Seminarieuppgift 2

Ville Wassberg

14 februari 2021

1 Lösning av en diofantisk ekvation

Problem: Lös den diofantiska ekvationen;

$$19x + 71y = 4000$$

För att lösa detta använder jag Euklides algoritm dels för att hitta den största gemensamma delare (SGD), dels för att se så att SGD är delbart med högerledet av ekvationen, så jag vet om det går att hitta en lösning eller ej, samt dels för att använda algoritmen baklänges för att få fram möjliga x-och y-värden.

Euklides algoritm:

$$71 = 3 * 19 + 14$$

$$19 = 1 * 14 + 5$$

$$14 = 2 * 5 + 4$$

$$5 = 1 * 4 + 1$$

Eftersom att jag får resten 1 innebär det att SGD(71,19)=1, 71 och 19 är alltså relativt prima och jag kan därför inte förenkla ekvationen ytterligare; och 1 delar 4000, därför är det möjligt att hitta lösningar till ekvationen.

Jag använder mig av hjälpekvationen:

$$19x + 71y = 1$$

Jag använder här Euklides algoritm baklänges för att få fram två möjliga x-och y-värden till hjälpekvationen;

$$1 = 5 - 4$$

$$= 5 - (14 - 2 * 5)$$

$$= 3 * 5 - 14$$

$$= 3 * (19 - 14) - 14$$

$$= 3 * 19 - 4 * 14$$

$$= 3 * 19 - 4 * (71 - 3 * 19)$$

$$= 15 * 19 - 4 * 71$$

Här ser vi att;

$$15 * 19 - 4 * 71 = 1$$

Det innebär att jag kan använda x=15 och y=-4 som möjliga lösningar till hjälpekvationen. För att få en möjlig lösning till den ursprungliga ekvationen kan jag multiplicera x och y med 4000 samtidigt som högerledet, så att;

$$19 * (15 * 4000) + 71 * ((-4) * 4000) = 1 * 4000$$

Så en partikulärlösning till den diofantiska ekvationen har;

$$x0 = 60000, y0 = -16000$$

För att hitta en allmän lösning till ekvationen sätter jag;

$$x = x0 + bn$$

$$y = y0 - an$$

Där a och b kommer från formen ax+by=c, alltså är a och b lika med 19 och 71 respektive (från ekvationen). Detta medför att den allmänna lösningen till den diofantiska ekvationen;

$$19x + 71y = 4000$$

är;

$$x = 60000 + 71n$$

$$y = (-16000) - 19n$$

Där n är ett heltal.