MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Matematisk analys A

Skriftliga teorifrågor till kursen
Matematisk analys A
HT 2020

1. Visa att om $a > 1$, så är $\lim_{x \to +\infty} x/a^x = 0$. Visa att $\lim_{x \to +\infty} \ln x/x = 0$ och $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

2. Visa att $\sin x < x < \tan x$ om $0 < x < \pi/2$ samt att $\lim_{x \to 0} \sin x/x = 1$.

3. Visa att $\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)/x = 1$ och $\lim_{x \to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

4. Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.

5. Formulera och bevisa medelvärdessatsen samt satsen om sambandet mellan derivata och monotonitet.

6. Formulera och bevisa Maclaurins formel med antingen integralrestterm eller med Lagranges restterm. Bevisa att den valda resttermen $R_{n+1}(x)$ uppfyller uppskattningen $|R_{n+1}(x)| \leq C|x|^{n+1}$ (C konstant).

7. Formulera och bevisa Taylors formel av andra ordningen för funktioner av två variabler.

8. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typ $t \mapsto f(g(t), h(t))$.

9. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av flera variabler växer snabbast i gradientens riktning (endast fallen 2 och 3 variabler behöver behandlas).

10. Definiera begreppen positivt och negativt definit, indefinit samt positivt och negativt semidefinit kvadratisk form. Formulera och bevisa sats om hur den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen avgör karaktären hos en stationär punkt (endast fallet 2 variabler behöver behandlas).

11. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

12. Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

Muntliga teorifrågor till kursen
Matematisk analys A
HT 2020

Fråga 1.

1. Definiera begreppet gränsvärde av en funktion då $x \to +\infty$.
2. Definiera begreppet gränsvärde av en funktion då $x \to a$.
3. Definiera begreppen supremum och infimum.
4. Definiera begreppet kontinuitet, punktvis och på ett intervall.
5. Definiera begreppen partiell derivata och differentierbarhet för en funktion av flera variabler.
6. Definiera begreppen underintegral, överintegral och integral.

Fråga 2.

1. Formulera och bevisa summa-, produkt- och kvotreglerna för gränsvärden (endast fallet $x \to +\infty$ behöver behandlas).
2. Formulera och bevisa instängningsregeln och sammansättningsregeln för gränsvärden (endast fallet $x \to +\infty$ behöver behandlas).
3. Formulera och bevisa summa-, produkt- och kvotreglerna för derivator samt sats om derivata av en invers.
4. Visa att om en funktion f har lokalt maximum eller minimum i en punkt a, så gäller under vissa förutsättningar att derivatan av f i a är noll. Formulera och bevisa Rolles sats.
5. Formulera och bevisa jämförelsekriterierna I&II för serier.
6. Visa att en absolutkonvergent komplex serie är konvergent. Redogör för begreppet betingad konvergens.

Fråga 3.

1. Visa, utgående från supremumaxiomet, att en monoton funktion har ett gränsvärde (egentligt eller oegentligt) då $x \to +\infty$.
2. Formulera intervallinkapslingssatsen samt formulera och bevisa satsen om mellanliggande värden.
3. Formulera och bevisa Bolzano-Weierstrass sats. Visa också att om en funktion f är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, så antar f sitt största och sitt minsta värde där.
4. Visa att en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall är integrerbar.
5. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats (valfritt för underintegral, överintegral eller integral).
6. Formulera och bevisa analysens huvudsats (valfritt för underintegral, överintegral eller integral) samt insättningsformeln.

/Martin Tamm/