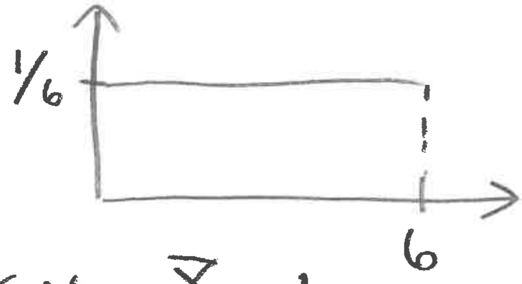
8 Likformig fördelning (kontinuerlig)

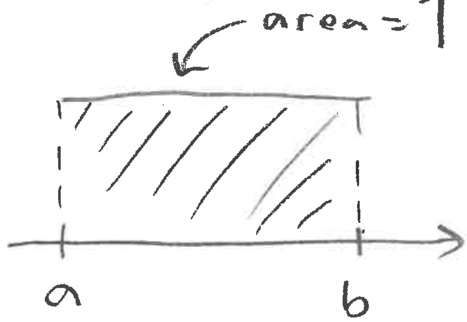
Ex. Väntetid vid bussen

$$f(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [0,6] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Def. En kontinuerlig s.v. X sägs vara likformigt fördelad på intervallet $[a,b]$ om

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{om } x \in [a,b] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Beteckning: $X \sim Re(a,b)$ (eller $U(a,b)$).

Ex. Slumptal i dator $Re(0,1)$.

Sats. $X \sim Re(a,b) \Rightarrow E[X] = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Bevis. $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx =$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

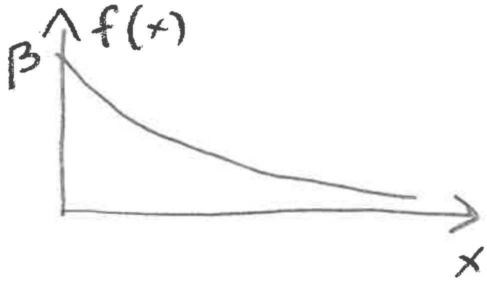
$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$V(X) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialfördelningen

<u>Def.</u> En s.v. X är exponentialfördelad med parameter $\beta > 0$ om

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

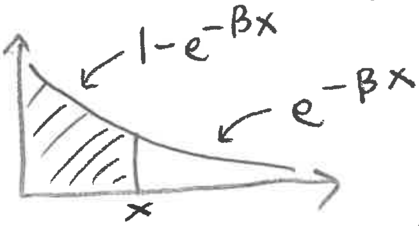


Beteckning: $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$.

<u>Ex.</u> Livslängd hos elektronisk komponent, tid till nästa kund vid bankomat, tid till nästa samtal till växel.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \beta e^{-\beta t}\,dt = \left[-e^{-\beta t}\right]_0^x =$$

$$= 1 - e^{-\beta x}$$



Koll: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

[Partialintegration:

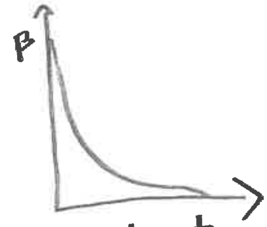
$$\int_a^b g(x)h(x)\,dx = \left[g(x)H(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)H(x)\,dx$$

$H(x)$: primitiv fkt till h]

- $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^\infty \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\beta e^{-\beta x}}_{h}\,dx = \left[-x e^{-\beta x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\beta x}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\beta}$$

β litet



β stort

• $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \beta e^{-\beta x} dx = \left\{ \begin{matrix} \text{partiell int.} \\ \text{boken s.99} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\beta^2}$

$V(X) = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$

Ex. X = längd av telefonsamtal

$X \sim Exp(1/10)$, $E[X] = 10$ min.

$P(X>10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10/10}) = e^{-1}$

Antag att 20 min gått. Slh $X > 30$?

(dvs ytterligare 10 min)

$P(X>30 \mid X>20) = \frac{P(X>30)}{P(X>20)} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1}$ samma!

Allmänt. $X \sim Exp(\beta)$. $s, t > 0$.

$P(X>t+s \mid X>t) = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{1-F(t+s)}{1-F(t)} = \frac{e^{-\beta(t+s)}}{e^{-\beta t}} = e^{-\beta s}$

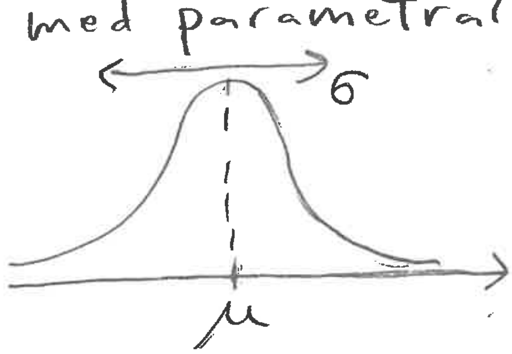
$\therefore P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$

Exponentialfördelningen "minneslös".
Enda kontinuerliga fördelningen med den egenskapen.

<u>Normalfördelningen</u>

<u>Def.</u> X är normalfördelad med parametrar μ och σ^2 om

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.



Beteckning: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- Många data är ungefär normalfördelade (längd hos 20-åriga män, vikt hos nyfödda, regn/år etc.).
- Summor av många s.v. $\approx$ normalfördelade.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \\ dy = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy}_{=\sqrt{\pi}} = 1$$

(polära koordinater
boken s. 102)

Först: Standard normalfördelning

$Z \sim N(0,1)$ om $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

$$E[Z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx = 0$$ pga symmetri.

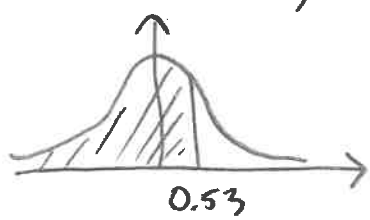
$$E[Z^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-x)}_{g(x)} \underbrace{\left(-x e^{-x^2/2}\right)}_{h(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[-x e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx}_{\text{integral av normaltäthet } = 1} = 1$$

$\therefore V(Z) = 1$

Ex. Bestäm $P(Z \leq 0.53)$ om $Z \sim N(0,1)$

$$P(Z \leq 0.53) = \int_{-\infty}^{0.53} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$



Numerisk integration.

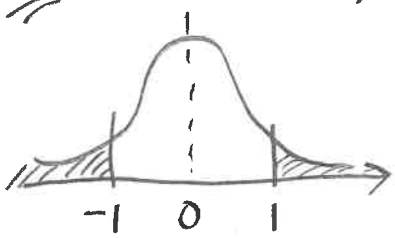
Allmänt. Fördelningsfkt. för $N(0,1)$ betecknas $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

Se tabell på s. 483.

Ex. $P(Z \leq 0.53) = \Phi(0.53) = 0.7019$

Ex. $P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$



Allmänt för $N(0,1)$:

$P(Z \leq -x) = P(Z \geq x) = 1 - P(Z \leq x)$

Dvs $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.