Dag 3

Campus

Måndag: 10 - 11 , 11^{15} - 12^{15}

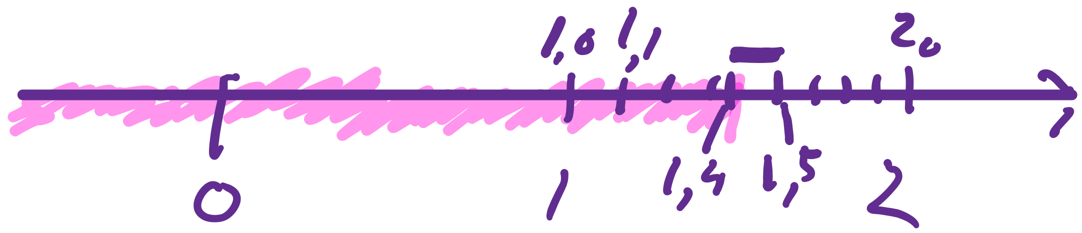
Onsdag: 9 - 10 , 10^{30} - 11^{30}, 13^{30} - 14^{30}

Torsdag: 10 - 11 , 11^{15} - 12^{15}

Zoom:

Vad är supremum av följande mängd?

$$M = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$



$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ växande $\longrightarrow \xi = \sup M$

$\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ avtagande $\longrightarrow \xi$

$a_1 = 1 < \xi < 2 = b_1$

$a_2 = 1{,}4 < \xi < 1{,}5 = b_2$

$a_3 = 1{,}41 < \xi < 1{,}42 = b_3$

$a_4 = 1{,}414 < \xi < 1{,}415 = b_4$

SATS Påst.: $\xi^2 = 2$. $(\xi = \sqrt{2})$

$\cancel{\xi^2 > 2}$ $\qquad$ $\cancel{\xi^2 < 2}$ $\qquad$ $\boxed{\xi^2 = 2}$

$a_k^2 - 2 \longrightarrow \xi^2 - 2 = \varepsilon > 0$

GVD. $\Rightarrow \exists k$ så att $a_k^2 - 2 > 0$

$a_k^2 > 2 \Rightarrow a_k$ övre begr. till M.

$a_k < \xi \Rightarrow a_k$ övre begr. som är mindre än ξ.

$\xi^2 < 2$ GVD $\Rightarrow$ det finns ett tal k så $b_k^2 < 2 \Rightarrow$

Då ligger $b_k \in M$ $b_k > \xi$

(eftersom b_k avtagande

$\Rightarrow$ ξ kan inte vara en övre begr.

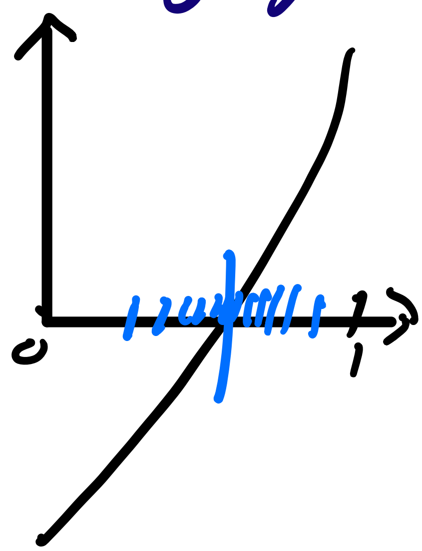
därför att vi har konstruerat

$b_k \in M$, $b_k > \xi$

Sammanfattningsvis är $\xi^2 = 2$ den enda möjligheten.

Ex $p(x) = x^5 + x - 1$

$\exists \xi \quad p(\xi) = 0$



Serier

Serier är <u>INTE</u> summor!!

Serier är Gränsvärden.

Kan konvergera, kan divergera

Konvergenskriterier

1. Går serien att beräkna?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

2. Går termerna mot noll?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \text{ div} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

3. Är serien positiv?

4. Konvergerar motsv. integral?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$$

f pos, avtagande $\quad f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$

5. Jämför med enklare serier

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$$

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + O(k^{-4})$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + O\left(\frac{1}{k^4}\right)} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{k}$$

k stort $\Rightarrow O\left(\frac{1}{k^4}\right)$ försumbar jämförd med $\frac{1}{k^2}$

Jämförelsekriterier I & II.

Avgör om följande serie konvergerar eller divergerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos(\pi/n)}.$$

Avgör om följande serie konvergerar eller divergerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\ln n}.$$

Rot- och kvotkriterierna