MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Algebra
VT21

Dag 14

(1) **Introduktion.** Definiera en följd av matriser $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ genom rekursionsformeln $A_{n+1} = A_n^2 - nB$ där

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gissa en formel för A_n (som funktion av n) och visa att gissningen är riktig med hjälp av induktion.

Svar: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) **Exempel med summaformel.** Använd induktion för att ge ett alternativt bevis av formeln för att beräkna den aritmetiska summan

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(3) **Exempel med olikhet.** Bevisa med induktion att

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

för alla $n \geq 1$.

(4) **Tvåstegsinduktion.** Bevisa med tvåstegsinduktion att det n:te Fibonaccitalet F_n uppfyller olikheten

$$F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}.$$

/Boris Shapiro, 210301/