1

Matematiska modeller för slumpmässiga försök

1. Möjligt att upprepa under likartade förhållanden.
2. Resultatet oförutsägbart.

Resultat = utfall

{möjliga utfall} = utfallsrum = Ω

Händelse $A \subset \Omega$ (delmängd av utfallsrummet)

Ex. Tärningskast

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Händelse: A = udda resultat $= \{1,3,5\}$

Ex. Myntkast tills krona

$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$

heads tails

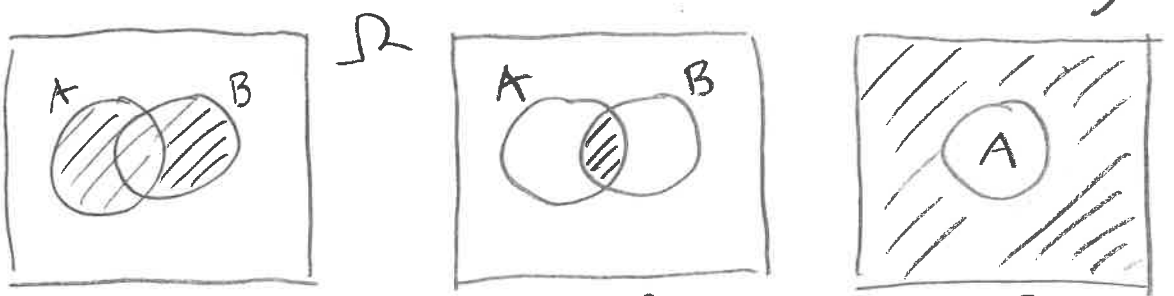
Ex. Livslängd batteri

$\Omega = \{x : x \geq 0\} = [0, \infty)$

A och B två händelser

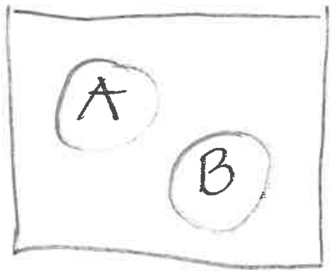
- $A \cup B$: A eller B inträffar (även båda)
- $A \cap B$: både A och B inträffar
- A^c: A inträffar inte

Kan åskådliggöras i Venndiagram:



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ A^c

A och B är <u>disjunkta</u> om $A \cap B = \emptyset$; ← tomma mängden



<u>Ex.</u> Två myntkast $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

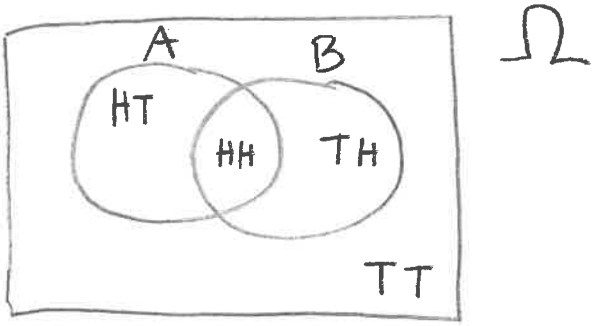
A = krona i första kastet = $\{HT, HH\}$

B = krona i andra kastet = $\{TH, HH\}$

$A \cup B$: minst en krona = $\{HT, TH, HH\}$

$A \cap B$: krona i båda kasten = $\{HH\}$

A^c : klave i första kastet = $\{TH, TT\}$



$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$: något A_i inträffar

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$: alla A_i inträffar

De Morgans lagar:

- $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Sannolikheter

Vill definiera $P(A)$ = slh. för händelsen A

Def 1: m möjliga utfall, alla lika troliga, k utfall i A

$$P(A) := \frac{k}{m}$$

Fungerar inte om $m = \infty$ eller om utfallen inte är lika troliga.

Def 2: $f_n(A)$ = relativ frekvens A i n omg.

antal

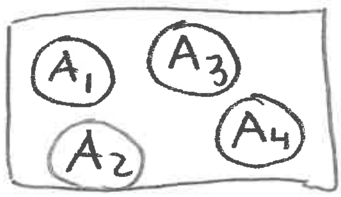
$$= \frac{\# A}{n}$$

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$$

Hur vet vi att lim existerar?

Vår def: axiomatisk

En sannolikhet $P(\cdot)$ är definierad för alla $A \subset \Omega$ och uppfyller:



A1. $0 \leq P(A) \leq 1$

A2. $P(\Omega) = 1$

A3. $A_1, A_2, \ldots$ disjunkta $\Rightarrow P\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right) = \sum_1^{\infty} P(A_i)$

Ex. Myntkast

$P(\text{krona}) = P(\text{klave}) = 1/2$

Modell av verkligheten som uppfyller axiomen.

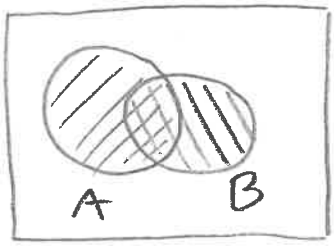
Konsekvenser av axiomen

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Bevis: $\Omega = A \cup A^c$

$$\underset{\text{A2.}}{1 =} P(\Omega) = \underbrace{P(A \cup A^c)}_{\text{disjunkta}} \underset{\text{A3.}}{=} P(A) + P(A^c)$$

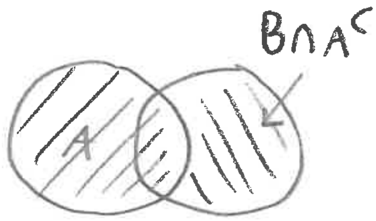
- $P(\emptyset) = 0$ ty $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) \underset{\text{A3.}}{=} P(\Omega) + P(\emptyset)$



- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bevis: $P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c)) =$

$= P(A) + P(B \cap A^c) = (*)$



$B = \underbrace{(B \cap A) \cup (B \cap A^c)}_{\text{disjunkta}} \Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$

$(*) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$