MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Analys A
HT20

Praktiska satser om optimering

Nedanstående satser är formulerade för existensen av ett minsta värde. Men det går precis lika bra att använda dom för att visa existensen av ett största värde (om $+\infty$ byts ut mot $-\infty$).

Sats 1. *Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och antag också att*

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Då gäller att $f(x,y)$ antar ett minsta värde.

En allmännare formulering:

Sats 2. *Låt $f(\overline{x})$ vara en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och antag också att*

$$\lim_{|\overline{x}|^2\to\infty} f(\overline{x}) = +\infty.$$

Då gäller att $f(\overline{x})$ antar ett minsta värde.

Man kan också formulera satser för allmännare områden. Här behöver vi egentligen utveckla gränsvärdesdefinitionen lite, men detaljerna utelämnas.

Sats 3. *Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, där Ω är en öppen begränsad delmängd av $\mathbb{R}^2$, och antag också att*

$$\lim_{(x,y)\to\partial\Omega} f(x,y) = +\infty.$$

Då gäller att $f(x,y)$ antar ett minsta värde.

Sats 4. *Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$, där K är en kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$, och antag också att*

$$\lim_{(x,y)\to\partial K} f(x,y) = +\infty \quad \textit{och} \quad \lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Då gäller att $f(x,y)$ antar ett minsta värde.

En liknande sats för bivillkor:

Sats 5. *Låt $g(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och antag också att*

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y) = +\infty \quad (\textit{eller } -\infty).$$

Då gäller att varje nivåkurva $g(x,y) = k$ är en kompakt mängd.

/Martin Tamm, 201008/