⑩ Flerdimensionella stok. var.

X och Y stok. var.

Paret (X,Y) är en 2-dim. stok. var.

Ex. • Två tärningskast. $X = \#$ ettor, $Y = \#$ sexor.

• $X = \#$ anställda, $Y =$ vinst hos företag.

• $X =$ kvm-pris lägenhet, $Y =$ balkong?

Def. Den simultana fördelningsfkt. för (X,Y) ges av $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$.

och

X och Y diskreta

Den simultana sannolikhetsfkt. ges av

$p(x,y) = p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$

och

Ex. Två myntkast

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om krona i första kastet} \\ 0 & \text{-"- klave -"-} \end{cases}$$

Y motsvarande för andra kastet.

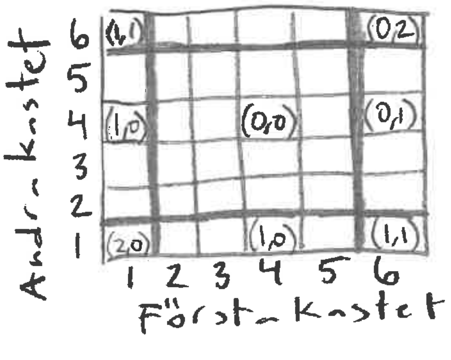
$p(0,0) = p(1,0) = p(0,1) = p(1,1) = 1/4$

$p_X(1) = P(X=1) = p(1,0) + p(1,1) = 1/2$

Allmänt: De marginella slh. fkt. fås som

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y), \quad p_Y(y) = \sum_x p(x,y).$$

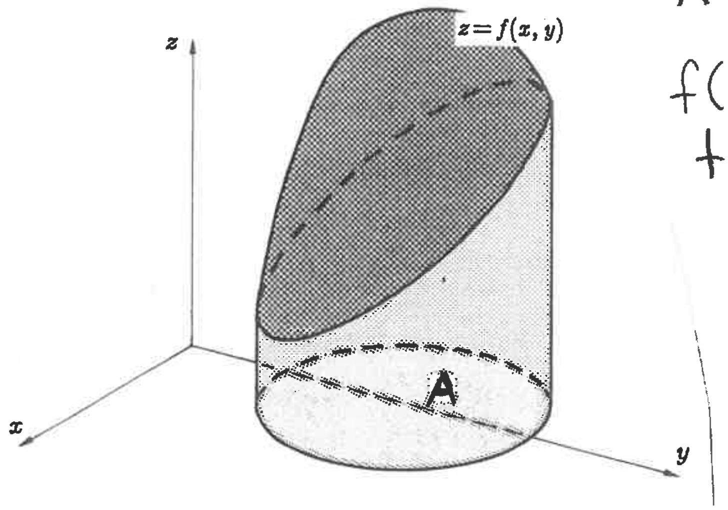
Ex. Två tärningskast. $X = \#$ ettor, $Y = \#$ sexor.



Y	$25/36$	$10/36$	$1/36$	
2	$1/36$	0	0	$p_Y(2) = 1/36$
1	$8/36$	$2/36$	0	$p_Y(1) = 10/36$
0	$16/36$	$8/36$	$1/36$	$p_Y(0) = 25/36$
	0	1	2	X

Kontinuerliga fallet

(X, Y) är en kontinuerlig 2-dim. stok. var. om det finns en fkt. $f(x,y)$ s.a. för alla $A \subseteq \mathbb{R}^2$: $P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.



$f(x,y)$ kallas simultan täthetsfkt.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$P(a \leq Y \leq b) = P(-\infty < X < \infty,\ a \leq Y \leq b) = \int_a^b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}_{:= f_Y(y)}\,dy$$

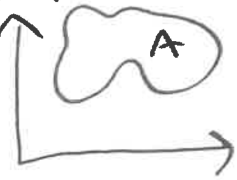
Alltså: Y kontinuerlig.

P.s.s. X kontinuerlig.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$ Marginella täthetsfkt.

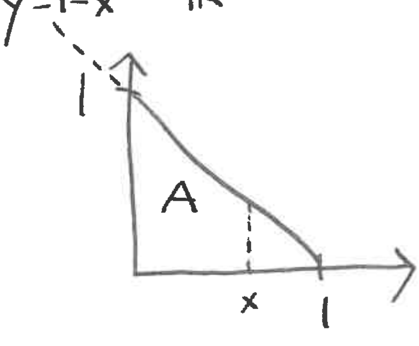
Ex. Likformig fördelning på $A \subset \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} C & (x,y) \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$



arean av A

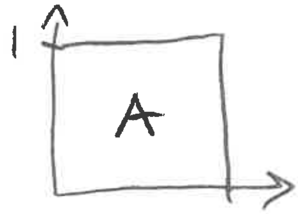
$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A c\,dx\,dy = c \cdot |A| \Rightarrow c = \frac{1}{|A|}$$



$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & (x,y) \in \text{triangeln} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{1-x} 2\,dy = 2(1-x)$$ för $x \in (0,1)$

P.s.s. $f_Y(y) = 2(1-y)$ för $y \in (0,1)$.



$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in \text{kvadraten}\\ 0 & \text{annars}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_0^1 1\,dy=1,\ x\in(0,1).\quad f_Y(y)=1,\ y\in(0,1)$$

Oberoende stok. var.

Repetition: Två händelser E och F är oberoende omm $P(E\cap F)=P(E)P(E)$.

$$\left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} P(E|F)=P(E)\\ P(F|E)=P(F)\end{array}\right)$$

Def. Två stok. var. X och Y är oberoende omm $P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$ för alla $A,B\subset\mathbb{R}$ (dvs om $E_A=\{X\in A\}$ och $F_B=\underbrace{\{Y\in B\}}_{\{x\in\Omega:\, Y(s)\in B\}}$ oberoende för alla A,B).

$\{s\in\Omega: X(s)\in A\}$

Ekvivalent:

- $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ alla x,y (X och Y diskreta)
- $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ alla x,y (X och Y kont.)

Ex. Två tärningskast, $X=\#$ ettor, $Y=\#$ sexor.

$p_X(2)=1/36\quad p_Y(2)=1/36\quad p(2,2)=0\neq p_X(2)p_Y(2)$

$\therefore$ Ej oberoende.

Ex. Likformig fördelning på 

$$f(x,y)=2\neq \underbrace{2(1-x)}_{f_X(x)}\underbrace{2(1-y)}_{f_Y(y)}\qquad \therefore \text{ Ej oberoende.}$$

Ex. Likformig fördelning på 

$f(x,y) = 1 = f_X(x) f_Y(y)$ $\therefore$ Oberoende.

Väntevärde av fkt. av stok.var.

Repetition:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p(x_i) & \text{diskret} \\ \int g(x)f(x)\,dx & \text{kont.} \end{cases}$$

Sats. $g(x,y)$ fkt av x och y

simultan sln.fkt

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i,y_j)\, p(x_i,y_j) & \text{diskret} \\ \iint g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy & \text{kont.} \end{cases}$$

simultan täthetsfkt.

X och Y diskreta, $g(x,y) = x+y$

$$E[X+Y] = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p(x_i,y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j p(x_i,y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(x_i,y_j) =$$

$$= \sum_i x_i p(x_i) + \sum_j y_j p(y_j) = E[X] + E[Y]$$

$\therefore$ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ (Kont. fallet se boken s. 120)

Följd: $X_1, \ldots, X_n$ stok.var.

$c_1, \ldots, c_n$ konstanter

$$E[c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n] = c_1 E[X_1] + \ldots + c_n E[X_n]$$

Bevis: Induktion + $E[aX] = aE[X]$.

Ex. $X_1, \dots, X_n$ ober. $Be(p)$ dvs $X_i = \begin{cases} 1 & \text{slh } p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$$E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$Y = \sum_1^n X_i \sim Bin(n,p)$$

$$E[Y] = E\left[\sum_1^n X_i\right] = \sum_1^n E[X_i] = np$$

Ex. $X_1, \dots, X_r$ ober. $ffg(p)$. $E[X_i] = \frac{1}{p}$

$$Y = \sum_1^r X_i \sim NegBin(r,p)$$

$$E[Y] = \sum_1^r E[X_i] = \frac{r}{p}$$

Ex. $X_1, \dots, X_n$ stok. var. $E[X_i] = \mu$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} E[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n}(\underbrace{\mu + \dots + \mu}_{n \text{ st}}) = \mu$$