Dag 2

SATS. Om $\lim f(x) = A$ och $\lim g(x) = B$ så

$$\lim(f(x) + g(x)) = A + B \qquad \text{(Additionsregeln)},$$
$$\lim f(x)g(x) = AB \qquad \text{(Produktregeln)}.$$

GVD: $\lim_{x \to \infty} h(x) = D$

Betyder: För varje $\varepsilon > 0$ finns w så att

$x > w \Rightarrow \underline{|h(x) - D| < \varepsilon}$

Additionslagen:

$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq$

$|f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\exists w_1 \quad < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \exists w_2 \quad < \frac{\varepsilon}{2}$ för $x > w$

$w = \max(w_1, w_2)$

Produktlagen:

$$|f(x)g(x) - AB| < ?$$

PB:s metod. Börja med specialfallet $A = 0$ $\quad |g(x)| \leq C$

Lemma $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $g(x)$ begr.

Då följer att $\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = 0$.

Bevis: $\varepsilon > 0$

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x)| \leq C|f(x)|$$

(GVD: $\exists \omega$ så att $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$ för $x > \omega$)

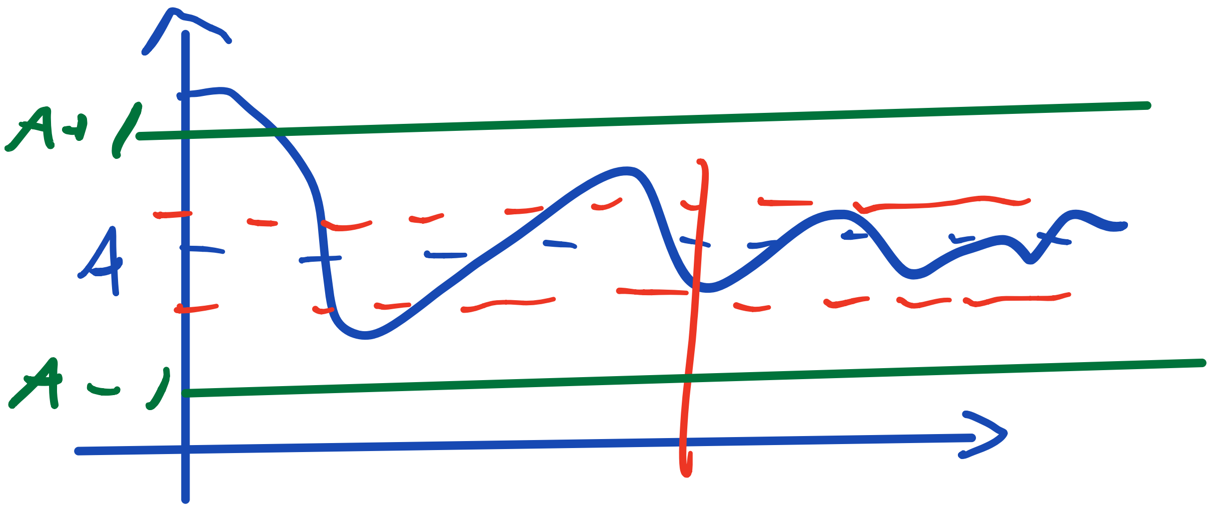
$$< C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Bevis av produktlagen:

$$f(x)g(x) - AB =$$

$$\underbrace{(f(x) - A)}_{\to 0} \underbrace{g(x)}_{\text{Begr.}} + \underbrace{A}_{\text{Begr.}} \underbrace{(g(x) - B)}_{\to 0} \to 0.$$

V.S.B.



$$A-1 \le f(x) \le A+1$$

$$|f(x)g(x) - AB| =$$

$$|(f(x)-A)g(x) + A(g(x)-B)|$$

$$\le |f(x)-A|\cdot|g(x)| + |A|g(x)-B| \overset{?}{<} \varepsilon$$

Definition. Vi säger att funktionen $f(x)$ har det oegentliga gränsvärdet $+\infty$ då $x \to +\infty$ om det för varje reellt tal $R > 0$ finns ett ω så att $f(x) > R$ för alla för alla $x > \omega$.

Exempel: Visa att $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

$$\underline{x^2 > R} \iff \underline{x > \sqrt{R}}$$

$(x, R > 0)$

Givet R, så $\omega = \sqrt{R}$ så att

$$x > \omega \implies x^2 > R.$$

$$f_1(x) = [x]^2 > R$$

$$\iff [x] > \sqrt{R} \Leftarrow x > \underbrace{\sqrt{R}+1}_{\omega}$$

avtagande

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n-1}$$

Vad är supremum och infimum av följande talföljd? Antas maximum och minimum?

$$\left\{\frac{n}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$\frac{n}{\underbrace{2n-1}_{=}} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots$$

$$\max = 1 = \sup$$

$B > \frac{1}{2}$ Finns n så att

$$\frac{n}{\underbrace{2n-1}_{=}} < B$$

$$\Longleftrightarrow \quad n < B(2n-1) \Longleftrightarrow B < n(2B-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n > \frac{B}{2B-1} \qquad n = \left[\frac{B}{2B-1}\right] + 1$$

$$\inf = \frac{1}{2}$$

min existerar inte.

Vad är supremum och infimum av följande talföljd? Antas maximum och minimum?

$$\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}.$$

ln n växande.

min = ln 1 = 0 = inf.

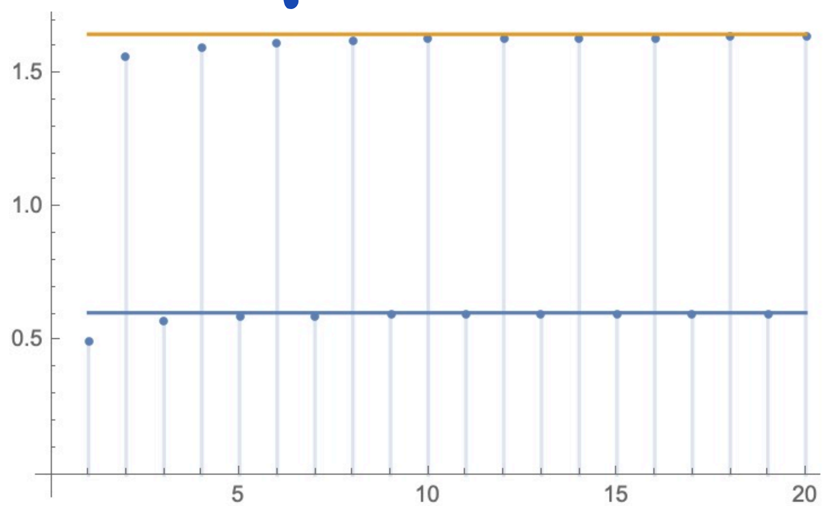
sup = +∞ (max saknas)

Vad är supremum och infimum av följande talföljd? Antas maximum och minimum?

$$\left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

$n = 2k \qquad \left\{ \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{2k} \right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \sqrt{e}$

$n = 2k+1 \qquad \left\{ \left(1 - \frac{1}{4k+2}\right)^{2k+1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$



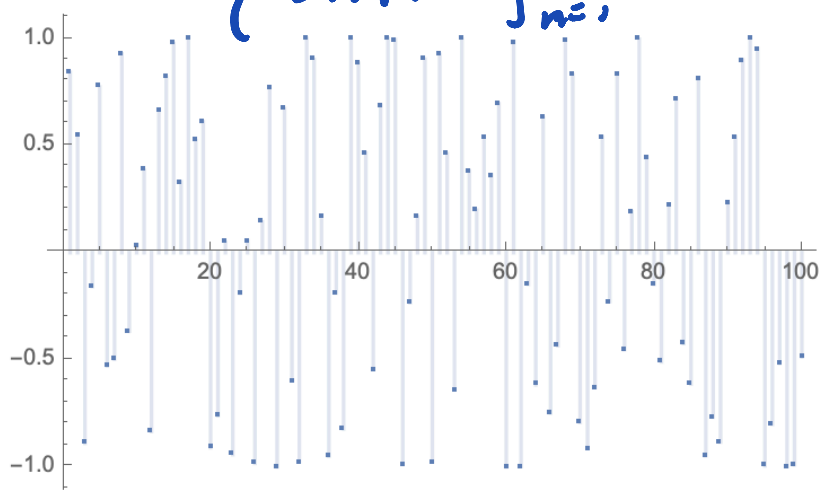
$y = \sqrt{e}$

$\sup = \sqrt{e}$

$y = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\inf = \frac{1}{2}.$

$\left\{ \sin n^5 \right\}_{n=1}^{\infty}$



Vad är supremum av följande mängd?

$$M = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$