Analys del A, bonus 1

Ville Wassberg

September 2021

1 Vad är supremum och infimum av följande talföljder? Antas maximum och minimum?

$$a)\quad \{\arctan n\}_{n=1}^{\infty}\,,\ \ b)\ \left\{\frac{\cos n\pi}{n^2+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}\,,\ \ c)\ \left\{n\sin\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\,,\ \ d)\ \left\{n^2\sin\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

a) Låt talföljden kallas M_1. Vi vet att funktionen $arctan(x)$ är växande och begränsad för alla reella x, därför att $D(arctan(x)) = \frac{1}{x^2+1} \to 0_+$ när $x \to \pm\infty$. Därför kan infimum och även minimum konstateras vid minsta n, som i det här fallet är $n = 1$, så;

$$Inf(M_1) = minimum = arctan(1)$$

$$Sup(M_1) = \lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \pi/2$$

Eftersom det för alla x kan finnas ett ω där $x < \omega$ så att $arctan(x) \leq arctan(\omega)$ så existerar det inget maximum.

b) Låt talföljden kallas M_2. Man kan undersöka täljaren och nämnaren i talföljden var för sig. Eftersom att $\{cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, -1...$ är den alternerande, och något specifikt gränsvärde är då hopplöst att få fram. Men eftersom att nämnaren $\left\{n^2+1\right\}_{n=1}^{\infty}$ är obegränsad och en växande talföljd i och med att; $D(x^2 + 1) = 2x$ är positiv for alla positiva x, och;

$$\lim_{x\to\infty} x^2 + 1 = \infty$$

så vet vi beloppet av talföljden minskar för varje n+1. Det betyder att de två första värdena i talföljden måste vara minimum respektive maximum av talföljden. Så;

$$Sup(M_2) = maximum = \frac{cos2\pi}{2^2+1} = 1/5$$

$$Inf(M_2) = minimum = \frac{cos1\pi}{1^2+1} = -1/2$$

c) Låt talföljden kallas M_3. Om n ses som heltalsdelen av $1/x$ så $n = [1/x]$, så kan man se att talföljden är likt standardgränsvärdet $sinx/x$, och när $n \to \infty \Leftrightarrow x \to 0_+$ så vi kan se att;

$$Sup(M_3) = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

Och av samma anledning som i a) så finns inget maximum. Infimum och minimum kan antas vid $n = 1$;

$$Inf(M_3) = minimum = sin(1)$$

d) Låt talföljden kallas M_4. Denna talföljd kanundersökaslikt den förra med gränsvärden; om n = [y] och y = 1/x så;

$$Sup(M_4) = \lim_{y \to \infty} y^2 sin\frac{1}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = +\infty * 1 = +\infty$$

Infimum av talföljden blir även här när $n = 1$, då talföljden är strikt växande för $1 \leq n$, så;

$$Inf(M_4) = minimum = sin(1)$$

2 Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

$$a) \quad \infty \sum_{n=1} \sqrt{\sin(\pi/n)}, \quad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)^{\ln n}, \quad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}.$$

a) Med taylorutveckling av $sin(\pi/n)$ för stora n så är, för n = [x], $sin(\pi/x) \approx \frac{\pi}{x} + O(\frac{1}{x^3})$, så om det går att visa att termerna går mot noll så vet vi att serien också konvergerar;

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\sin(\pi/x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{\pi}{x} + O(\frac{1}{x^3})} = \sqrt{0} = 0$$

Alltså konvergerar serien.

b) Med hjälp av logaritmlagarna kan serien skrivas om;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(\frac{n+1}{n})\right)^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(1 + \frac{1}{n})\right)^{\ln n}$$

Eftersom;

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln(1 + \frac{1}{x})\right)^{\ln x} \to (\ln 1)^{\ln R}, R \to \infty = 0$$

Så ser man att serien kommer att konvergera.

c)

3 Avgör om följande generaliserade integraler konvergerar eller divergerar:

$$a) \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^2 - x^4}} dx, \quad b) \quad \int_0^\pi \frac{x\sqrt{x}}{\sin^2 x} dx, \quad c) \quad \int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx.$$

a) $\sqrt{\frac{x}{x^2-x^4}} = \sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{1-x^2}}$ så integralen är generaliserad både vid 0 och 1, men är kontinuerlig där emellan, så den kan delas upp till;$\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. Börjar med $\int_0^{1/2}$. Låt $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{1-x^2}}$ och $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Då blir enligt jämförelsekriterium 2;

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = 1$$

Därför är alltså $f(x)$ konvergent om $g(x)$ är det;

$$\int_0^{1/2} 1/\sqrt{x}\, dx = \lim_{R \to 0+} \int_R^{1/2} 1/\sqrt{x}\, dx = \lim_{R \to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_R^{1/2} = \lim_{R \to 0+} (\frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{R}) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Alltså är integralen av f(x) konvergent på det intervallet. Samma kriterium kan tillämpas igen för det andra intervallet, men låt nu; $g(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ så;

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{x}} = 1$$

Och då gäller att f(x) är konvergent på detta intervall om och endast om g(x) är det;

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{R \to 1} \int_{1/2}^R frac1\sqrt{1-x^2}\, dx = \lim_{R \to 1} [arcsinx]_{1/2}^R = (arcsin(1) - arcsin(1/2))$$

Alltså är denna generaliserade integral konvergent.

b) Eftersom integralen är odefinierad i punkterna när x är 0 och π så kan integralen delas upp till;

$$\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$$

Börjar med 0 till $\pi/2$. Låt $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sin^2 x}$. Eftersom nära 0 är $sinx \approx x$ så därför kan $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = 1/\sqrt{x}$ och jämförelsekriterium 2 kan appliceras även här;

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} \lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1 * 1 = 1$$

och;

$$\int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{R\to 0+} \int_R^{\pi/2} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{R\to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_R^{\pi/2} = \lim_{R\to 0+} (2\sqrt{\pi/2} - 2\sqrt{R}) = 2\sqrt{\pi/2}$$

Och då är den generaliserade integralen konvergent på det intervallet. Om man approximerar $sin(\pi) = f(\pi) + f'(\pi)(\pi - x) = cos(\pi)(\pi - x) = \pi - x$. Eftersom att, enligt jämförelsekriterium 2, om $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = A$ och den ena är konvergent om och endast om den andra är det, så innebär det att om den ena är divergent måste den andra vara det med. Låt $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{(\pi-x)^2}$ som är divergent.
Och;

$$\lim_{x\to\pi} f(x)/g(x) = \frac{(\pi - x)^2}{\sin^2 x} = [u = \pi - x] = \lim u \to 0 \frac{u^2}{sin^2(\pi - u)} = \lim u \to 0 \frac{u^2}{sin^2(u)} = 1$$

Alltså är hela den generaliserade integralen divergent eftersom det räcker med att en av de uppdelade integralerna är det.

c) Denna integrl kan också delas upp i två fall;

$$\int_0^1 + \int_1^\infty$$

Nära noll kan $ln(x+1) \approx x$ så ärför kan $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = 1/\sqrt{x}$ och jämförelsekriterium 2 kan appliceras även här;

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x + 1}{x} = 1$$

Eftersom samma g(x) har visats integrerbar i samma intervall ovan, så är denna generaliserade integral konvergent i det första intervallet. Vi vet att $f(x) \leq e^{f(x)} = \frac{1+x}{e^{x^{3/2}}}$ vilket är konvergent vid integrering, och därför är f(x) konvergent enligt jämförelsekriterium 1. Detta medför att den generaliserade integralen är konvergent.