Seminarieuppgift 8, Algebra 6 + Analys 4

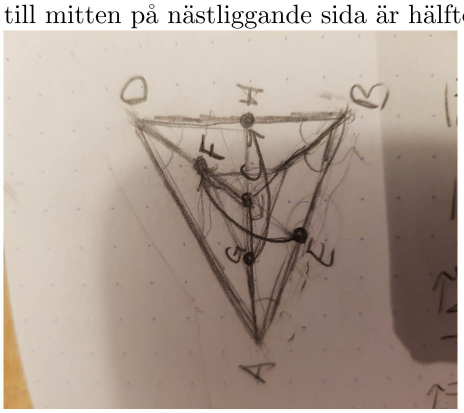
Ville Wassberg

March 2021

1 Algebra 6

Betrakta en liksidig tetraeder ABCD. Vektorn $\overrightarrow{EF}$ går från mittpunkten på $\overrightarrow{AB}$ till mittpunkten på $\overrightarrow{CD}$, och vektorn $\overrightarrow{GH}$ går från mittpunkten på $\overrightarrow{AC}$ till mittpunkten på $\overrightarrow{BD}$. Uttryck vektorerna $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ i basen (AB,AC,AD) samt beräkna vinkeln mellan dem.

I och med att tetraedern är liksidig och vinklarna mellan sidorna då är $\pi/3$, så kan vi se att om vi går upp via en sida halva vägen så vet vi att fågelvägen över till mitten på nästliggande sida är hälften så lång som basen.



$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$
$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Vinkeln mellan $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$: Längden av $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$ är båda $\sqrt{0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; nu kan jag använda skalärprodukten:

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot cos(\alpha) \Leftrightarrow cos(\alpha) = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = arccos(-\frac{1}{3})$$

2 Analys 4

Bestäm antalet rötter till ekvationen $f(x) = 2|arctanx| + 2ln(x^2 + 1) - 2x = a$ för alla reella tal a.

Eftersom att arctanx är en udda funktion så kan jag sätta $|arctanx| = arctan|x|$, då ser vi att jag behöver kolla två fall; när $x > 0$ och $x < 0$.

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = 2arctanx + 2ln(1 + x^2) - 2x = a$$

Derivata;

$$f'(x) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{2+4x}{1+x^2} - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$$

Men här är derivatan inte definierad på 0, så 2 är enda möjliga deriverbara extrempunkt här.

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -2arctanx + 2ln(1 + x^2) - 2x = a$$

Derivata;

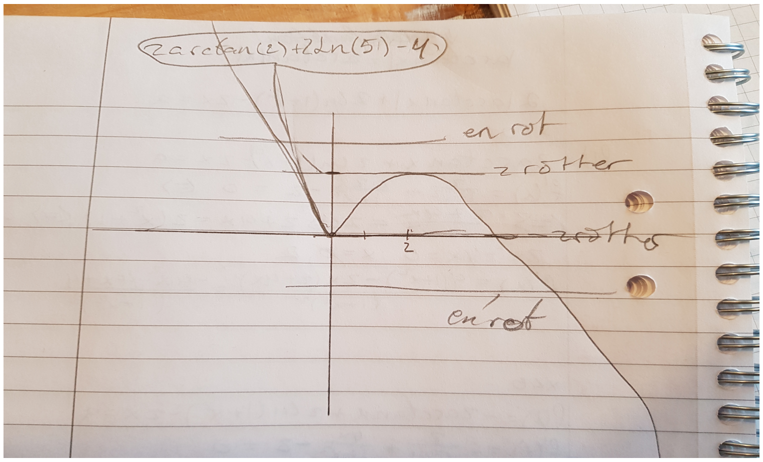
$$f'(x) = -\frac{2}{x^2+1} + \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{4x-2}{1+x^2} - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm i$$

Eftersom att rötterna är komplexa så använder jag de inte i teckentabellen:

Teckentabell					
x =		0		2	
y' y	- - - $\searrow$	ej def. Lokalt min	+ + + $\nearrow$	0 Lokalt max	- - - $\searrow$

Här blir det tydligt att funktionen går mot plus oändligheten när x går mot minus oändligheten och vice versa. Så nu behöver jag kolla vad som händer vid f(0), och det blir $2arctan0 + 2ln1 - 0 = 0$, så vi har en minpunkt på (0,0). $f(2) = 2arctan(2) + 2ln(5) - 4$.



Så slutsatsen blir: **När** $a > f(2) = 2arctan(2) + 2ln(5) - 4$ **har funktionen en reell rot; när** $a = f(2)$ **har funktionen 2 reella rötter; när** $f(2) > a > 0$ **så har funktionen 3 reella rötter; när** $a = 0$ **har funktionen 2 reella rötter; när** $a < 0$ **har funktionen 1 reell rot.**