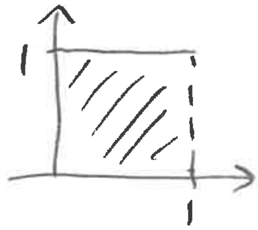
(12) Fördelning för funktion av stok. var.

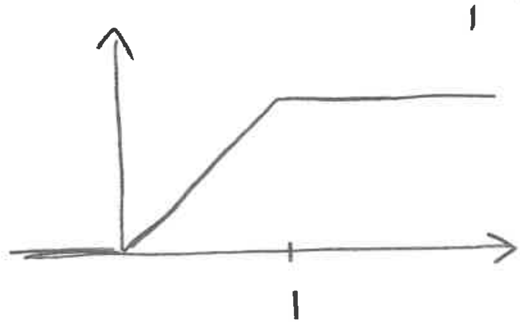
X stok. var. med känd fördelning

$Y = g(X)$. Fördelning för Y?

Ex. $X \sim Re(0,1)$ dvs $f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



- $Y = (\beta - \alpha) X + \alpha$ där $\beta > \alpha$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P((\beta-\alpha)X + \alpha \le y) = P\left(X \le \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right) =$$

$$= F_X\left(\frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 & \text{om } y < \alpha \\ \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{om } y \in (\alpha,\beta) \\ 1 & \text{om } y > \beta \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & y \in (\alpha,\beta) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Alltså: $Y \sim Re(\alpha, \beta)$.

- $Z = -\ln X / \lambda$, $\lambda > 0$.

$$F_Z(z) = P\left(-\frac{\ln X}{\lambda} \le z\right) = P(\ln X \ge -\lambda z) = P(X \ge e^{-\lambda z}) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{om } e^{-\lambda z} < 0 \text{ (omöjligt)} \\ 0 & \text{om } e^{-\lambda z} > 1 \Leftrightarrow z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z} & \text{om } e^{-\lambda z} \in (0,1) \Leftrightarrow z > 0. \end{cases}$$

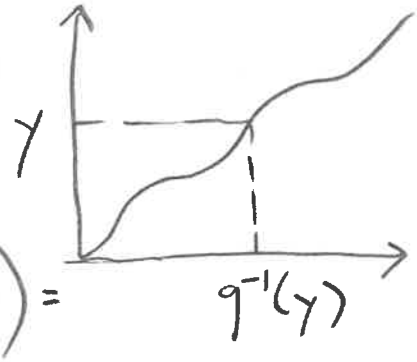
$f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0, \text{ dvs } Z \sim Exp(\lambda).$

Allmänt:

$Y = g(X)$, g monotont växande

Invers: $g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$

$g(x) \leq y \iff x \leq g^{-1}(y)$



$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) =$$
$$= F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \quad \text{(Sats 3.41 s. 144)}$$

Summor av stok. var.

X och Y oberoende, $Z = X + Y$

Fördelning för Z?

Kallas faltningen av fördeln. för X och fördeln för Y.

Diskret

Antag X och Y antar värden $0, 1, 2, \ldots$

$Z = X + Y$ också $0, 1, 2, \ldots$

Antag p_X och p_Y kända. Bestäm p_Z.

$$p_Z(k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \{\text{ober.}\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i) p_Y(k - i)$$

$$\therefore \; p_Z(k) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i) p_Y(k - i)$$

Faltningsformeln för diskreta stok. var.

Ex. $X \sim Po(\lambda_1)$, $Y \sim Po(\lambda_2)$, $Z = X + Y$

$$p_X(i) = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}$$

$$p_Z(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}\, e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}\lambda_1^i \lambda_2^{k-i} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}_{=(\lambda_1+\lambda_2)^k} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

Alltså $X+Y \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$.

Allmänt: $X_1, \dots, X_n$ ober. $X_i \sim Po(\lambda_i)$

$$\Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim Po(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

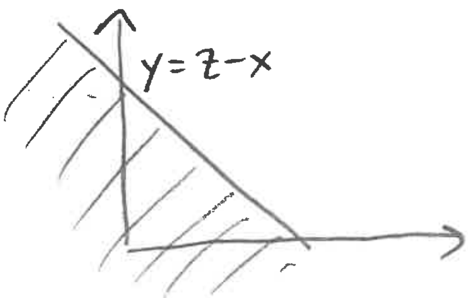
Kontinuerliga fallet

X och Y oberoende kont. stok. var.

$Z = X + Y$. $f_Z(z)$?

Börja med F_Z:

$$F_Z(z) = P(X+Y \le z) = \iint_{(x,y):\, x+y \le z} f(x,y)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy}_{F_Y(z-x)}\,dx$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,dx\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \frac{d}{dz} F_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$$\therefore\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Faltningsformeln för kont. stok. var.

Ex. $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$ oberoende.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z},\quad z \geq 0.$$

Kallas Gamma-fördelning.

Normalfördelningen

$X_1, \dots, X_n$ ober. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$\Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim N(\mu_1 + \dots + \mu_2, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

Går att visa m.h.a. faltningsformeln.

Ex. 2 ober. mätningar $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$$

$$\frac{X_1 + X_2}{2} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$