Anonymiseringskod: 403-0064-WEL

① $13x+19y=120$ Ange hur många par heltal (x,y), $\sqrt{x^2+y^2}\le 30$

$\iff \{(x,y): x \wedge y \le 30\}$

Euklides Algoritm:

$19 = 1\cdot 13 + 6$

$13 = 2\cdot 6 + 1$

Hjälpekvation: $13x+19y=1$

Euklides baklänges:

$1 = 13 - 2\cdot 6 = 13 - 2(19-13) = 3\cdot 13 - 2\cdot 19$

Hjälpekvationen har en lösning: $x=3,\ y=-2$

$x_0 = 3\cdot 120 = 360 \quad y_0 = -2\cdot 120 = -240$

$$\begin{cases} x = x_0 + bn \\ y = y_0 - an, \ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 360+19n \\ y = -240-13n \end{cases}$$

$x\le 30 \iff 360+19\cdot n \le 30 \iff n \le \dfrac{30-360}{19} = -\dfrac{330}{19} \approx -17{,}3\ldots$

$y \le 30 \iff -240-13\cdot n \le 30 \iff n \ge \dfrac{30+240}{-13} = -\dfrac{270}{13} \approx -20{,}7\ldots$

$-20{,}7 \le n \le -17{,}3,\ n\in\mathbb{Z} \iff \underbrace{n=-20,-19,-18}_{\text{3 stycken}}$

② Skärningsmängd tom $\iff$ ekvationssystem saknar lösning. Därför behöver jag kolla de enskilda fallen när determinanten av de tre planen i ett matrissystem blir 0.

$\Pi_1: x-y-az=1,\ \Pi_2: ax+3y-4z=2,\ \Pi_3: 2x+y-4z=4$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1(\cancel{-12+4}) - a(4+a) + 2(\cancel{4}+3a) = -4a-a^2+6a = 2a-a^2 =$$
$$= a(2-a) = 0 \iff a = 2, 0$$

$a=2$ ger:

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ Motsägelse! Saknar lösningar i.e. Tom mängd.

$a=0$ ger:

$$\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Oändligt med lösningar och skärningsmängd är en linje

403-0064-WEL

③ $AXA^{-1}=C \iff A^{-1}AXA^{-1}A = X = \underline{A^{-1}CA}$

A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}CA = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&-1\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-3&-2&0\end{pmatrix}}}$$

④

a) A, B 6 bokstäver

$\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2} = 2^6 = 64$

$\underbrace{AAA}BAB$

b) Antal ord minus
Antal ord med
AAA, AAAA, AAAAA,
AAAAAA

$2\cdot2\cdot1\cdot2\cdot2\cdot1$

6A	1 sätt
5A	2 sätt
4A	5 sätt
3A	12 sätt

$2^6-(1+2+5+12) =$

$= 64-20 = \underline{\underline{44}}$

$\underline{4+2+2+4+2+1+2+1+1+1=20}$

403-0064-WEL

(5) $z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 23z^2 + 11z + 6 = 0$

Eftersom $P(x)$ har en udda grad garanteras inte att konjugatet till $1+\sqrt{2}i$ är

$\underline{1+\sqrt{2}i \text{ är en rot}}$

$z=1 \to 1-7+18-23+11+6=6 \neq 0$

$z=-1 \to -1-7-18-23-11+6 \neq 0$

$z=2 \to 32-112+144-92+22+6=204-204=0$ 😲

$z=2$ är en rot!

$\Rightarrow 1-\sqrt{2}i$ är en rot!

$$\begin{array}{l|l} \quad z^2-3z-1 & \\ \hline z^5-7z^4+18z^3-23z^2+11z+6 & z^3-4z^2+7z-6 \end{array}$$

$-(z^5-4z^4+7z^3-6z^2)$

$-3z^4+11z^3-17z^2+11z+6$

$-(-3z^4+12z^3-21z^2+18z)$

$-z^3+4z^2-7z+6$

$-(-z^3+4z^2-7z+6)$

0

$(x-(1+\sqrt{2}i))(x-(1-\sqrt{2}i)) =$

$= x^2-(1-\sqrt{2}i)x-(1+\sqrt{2}i)x+(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$

$= x^2-x+\sqrt{2}ix-x-\sqrt{2}ix+1-\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2i^2 =$

$= x^2-2x+3$

$(x^2-2x+3)(x-2) =$

$= x^3-2x^2-2x^2+4x+3x-6 =$

$= x^3-4x^2+7x-6$

$x=z$

z^2-3z-1 är rot. $\quad z = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

$z = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}, 2, 1-\sqrt{2}i, \underbrace{1+\sqrt{2}i}_{\text{Given}}$

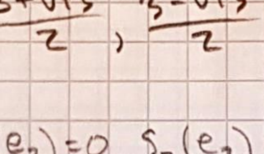
(6)

a) $S_1(e_2)=0 \quad S_2(e_3)=0 \quad S_3(e_1)=0$

$$A = S_3S_2S_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

b) $T: \underset{B_1}{\text{proj } x=z} \to \underset{B_2}{\text{proj } x=y} \to \underset{B_3}{\text{proj } y=z}$

$B = B_3B_2B_1$



$\bar{n}_2 =$

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} - \frac{x-z}{2}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0&1&0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} - \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} & 0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}}_{B_2}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} - \frac{y-z}{2}\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0 & 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{B_3}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&1\\0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&1&0\\0&0&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&2&0\\1&0&1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2&2&0\\1&1&2\\1&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&2&0\\1&0&1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2&4&2\\3&2&3\\3&2&3 \end{pmatrix}$$

Assignment TentaAlgebra_210505 due 05/05/2021 at 02:00pm CEST

Lös den Diofantiska ekvationen $13x+19y=120$ och ange hur många par av heltal (x,y) som löser ekvationen som också ligger i cirkelskivan med centrum i origo och radie 30.

Antalet sådana talpar är:

_____ . (Svara med ett heltal större än eller lika med noll.)

(5 poäng) I den inlämnade pdf-filen skall den allmänna lösningen och alla talparen anges, men i WeBWorK räcker det alltså att svara med antalet.

Answer(s) submitted:

- 3

(correct)

Vi definierar tre plan i rummet, Π_1, Π_2, Π_3, som beror av parametern a på följande sätt:

$\Pi_1 : x-y-az=1, \quad \Pi_2 : ax+3y-4z=2, \quad \Pi_3 : 2x+y-4z=4.$

Ange alla värden på a sådana att skärningsmängden mellan planen blir tom:

_____. Ditt svar ska ges som en kommaseparerad lista.

Answer(s) submitted:

- 2

(correct)

Lös matrisekvationen $AXA^{-1}=C$, där

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Matrisen ges av $X=$

$x_{11}=$ ___ $x_{12}=$ ___ $x_{13}=$ ___

$x_{21}=$ ___ $x_{22}=$ ___ $x_{23}=$ ___

$x_{31}=$ ___ $x_{32}=$ ___ $x_{33}=$ ___

Answer(s) submitted:

- 1
- 1
- 1
- 1
- 1
- -1
- -3
- -2
- 0

(correct)

---

a) Hur många bokstavskombinationer (”ord”) med 6 bokstäver kan bildas ur de två bokstäverna ”A” och ”B”? (t ex ABAAAB.)

Antalet sådana ord är _____.

(2 poäng)

b) Hur många av orden i a) har egenskapen att de inte innehåller följden AAA? (T ex får exempel-ordet i a) inte räknas med.)

Antalet sådana ord är _____.

(3 poäng)

Answer(s) submitted:

- 64
- 44

(correct)

$1+\sqrt{2}i$ är en rot till polynomekvationen $z^5-7z^4+18z^3-23z^2+11z+6=0$. Bestäm de övriga rötterna. Ange dina svar i en kommaseparerad lista och notera att dubbelrötter ska anges två gånger.

OBS!! Du ska inte ta med den givna roten i ditt svar, utan bara de övriga 4.

Svar: _____________. (5 poäng)

Answer(s) submitted:

- (3+sqrt(13))/2, (3-sqrt(13))/2, 2, 1-sqrt(2)i

(correct)

---

a) Låt S vara den linjära avbildning av rummet på sig självt som definieras av att vi först projicerar på planet $y=0$, sedan projicerar på planet $z=0$ och till sist projicerar på planet $x=0$. Bestäm den matris $A=(a_{ij})$ som representerar S i standardbasen. (ON-system)

Matrisen (a_{ij}) ges av

$a_{11}=$ ___ $a_{12}=$ ___ $a_{13}=$ ___

$a_{21}=$ ___ $a_{22}=$ ___ $a_{23}=$ ___

$a_{31}=$ ___ $a_{32}=$ ___ $a_{33}=$ ___

(2 poäng)

b) Låt T vara den linjära avbildning av rummet på sig självt som definieras av att vi först projicerar på planet $x=z$, sedan projicerar på planet $x=y$ och till sist projicerar på planet $y=z$. Bestäm den matris $B=(b_{ij})$ som representerar T i standardbasen. (ON-system)

Matrisen (b_{ij}) ges av

$b_{11}=$ ___ $b_{12}=$ ___ $b_{13}=$ ___

$b_{21}=$ ___ $b_{22}=$ ___ $b_{23}=$ ___

$b_{31}=$ ___ $b_{32}=$ ___ $b_{33}=$ ___

(2 poäng)

c) Vad blir B:s determinant?

$\det B=$ _____

(1 poäng)

Answer(s) submitted:

- 0
- 0
- 0
- 0
- 0
- 0

- 0
- 0
- 0
- 1/4
- 1/2
- 1/4
- 3/8
- 1/4
- 3/8
- 3/8
- 1/4
- 3/8
- 0

(correct)