Seminarieuppgift 9, Algebra 7 + Analys 5

Ville Wassberg

April 2021

1 Algebra 7

Definiera en talföljd T_1, T_2, T_3... genom att sätta $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ och $T_{k+1} = T_k + T_{k-1} + T_{k-2}$. Visa att $T_k \leq 2^k$ för alla $k = 1, 2, 3$,....

$$T_1 = T_2 = T_3 = 1$$

$$T_{k+1} = T_k + T_{k-1} + T_{k-2}$$

Eftersom talföljden är beroende av tre föregångare så behöver basfallet och induktionsbeviset också byggas på tre delar.

Basfall:

$$T_4 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \leq 2^4 = 16$$

$$T_5 = T_2 + T_3 + T_4 = 1 + 1 + 3 = 5 \leq 2^5 = 32$$

$$T_6 = T_3 + T_4 + T_5 = 1 + 3 + 5 = 9 \leq 2^6 = 64$$

Induktionssteg: Antag;

$$T_{k-3} \leq 2^{k-3}$$

$$T_{k-2} \leq 2^{k-2}$$

$$T_{k-1} \leq 2^{k-1}$$

Då är;

$$T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3} \leq 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} =$$
$$2^{k-3}(1 + 2 + 2^2) = 2^{k-3} \times 7 \leq 2^{k-3} \times 8 = 2^{k-3} \times 2^3 = 2^k$$

Därmed är det bevisat att $T_k \leq 2^k$

2 Analys 5

Beräkna följande generaliserade integraler eller visa att dom divergerar: $\int_0^\infty e^{-ax}cosbx\ dx$ och $\int_0^\infty e^{-ax}sinbx\ dx, a > 0$

Eftersom integralerna kan betraktas som gränsvärden kan jag börja med att skriva om dem till det, och sedan lösa dem.

i)

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}cosbx)dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-e^{-ax}}{a}cosbx\right]_0^M - \int_0^M (\frac{e^{-ax}}{a}bsinbx)dx =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-e^{-ax}}{a}cosbx\right]_0^M - \left(\left[\frac{-e^{-ax}}{a^2}bsinbx\right]_0^M - \int_0^M (\frac{-e^{-ax}}{a^2}b^2cosbx)dx\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}cosbx)dx(1+\frac{b^2}{a^2}) = \left[\frac{-e^{-ax}}{a}cosbx + \frac{e^{-ax}}{a^2}bsinbx\right]_0^M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}cosbx)dx = \lim_{M\to\infty}(\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-ax}}{a}(\frac{b}{a}sinbx - cosbx)\right]_0^M =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}(0-(-1+0) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

ii)

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}sinbx)dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-e^{-ax}}{a}sinbx\right]_0^M - \int_0^M (\frac{-e^{-ax}}{a}bcosbx)dx =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-e^{-ax}}{a}sinbx\right]_0^M - \left(\left[\frac{e^{-ax}}{a^2}bcosbx\right]_0^M - \int_0^M (\frac{-e^{-ax}}{a^2}b^2sinbx)dx\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}sinbx)dx(1+\frac{b^2}{a^2}) = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-e^{-ax}}{a}sinbx - \frac{e^{-ax}}{a^2}bcosbx\right]_0^M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\int_0^M (e^{-ax}sinbx)dx = \lim_{M\to\infty}\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-ax}}{a}(sinbx + \frac{b}{a}cosbx)\right]_0^M =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}(0-(-1(0+\frac{b}{a}))) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Alltså divergerar inte någon av integralerna, utan de konvergerar mot $\frac{a}{a^2+b^2}$ (i) samt $\frac{b}{a^2+b^2}$ (ii), respektive. Sålänge $a^2+b^2 \neq 0$, eller att b också är reellt, förstås.