Seminarieuppgift 13, Analys 9

Ville Wassberg

May 2021

1 Uppgift:

Beräkna följande gränsvärde; $\lim_{x\to 0} \frac{2sinx - arctan(x) - x}{x^5}$

För att räkna ut gränsvärdet tar jag hjälp av Taylor-utveckling, specifikt McLaurin-utveckling, med ordokalkyl.

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - O(x^7)$$

arctanx är lite klurigare att behöva derivera flera gånger, så jag utnyttjar att arctanx är integranden till $\frac{1}{1+x^2}$. Vi vet att $\frac{1-r^n}{1-r} = \Sigma_{k=0}^{n-1}(r^k) \Leftrightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{r^n}{1-r} + \Sigma_{k=0}^{n-1}(r^n)$ och att om vi sätter $r = -t^2$ så $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + ... + (-1)^{n-1}t^{2(n-1)} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$ Därför kan arctan(x) skrivas som:

$$\int_0^x (1 - t^2 + t^4 - ...)\, dx = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - ...\right] \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O_2(x^7)$$

Så;

$$\lim_{x\to 0} \frac{2sinx - arctan(x) - x}{x^5} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7)) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O_2(x^7)) - x}{x^5} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5(\frac{1}{60} - \frac{1}{5} + O_3(x^7)}{x^5} = \lim_{x\to 0}(\frac{-11}{60} + O_3(x^2)) \approx -\frac{11}{60}$$

Så gränsvärdet konvergerar mot $-\frac{11}{60}$.