## (2) Likformig sannolikhetsfördeln. (ändligt utfallsrum)

$m$ möjliga utfall

Ibland: alla lika sannolika.

$\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\underset{A2}{1 =} P(\Omega) \underset{A3}{=} \sum_{1}^{m} P(i). \quad \text{Alla lika} \Rightarrow P(i) = \frac{1}{m}$$

för alla $i$.

$A$ händelse med $k$ utfall.

$$P(A) \underset{A3}{=} \sum_{i \in A} P(i) = k \cdot \frac{1}{m}$$

$$\therefore P(A) = \frac{k}{m} = \frac{\#\text{ utfall i } A}{\#\text{ utfall i } \Omega}$$

Ex. Kasta två mynt

$\Omega = \{TT, TH, HT, HH\}$

$m = 4$ utfallen lika sannolika

$A =$ en krona $= \{TH, HT\}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Obs! $\Omega = \{0H, 1H, 2H\}$ möjligt, men ej samma sannolikhet.

$P(A) \neq \frac{1}{3}$

# Kombinatorik

På hur många sätt kan man välja ut
r objekt bland n stycken?

T.ex. $r=2$, $n=4$.

Med ordning, med återläggning

$4 \cdot 4 = 16$ (multiplikationsprincipen)

Allmänt: $n \cdot n \cdots n = n^r$

Ex. # 7-siffriga tel.nr. är $10^7 = 10$ miljoner

Med ordning, utan återläggning

$4 \cdot 3 = 12$

Allmänt: $n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ex. # 7-siffriga tel.nr. utan upprepade siffror

$10 \cdot 9 \cdots 3 = 1.8$ miljoner

Ex. Placera 25 elever på 30 platser

$30 \cdot 29 \cdots 6 \approx 2 \cdot 10^{30}$

Utan ordning, utan återläggning.

$\frac{12}{2} = 6$ ← med ordning

Allmänt: $\frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Ex. # sätt att välja ut 25 platser av 30

$\binom{30}{25} = 142.506$

Ex. Lotto: välj 7 nr. av 35.

Utan återläggning, utan ordning.

$\binom{35}{7} = 6.724.520 \approx 6.7 \cdot 10^6$

Slh. 7 rätt $= \frac{g}{m} = \frac{1}{\binom{35}{7}} = 0.15 \cdot 10^{-6}$

Slh. nr. 19 med: $g = \binom{34}{6}$ $\quad \frac{g}{m} = \frac{\binom{34}{6}}{\binom{35}{7}} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

Ex. Födelsedagsproblemet

$n$ personer

$E_n$ = minst två personer har samma födelsedag

Antag
- 365 dagar/år
- inga tvillingar
- födelsedagarna jämnt utspridda

Gör lista över födelsedagarna.

Antaganden $\Rightarrow$ alla listor lika sannolika

\# möjliga listor $= 365^n$ (med ordning, med återläggn.)

\# listor där alla har olika födelsedag:

$= 365(365-1)\cdots(365-n+1)$ (med ordning, utan återläggn.)

$P(E_n^c) = \frac{365 \cdots (365-n+1)}{365^n}$, $\quad P(E_n) = 1 - P(E_n^c)$

$n = 10$ ger $P(E_{10}) \approx 0.12$

$n = 30$ ger $P(E_{30}) \approx 0.71$

$n = 54$ ger $P(E_{54}) \approx 0.98$

Ex. Dela in klass om 30 elever i 3 grupper.

Grupp 1 : 5 st.
Grupp 2 : 8 st.
Grupp 3 : 7 st.

Välj grupp 1
Välj grupp 2

Antal sätt : $\binom{20}{5}\binom{15}{8} = \frac{20!}{5!15!} \cdot \frac{15!}{8!7!} = \frac{20!}{5!8!7!}$

Allmänt : # sätt att välja ut $r$ grupper av stl $n_1, \dots, n_r$ bland $n$ ind, $n = n_1 + \dots + n_r$.

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!} \quad \text{(multinomialkoefficient)}$$

Ex. $N$ bollar, $r$ röda
Välj $n$ i slumpmässigt urval.
Slh. $k$ röda i urvalet?

# möjliga urval : $\binom{N}{n}$

# sätt välja $k$ röda : $\binom{r}{k}$

# — " — $n-k$ icke-röda : $\binom{N-r}{n-k}$

$$P(m \text{ röda}) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{(Hypergeometrisk fördelning)}$$

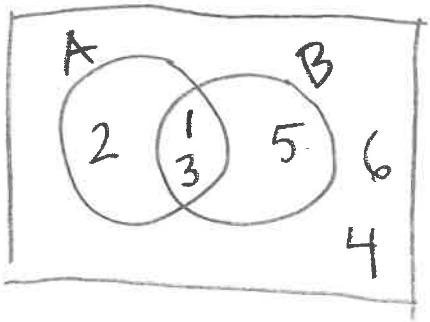
## Betingade sannolikheter

Ex. Tärningskast. $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,3,5\}$

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

Får veta att B inträffar. Slh. för A?

Måste ändra oss.




Nu: 1, 3, 5 lika troliga.

Slh. för A bör vara $\frac{2}{3}$.

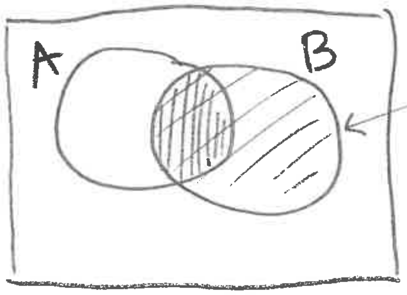
Notation:

$P(A|B)$ = slh. för A givet B

Här: $P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{\#\text{ utfall i } A\cap B}{\#\text{ utfall i } B}=$

$$=\frac{\#A\cap B/\#\Omega}{\#B/\#\Omega}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Allmän def: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ om $P(B)>0$.




nytt utfallsrum

Kan visa: $P(\cdot\,|B)$ är en sannolikhet, dvs uppfyller axiomen.

∴ Satser för sannolikheter har motsvarigheter för betingade sannolikheter.

Tex $P(A^c|B)=1-P(A|B)$