Seminarieuppgift 7, Algebra 5+Analys 3

Ville Wassberg

March 2021

1 Algebra 5

Talföljden $a_1, a_2, ...$ **är definierad med rekursion enligt följande;** $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, n \geq 2$ **Gissa en icke-rekursiv form för** a_n **och bevisa den sedan med induktion.**

Jag börjar med att kolla efter ett mönster, så för att göra det enklare kollar jag även vad a_3 blir; $a_3 = 5a_2 - 5a_1 = 5 * 2 - 6 * 1 = 4$.

Basfall: Jag gissar en formel; $a_n = 2^{n-1}$ för att det stämmer med mina tre första a. Jag vill nu visa att formeln även gäller för a_{n+1} och tänker då alltså visa att $2^{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, n \geq 2$.

Induktionsbevis: Enligt rekursionen är $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$, så enligt mig ser den ut såhär;$a_{n+1} = 5 * 2^{n-1} - 6 * 2^{n-2}$ nu behövs det bara bevisas vara lika med 2^{n+1-1} i.e. 2^n.

$$5 * 2^{n-1} - 6 * 2^{n-2} = 2^{n-2}(5 * 2 - 6) = 2^{n-2} * 4 = 2^{n-2} * 2^2 = 2^n$$

Därmed bevisat.

2 Analys 3

Undersök lokala och globala extrempunkter, konvexitetsegenskaper och asymptoter till kurvan: $y = \frac{x^2-2|x+1|}{x-1}$**, samt rita grafen.**

Jag börjar med att dela upp funktionen till två fall för att bli av med beloppet kring x-1; i) när $x > -1$ så $|x+1| = (x+1)$ och ii) när $x < -1$ så $|x+1| = -(x+1)$. Dessutom kan redan här poängteras att funktionen kommer att ha en lodrät asymptot $x = 1$ därför att funktionen är odefinierad där och när $x \to 1^+$ går funktionen mot $-\infty$ och när $x \to 1^-$ går funktionen mot $+\infty$.

i) $x > -1$ ger;

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1}$$

Jag skriver om ekvationen för att dels lättare derivera den och dels för att lättare undersöka möjliga asymptoter när $x \to \infty$.

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 - 3}{x - 1} = x - 1 - \frac{3}{x-1}$$

Här ser vi att när $x \to \infty$ så går funktionen mot $x - 1$ eftersom $\frac{3}{x-1}$ då går mot noll. Därför kommer vi att ha en sned asymptot; $x - 1$, som går mot oändligheten när x gör det.

För att hitta möjliga extrempunkter och avgöra konvexitetsegenskaper så tittar jag på derivatan och andraderivatan, där funktion är accelererande när andraderivatan är positiv och då konvex, och retarderande och konkav när andraderivatan är negativ, samt på punkterna där funktionen inte är deriverbar eller definierad;

$$y' = 1 + \frac{3}{(x-1)^2} > 0$$

$$y'' = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

Det kan även vara bra inför grafritningen att veta när funktionen korsar y-axeln. Så $y = 0$ ger $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

ii) $x < -1$ ger;

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1} = x + 3 + \frac{5}{x-1}$$

Här ser vi att en sned asymptot $y = x + 3$ uppstår när $x \to -\infty$, vilken då också går mot oändligheten..

$$y' = 1 - \frac{5}{(x-1)^2}$$

Om jag sätter y' lika med 0 så får jag; $x = 1 \pm \sqrt{5}$ men eftersom $x < -1$ så funkar bara $x = 1 - \sqrt{5}$, vilket är en möjlig extrempunkt.

$$y'' = \frac{10}{(x-1)^3}$$

Nu ska jag göra en teckentabell för att få en överblick om hur funktionen kommer att te sig.

Teckentabell							
x =		$1-\sqrt{5}$		-1		1	
y' y	$+++$ $\nearrow$	0 Lokalt max	- - - $\searrow$	ej def. Lokalt min $\frac{-1}{2}$	$+++$ $\nearrow$	ej def. ej def.	$+++$ $\nearrow$
y"	- - -	- - - konvex	- - -	ej def.	$+++$ konkav	ej def.	- - - konvex

Nu har jag allt jag behöver för att skissa grafen.

Asymptoter: Vi vet att när $x \to \infty$ konvergerar funktionen med $y = x - 1$; när $x \to -\infty$ konvergerar funktionen med $y = x + 1$; när $x \to 1^+$ går funktionen mot $-\infty$ och konvergerar med $x = 1$; när $x \to 1^-$ går funktionen mot ∞ och konvergerar med $x = 1$.

Extrempunkter: Lokalt maximum på $(1 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5})$, lokalt minimum på $(-1, -\frac{1}{2})$, globala existerar ej då funktionen som sagt går mot $\pm\infty$.

Konvexitetsegenskaper: Som framgår i teckentabellen; konvex från $-\infty$ till -1, därifrån konkav upp mot ∞ vid $x = 1$, konnvex från $x = 1$ och $-\infty$ till ∞.

Nollställen: $x = 1 - \sqrt{3}$ och $x = 1 + \sqrt{3}$. Och när $x = 0$ är $y = 4$.