(6) Stokastisk variabel $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Sannolikhetsfunktion (diskret).

Täthetsfunktion (kont.).

Finns familjer av sannolikhetsfunktioner och täthetsfunktioner som är användbara i många olika sammanhang.

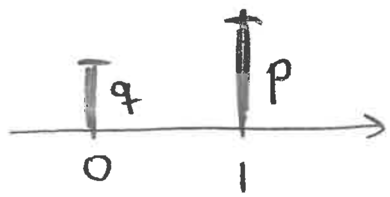
Bernoulli- och binomialfördelning

Slumpförsök. A händelse med $P(A) = p$.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om } A \text{ inträffar (slh } p) \\ 0 & \text{om } A \text{ ej inträffar (slh } q = 1-p) \end{cases}$$

X indikator för A.

Sannolikhetsfkt. $p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \end{cases}$



Def. En s.v. X med $P(X=1) = p = 1 - P(X=0)$ sägs vara Bernoullifördelad.

Beteckning: $X \sim Be(p)$

$E[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = pq$

Upprepa försöket n ggr oberoende.

$X = \#$ ggr. A inträffar

Ex.
- 12 tärningskast, $A = \{\text{trea}\}$, $X = \#$ treor
- A = vinst på lotto, $X = \#$ vinster
- A = försäkringsskada, $X = \#$ skador.

X antar värden $0, 1, 2, \ldots, n$

Sannolikhetsfkt. $p(x)$?

$p(0) = P(X=0) = q^n$

$p(1)$?

$$\left.\begin{array}{l} A A^c A^c \ldots A^c \\ A^c A A^c \ldots A^c \\ A^c A^c A \ldots A^c \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A^c A^c A^c \ldots A \end{array}\right\} n \text{ st.}$$

Sannolikhet givet utfall med ett A och $n-1$ A^c: pq^{n-1}

Alltså: $p(1) = npq^{n-1}$

$p(i)$? $\underbrace{AA \ldots A}_{i \text{ st.}}\underbrace{A^c \ldots A^c}_{n-i \text{ st.}}$ slh. $p^i q^{n-i}$

$\binom{n}{i}$ sätt att placera i st. A

Alltså: $p(i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

Def. En s.v. X är binomialfördelad om

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Beteckning: $X \sim \text{Bin}(n, p)$

försök   slh lyckas i fixt försök

Koll: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1^n = 1$

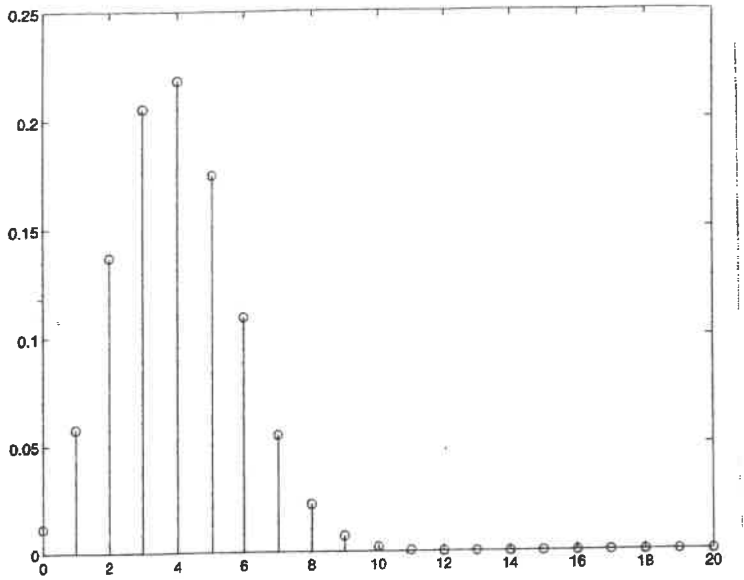
Binomialsatsen

Ex. X = # krona på två myntkast

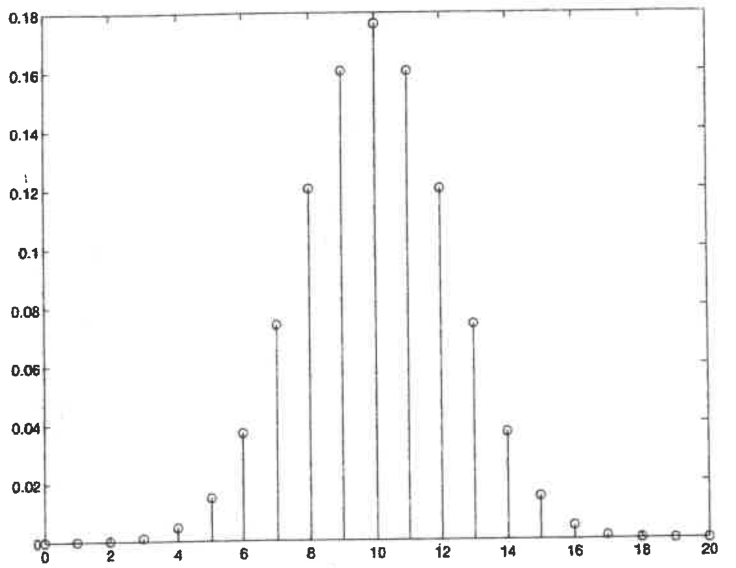
$X \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$

$$p(i) = \binom{2}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \binom{2}{i}\frac{1}{4} = \begin{cases} 1/4 & i=0 \\ 1/2 & i=1 \\ 1/4 & i=2 \end{cases}$$

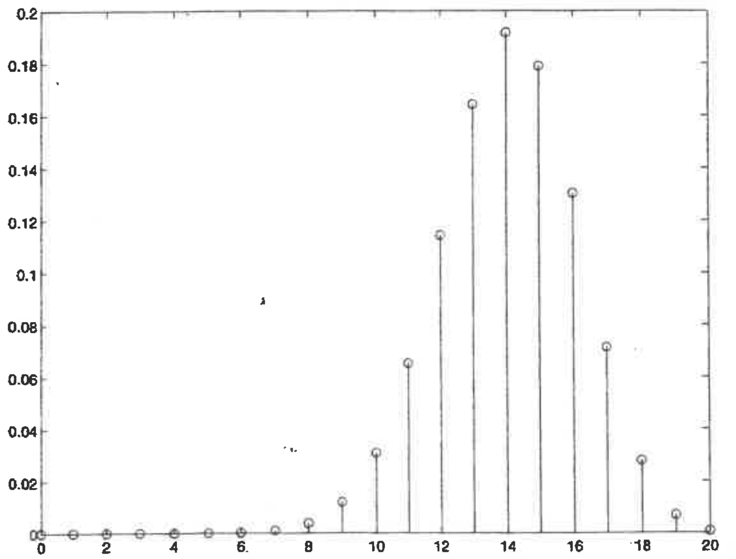
Allmänt: $p(i)$ når max för $i \leq np$.



$n = 20$
$p = 0.2$
$np = 4$



$n = 20$
$p = 0.5$
$np = 10$



$n = 20$
$p = 0.7$
$np = 14$

Sats: $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow E[X] = np$

Bevis: $$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} p^{i-1} q^{n-i}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{byt index} \\ i-1=j \end{array} \right\} = np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j}}_{\sum Bin(n-1,p) = 1} = np$$

Sats. $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow V(X) = npq$ (bevis senare).

Sats. $X \sim Bin(n,p)$, $Y = n - X$
$\Rightarrow Y \sim Bin(n, 1-p)$

($X = \#$ lyckade, $Y = \#$ misslyckade)

Sats. $X \sim Bin(n_1, p)$, $Y \sim Bin(n_2, p)$ oberoende
$\Rightarrow X + Y \sim Bin(n_1 + n_2, p)$

Hypergeometrisk fördelning

N element
m har egenskapen A
$N-m$ har inte egenskapen A
Drag n st. slumpmässigt (utan återläggning, utan ordning).
$X = \#$ med egenskap A i urvalet

$$p(i) = P(X=i) = \frac{\#\text{ urval om } n \text{ med } i \text{ element med egenskap } A}{\#\text{ urval om } n} =$$

$$= \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \qquad i = 0,1,2,\dots,\min\{n,m\}$$

$$n-i \le N-m$$

$n-i$: # icke A i urvalet

$N-m$: totalt # icke A

X är hypergeometriskt fördelad med parametrar N, n, m.

Beteckning: $X \sim Hyp(N, n, m)$

totala antalet; # dragna; # med sökt egenskap

Ibland: $Hyp(N, n, p)$ med $p = \frac{m}{N}$ = andel med sökt egenskap.

Ex. Keno 10

$N = 70$ nummer, $n = 20$ drag av Svenska spel

$m = 10$ valda av oss

$N - m = 60$ icke-valda

$X = \#$ rätt $\sim Hyp(70, 20, 10)$

Ex. Opinionsundersökning (ja/nej)

N = populationsstorlek

n = urval

m = # ja i populationen

X = # ja i urvalet $\sim Hyp(N, n, m)$

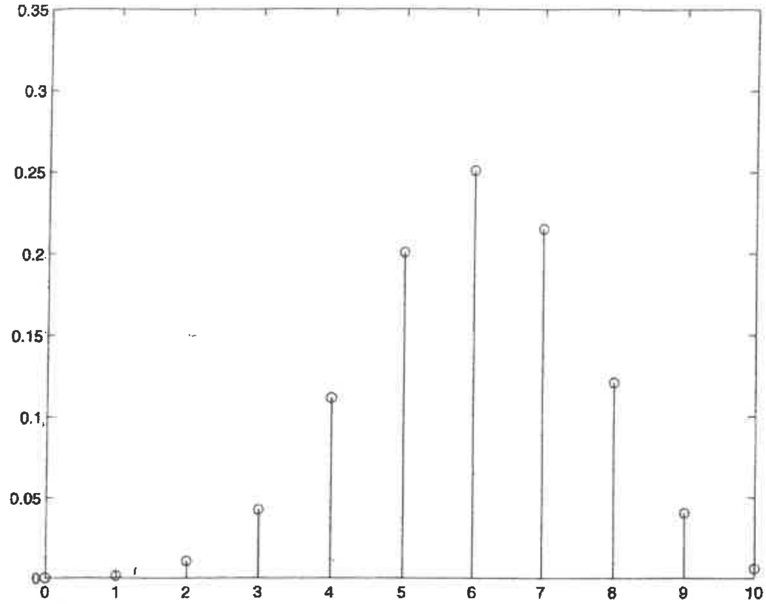
Sats. $X \sim Hyp(N, n, m)$:

- $E[X] = \frac{nm}{N} = np$ med $p = \frac{m}{N}$
- $V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$

Binomial: dragning med återläggning (p konstant)

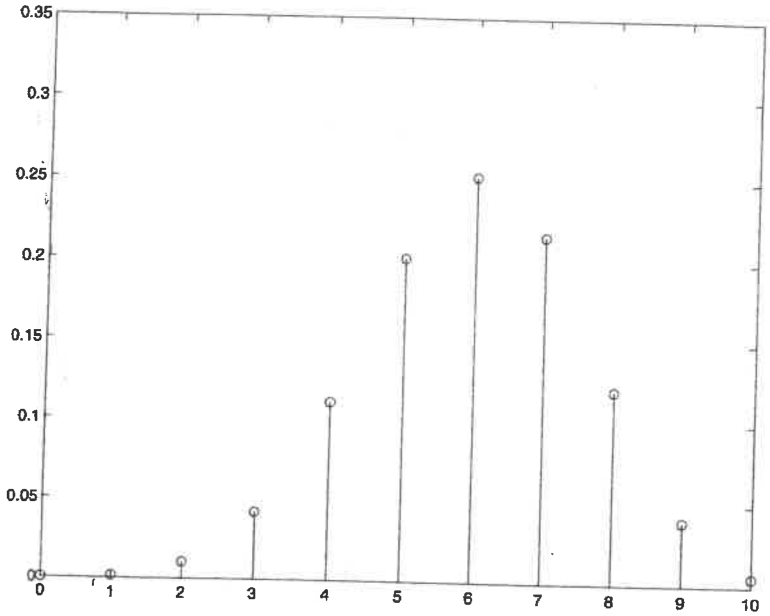
Hypergeo: — " — utan — " —

N stort i förhållande till $n \Rightarrow$ Hypergeo $\approx$ Bin.

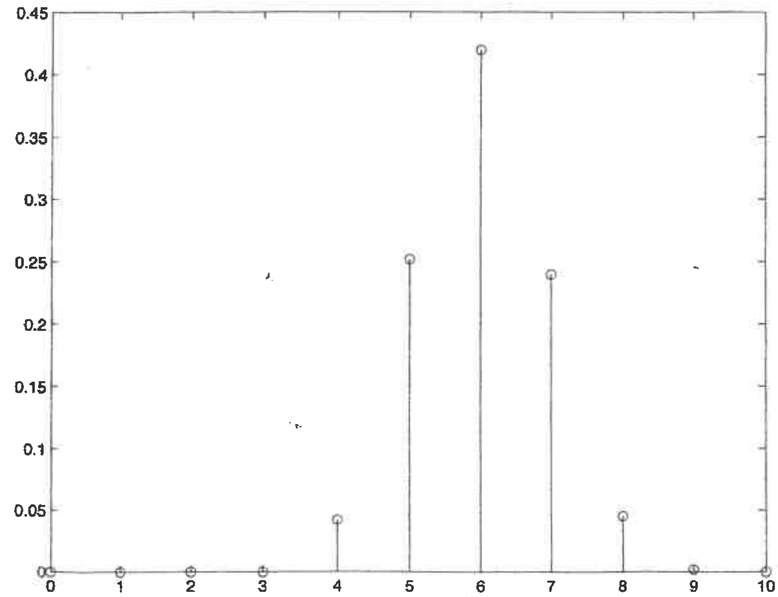


Hyp(1000, 10, 600)

$\frac{600}{1000} = 0.6$



Bin(10, 0.6)



Hyp(15, 10, 9)

$\frac{9}{15} = 0.6$