MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Algebra
VT21

Dag 20

(1) **Introduktion.** Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två ortogonala vektorer. Beräkna vektorprodukten
$$\vec{v} \times (\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})).$$

Svar: $\vec{0}$.

(2) **Räkneregler.** Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två ortogonala vektorer med längd 1. Vad kan man säga om följande vektorprodukter?
$$(\vec{u} \times \vec{u}) \times \vec{v} \quad \text{och} \quad \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}).$$
Vad säger dessa exempel om den associativa lagen för vektorprodukt?

Svar: $\vec{0}$ och $-\vec{v}$. Motexempel.

(3) **Beräkning i orienterad ON-bas.** Låt $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vara en positivt orienterad ON-bas och antag att koordinaterna för $\vec{u}$ och $\vec{v}$ med avseende på denna bas är $(3, 4, 1)$ och $(1, 2, 4)$. Beräkna koordinaterna för $\vec{u} \times \vec{v}$ i basen.

Svar: $(14, -11, 2)$.

(4) **Exempel.** Givet de två ortogonala vektorerna $(1, 1, 1)$ och $(1, -1, 0)$. Använd vektorprodukten för att konstruera en ny ON-bas vars två fösta vektorer är parallella med de givna vektorerna.

Svar: $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

(5) **Geometrisk tolkning av 2x2 determinanter.** Beräkna arean av den parallellogram i planet som, relativt ett givet ortonormalt koordinatsystem, har hörn i punkterna $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$ och $(5, 5)$.

Svar: 10.

(6) **Geometrisk tolkning av 3x3 determinanter.** Visa att trippelprodukten $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ är invariant under cyklisk permutation, dvs att
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}.$$

(7) **Tetraedervolym.** Beräkna volymen av den tetraeder i rummet som, relativt ett givet ortonormalt koordinatsystem, har hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$ och $(1, 2, 4)$.

Svar: $\frac{1}{2}$.

/Boris Shapiro, 210322/