Analys del A, bonus 2

Ville Wassberg

September 2021

1 Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - x^2y^2 + y^2}{x^2 + x^2y^2 + y^2} = [x = r\cos\theta, y = r\sin\theta] = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 - r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2 + r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1 - \frac{r^2}{2}\sin^2(2\theta)}{1 + \frac{r^2}{2}\sin^2(2\theta)} = \frac{1}{1} = 1$$

Eftersom $0 \leq \sin^2(2\theta) \leq 1$ och är därmed begränsad, så går de termerna mot noll med r; och därför går gränsvärdet mot 1.

$$b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 - x^2y^2 + y^6}{x^6 + x^2y^2 + y^6} = [x = t, y = 0] = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{t^6} = 1$$

men;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 - x^2y^2 + y^6}{x^6 + x^2y^2 + y^6} = [x = y = t] = \lim_{t\to 0} \frac{2t^6 - t^4}{2t^6 + t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} = -1$$

Vilket är en kontradiktion; och gränsvärdet existerar inte.

2 Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$a)\ \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 - x^2y^2 + y^2}{x^2 + x^2y^2 + y^2} = [x = t, y = 0] = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

men;

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 - x^2y^2 + y^2}{x^2 + x^2y^2 + y^2} = [x = y = t] = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2 - t^4}{2t^2 + t^4} = \lim_{t\to\infty} \frac{2 - t^2}{2 + t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{-t^2}{t^2} = -1$$

Eftersom 2 är begränsat och obetydlig i jämförelse med t som går mot oändligheten. Här blev det alltså en kontradiktion till, och gränsvärdet existerar inte.

$$b)\ \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6 - x^2y^2 + y^6}{x^6 + x^2y^2 + y^6} = \lim_{(x,y)\to\infty} \left(1 - \frac{2x^2y^2}{x^6 + x^2y^2 + y^6}\right) = [x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$$
$$= 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{2r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^6\cos^6\theta + r^4\sin^2\theta\cos^2\theta + r^6\sin^6\theta} = 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos^6\theta + \sin^6\theta + \frac{\sin^2(2\theta)}{2r^2}} = 1 - 0 = 1$$

Eftersom att täljaren är begränsad och heller aldrig kan bli 0 och är positiva för alla reella värden, så går det högra gränsvärdet mot noll; därför går hela gränsvärdet mot 1.

3 Avgör om den funktion som definieras genom $f(x,y) = \dfrac{x^2y + 2y^3}{x^2 + y^2}$, för $(x,y) \neq (0,0)$, och är 0 i origo, är a) kontinuerlig i origo, b) har partiella förstaderivator i origo, c) är differentierbar i origo, d) är av klass C^1 i någon omgivning till origo.

a)
För att se att funktionen är kontinuerlig så räcker det att kolla att gränsvärdet för funktionen, när x och y går mot 0, går mot 0, så;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + 2y^3}{x^2 + y^2} = [x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta + 2r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin^3\theta) = 0$$

Eftersom $\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin^3\theta$ är begränsad. Så: Ja, funnktionen är kontinuerlig i origo.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2*0+0}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0*k+2k^3}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2k^3}{k^3} = 2$$

Eftersom båda partiella förstaderivatorna existerar är svaret ja.

c)
För att funktionen ska vara differentierbar i punkten (0,0), så behöver dessa två krav uppfyllas;

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0$$

Med variabelbytet; $[x = 0+h, y = 0+k]$ och insättning av alla redan uträknade värden i punkten (0,0) så får vi;

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \rho(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y+2y^3}{x^2+y^2} - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta + 2r^3\sin^3\theta}{r^2} - 2r\sin\theta}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos^2\theta\sin\theta + 2\sin^3\theta - 2r\sin\theta = \lim_{r\to 0} \sin\theta(1+\sin^2\theta) - 2\sin\theta$$

$$= \lim_{r\to 0} \sin^3\theta - \sin\theta$$

Så då existerar alltså inte gränsvärdet för $\rho(h,k)$, och funktionen är då alltså inte differentierbar.

d)
Eftersom att klass C^1 implicerar differentierbarhet så implicerar icke-existerande differentierbarhet icke-existerande C^1, så alltså är funktionen inte av klass C^1 i någon omgivning till origo.

4 Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$2y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - f = 0,$$

som uppfyller bivillkoret $f(x,0) = x^4$, t ex genom att införa de nya variablerna $u = x + y^2, v = y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$2y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - f \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ 2y\frac{\partial f}{\partial u} - (2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}) - f \ = \ -\frac{\partial f}{\partial v} - f \ = \ 0$$

Denna differentialekvation är betydligt lättare att lösa och kan lösas med exempelvis separationsmetoden;

$$f = -\frac{\partial f}{\partial v} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\partial v \Rightarrow \ln f = -v + C(u) \Leftrightarrow f = \Psi(u)e^{-v} = \Psi(x+y^2)e^{-y}$$

$$f(x,0) = x^4 = \Psi(x) \Rightarrow \Psi(x+y^2) = (x+y^2)^4$$
$$\Rightarrow f(x,y) = (x+y^2)^4 e^{-y}$$

5 Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial f}{\partial x} - 8f = 0,$$

i området $x, y > 0$, t ex genom att införa de nya variablerna $u = x^2y, v = \ln y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = x^2, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

1. Partiella derivatan med avseende på x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}2xy$$

2. Partiella andraderivatan med avseende på x

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}2xy\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)2xy + \frac{\partial f}{\partial u}2y \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}2xy\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)2xy + \frac{\partial f}{\partial u}2y \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}4x^2y^2 + \frac{\partial f}{\partial u}2y\end{aligned}$$

3. Partiella derivatan med avseende på y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}$$

4. Partiella andraderivatan med avseende på y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u}x^2 + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{1}{y} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}x^4 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

5. Partiella andraderivatan med avseende på x och y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)x^2 + \frac{\partial f}{\partial u}2x + \frac{\partial}{\partial u}2xy\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}2x^3y + \frac{\partial f}{\partial u}2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}2x\end{aligned}$$

6. Instoppning i ekvationen

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial f}{\partial x} - 8f = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}4x^2y^2 + \frac{\partial f}{\partial u}2y\right) - 4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}2x^3y + \frac{\partial f}{\partial u}2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}2x\right)$$

$$+4y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}x^4 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right)$$

$$+3x\frac{\partial f}{\partial u}2xy - 8f$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(4x^4y^2 - 8x^4y^2 + 4x^4y^2\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\left(2yx^2 - 8yx^2 + 6x^2y\right)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\left(-8x^2y + 8x^2y\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}4 + \frac{\partial f}{\partial v}(-4) - 8f$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}4 + \frac{\partial f}{\partial v}(-4) - 8f = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

7. Förenklad differentialekvation tack vare variabelbytet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v} - 2f = 0$$

Nu är den som en andragrads ordinär differentialekvation, som kan lösas genom att sätta; $f = \Psi(u)e^{r_1} + \Phi(u)e^{r_2}$ och lösa den karakteristiska ekvationen;

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r+1)$$

Alltså är

$$f(v,u) = \Psi(u)e^{2v} + \Phi(u)e^{-v} = \Psi(x^2y)e^{2\ln y} + \Phi(x^2y)e^{-\ln y}$$

$$= \Psi(x^2y)y^2 + \Phi(x^2y)y^{-1}$$