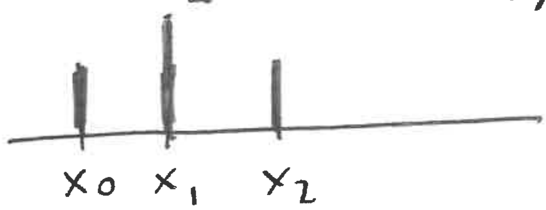
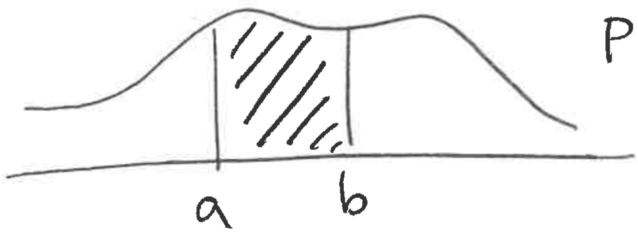
5 Rep: Diskret s.v. – sannolikhetsfkt. $p(x)$

$P(X=x_1)=p(x_1)$



Kontinuerlig s.v. – täthetsfkt. $f(x)$



$$P(X\in[a,b])=\int_a^b f(x)\,dx$$

Väntevärde

Ex. Lotteri, 100 lotter. En vinst 500 kr, tre vinster 100 kr.

$p(500)=0.01,\ p(100)=0.03,\ p(0)=0.96.$

Genomsnittlig vinst?

Snitt: $\dfrac{0\cdot 96+100\cdot 3+500\cdot 1}{100}=8$ kr/lott

Lottpris 10 kr/lott $\Rightarrow$ Lotteriet tjänar 2 kr/lott

Snittet $=0\cdot p(0)+100\cdot p(100)+500\cdot p(500)$

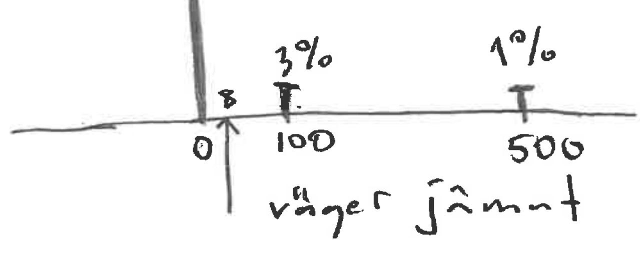
Def: Väntevärdet av en diskret s.v. X definieras av $E[X]=\sum_i x_i\,p(x_i)$.

$E[X]$ är vägt medelvärde av $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Vikter: $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$

Tolkning:

1. $E[X]$ är tyngdpunkt i fördelningen.



② Genomsnitt vid upprepade försök:

Möjliga utfall $x_1, x_2, \ldots$

Drag n realisationer.

X_j = utfall omgång j

$a_n(x_i)$ = andel ggr med utfall x_i

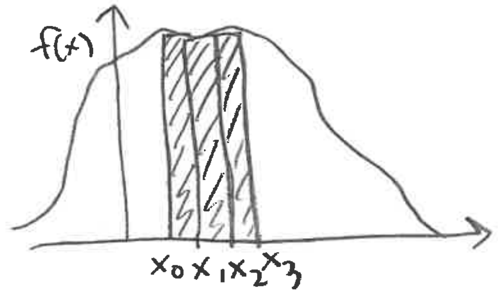
Genomsnitt $\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = x_1 a_n(x_1) + x_2 a_n(x_2) + \ldots$

$= \sum_i x_i a_n(x_i)$

$a_n(x_i) \to p(x_i) \Rightarrow \bar{X} \to E[X] \left(= \sum_i x_i p(x_i) \right)$

Stora talens lag.

X kont. med täthetsfkt. $f(x)$



Approximera med diskret variabel $\tilde{X}$ med värden $\{x_k\}$ och $P(\tilde{X} = x_k) = f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

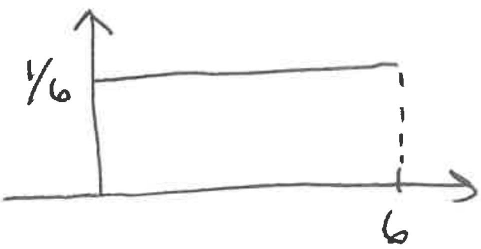
$$E[X] \approx \sum_k x_k f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \longrightarrow \int x f(x)\,dx$$

om f "snäll"

__Def.__ Väntevärdet av en kontinuerlig s.v. X med täthetsfkt. $f(x)$ ges av $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$.

__Ex.__ X = väntetid vid bussen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/6 & 0 \le x \le 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^6 x \cdot \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 3$$

Väntevärde av fkt. av s.v.

Ex. Lotteriet igen. $E[X-10]=?$ $E[X^2]=?$

x^2	$p(x)$
0	0.96
10.000	0.03
250.000	0.01

$$E[X^2]=0\cdot 0.96+10.000\cdot 0.03+250.000\cdot 0.01=2800$$

Obs! $E[X^2]\neq 8^2=E[X]^2$

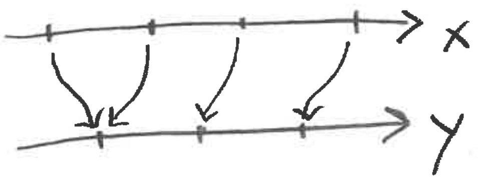
Sats: X s.v., $g(x)$ reell fkt.

$$E[g(X)]=\begin{cases}\sum_i g(x_i)p(x_i) & x \text{ diskret}\\ \int g(x)f(x)\,dx & x \text{ kontinuerlig}\end{cases}$$

(Lotteriet: $0^2p(0)+100^2p(100)+500^2\cdot p(500)=2800$)

Bevis: Sätt $Y=g(X)$. y_j = värden för $g(x_i)$, $i\geq 1$.

(diskreta fallet)



$$P(Y=y_j)=\sum_{i:g(x_i)=y_j}p(x_i)$$

$$\sum_i g(x_i)p(x_i)=\sum_j y_j\sum_{i:g(x_i)=y_j}p(x_i)=$$

$$=\sum_j y_j P(Y=j)=E[Y].$$

Följd. $E[aX+b]=aE[X]+b$ (a, b konstanter)

Bevis. $Y=aX+b$

$$E[Y]=\sum_i(ax_i+b)p(x_i)=a\sum_i x_ip(x_i)+b\sum_i p(x_i)$$

$$=aE[X]+b$$

Ex. Lotteriet. Nettovinst $X-10$.

$$E[X-10] = E[X] - 10 = -2 \text{ kr.}$$

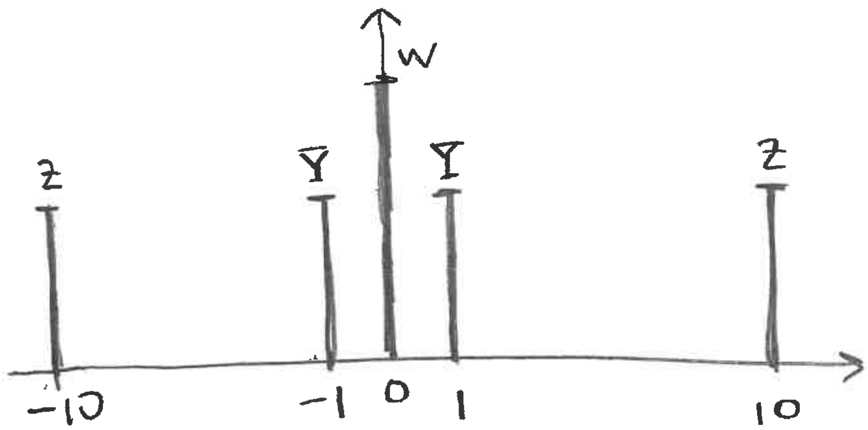
Varians.

Ex. W, Y, Z s.v.

$W = 0$ slh 1

$Y = \begin{cases} 1 & \text{slh } 1/2 \\ -1 & \text{slh } 1/2 \end{cases}$

$Z = \begin{cases} 10 & \text{slh } 1/2 \\ -10 & \text{slh } 1/2 \end{cases}$



$$E[W] = E[Y] = E[Z] = 0$$

Z störst spridning, W minst.

Hur mäta spridning för s.v. X?

Antag $E[X] = \mu$.

Def. Variansen hos X ges av $V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$, och standardavvikelsen av $SD(X) = \sqrt{V(X)}$.

Ex. $V(W) = (0-0)^2 \cdot 1 = 0$

$$V(Z) = (10-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-10-0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 100$$

$$SD(Z) = 10$$

Räkneregel: $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Bevis: $V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int (x-\mu)^2 f(x)\,dx =$

(kont. fallet)

$$= \int (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)\,dx =$$

$$= \int x^2 f(x)\,dx - 2\mu \int x f(x)\,dx + \mu^2 \int f(x)\,dx =$$

$$= E[X^2] - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = E[X^2] - E[X]^2.$$

Ex. Väntetiden

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^6 x^2 \cdot \frac{1}{6}\,dx = 12$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 12 - 3^2 = 3$$

Ex. Tärningskast

$X = \#$ prickar

$p(i) = P(X=i) = 1/6 \quad i = 1, \dots, 6$

$$E[X] = \sum_i i\,p(i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$$

$$E[X^2] = \sum_i i^2 p(i) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) \approx 15{,}2$$

$$\Rightarrow V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 15{,}2 - (3{,}5)^2 \approx 2.92$$

$$SD(X) \approx 1{,}71$$

Räkneregel: $V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)$

Bevis. $V(aX+b) = E\left[(aX+b-(a\mu+b))^2\right] =$

$$= E\left[a^2(X-\mu)^2\right] = a^2 \cdot E\left[(X-\mu)^2\right] = a^2 V(X).$$

Det följer att $SD(aX+b) = |a|\,SD(X)$.

Ex. Tärningskast igen.

Alt 1: Betala 3,50. Vinn X. Nettovinst $X - 3{,}50$.

Alt 2. — " — 35 — " — $10X$ — " — $10X - 35$.

$E[X-3{,}5] = E[X] - 3{,}5 = 0 \quad$ p.s.s. $E[10X - 35] = 0$.

$$V(X-3{,}5) = V(X) = 2{,}92$$

$$V(10X-35) = 10^2 \cdot V(X) = 292$$