# Räkneövning 2/9-'21, Analys A

K1. 3.1) Visa att a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ och b) $\lim_{x\to\infty} x^2 - x = \infty$

genom att använda definitionen på gränsvärde resp. oegentligt gränsvärde.

a) Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega$ sådant att

$$x > \omega \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{x+1}\right| = \frac{1}{x+1} < \varepsilon \Rightarrow x > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1}_{\omega_\varepsilon}$$

positiva x

Alltså $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ V.S.V

---

b) Vi vill visa att det för varje (stort) tal $C > 0$ finns ett $\omega$ sådant att

$$x > \omega \Rightarrow x^2 - x > C$$

$f(x) = x^2 - x$ är strikt växande eftersom $f'(x) > 0$ för $x > 1/2$, vilket innebär att $f(x_1) > f(x_2)$ då $x_1 > x_2$.

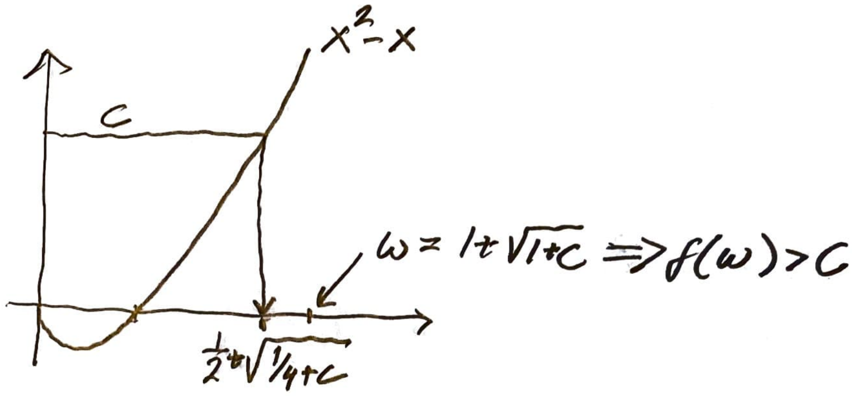
$x^2 - x = C$ då $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + C}$

Välj $w = 1 + \sqrt{1+C} \Rightarrow f(w) = w^2 - w = \overbrace{1 + \sqrt{1+C}}^{>0} + C > C$

forts.

3.1 b forts)






$x > \omega \Rightarrow \{f \text{ strikt växande}\} \Rightarrow f(x) > f(\omega) > c$

Alltså: $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \infty$ V.S.V.

---

3.4) Visa att för en följd $\{a_n\}_1^\infty$ gäller att

$$a_n \to a \text{ då } n \to \infty \Rightarrow |a_n| \to |a| \text{ då } n \to \infty$$

Gäller implikationen åt andra hållet?

Att $a_n \to a$ då $n \to \infty$ innebär att det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Vi vill visa att $\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon$ för $n \geq M \in \mathbb{N}$

Omvända triangelolikheten:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

"Vanliga" triangelolikheten:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

3.4 forts

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| \leq \underbrace{|y-x|}_{=|x-y|} + |x| \Rightarrow \underbrace{|y|-|x| \leq |x-y|}_{-|x-y| \leq |x|-|y|}$$

Alltså: $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad ||x|-|y|| \leq |x-y| \qquad [-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a]$$

Vi får $||a_n|-|a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ då $n \geq N$

$$\text{"} \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \quad \text{V.S.V}$$

Omvändningen är inte sann!

Ex. $a_n = (-1)^n, n \geq 1 \Rightarrow |a_n| = 1 \quad n \geq 1$

Men $\{a_n\}_1^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ konvergerar inte

---

3.5) Visa att

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

b) Gäller $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$ ?

a) Givet: För varje $C > 0$ finns ett $\underset{>0}{\delta}$ sådant att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > C$$

3.5 forts



Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\gamma > 0$ så att

$$|x-a| < \gamma \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$$

$$|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > C \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{C} = \varepsilon$$

Välj $\varepsilon = \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \; (= 1/C)$

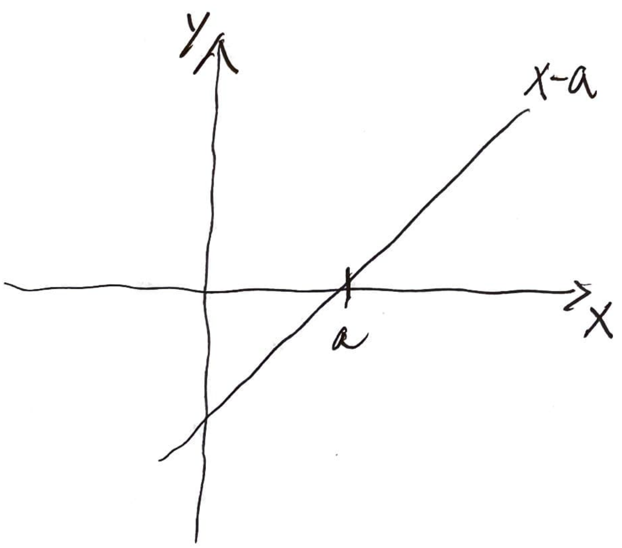
Välj $\gamma = \delta \Rightarrow |x-a| < \delta \Rightarrow \{f(x) > 0\} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

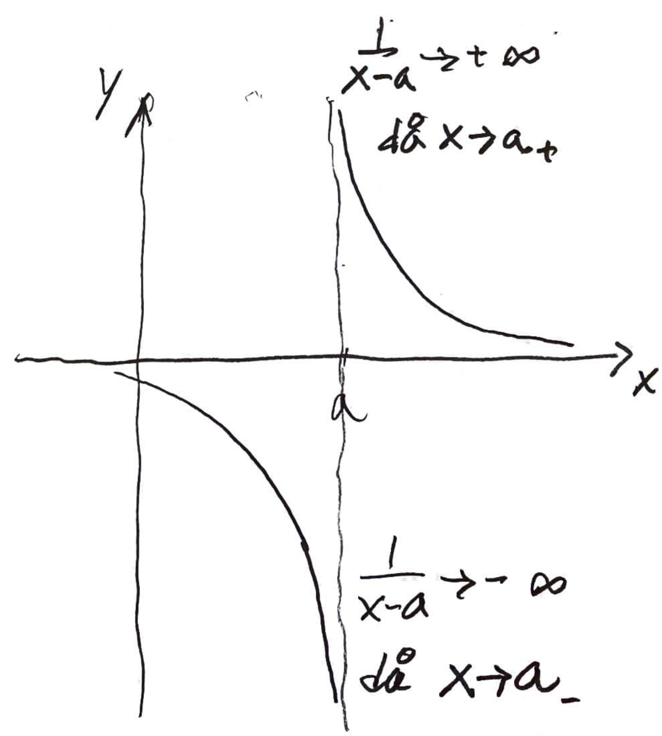
Alltså $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ V.S.V

---

b) Gäller ej! Exempel: $g(x) = x - a$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ men $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$ existerar inte.




Lars Moberg