Räkneövning 20/9 – Analys A

K1: 3,15

Beräkna derivatorna av

a) $f_1(x) = \sqrt{x}$ b) $f_2(x) = \sqrt{x^2+1}$ c) $f_3(x) = \sin(x^2)$

med derivatans definition

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f_1'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

---

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\,\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to 0}{h}+2x}{\sqrt{(x+\underset{\to 0}{h})^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

3.15c) $f_3(x) = \sin(x^2)$ (2)

$$f_3'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x^2+h^2+2xh) - \sin(x^2)}{h}$$

$= \left\{ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\ \text{se PBI sidan 107} \right\}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x^2+\overset{\to 0}{h^2}+\overset{\to 0}{2xh}}{2}\right)\sin\left(\frac{h^2+2xh}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos(x^2) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h^2+2xh}{2}\right)}{\left(\frac{h^2+2xh}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{h^2+2xh}{2}\right)}{h} =$$

$\to 1$ då $h \to 0$ $\left(\underset{\to 0}{\frac{h}{2}} + x\right)$

$$= \underline{\underline{2x\cos(x^2)}}$$

3.16)

(3)

$f(x) = x^2 g(x)$ Visa att $f'(0)=0$, $g(x)$ begränsad

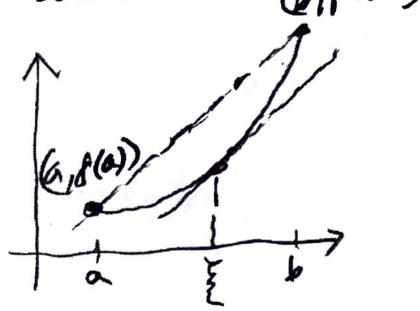
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \overset{=0}{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\, g(h)$$

g begränsad $\Rightarrow \lim_{h\to 0} h\,g(h) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f'(0)=0}}$

3.18) f kontinuerlig i $[a,b]$ och deriverbar i $]a,b[$

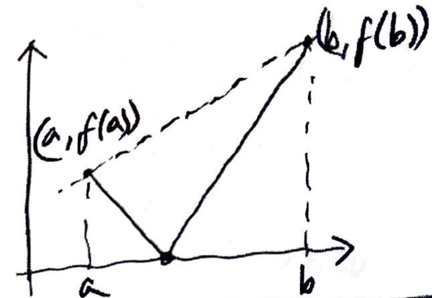
Då finns ett $\xi \in\,]a,b[$ så att

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



f ej deriverbar i en punkt $\Rightarrow$

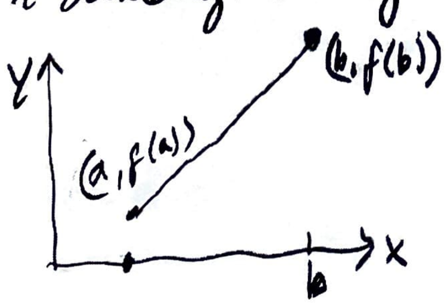
i ingen punkt är $f'(\xi)(b-a) = f(b)-f(a)$



3.19) f kont i $[a,b]$ och deriverbar i $]a,b[$,

Exempel på f som uppfyller $f'(\xi)(b-a) = f(b)-f(a)$ i oändligt många punkter.

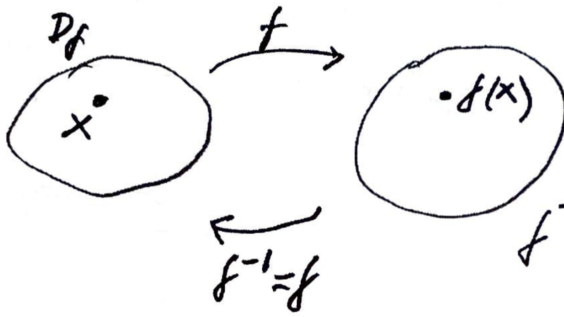
räta linjen: $f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$



För alla $x \in\,]a,b[$ är

$$\underline{f'(x) = (f(b)-f(a))/(b-a)}$$

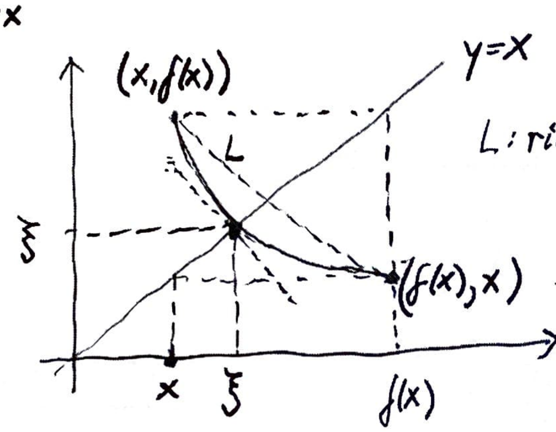
3.21) $f: \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ deriverbar och lika med sin invers. Visa att $f(\xi)=\xi$ för något $\xi>0$. Visa också att antingen är $f'(\xi)=1$ eller är $f(x)=x$ för $x>0$.



$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}=f \Rightarrow f(f(x))=x$

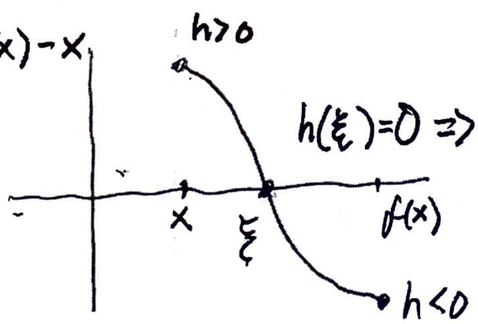
Antag $f(x)>x$



L: riktningskoeff: $\dfrac{x-f(x)}{f(x)-x}=-1$

eftersom $f(f(x))=x$

$h(x)=f(x)-x$,



$h(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=\xi$

Lagen om mellanliggande värden $\Rightarrow \underline{f(\xi)=\xi}$

Om $f(\xi)=\xi \Rightarrow f(f(\xi))=\xi \Rightarrow f'(\underbrace{f(\xi)}_{\xi})f'(\xi)=\cancel{\xi}\ 1 \Rightarrow$

$(f'(\xi))^2=1 \Rightarrow \underline{f'(\xi)=\pm 1}$

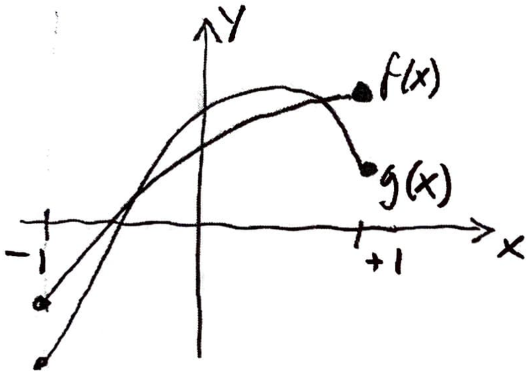
Den enda spegelsymmetriska funktion i $y=x$ med $f'(\xi)=1$ är $\underline{f(x)=x}$

3.17) f, g deriverbara och definierade i $[-1,1]$.

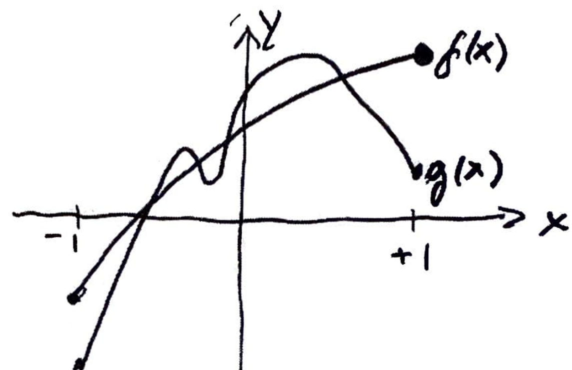
$f(-1) > g(-1)$, $f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$

Låt $h(x) = f(x) - g(x)$. Finns det säkert en punkt ξ sådan att $h'(\xi) = 0$? Hur många nollställen (minst) har $h(x)$?

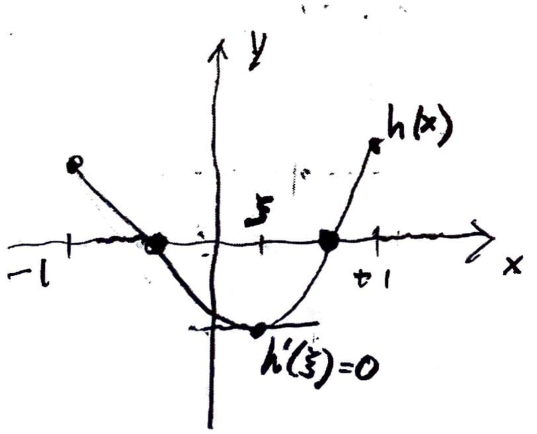
Exempel 1



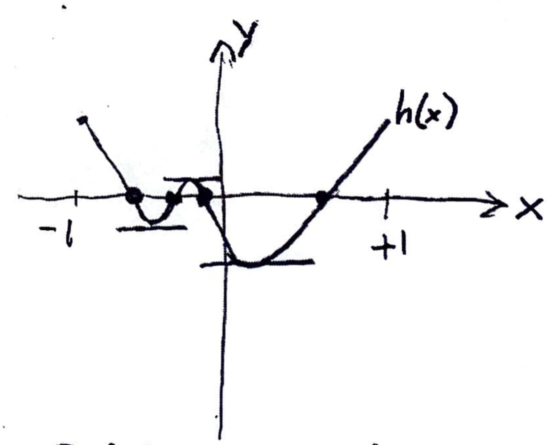
Exempel 2



$h(x) = f(x) - g(x)$



$h(x) = f(x) - g(x)$



$h(x)$ har minst två nollställen. Det finns säkert en punkt ξ sådan att $h'(\xi) = 0$ enligt medelvärdessatsen.