4 Stokastiska variabler

Ex. Två myntkast (H = krona, T = klave)

X = # krona

$X(HH) = 2$, $X(HT) = 1$, $X(TH) = 1$, $X(TT) = 0$.

Def. En stokastisk variabel är en reellvärd funktion definierad på Ω.

Ex. Y = # kast till första kronan

Y kan anta värdena $1, 2, 3, \ldots$

Def. En stokastisk variabel är diskret om den antar uppräkneligt många värden.

X och Y ovan diskreta.

Ex. Z = livslängd batteri

Kan anta alla reella värden ≥ 0.

Ej diskret (kallas kontinuerlig s.v.).

Ex. Lotteri. 100 lotter. En vinst 500 kr, tre vinster 100 kr.

X = vinst

$P(X=100) = P(\{\omega : X(\omega) = 100\}) = 3/100$

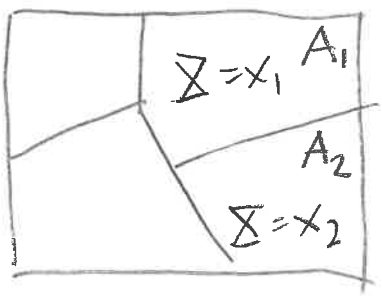
$P(X=500) = 1/100$

$P(X=0) = 96/100$

Def. Sannolikhetsfunktionen $p(x)$ för en diskret s.v. X som antar värdena $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ges av $p(x) = P(X = x)$.

Egenskaper:

- $0 \le p(x_i) \le 1 \quad i = 1, 2, \ldots \quad p(x) = 0$ övriga x.
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$



$A_i = \{u : X(u) = x_i\}$

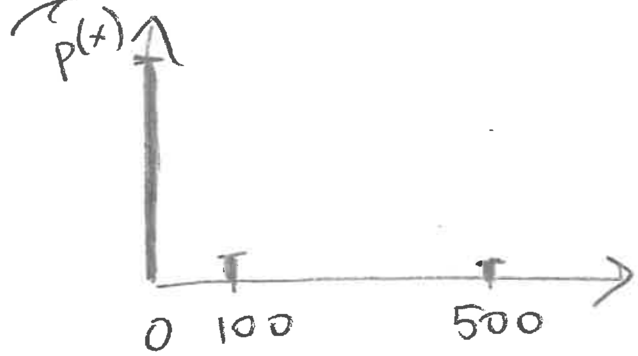
$p(x_i) = P(X = x_i) = P(A_i)$

$\therefore p(x_i) \in [0, 1]$

$$\sum_i p(x_i) = \sum_i P(A_i) = P(\cup A_i) = P(\Omega) = 1.$$

Ex. Lotteriet: $p(0) = 0.96$, $p(100) = 0.03$

$p(500) = 0.01$



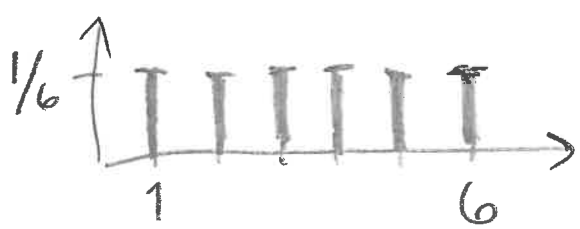
Antag att lotterna kostar 10 kr.

Nettovinst $Y = X - 10$.

Ex. Tärningskast

$X = \#$ prickar $\in \{1, 2, \ldots, 6\}$

$p(i) = 1/6$ alla i



<u>Kontinuerliga s.v.</u>

<u>Ex.</u> X = väntetid vid busshållplats där bussar går var 6:e minut.

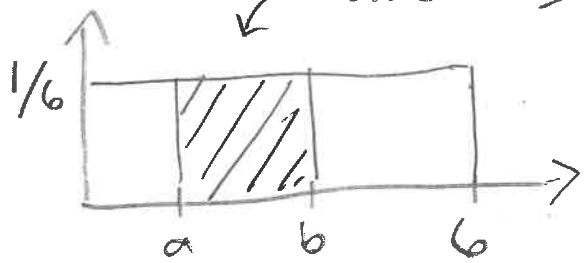
$X \in (0,6)$.

Antag att alla tänkbara ankomsttider har samma sannolikhet.

$P(X \leq 3) = 1/2$, $P(1 \leq X \leq 2) = 1/6$

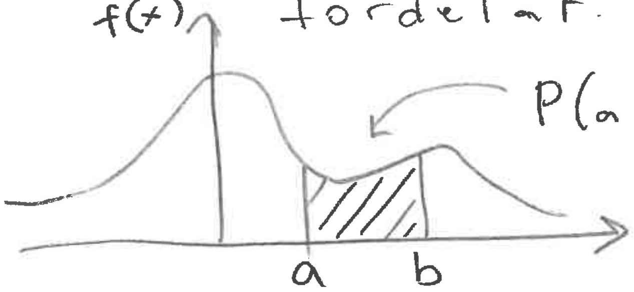
Mer generellt, för $0 \leq a < b \leq 6$:

arean $> P(a \leq X \leq b) = \int_a^b 1/6 \, dx$



Notera: $P(X = x) = 0$.

Allmänt: Behöver inte vara likformigt fördelat.



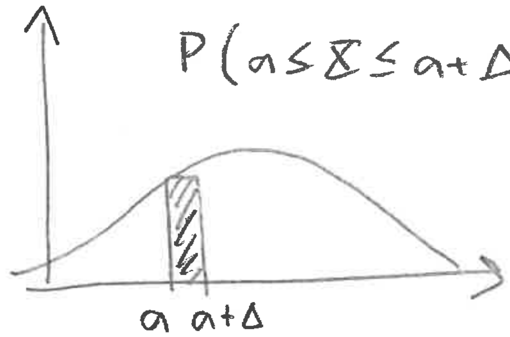
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Def.</u> X är en kontinuerlig s.v. om det existerar en funktion $f(x) \geq 0$ s.a. för alla $a \leq b$: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

f kallas täthetsfunktionen för X.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$
- $a = b$ ger $P(X = b) = \int_b^b f(x)\,dx = 0$

$\Longrightarrow P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$



$$P(a \le X \le a+\Delta) = \int_a^{a+\Delta} f(x)\,dx \approx f(a)\cdot\Delta$$

om f kontinuerlig och Δ litet

Ex. X = livslängd batteri

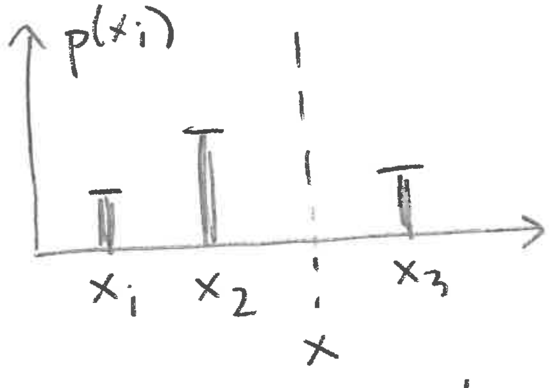
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_a^{\infty} = e^{-a}.$$

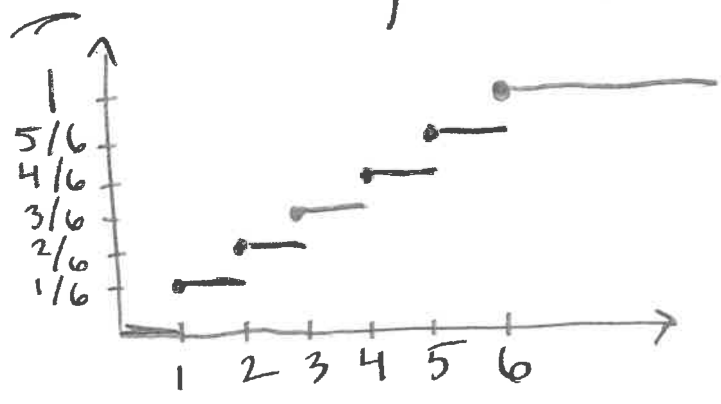
Fördelningsfunktion

Def. Fördelningsfunktionen för en s.v. X ges av $F(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$.

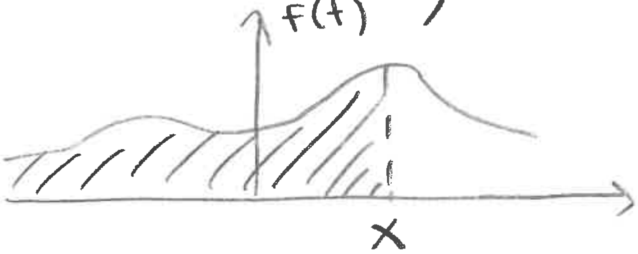
X diskret: $F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$



Ex. Tärningskast. X = # prickar



X kontinuerlig: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

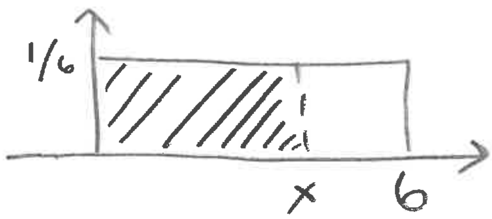


$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$$

$\therefore$ F primitiv funktion till f ($F' = f$).

Ex. Väntetid vid busshållplats

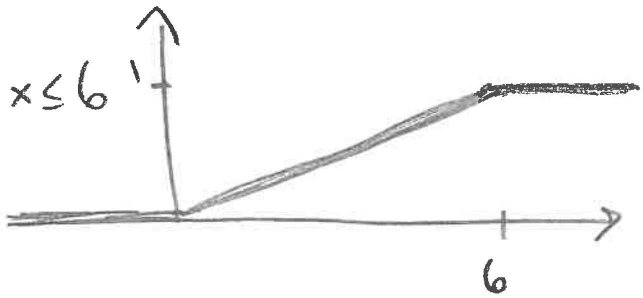
$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



$F(x) = 0 \quad x < 0$

$F(x) = \int_0^x 1/6\,dt = x/6 \quad 0 \le x \le 6$

$F(x) = 1 \quad x > 6$



Egenskaper (både diskret och kont.)

- F växande i x
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- F högerkontinuerlig
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$