Analys del A, bonus 3

Ville Wassberg

Oktober 2021

1. a) Betrakta funktionen $f(x,y) = x^3y + xy^3 - xy$ på mängden $D = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$. Bestäm alla stationära punkter i det inre av D, samt avgör om f antar något största/minsta värde. Ange största/minsta värdet i förekommande fall.

   För att avgöra om funktionen kan anta maximala och minimala värden bör gränsvärdet kollas.//

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} x^3y+xy^3-xy = \lim_{x^2+y^2\to\infty} xy(x^2+y^2-1) = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \lim_{r\to\infty} r^2\frac{1}{2}\sin 2\theta(r^2-1)$$

   Vilket alltid är positivt och eftersom;

$$\begin{bmatrix} x = t \\ y = t \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} 2t^4 - t^2 = \infty$$

   så existerar det ett minimum, men maximum antas inte då supremum är oändligheten.

   För de stationära punkterna kollas de partiella derivatorna när de är lika med noll.

$$f'_x = 3x^2y + y^3 - y = 0$$
$$f'_y = x^3 + 3xy^2 - x = 0$$

$$xy(x^2 + 3y^2 - 1 - 3x^2 - y^2 + 1) = xy(2y^2 - 2x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = y; x = -y; x = 0, y = t; x = t, y = 0$$

   x=-y går endast vid (0,0). x=t, y =0 ger;

$$t^3 - t = 0, t = 1, 0$$

y=t, x=0 ger;

$$t^3 - t = 0, t = 1, 0$$

x=y ger;

$$3x^3 + x^3 - x = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = 0, x = y = \pm\frac{1}{2}$$

men bara positiva här så de stationära punkterna i det inre blir; (0,0); $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; (0,1); (1,0).

$$f(0,0) = 0, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, f(0,1) = 0, f(1,0) = 0$$

Alltså har funktionen på mängden D ett minsta värde på $-\frac{1}{8}$, men ett globalt maximum existerar inte.

b) Utred samma fråga då D ersätts med mängden $E = \{(x, y) : x+y \geq 0\}$.

Här kan alla stationära punkter från de partiella derivatorna tas med, men eftersom att här kan göras variabelbytet;

$$\begin{bmatrix} x = t \\ y = -t \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} -2t^4 + t^2 = -\infty$$

Så existerar det alltså inte heller något minsta värde under detta bivillkor. Alltså varken max eller min.

2. Betrakta funktionen

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 3xyz.$$

Avgör om $f(x, y, z)$ antar största och eller minsta värde på R^3. Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y, z)$ och avgör deras karaktär (max, min eller sadelpunkt).

$$\lim_{x^2+y^2+x^2\to\infty} (x + y + z)^2 - 3xyz = \begin{bmatrix} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (a + b + c)^2 t^2 - 3abct^3$$

Alltså om exempelvis a,b,c är negativa tal så går gränsvärdet mot plus oändligheten; om a,b,c är positiva tal så går gränsvärdet mot minus oändligheten. Alltså kan varken max eller min antas på R^3.
De stationära punkterna kan ändå fås fram;

$$f'_x = 2(x + y + z) - 3yz = 0$$

$$f'_y = 2(x+y+z) - 3xz = 0$$
$$f'_z = 2(x+y+z) - 3xy = 0$$
$$-3yz + 3xz = 0 \Leftrightarrow y = x$$
$$-3xz + 3xy = 0 \Leftrightarrow z = y$$

Så $x = y = z$ ger;

$$6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$$

Så de stationära punkterna blir; (0,0,0), (2,2,2)

$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 2$$
$$f''_{xy} = 2 - 3z, f''_{xy}(0,0,0) = 2, f''_{xy}(2,2,2) = -4$$
$$f''_{xz} = 2 - 3y, f''_{xz}(0,0,0) = 2, f''_{xz}(2,2,2) = -4$$
$$f''_{yz} = 2 - 3x, f''_{yz}(0,0,0) = 2, f''_{yz}(2,2,2) = -4$$

Så den associerade kvadratiska formen i punkten (0,0,0) blir;

$$Q(h,k,l) = 2(h^2 + 2hk + 2hl + 2lk + k^2 + l^2) = 2(h+k+l)^2$$

Vilket alltså är positivt semidefinit och funktionen behöver undersökas vidare;
Om man sätter $h(t) = f(t,t,t) = 9t^2 - 3t^3, h'(t) = 18t - 9t^2$ där derivatan är positiv endast när $0 < t < 2$ men annars negativ, vilket betyder att det i vissa riktningar från origo är f(x,y,z) avtagande och i andra växande; alltså är punkten en sadelpunkt.

Den associerade kvadratiska formen i punkten (2,2,2) blir;

$$Q(h,k,l) = 2(h^2+k^2+l^2-4hk-4hl-4kl) = 2((h-2k-2l)^2-3k^2-3l^2-12kl) =$$

$$2((h-2k-2l)^2 - 3((k+2l)^2 - 3l^2)) = 2(h-2k-2l)^2 - 6(k+2l)^2 + 18l^2$$

Som är indefinit och alltså en sadelpunkt.

3. Undersök om funktionen

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$$

måste anta ett största och/eller ett minsta värde under bivillkoret $g(x,y) = x^4 + y^4 - xy - 3 = 0$, samt bestäm dessa i förekommande fall.

För att ta reda på om största och minsta värde existerar, så kan gränsvärdet för bivillkoret när $x^2 + y^2$ går mot oändligheten undersökas, och om det då går mot oändligheten så kan man dra slutsatsen att nivåkurvan som bivillkoret beskriver är en kompakt mängd, och alltså har ett största och minsta värde.

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} x^4+y^4-xy = \begin{bmatrix} x = rcos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow = \lim_{r\to\infty} r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-r^2(\cos\theta\sin\theta) =$$

$$\lim_{r\to\infty} r^2(r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta) = +\infty$$

Eftersom $\sin 2\theta$ är begränsad, och $\cos^4\theta+\sin^4\theta$ alltid är positivt. Så alltså är $D = \{(x,y) : x^4+y^4-xy = 3\}$ en kompakt mängd, och ett största och minsta värde antas.
Alternativt; Eftersom att från olikheten $2|xy| \leq x^2+y^2$ kan få $-xy \geq -\frac{x^2+y^2}{2}$, så leder det till

$$g(x,y) = x^4+y^4-xy \geq x^4+y^4-\frac{x^2+y^2}{2} = (x^2-\frac{1}{4})^2+(y^2-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\sqrt{50}+1}{4}, y^2 \leq \frac{\sqrt{50}+1}{4}$$

alltså kan man stänga in funktionen i en kompakt kvadrat i planet.

För att hitta de stationära punkterna här så kan determinanten av matrisen med gradienten, för funktionen på ena raden och gradienten för bivillkoret på andra raden, sättas lika med 0, vilket då sker när gradienterna är parallella och alltså ger de stationära punkterna.

$$\nabla f = (4x^3+y, 4y^3+x)$$
$$\nabla g = (4x^3-y, 4y^3-x)$$
$$\begin{vmatrix} 4x^3+y & 4y^3+x \\ 4x^3-y & 4y^3-x \end{vmatrix} = (4x^3+y)(4y^3-x)-(4y^3+x)(4x^3-y) =$$
$$8y^4-8x^4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$$

x=y ger;

$$g(x,y) = g(x,x) = 2x^4-x^2-3 = 0 = [t = x^2] \Leftrightarrow t^2-\frac{t}{2}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -1, t = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x=-y ger;

$$g(x,y) = g(x,-x) = 2x^4+x^2-3 = 0 = [t = x^2] \Leftrightarrow t^2+\frac{t}{2}-\frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm 1$$

Alltså blir de stationära punkterna;

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), (1,-1), (-1,1)$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=6$$

$$f(1,-1)=f(1,-1)=1$$

Vilka då blir max och min, respektive.
Även när gradienten för bivillkoret är lika med nollvektorn måste undersökas. $4x^3-y=0, 4y^3-x=0$ vilket inte uppfyller bivillkoret.

4. Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

under bivillkoret $x_1x_2x_3x_4x_5-1=0$.

Här kan lagrangemetoden komma väl till pass.

$$F_\lambda=f+\lambda g$$

$$F'_{x1}=1+\lambda x_2x_3x_4x_5=0$$
$$F'_{x2}=1+\lambda x_1x_3x_4x_5=0$$
$$F'_{x3}=1+\lambda x_1x_2x_4x_5=0$$
$$F'_{x4}=1+\lambda x_1x_2x_3x_5=0$$
$$F'_{x5}=1+\lambda x_1x_2x_3x_4=0$$
$$F'_{\lambda}=x_1x_2x_3x_4x_5-1=0$$

Vilket ger;

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5, x^5-1=0, x=1$$

Men gradienten till bivillkoret måste sättas lika med noll för att få med alla alternativ;

$$\nabla g=(x_2x_3x_4x_5, x_1x_3x_4x_5, x_1x_2x_4x_5, x_1x_2x_3x_5, x_1x_2x_3x_4=\overline{0}$$

vilket inte uppfyller bivillkoret därför att ingen variabel kan vara 0. Så den enda staionära punkten till funktionen är;
(1,1,1,1,1).

5. Avgör om max och min till funktionen $f(x,y)=(2xy-x^2)e^{-\frac{2}{3}(x+y)}$ i $D=\{(x,y):0\le x\le y\}$ antas, samt bestäm deras värden i förekommande fall.

Tack vare olikheten $2|xy|\le x^2+y^2 \Leftrightarrow 2|xy|-x^2\le y^2$ och $y\le x+y$ så;

$$(2xy-x^2)e^{-\frac{2}{3}(x+y)}\le y^2e^{-\frac{2}{3}y}$$

$$\frac{d}{dy}(y^2e^{-\frac{2}{3}y}) = (2y - \frac{2}{3}y^2)e^{-\frac{2}{3}y} = 0 \Leftrightarrow (2y - \frac{2}{3}y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0, 3$$

Eftersom när y är större än tre så är funktionen avtagande, men växande när y är större än noll, så kan ursprungsfunktionen $(2xy - x^2)e^{-\frac{2}{3}(x+y)}$ begränsas till den kompakta mängden $E = \{(x, y) : 0 \leq (2xy - x^2)e^{-\frac{2}{3}(x+y)} \leq \frac{9}{e^2}\}$. Därför antas både max och min.

Eftersom att funktionen alltid är positiv så blir det minsta värdet 0 då $2xy - x^2 = 0$ vilket sker när $x = 0, y = t$, så minsta värdet är;

$$f(0, t) = 0$$

Även randpunkterna när $y = x$ behöver undersökas;

$$h(x) = f(x, x) = x^2e^{-\frac{4}{3}}, h'(x) = (2x - \frac{4}{3}x^2)e^{-\frac{4}{3}x} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{2}{3}$$

$$h(0) = 0, h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4e^2}$$

Eftersom det inte finns några x och y som funktionen är odefinierad i så återstår det bara att kolla de inre punkterna.

$$\begin{bmatrix} f'x = \frac{1}{3}(2x^2 - 4xy + 6y - 6x)e^{-\frac{2}{3}} = 0 \\ f'_y = \frac{1}{3}(2x^2 - 4xy + 6x)e^{-\frac{2}{3}} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (x^2 - 2xy + 3y - 3x) = 0 \\ (x^2 - 2xy + 3x) = 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(3y - 6x) = 0, y = 2x$$

$$\Rightarrow$$

$$x^2 - 4x^2 + 3x = -3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$$

Så de stationära punkterna i det inre är; (0,0), (1,2).

$$f(1, 2) = \frac{3}{e^2}$$

Alltså har existerar det ett största värde på $\frac{3}{e^2}$, samt ett minsta värde i origo på 0.