Dag 5

Cauchys rotkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

I. $a_k \geq 0$ $\quad A = \lim_{k \to \infty} a_k^{1/k}$

$A < 1$ konvergens

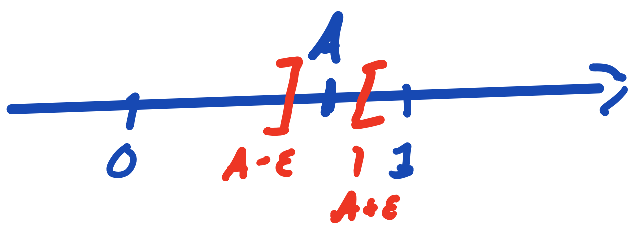
$A > 1$ divergerar

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ $\quad A = 1$ ingen slutsats

II. a_k ej nödv. positiv $\quad A = \lim_{k \to \infty} |a_k|^{1/k}$

SATS $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

$a_k \geq 0 \quad A < 1$



$A + \varepsilon = r < 1$

$a_k^{1/k} < r$ för alla $k > \omega$

$a_k < r^k$ $\quad \sum_{k=\omega+1}^{\infty} a_k$ konv JFK I

jämför med $\sum_{k=\omega+1}^{\infty} r^k$

$= \frac{r^{\omega+1}}{1-r}$

$$a_k^{\frac{1}{k}} > r = A - \varepsilon$$

$$a_k > r^k \quad r > 1.$$

Ex

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{100}}{e^k} \quad \text{konvergent.}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^{100}}{e^k}\right)^{1/k} = \frac{1}{e} \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{k^{\frac{1}{k}}}_{\to 1}\Big)^{100} = \frac{1}{e} < 1$$

d'Alembert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad A = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}}{\dfrac{(k!)^2}{(2k)!}} =$$

$$= \left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2 \left(\frac{(2k)!}{(2k+2)!}\right) =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1$$

Serien konvergent.

$$k^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{\ln k}{k}} \qquad \frac{\ln k}{k} \to 0 \qquad \frac{a^k}{k} \to \infty$$

Gränsvärden i flera variabler

Vad är skillnaden mellan $n=1$ och $n>1$?

Abstrakt: Strikt sett ingen skillnad alls.

$\forall \varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - A| < \varepsilon.$

a, A reella tal: GVD i en variabel

a, A vektorer: GVD i flera variabler.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Konkret: Två olika världar.

Det som är lätt i en variabel, ofta svårt då $n>1$

Svårt i en variabel, ofta omöjligt då $n>1$

Ex $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{B(a)}{C(a)}$ $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$

$p(x) = x^m B(x)$

$q(x) = x^n C(x)$

$m=n$ $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^4+y^2)^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2+x^4}$$

$$\frac{\frac{1}{x^2+y^2}\cdot x^3}{\frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+x^4\right)}$$

Villka termer dominerar?

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}}{1+\frac{x^4}{x^2+y^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Om vi kan visa att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$\frac{x^{3}}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta)^3}{r^2} = r\cos^3\theta \to 0$$

4

$\to 0$ Begr

$(x,y)\to(0,0) \iff r\to 0$

$|\cos\theta| \leq 1$

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$$

$$f(x,0) = 0 \qquad f(0,y) = 0$$

$f(x,y)$ går mot noll längs koordinataxlarna.

$x = y$: $x = t$, $y = t$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cdot t}{t^4+t^4} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

gränsvärde saknas.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \qquad \lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$$

$$(x,y) \to \cancel{(\infty,\infty)}$$

$\forall \varepsilon > 0$ så ska det finnas ω

så att $x^2+y^2 > \omega \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$

$$x^2+y^2 > \omega^2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} > \omega$$