Skriftliga teorifrågor

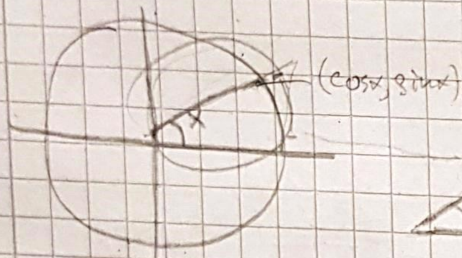
① $a>1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} = 0$

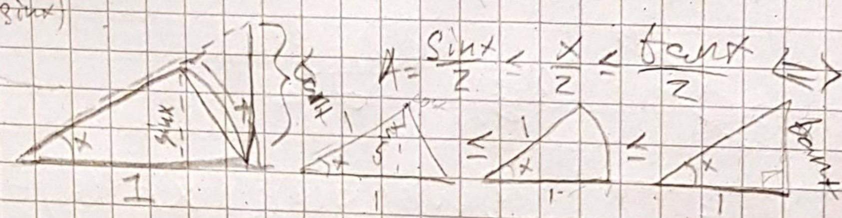
$a = 1+p \quad p>0 \quad n=[x] \quad a^x = (1+p)^x \geq (1+p)^n \geq \binom{n}{2} p^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^x \geq (x-1)(x-1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = [t=\ln x] = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ enligt ovan.

② $\sin x < x < \tan x$ om $0<x<\pi/2$





$\Leftrightarrow \sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x < x$

$\underset{\to 1}{\cos x} < \lim_{x\to 0} \underset{\to 1}{\frac{\sin x}{x}} < \underset{\to 1}{1}$ ∃FKI / instängningslagen.

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = [t = 1/x] = \lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \ln e = 1$

$\underset{\to e}{\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]}} \leq \underset{\to e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \leq \underset{\to e}{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x+1]}}$

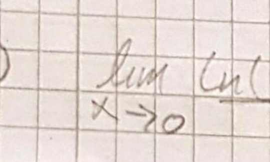
$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = \left[\begin{matrix} y = e^x - 1 \\ x = \ln(y+1) \end{matrix}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = (1)^{-1} = \underline{\underline{1}}$

④ $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \underset{\to \cos(a)}{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)} \lim_{h\to 0} \underset{\to 1}{\frac{\sin(h/2)}{h/2}} = \cos(a)$ $\sin(x)$ är kontinuerlig och

växt .....

$y = \sin x \qquad \arcsin(y) = x$



$\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1})} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = \left[\begin{matrix} k = e^h - 1 \\ h = \ln(1+k) \end{matrix}\right] = e^x \lim_{k\to 0} \frac{k}{\ln(1+k)} = e^x \lim_{k\to 0} \left(\ln(1+k)^{1/k}\right)^{-1}$

$= [t = 1/k] = e^x \lim_{t\to\infty} \Big(\underset{\to 1}{\ln\underset{\to e}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}}\Big)^{-1} = e^x \cdot \frac{1}{1} = e^x$ $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(y)}$ $y = e^x$

$f^{-1} = \ln(y) = x$

$(f^{-1})' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

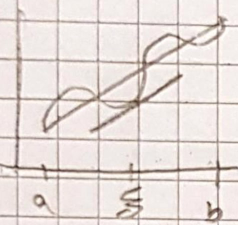
$D(f^{-1}(y_0)) = \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k} = \left[\begin{array}{l} f^{-1}(y_0)=x_0 \\ h = f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0) \end{array} \Leftrightarrow f(h+x_0)-f(x_0)=k \right]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = (f'(x_0))^{-1}$ $\quad D(\arcsin y) = (f'(\arcsin y))^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

⑤ Antag att f är kont. och deriverbar på $]a,b[$

Då $\exists\ \xi \in]a,b[$ s.a. $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Någonstans i intervallet $]a,b[$ finns minst en punkt där grafens tangent är parallell med den linje som går mellan ändpunkterna a, b.



$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bevis: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = 0 \qquad g(b) = \cancel{f(b)-f(a)} - \frac{\cancel{f(b)-f(a)}}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$

Rolles sats: Det finns $\xi \in]a,b[$ s.a. $g'(\xi)=0$ om $f(a)=f(b)$

$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

om $f(x)$ deriverbar och $f'(x)>0$ (monotont växande) Då:

$x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \qquad f(y)-f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0}$

⑥ ⑦ Taylor.

(1 variabel)!

Bevis: $f(x) = f(a) + \int_a^x 1\cdot f'(t)\,dt = f(a) + \Big[\underbrace{(t-x)}_{x \text{ konstant}}f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt =$

så !!

$= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = f(a) + (x-a)f'(a) + \left[-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$

$= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt = P_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$

Två variabler:

$F(t) = f(a+th, b+tk) \qquad F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + F'''(\xi)\frac{t^3}{6}$

$0<\xi<1 \quad t=1 \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(\xi)}{6}$

$F(1) = f(a+h, b+k) \qquad F''(t) = f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2 +$

$F(0) = f(a,b) \qquad + 2f''_{xy}(a+th, b+tk)hk$

$F'(t) = f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$

$F'(0) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$

Om differentierbar:

⑧ $\frac{d}{dt}(f(g(t),h(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(g(t+\Delta t),h(t+\Delta t)) - f(g(t),h(t))}{\Delta t} =$

$= \begin{bmatrix} a = g(t), k = g(t+\Delta t) - g(t) \\ b = h(t), l = h(t+\Delta t) - h(t) \end{bmatrix} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a+k, b+l) - f(a,b)}{\Delta t} =$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'_x(a,b)k + f'_y(a,b)l + (k^2+l^2)^{1/2}\rho(k,l)}{\Delta t} =$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f'_x(g(t),h(t))(g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t} + \frac{f'_y(g(t),h(t))(h(t+\Delta t) - h(t))}{\Delta t} + \frac{(k^2+l^2)^{1/2}}{\Delta t}\rho(k,l) \right)$

$= f'_x(g(t),h(t))g'(t) + f'_y(g(t),h(t))h'(t) + \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{(k^2+l^2)^{1/2}}{\Delta t}}_{\text{Begr?}}\rho(k,l)$

$\lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\left((g(t+\Delta t) - g(t))^2 + (h(t+\Delta t) - h(t))^2\right)^{1/2}}{\Delta t}}_{\text{Begr.}} \underbrace{\rho(k,l)}_{\to 0} = 0$

⑨ Istället för att ta reda på hur en funktion förändras sig i riktning med x- och y-axlarna, så kan det vara intressant att ta reda på hur förändringen förhåller sig till en annan riktning, $\bar{w} = (u, v)$:

$f'_{\bar{w}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu, b+tv) - f(a,b)}{t} = \frac{d}{dt}(f(a+tu, b+tv))\Big|_{t=0} =$

$= f'_x(a+tu, b+tv)u + f'_y(a+tu, b+tv)v\Big|_{t=0} = f'_x(a,b)u + f'_y(a,b)v =$

Den vektor som består av f'_x, f'_y

$= \nabla f \cdot \bar{w}$

gradient: $\nabla f_{(a,b)} = (f'_x(a,b), f'_y(a,b))$ $\quad f'_{\bar{w}} = \nabla f \cdot \bar{w}$ $\quad |\bar{w}| = 1$ normerad

gradienten bestående av de part. deriv. beskriver hur förändringen sker, oavsett riktning.

Men bara om f är <u>differentierbar</u>! Annars är inte kedjeregeln uppfylld! Och riktningsderiv. ~~får undersökas enskilt.~~

Cauchy Schwarz olikhet:

$|\text{grad} f(\bar{a})|$ $\quad f'_v(\bar{a}) \leq |\text{grad} f(\bar{a})| \underbrace{|\bar{w}|}_{=1} = |\text{grad} f(\bar{a})|$

$f'_v(\bar{a}) = \text{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{w} = |\text{grad} f(\bar{a})||\bar{w}| \underbrace{\cos\theta}_{\leq 1}$

$f'_v(\bar{a}) \leq |\text{grad} f(\bar{a})||\bar{w}|$

Alltså är förändringen maximal i gradientens riktning!

(10) Positivt definit: Den associerade kvadratiska formen (AKF), i två variabler, har $Q(h,k)>0$ för $\forall (h,k)\neq(0,0)$ — lok min

Neg def. $Q(h,k)<0$ för $\forall (h,k)\neq 0$ — lok max

Indefinit: $Q(h,k)$ antar både positiva och negativa värden beroende på h,k. — Lok sadelpunkt

Pos. semidef. $Q(h,k)\geq 0$ men inte pos. def.

Neg. semidef. $Q(h,k)\leq 0$ men inte neg. def. för $\forall (h,k)$

Antag att f har kont. derivator runt (a,b), och (a,b) är en stationär punkt ($f'=0$). Om $Q(h,k)$ är pos. def. där är (a,b) en minpunkt.

Bevis: $f(a+h,b+k)=f(a,b)\ (f'=0)+\underbrace{\frac{1}{2}Q(h,k)}_{\text{Dominerar}}+(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$, $\quad \sqrt{h^2+k^2}\leq\varepsilon_0$, $B(h,k)\leq M$

Lemma Om Q pos. def. så $\exists\,\delta>0$ s.a $Q(h,k)\geq\delta(h,k)$

$$Q(h,k)=Q\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}},\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)(h^2+k^2)\geq\delta(h^2+k^2)\qquad \delta=\min_{h^2+k^2=1}Q(h,k)=Q(h_0,k_0)>0$$

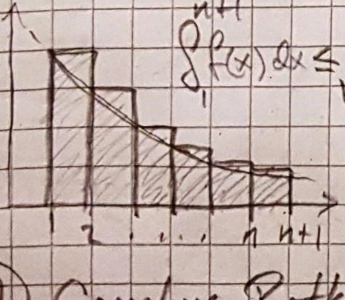
$$f(a+h,b+k)\geq f(a,b)+\frac{\delta}{2}(h^2+k^2)+(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)=f(a,b)+(h^2+k^2)\left(\frac{\delta}{2}+\sqrt{h^2+k^2}\,B(h,k)\right)$$

$$\frac{\delta}{2}+\sqrt{h^2+k^2}\,B(h,k)\geq\frac{\delta}{2}-\sqrt{h^2+k^2}\,M\geq\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{4M}M=\frac{\delta}{4}>0\qquad \varepsilon=\min\left(\varepsilon_0,\frac{\delta}{4M}\right)$$

(11) Cauchys integralkriterium säger att om $f(x)$ är positiv och avtagande när $x\geq 1$, då är $\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ konv $\Leftrightarrow\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ konv.

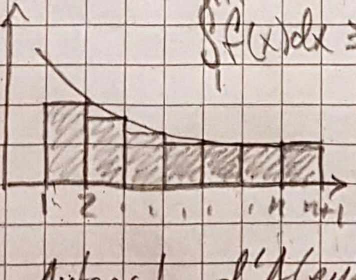
konv ← konv

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{n}f(k)$$



konv → konv

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx\geq\sum_{k=1}^{n}f(k+1)$$



(12) Cauchys Rotkriterium: Antag: $\lim_{k\to\infty}a_k^{1/k}=A$ (Pos. serier)

d'Alemberts kvotkriterium: Antag: $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=A$

De bygger på JFKI $\begin{cases}A<1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ konvergent}\\ A>1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ Divergent}\end{cases}$

$A<1$ $\qquad A<r<1$

GD $\Rightarrow$ Det $\exists\,\omega$ s.a $k>\omega\Rightarrow a_k^{1/k}<r$ $\qquad a_k<r^k=b_k$