

Skriftliga tentorfrågor

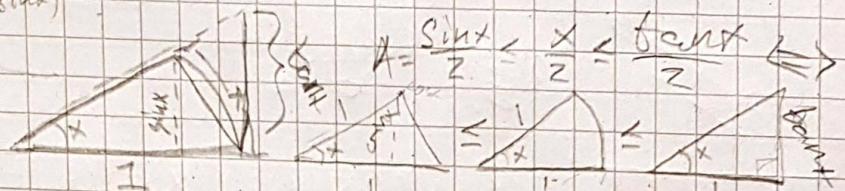
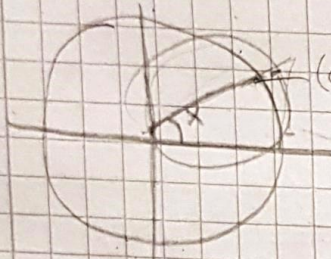
$$A = \sin^{-1} \quad A = \arcsin$$

① $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = 0$

$a = 1+p, p > 0, n = [x] \quad a^x = (1+p)^x \geq (1+p)^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{n(n-1)}{2} p^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^x \geq (x-1)(x-1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \left[t = \ln x \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ enligt ovan.

② $\sin x < x < \tan x$ om $0 < x < \pi/2$



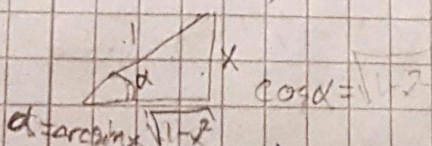
$\Leftrightarrow \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < 1$
 $\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$
JFKI / inställningslagen.

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \left[t = \frac{1}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \underline{\underline{\ln e = 1}}$

$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$
 $\rightarrow e \quad \rightarrow e \quad \rightarrow e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = \left[\begin{matrix} y = e^x - 1 \\ x = \ln(y+1) \end{matrix} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = (1)' = 1$

④ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{2 \sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right) \cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos(a) \cdot 1$
 $\rightarrow \cos(a) \quad \rightarrow 1$



$y = \sin x, \arcsin(y) = x$
 $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \left[k = e^h - 1 \right] = e^x \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\ln(1+k)} = e^x \lim_{k \rightarrow 0} \left(\ln(1+k) \right)^{-1}$
 $= \left[t = \frac{1}{k} \right] = e^x \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \right)^{-1} = e^x \cdot \frac{1}{\frac{1}{e}} = e^x \cdot e = e^{x+1}$
 $\rightarrow e \quad \rightarrow 1$
 $(f^{-1})' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{x}$
 $y = e^x$
 $f^{-1} = \ln(y) = x$

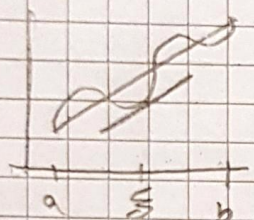
$$D(f^{-1}(y_0)) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{f^{-1}(y_0) = x_0}{h = f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow f(y_0+h) - f(y_0) = k} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = (f'(x_0))^{-1} \quad D(\arcsin y) = (f'(\arcsin y))^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

⑤ Antag att f är kont. och deriverbar på $I_a, b]$

① $\exists \xi \in I_a, b]$ s.d. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Någonstans i intervallet $I_a, b]$ finns nämligen en punkt där grafens tangent är parallell med den linje som går mellan ändpunkterna a, b .



$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beräkna: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$$g(a) = 0 \quad g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Roller sats: Det finns $\xi \in I_a, b]$ s.d. $g'(\xi) = 0$ om $f(a) = f(b)$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Om $f(x)$ deriverbar och $f'(x) > 0$ (monotonväxande) Då \Rightarrow

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(y-x)}_{>0}$$

⑥ Taylor.

(1 variabel)

Beräkna: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + \underbrace{\left[(x-t)f'(t) \right]_a^x}_{x \text{ konstant}} - \int_a^x (x-t)f''(t) dt =$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt = f(a) + (x-a)f'(a) + \left[-\frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt$$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt = P_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

2 variabels:

$$F(t) = f(a+th, b+tk) \quad F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)t^2}{2} + \frac{F'''(\xi)t^3}{6}$$

$$0 < \xi < 1 \quad t=1 \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(\xi)}{6}$$

$$F(1) = f(a+h, b+k) \quad F''(t) = f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f''_{xy}(a+th, b+tk)hk + f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

$$F(0) = f(a, b)$$

$$F'(t) = f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$F'(0) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$$

Om differentierbar.

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad \frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)) - f(g(t), h(t))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a+k, b+l) - f(a, b)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'_x(a, b)k + f'_y(a, b)l + o(\sqrt{k^2 + l^2})}{\Delta t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f'_x(g(t), h(t))(g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t} + \frac{f'_y(g(t), h(t))(h(t+\Delta t) - h(t))}{\Delta t} + \frac{o(\sqrt{(g(t+\Delta t) - g(t))^2 + (h(t+\Delta t) - h(t))^2})}{\Delta t} \right) \\ &= f'_x(g(t), h(t))g'(t) + f'_y(g(t), h(t))h'(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{(g(t+\Delta t) - g(t))^2 + (h(t+\Delta t) - h(t))^2})}{\Delta t} \\ &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{(g(t+\Delta t) - g(t))^2 + (h(t+\Delta t) - h(t))^2})}{\Delta t} f'(k, l) = 0 \end{aligned}$$

⑨ Istället för att bärda på hur en funktion förändras sig i riktning med x- och y-axlarna, så kan det vara intressant att bärda på hur förändringen förhåller sig till en annan riktning, $\vec{w} = (u, v)$:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{w}}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu, b+tv) - f(a, b)}{t} = \frac{d}{dt} (f(a+tu, b+tv)) \Big|_{t=0} \\ &= f'_x(a+tu, b+tv)u + f'_y(a+tu, b+tv)v \Big|_{t=0} = f'_x(a, b)u + f'_y(a, b)v = \\ &= \nabla f \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

gradient: $\nabla f_{(a,b)} = (f'_x(a, b), f'_y(a, b))$ $f'_{\vec{w}} = \nabla f \cdot \vec{w}$ $|\vec{w}|=1$ Normaliserad

gradienten bestående av de part. deriv. beskriver hur förändringen sker, oavsett riktning.

Men bara om f är differentierbar! Annars är inte kedjeregeln uppfylld! Och riktungsderiv. får undersökas enskilt. Cauchy schwartz olikhet:

$$|grad f(\vec{a})| \cdot f'_w(\vec{a}) \leq |grad f(\vec{a})| |\vec{w}| = |grad f(\vec{a})|$$

$$\begin{aligned} f'_w(\vec{a}) &= grad f(\vec{a}) \cdot \vec{w} = |grad f(\vec{a})| |\vec{w}| \cos \theta \\ f'_w(\vec{a}) &\leq |grad f(\vec{a})| |\vec{w}| \end{aligned}$$

Att \vec{w} är förändringsriktning!
maximal i gradientens riktning!

⑩ Positivt definit: Den associerade kvadratiske formen (AKF), i två variabler, har $Q(h,k) > 0$ för $\forall (h,k) \neq (0,0)$
 Neg. def. $Q(h,k) < 0$ för $\forall (h,k) \neq (0,0)$

Indefinit: $Q(h,k)$ antar både positiva och negativa värden beroende på h,k .

Pos. semidef. $Q(h,k) \geq 0$ men inte pos. def.

Neg. semidef. $Q(h,k) \leq 0$ men inte neg. def. för $\forall (h,k)$

Antag att för kont. deriverbara $f(a,b)$, och (a,b) är en stationär punkt, $\nabla f = 0$. Om $Q(h,k)$ är pos. def. där är (a,b) en minipunkt.

Beräk. $f(a+h, b+k) = f(a,b) \left(f' = 0 \right) + \frac{1}{2} Q(h,k) + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k) \leq \mu$

Lemma Om Q pos. def. så $\exists \delta > 0$ s.a. $Q(h,k) \geq \delta(h^2+k^2)$

$$Q(h,k) = Q\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) (h^2+k^2) \geq \frac{\delta}{\sqrt{h^2+k^2}} (h^2+k^2) \quad \delta = \min_{h^2+k^2=1} Q(h,k) = Q(h_0, k_0) > 0$$

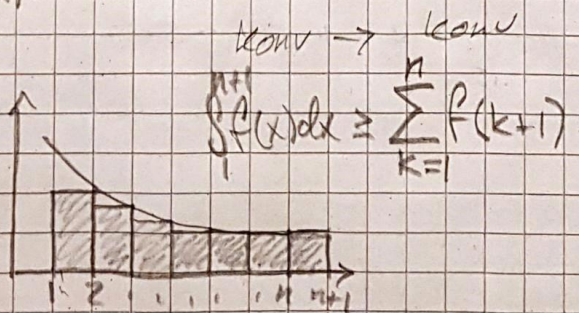
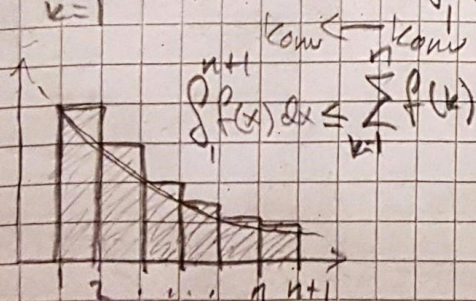
$$f(a+h, b+k) \geq f(a,b) + \frac{\delta}{2} (h^2+k^2) + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k) = f(a,b) + (h^2+k^2) \left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{h^2+k^2} B(h,k) \right)$$

$$\frac{\delta}{2} + \sqrt{h^2+k^2} B(h,k) \geq \frac{\delta}{2} - \sqrt{h^2+k^2} M \geq \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4M} M = \frac{\delta}{4} > 0 \quad E = \min\left(\epsilon_0, \frac{\delta}{4M}\right)$$

⑪ Cauchy's integralkriterium säger att om

$f(x)$ är positiv och avtagande när $x \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konv.} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$



⑫ Cauchy's Rottkriterium: Antag: d'Alembert's kvotkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A \quad (\text{Pos. serier})$$

$$\text{Antag: } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

De bygger på $|f| < 1$ $\begin{cases} A < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ A > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ Divergent} \end{cases}$

$$A < 1 \quad A < r < 1$$

$$G.D. \Rightarrow \exists \omega \text{ s.s. } k > \omega \Rightarrow a_k^{1/k} < r$$

$$a_k < r^k$$