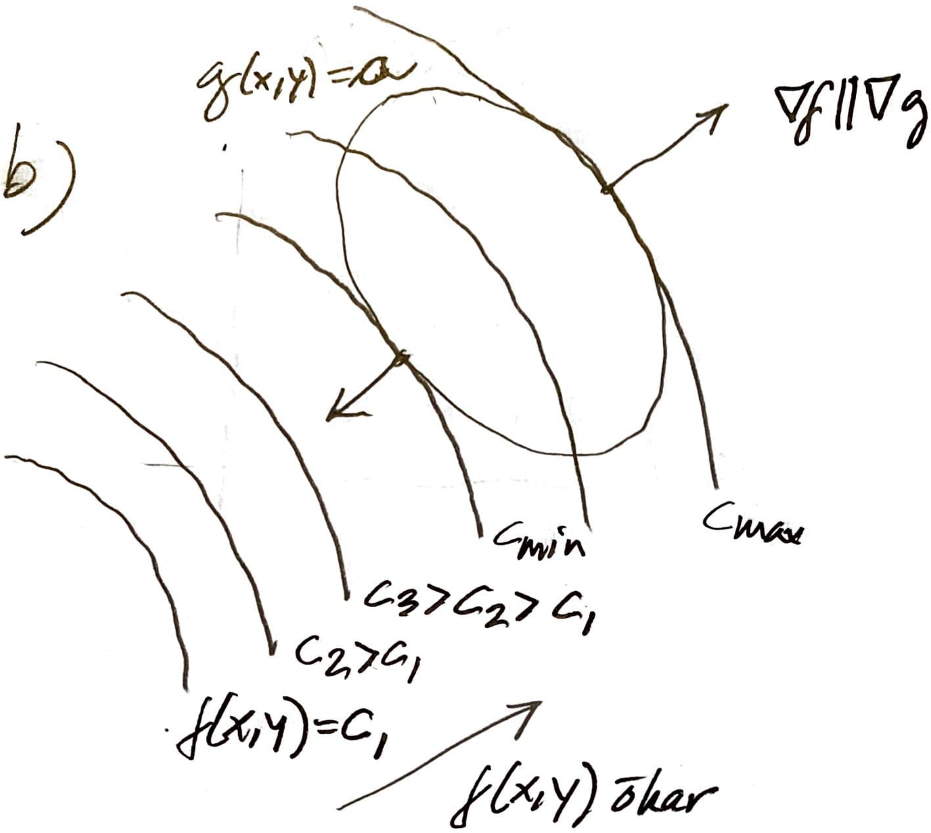
$$x^2 \leq 24 \Rightarrow -\sqrt{24} \leq x \leq \sqrt{24}$$
$$y^2 \leq 24 \Rightarrow -\sqrt{24} \leq y \leq \sqrt{24}$$

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} x^2+y^2+x^2y^2 = \infty$$

För varje C (stort tal) finns ett R så att $f(x,y) > C$ då $x^2+y^2 > R^2$

Nivåkurvan $f(x,y)=a$ innesluts i $x^2+y^2 \leq R^2$ då $a < C$.

b)



$$0=\begin{vmatrix}\nabla f\\ \nabla g\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4x^3 & 4y^3\\ 2x+2xy^2 & 2y+2x^2y\end{vmatrix}=0$$

$$4x^3(2y+2x^2y)-4y^3(2x+2xy^2)=0$$

$$x^3y(1+x^2)-y^3x(1+y^2)=0$$

$$xy\left[x^2+x^4-y^2-y^4\right]=0 \qquad x^2-y^2+x^2$$

$$xy\left((x+y)(x-y)+(x^2+y^2)\underbrace{(x^2-y^2)}_{(x+y)(x-y)}\right)=0$$

$$xy(x+y)(x-y)\left[\underbrace{1+x^2+y^2}_{>0}\right]=0$$

$x=0$ eller $y=0$ eller $y=x$ eller $y=-x$

Bivillkoret: $x^2+y^2+x^2y^2=24$

$x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{24} \Rightarrow (0,\sqrt{24})\,;\,(0,-\sqrt{24})$

$y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{24} \qquad (\pm\sqrt{24},0)$

$y=x \Rightarrow 2x^2+x^4-24=0 \Rightarrow x^2=-1\pm\sqrt{1+24}=-1\pm5 = \begin{cases}4\\-6\end{cases}$

$x=\pm2$

$(\pm2,\pm2)$

$y=-x \Rightarrow x=\pm2$

$(\pm2,\mp2)$

$(0,\pm\sqrt{24})$ och $(\pm\sqrt{24},0) \Rightarrow f(x,y)=(\sqrt{24})^4=24^2=\underline{576}$

$(\pm2,\pm2)$ och $(\pm2,\mp2) \Rightarrow f(x,y)=2^4+2^4=\underline{32}$