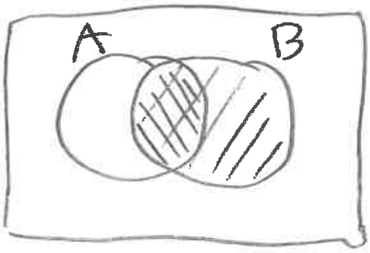
③ Repetition: $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B)>0$.

Slh. A givet B



Oberoende händelser

Antag $P(A|B) = P(A)$ (B ger ingen info. om A)

$\Updownarrow$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Def. A och B oberoende omm $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Ex. Drag ett kort ur kortlek.

H = hjärter K = knekt. Oberoende?

$P(H\cap K) = \frac{1}{52}$ $P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{52}$ $\therefore$ Oberoende. $[P(K|H) = P(K)]$

Ex. Drag ett kort ur kortlek där ruter ess saknas.

$P(H\cap K) = \frac{1}{51}$ $P(H) = \frac{13}{51}$ $P(K) = \frac{4}{51}$

$\frac{13}{51}\cdot\frac{4}{51} = \frac{52}{51\cdot 51} \neq \frac{1}{51}$ $[P(K|H) < P(K)]$

Ex. Två myntkast

A = krona i första = $\{HT, HH\}$
B = krona i andra = $\{HH, TH\}$
C = exakt en krona = $\{TH, HT\}$

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$

Def. A, B, C oberoende omm $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ och parvis oberoende.

Allmänt. $A_1, \ldots, A_n$ oberoende omm

$P(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$ alla r och $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$.

Oberoende försök

Upprepa försök.

A_i = lyckas i försök i

$\{A_i\}$ oberoende, $P(A_i) = p$.

Slh. alla de n första försöken lyckas?

$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \{\text{ober}\} = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = p^n \to 0$ (om $p<1$).

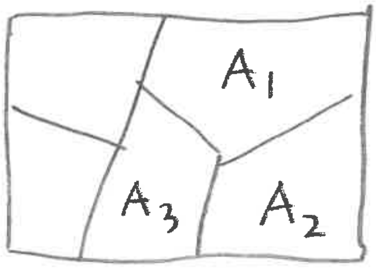
Slh. minst ett av de n första lyckas?

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c}_{\text{alla misslyckas}}) = \{\text{ober}\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) =$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) = 1 - (1-p)^n \to 1$ (om $p < 1$).

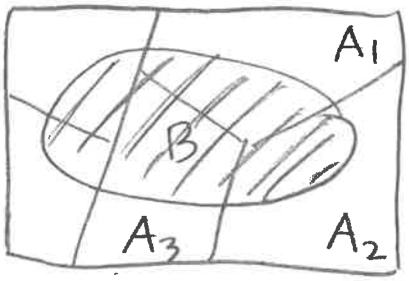
Lagen om total sannolikhet

Def. $A_1, \ldots, A_n$ är en partition av Ω om $A_1, \ldots, A_n$ är parvis disjunkta och $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.



Låt B vara en händelse och $A_1, \ldots, A_n$ en partition av Ω.

$$B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)}_{\text{disjunkta}} \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$



$$\Rightarrow P(B) = \underbrace{P(B \cap A_1)}_{= P(B|A_1)P(A_1)} + P(B \cap A_2) + \ldots + \underbrace{P(B \cap A_n)}_{= P(B|A_n)P(A_n)}$$

Alltså: $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$ Lagen om total sannolikhet. (LTS)

Speciellt: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$.

Ex. Två tärningar: en symmetrisk, en med bara fyror.
Välj en slumpmässigt och kasta.
Slh. fyra?

$A = \{\text{symmetrisk tärning}\}$
$B = \{\text{fyra}\}$
$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

Följd av LTS:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \quad \text{(Bayes sats)}$$

Ex. Medicinskt test

0.5 % av population har viss sjukdom.
Slh. positivt test för sjuk person : 0.95
— " — frisk : 0.01

a) Slh. positivt test för slumpmässigt vald individ?
b) Slh. individ med positivt test sjuk?

B = positivt test
A = har sjukdomen

Givet: $P(A) = 0.005$, $P(B|A) = 0.95$, $P(B|A^c) = 0.01$

a) Sökt: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) =$
$$= 0.95 \cdot 0{,}005 + 0.01 \cdot 0.995 \approx 0{,}0147$$

b) Sökt: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} =$
$$= \frac{0.95 \cdot 0{,}005}{0.0147} \approx 0.323$$