Seminarieuppgift 6, Algebra 4

Ville Wassberg

March 2021

1 Uppgift

Bestäm antalet lösningar till följande linjära ekvationssystem för alla reella tal a:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 & + & 2x_2 & + & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & (1-a)x_2 & + & -2x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & (4-a)x_3 & = & 1 \end{cases}$$

2 Lösning

För att lösa den här uppgiften kommer jag använda mej av matrisoperationer, därför skriver jag om ekvationssystemet till en ekvation av matriser i formen AX=b:

$$\begin{pmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ 2 & 1-a & -2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi vet att om determinanten(A) inte är lika med 0 så kommer systemet att ha en unik lösning för varje reellt tal a som inte gör att determinanten blir 0, därför börjar jag med att titta på när determinanten(A) blir 0 (jag använder mej av bokstaven k för att beteckna kolonnoperationer och r för radoperationer):

$$\begin{vmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ 2 & 1-a & -2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{vmatrix} \xrightarrow{k_1+k_3 \to k_3} \begin{vmatrix} 4-a & 2 & 3-a \\ 2 & 1-a & 0 \\ -1 & 2 & 3-a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3 \to r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 5-a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ -1 & 2 & 3-a \end{vmatrix} \Leftrightarrow (5-a) \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ 2 & 3-a \end{vmatrix} = (5-a)(1-a)(3-a)$$

Nu ser vi att determinanten blir $(5-a)(1-a)(3-a)$ därför är de möjliga värden pâ a där determinanten blir 0; 5, 3 och 1. Nu behöver jag undersöka de tre fallen där determinanten blir 0 för att se om de ger oändligt med lösningar eller inga lösningar.

a=5 ger;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Här kan vi direkt, utan operationer, se att rad 1 och 3 är lika, därför har ekvationssystemet oändligt med lösningar.

a=3 ger;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_3 \to r_3} \xrightarrow{r_2-2r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{4}{6}r_3 \to r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{6} \end{array}\right)$$

Här ser vi på tredje raden att $0 = -\frac{4}{6}$ vilket är en kontradiktion, därför har ekvationssystemet inga lösningar.

a=1 ger;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-\frac{3}{2}r_2 \to r_1} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3 \to r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Här ser vi än en gång, på första raden, att en kontradiktion uppstår i.e. 0=4, därför har det här ekvationssystemet inga lösningar.

3 Slutsats

Antalet reella lösningar till ekvationssystemet;

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (4-a)x_1 & + & 2x_2 & + & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & (1-a)x_2 & + & -2x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & (4-a)x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

där $a \neq 5 \vee 3 \vee 1$, har en unik lösning; $a = 5$ har oändligt antal lösningar; $a = 3$ har inga lösningar; $a = 1$ har inga lösningar.