

Anonymiseringskod: 403-0064-WEL

①

$$13x + 19y = 120$$

Ange hur många par heltal (x, y) , $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 30$
 $\Leftrightarrow \{(x, y) : x, y \leq 30\}$
 Euklides Algoritm:

Hjälpekvation: $13x + 19y = 1$

Euklides baklänges:

$$19 = 1 \cdot 13 + 6$$

$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2(19 - 13) = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 19$$

Hjälpekvationens lösning: $x = 3, y = -2$

$$x_0 = 3 \cdot 120 = 360 \quad y_0 = -2 \cdot 120 = -240$$

$$\begin{cases} x = x_0 + bn \\ y = y_0 - an, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 + 19n \\ y = -240 - 13n \end{cases}$$

$$x \leq 30 \Leftrightarrow 360 + 19n \leq 30 \Leftrightarrow n \leq \frac{30 - 360}{19} = -\frac{330}{19} \approx -17,3 \dots$$

$$y \leq 30 \Leftrightarrow -240 - 13n \leq 30 \Leftrightarrow n \geq \frac{30 + 240}{-13} = -\frac{270}{13} \approx -20,7 \dots$$

$$-20,7 \leq n \leq -17,3, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -20, -19, -18$$

3 stycken

②

Skärningsmängd tom \Leftrightarrow

ekvationssystem saknar lösning

Därför behöver jag kolla de engelska fallen när determinanten av de tre planerna & ett matrissystem blir 0.

$$\pi_1: x - y - az = 1, \pi_2: ax + 3y - 4z = 2, \pi_3: 2x + y - 4z = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1(-12 + 4) - a(4 + a) + 2(4 + 3a) = -4a - a^2 + 6a = 2a - a^2 = a(2 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 2, 0$$

$a = 2$ ger:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ \textcircled{1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \textcircled{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Motsägelse!
 Saknar lösningar
 i.e. Tom mängd.

$a = 0$ ger:

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ \textcircled{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oändligt med lösningar
 Skärningsmängd
 är en linje

③

$$AXA^{-1} = C \Leftrightarrow A^{-1}AXA^{-1}A = X = \underline{A^{-1}CA}$$

$$A^{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

④

a) A, B 6 bokstäver

$$\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 2^6 = 64$$

AAABARB

b)

Antal ord minus
Antal ord med
AAA, AAAA, AAAAA,
AAAAAA

$$2^6 - (1 + 2 + 5 + 12) =$$

$$= 64 - 20 = \underline{\underline{44}}$$

6A 1 sätt
5A 2 sätt
4A 5 sätt
3A 12 sätt

2 · 2 · 1 · 2 · 2 · 11 · 1 · 2 · 21 · 1 · 1 · 22 · 1 · 1 · 12 · 2 · 1 · 11 · 1 · 21 · 1 · 1 · 12 · 1 · 1 · 11 · 1 · 1 · 11 · 1 · 1 · 11 · 1 · 1 · 1

$$4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20$$

5) Eftersom $P(x)$ har en udda grad garanteras
 inteallt konjugatet till $1 + \sqrt{2}i$ är

$$z=1 \rightarrow 1-7+18-23+11+6 \neq 0$$

$$z=-1 \rightarrow -1-7-18-23-11+6 \neq 0$$

$$z=2 \rightarrow 32-112+144-92+22+6=204-204=0 \quad \checkmark$$

$1 + \sqrt{2}i$ är en rot

$z=2$ är en rot!

$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}i$ är en rot!

$$\begin{array}{r} z^2 - 3z - 1 \\ \hline z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 23z^2 + 11z + 6 \quad \begin{array}{l} z^3 - 4z^2 + 7z - 6 \\ - (z^5 - 4z^4 + 7z^3 - 6z^2) \\ \hline -3z^4 + 11z^3 - 17z^2 + 11z + 6 \\ - (-3z^4 + 12z^3 - 21z^2 + 18z) \\ \hline -z^3 + 4z^2 - 7z + 6 \\ - (-z^3 + 4z^2 - 7z + 6) \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$(x - (1 + \sqrt{2}i))(x - (1 - \sqrt{2}i)) =$$

$$\begin{aligned} &= x^2 - (1 + \sqrt{2}i)x - (1 + \sqrt{2}i)x + (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \\ &= x^2 - x + \sqrt{2}ix - x - \sqrt{2}ix + 1 - \sqrt{2}i + \sqrt{2}i - 2i^2 = \\ &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

$$(x^2 - 2x + 3)(x - 2) =$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + 3x - 6 = \\ &= x^3 - 4x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

$$x = z$$

$$z^2 - 3z - 1 \text{ är rot. } z = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$z = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, 2, 1 - \sqrt{2}i, \underbrace{1 + \sqrt{2}i}_{\text{given}}$$

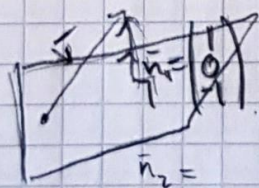
6)

$$a) S_1(e_2) = 0 \quad S_2(e_3) = 0 \quad S_3(e_1) = 0$$

$$A = S_3 S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) T: \underset{B_1}{\text{proj } x = z} \rightarrow \underset{B_2}{\text{proj } x = y} \rightarrow \underset{B_3}{\text{proj } y = z}$$

$$B = B_3 B_2 B_1$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x-z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{y-z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$