Läsanvisningar för MATEMATIK I, ANALYS

Läsanvisningarna är tänkta i första hand för dig som läser kursen matematik I på distans, och de ska **vägleda** dig på din resa genom analysen.

Stoffet är i stort sett portionerat på samma sätt som föreläsningarna för campusstudenter. Till varje dag finns en kort introduktion om **dagens innehåll**, följd av en lista med de relevanta avsnitten i läroboken. Till dessa finns ett förtydligande om vilka delar som är speciellt viktiga, eller vilka som kan hoppas över.

Att lära sig matematik fungerar bäst som "learning by doing". Därför finns en hel del rekommenderade **övningsuppgifter**. De är indelade i två grupper. Först finns *inlärningsuppgifter* som ska hjälpa dig att bekanta dig med nya begrepp och utgörs av mer eller mindre direkt användning av teorin. Några av dessa uppgifter är rätt enkla, andra lite mer krävande. Därefter följer *problemlösningsuppgifter* som oftast kräver lite mer eftertanke och förutsätter att du redan har en viss erfarenhet av uppgifter som är mer standardbetonade. Dessa uppgifter ligger närmare problemlösningstentan i slutet av kursen.

Till vissa dagar finns även **ytterligare kommentarer** som antingen är baserade på våra erfarenheter av vanliga fel, förtydligar viss teori eller visar på alternativa lösningar till vissa uppgifter. Dessa ska du bearbeta extra noga, för de saknar lika tydliga motsvarigheter i boken.

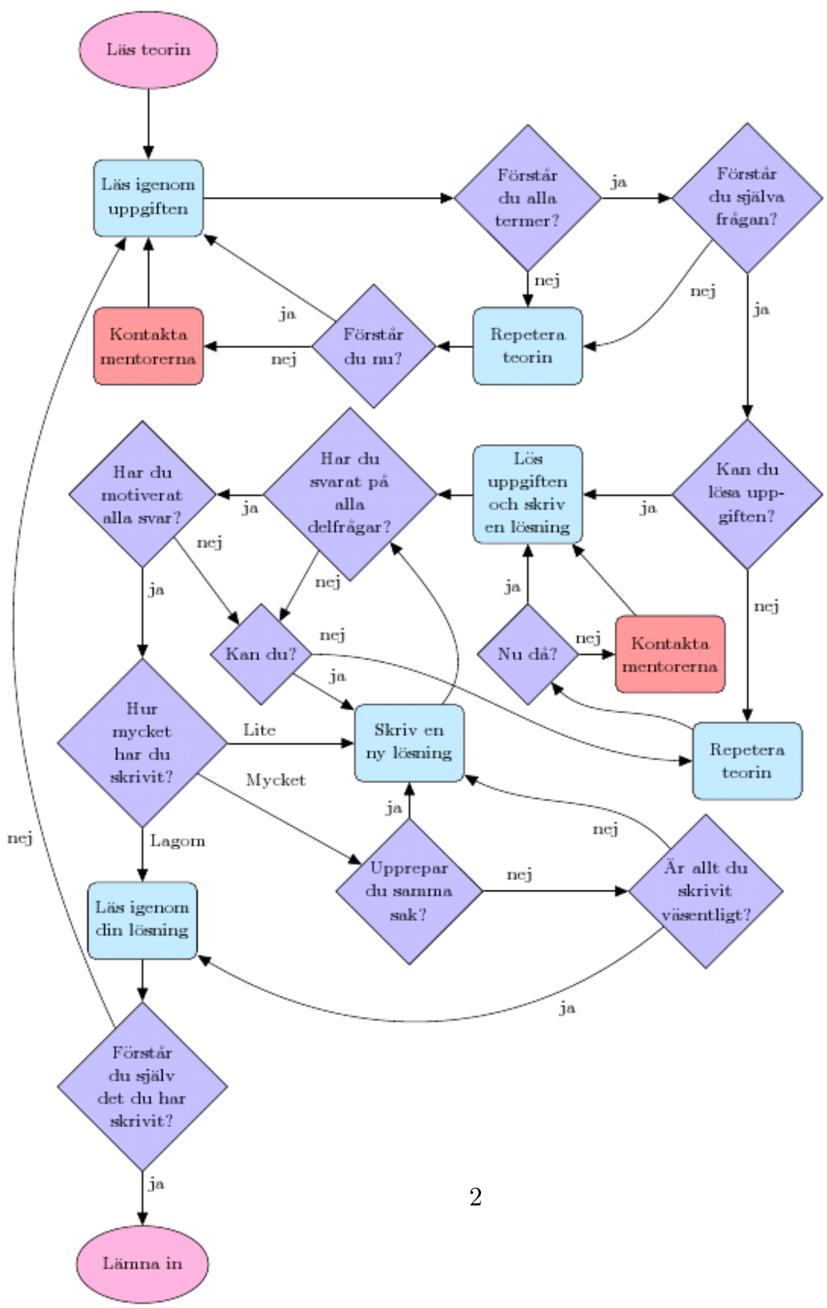
Kursens fokus ligger på matematiska metoder för problemlösning. För att med säkerhet kunna använda metoderna krävs förståelse för den bakomliggande teorin! Vi rekommenderar därför att du alltid åtminstone ögnar igenom bevisen, även när läsanvisningarna säger att "beviset kan hoppas över".

Vi hoppas att läsanvisningarna hjälper dig i dina studier. Om du har kommentarer skicka dem gärna till *luger@math.su.se*.

Lite allmänt om att arbeta med **matematiska texter**:
Att jobba med text om matematik kan i början uppfattas som svårare än att läsa text om ett annat ämne. Anledningen är att varje ord kan vara av stor betydelse, och att matematiker oftast tycker om att uttrycka sig så kortfattat, dvs så enkelt, som möljigt.
Detta gäller framför allt *definitioner* och *satser*. När man möter en ny definition eller en ny sats, så är det viktigt att ta sig tid! Läs igenom två, tre gånger. Fråga dig själv vad som menas med det! Oftast följs en ny definition av ett eller flera exempel. Då är det bra om du efter att ha studerat exemplet stannar och går tillbaka till den allmänna texten för att koppla exemplet till definitionen. Satser förstår man bäst genom att använda dem. Du hittar många exempel i boken som belyser hur teorin kan tillämpas.
Efter att ha jobbat med boken kommer den viktigaste delen: Du måste **själv** lösa uppgifter! Det första steget då är alltid att förstå vad det är som frågan går ut på och att kolla om du vet vad alla begrepp som används betyder. Om frågan är lite mer omfattande kan det vara ett bra tips att börja med att formulera själva frågan med egna ord. Det låter trivialt, men kan hjälpa väldigt mycket!

OBS1! Läs teorin INNAN du börjar med uppgifterna!
OBS2! Det räcker ej att få rätt svar! Har man gjort flera försök och fått rätt svar till sist ska man tänka efter <u>varför</u> det har fungerat just nu och inte i de tidigare försöken!
OBS3! I samband med uppgifterna gäller: ”Men det är vägen, som är mödan värd.” Dvs den största nyttan har du av själva processen att jobba med uppgifterna, inte av att få ett rätt svar på pappret! Detta ska ses som en varning för att jobba alltför mycket med färdiga lösningar!!!

Den följande grafiken härstammer egentligen från en annan kurs, men om du ersätter orden ”kontakta mentorer” med ”ställ frågan i handledningsforumet” ger den en rätt så bra bild av hur man helst ska jobba med uppgifter! ☺



Dag 1 och 2

Dessa dagar ägnas åt repetition och i viss mån fördjupning av trigonometri.

Repetera kongruens- och likformighetsfallen (t.ex. från skolböckerna).

Avsnitt 1.9.1

Definition av radianer. Viktigt att kunna uttrycka vinklar i radianer.

Avsnitt 1.9.2

Definition av sinus och cosinus. Härledning av sinus och cosinus för vinklarna 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$. Grafen för sinus och cosinus. Periodicitet, jämn och udda (det sistnämnda kan eventuellt läsas i samband med genomgång av avsnitt 1.8, dag 4). Trigonometriska formler, trigonometriska ekvationer. Hjälpvinkel. Sinussatsen och cosinussatsen (utan bevis).

Avsnitt 1.9.3

Definition av tangens och cotangens. Grafen för tangens och cotangens. Trigonometriska formler, sambandet mellan sinus, cosinus, tangens och cotangens (se exempel 56 och 57).

Appendix B1

Lite om mängder, läses vid behov.

Kommentarer

Bevis av formel (55) kan hoppas över. Det använder sig av skalärprodukten som gås igenom senare i algebrakursen.
Man måste kunna vissa trigonometriska formler (formelsamlingar får inte användas på tentorna). T.ex. behöver man kunna formlerna (55)-(58) (men det räcker att kunna en av dem, de övriga kan härledas ur den). Observera också att formlerna (59)-(62) följer enkelt ur (55)-(58), t.ex. är $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$. Formlerna (63)-(65) kan hoppas över (i varje fall behöver de inte memoreras). Även formlerna (49)-(54) kan fås ur (55)-(58). T.ex. är $\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2) \cos x - \cos(\pi/2) \sin x = \cos x$ eftersom $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.
Man bör också lägga på minnet att $\sin x$ är positiv i 1:a kvadranten, dvs. för x mellan 0 och $\pi/2$ och i 2:a kvadranten, dvs. för x mellan $\pi/2$ och π, medan $\cos x$ är positiv i 1:a kvadranten (för x mellan 0 och $\pi/2$) och i 4:e kvadranten, dvs. för x mellan $3\pi/2$ och 2π. Eftersom $\tan x = \sin x/ \cos x$ och $\cot x = \cos x/ \sin x$, följer det ur detta att $\tan x$ och $\cot x$ är positiva i 1:a och 3:e kvadranten.
Observera att trigonometriska ekvationer med fördel kan övas med hjälp av WebWork. Både den första problemsamlingen och övningstentorna till etentan Elementära funktioner innehåller sådana ekvationer.
Detta stycke bör läsas efter genomgången av komplexa tal i algebrakursen.
Man kan få fram formlerna (56) och (57) med hjälp av komplexa exponentialfunktioner. Det gäller att $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. Definitionerna och enkla beräkningar ger $\mathrm{VL} = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$ och $\mathrm{HL} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$. Eftersom $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$, måste realdelarna och imaginärdelarna vara lika. Så $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ och $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Observera dock att det här inte är något bevis för formlerna eftersom dessa formler har använts (i algebrakursen) just för att visa att $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. Däremot är det ett bra sätt att få fram dem om man är osäker.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: WW PS1: 1-9, 13-15; ÖPB: 1.93-1.95, 1.107 (vid behov även 1.99, 1.100, 1.102, 1.106bef, 1.109)
Problemlösningsuppgifter: WW PS1: 12, 16; ÖPB: 1.104, 1.111

Dag 3

Här repeteras och i viss mån fördjupas kunskaper om exponentialfunktioner och logaritmer.

Avsnitt 1.6.3

Definition av exponentialfunktion. Formlerna (29), (31) är viktiga (hoppa dock över härledningen av (29)). Grafen av exponentialfunktionen.

Avsnitt 1.7.1

Definition av logaritmen. Räknelagarna, inklusive formel (39) (formeln för basbyte). Bevisen kan eventuellt hoppas över. Exemplen är viktiga.

Avsnitt 1.7.2

Definition av logaritmfunktionen. Grafen. Formlerna (40), (41) är viktiga.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: WW PS1: 18-20; ÖPB: 1.61, 1.66, 1.67, 1.69 (vid behov även 1,64, 1.65, 1.70-1.72)
Problemlösningsuppgifter: WW PS1: 21, 22; ÖPB: 1.68

Dag 4

Här införs en del nya begrepp. Det som är svårast (och mycket viktigt) är begreppet invers funktion. Därefter introduceras de mycket viktiga inversa trigonometriska funktionerna.

Avsnitt 1.8

Hela avsnittet läses. Invers funktion är ett nytt och mycket viktigt begrepp. Det är viktigt att tillgodogöra sig begreppet och att studera exemplen i delavsintt 1.8.1.
Begreppen i delavsnitten 1.8.2 och 1.8.3 (sammansättning av funktioner, växande, strängt växande, avtagande, strängt avtagande funktion, jämn funktion, udda funktion) är också viktiga men borde vara enklare att tillgodogöra sig. Observera skillnaden mellan växande och strängt växande samt avtagande och strängt avtagande funktion.

Avsnitt 1.10

Hela avsnittet läses. Arcusfunktionerna (dvs. de inversa trigonometriska funktionerna) är mycket viktiga i matematiken och kommer att spela en framträdande roll i kursen. Arcusfunktionerna kallas även ibland för de cyklometriska funktionerna.

Exempel (introduktion till en WebWorkuppgift)

Beräkna $\operatorname{arccot}\frac{5\sqrt{3}}{11} + \arcsin\frac{1}{7}$.

Sätt $u = \operatorname{arccot}\frac{5\sqrt{3}}{11}$, $v = \arcsin\frac{1}{7}$. Vi beräknar $\sin(u+v)$ först.
$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u \sin v$.
$\sin u = \sin\left(\operatorname{arccot}\frac{5\sqrt{3}}{11}\right)$. Vi vet att $\cot u = \cot\left(\operatorname{arccot}\frac{5\sqrt{3}}{11}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$. Med hjälp av trigonometriska ettan och sambandet $\cot u = \cos u/\sin u$ kan vi nu beräkna $\sin u$ och $\cos u$. Alternativt ritar vi en rätvinklig triangel med katetena $5\sqrt{3}$ och 11, dr 11 är lngden av den till vinkeln u motstående kateten. Hypotenusans längd r $\sqrt{196} = 14$. Så $\sin u = \frac{11}{14}$ och $\cos u = \frac{5\sqrt{3}}{14}$. Vi behöver också beräkna $\sin v$ och $\cos v$. Eftersom $\sin v = \sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$, är $\sin v = \frac{1}{7}$. $\cos v$ beräknas antingen med hjälp av trigonometriska ettan eller ur en rätvinklig triangel med hypotenusan 7 och kateterna 1 och $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Vi får $\cos v = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.
Allt detta ger $\sin(u+v) = \frac{11}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{11}\cdot\frac{1}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Eftersom både u och v ligger i första kvadranten, ligger $u+v$ antingen i första eller i andra kvadranten, så $u+v = \frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$. Eftersom $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ och $\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$, är $v = \arcsin\frac{1}{7} < \frac{\pi}{6}$. Så $u + v < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Alltså är $u + v = \frac{\pi}{3}$.
Anmärkning. Alternativt kan man beräkna $\tan(u+v)$ i stället för $\sin(u+v)$. Det blir till och med lite enklare: man får $\tan(u+v) = \sqrt{3}$ (beräkna detta som en övning), så man ser direkt att $u + v = \frac{\pi}{3}$ eftersom tangens är negativ i andra kvadranten.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: PS1: 10, 11, 24, 25; ÖPB: 1.84, 1.85, 1.87abde, 1.89bc, 1.90ab, 1.92 (vid behov även 1.122-1.124). OBS: Övn. 1.85 kräver inga beräkningar och i övn. 1.90ab räcker det att skissa funktionen.
Problemlösningsuppgifter: PS1: 23; ÖPB: 1.126, 1.128, (eventuellt även 1.91, 1.151b)

Dag 5

Som introduktion till gränsvärdesbegrepp handlar dag 5 om **gränsvärden för talföljder***: definition, räkneregler, talet e, standardgränsvärden, och serier.*

I detta avsnitt läses utvalda delar av PB, av pedagogiska skäl delvis i omvänd ordning!

1. **Vad är en följd?** Börja med att bekanta dig med begreppet *följd*, eller egentligen *talföljd*. Studera exempel 8 i kapitel 1.2 samt exempel 64 i kapitel 1.12. Där kan du se hur en talföljd beskrivs.

2. **Definition av gränsvärde av en talföljd.** Även om man kanske har en intuitiv förståelse för vad som rimligtvis menas med gränsvärde av en talföljd, så behövs en riktig definition. Se videoföreläsningen för dag 5 för definitionen samt en motivering.

3. **Hur beräknar man gränsvärden?** Oftast använder man inte definitionen direkt, utan använder räkneregler samt redan kända gränsvärden. Exempel på räkneregler är:

   Om $a_n \to A$ och $b_n \to B$ så gäller:

   - $a_n + b_n \to A + B$
   - $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$
   - $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$, om $B \neq 0$.

   Fler regler kommer dag 6.

   Med hjälp av definitionen kan man lätt övertyga sig om att till exempel föjlden $a_n = \frac{1}{n}$ går mot 0. Tillsammans med räknereglerna kan man redan nu räkna ut några mer komplicerade gränsvärden. Ofta förekommande knep är att förkorta med den dominerande termen eller att förlänga med konjugatuttrycket:
   Exempel: Bestäm gränsvärdet av följden $a_n = \frac{2n^4+3n^2}{3n^4-1}$.

   $$a_n = \frac{2n^4 + 3n^2}{3n^4 - 1} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^4}} \to \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3},$$

   alltså är $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

   Exempel: Bestäm gränsvärdet av följden $b_n = \sqrt{n^2+5n} - n$

   $$b_n = \sqrt{n^2+5n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+5n} - n)(\sqrt{n^2+5n} + n)}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \frac{n^2 + 5n - n^2}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} \to \frac{5}{2}.$$

   alltså är $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

   För att kunna beräkna gränsvärden av ännu fler föjlder behövs ett större antal “kända” gränsvärden.

Avsnitt 2.3 (till och med exempel 15).
Ett viktigt gränsvärde: talet e introduceras. Bevis för sats 6 och 7 hoppas över (binomialsatsen kommer senare i algebradelen av matematik I).

Avsnitt 2.4

En lista med ytterligare viktiga gränsvärden finns i kapitel 2.4. Just nu är det bara formel (30)-(34) som är relevanta. Bevisen kan hoppas över.

Avsnitt 2.5.4.

Det handlar om serier, dvs "oändliga summor". Observera att det matematiska begreppet *serie* inte betyder precis samma sak som i vardagsspråket. Serier kommer att användas senare i kursen.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: 2.30, 2.31ac, 2.11, 2.32–34 (OBS: I 2.31 beräknas inget gränsvärde, utan det handlar om att bekanta sig med följder)
Problemlösningsuppgift: 2.48

Dag 6

Nu handlar det mer allmänt om ***gränsvärden för funktioner****, definitioner, räkneregler och standardgränsvärden. Det finns flera olika fall, beroende på vad x går mot.*

Avsnitt 2.1

Definitioner och räkneregler samt många exempel. Bevisen av räknereglerna kan hoppas över, de ingår inte i kursen.

Avsnitt 2.3 (från och med stycket efter exempel 15) och 2.4

Mer om talet e och standardgränsvärden.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: 2.3-5, 2.8bdfgil, 2.9, 2.14ae, 2.16bc, 2.22cd
Problemlösningsuppgifter: 2.6, 2.37, 2.38

Anmärkning: När man beräknar gränsvärden kan man använda sig av två olika sätt att skriva. Låt oss titta på ett enkelt exempel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

eller

$$\frac{2x^2+x}{x^2-3} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x^2}} \to \frac{2+0}{1-0} = 2 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Du kan välja fritt hur du vill göra, men blanda inte ihop de två skrivsätten!
OBS:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-3} \neq \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x^2}} \quad \text{och} \quad \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x^2}} \neq \frac{2+0}{1-0},$$

eftersom funktionen (i allmänhet) INTE är lika med gränsvärdet.

Man ska inte heller skriva $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-3} \to \frac{2+0}{1-0}$.

Dag 7

Med hjälp av begreppet gränsvärde definieras en väldigt viktig egenskap hos funktioner: kontinuitet. Dag 7 handlar huvudsakligen om kontinuerliga funktioner och deras egenskaper.

Avsnitt 2.2

Först definieras vad som menas med att en funktion är kontinuerlig och flera exempel tas upp. Sedan anges (utan bevis) två viktiga egenskaper hos kontinuerliga funktioner som kommer att användas flera gånger framöver.

Avsnitt 2.5.1

Som en tillämpning av gränsvärden diskuteras asymptoter. Dessa behövs senare när funktionsgrafer ska ritas.

Avsnitt 2.5.2 och 2.5.3

Dessa två tillämpningar av gränsvärden rekommenderas att läsa, men de ingår egentligen inte i kursen.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: 2.17b, 2.19-21, 2.26, 2.28
Problemlösningsuppgifter: 2.18, 2.29

Dag 8

Begreppet **derivata** *introduceras och motiveras samt räkneregler för derivator diskuteras.*

Avsnitt 3.1 och 3.2.

Här motiveras det från gymnasiet välkända begreppet derivata och sedan följer den riktiga definitionen. Behandling av exempel 4 kräver kunskap av binomialsatsen, men ett alternativt sätt för härledningen kan vara att använda formeln $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
OBS: Härledningen av derivatan för t.ex. polynom bygger endast på derivatans definition, dvs du får nu bevis för redan bekanta formler.

Avsnitt 3.3 fram till exempel 13.

Nu kommer mer teori kring derivata och deriverbara funktioner. Sats 1 samt efterföljande exempel är grundläggande! Det är mycket viktigt att kunna använda kedjeregeln (sats 3), beviset kan hoppas över.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: WW PS2: 1-5, ÖPB: 3.1be, 3.6
Problemlösningsuppgifter: ÖPB: 3.8, 3.29, 3.40, 3.43.

Dag 9

Nu kommer flera räkneregler för derivatan samt en första diskussion om sambandet mellan derivata och lokala egenskaper hos själva funktionen.

Avsnitt 3.3 från och med exempel 14.
Kedjeregeln anänds här för implicit derivering och sedan följer en formel för derivatan av invers funktion. Beviset kan hoppas över, men anmärkningen efter beviset kan med fördel användas för att komma ihåg själva regeln.

Avsnitt 3.4.
Derivator till de elementära funktionerna härleds. Härledningarna är så klart viktiga som byggstenar för teorin, men för att kunna lösa problem måste du kunna alla dessa derivator utantill! Sats 7 kommer vara viktig senare i samband med integration!

Avsnitt 3.5 fram till sats 14.
Framöver kommer du att se hur man kan dra många slutsatser om själva funktionens beteende med hjälp av dess derivata. Här finns ett första exempel på det.

Övningar:
Inlärningsuppgifter: WW PS2: 6-15, ÖPB: 3.16, 3.17, 3.19, 3.21 (vid behov även 3.10def, 3.11hi, 3.13 b)
Problemlösningsuppgifter: 3.23, 3.38, 3.44, 3.45.

Dag 10

Fortsättning på diskussionen av egenskaper hos deriverbara funktioner.

Avsnitt 3.5 från och med sats 14.
Medelvärdessatsen (sats 14) är en av de viktigaste satserna i hela kursen, eftersom mycket som kommer att gås igenom bygger på just medelvärdessatsen. Försök förstå beviset för satsen (lägg särskilt märke till figurerna på sidan 211 och 212), men du behöver inte kunna det utantill. Studera noggrant exempel 20 och 21. Sats 15 kommer att vara viktig senare i samband med integration, sats 16 kommer att vara viktig och mycket användbar när man ritar grafer till funktioner. Sats 17 kan hoppas över om du inte är så intresserad av teorin.

Avsnitt 3.6
Här behandlas kortfattat högre derivator. Sats 18 samt beviset kan läses efter binomialsatsens genomgång i algebradelen.

Avsnitt 3.7
Det förklaras hur man deriverar funktioner som är komplexvärda. Exempel 27 kommer att vara viktigt i samband med lösning av differentialekvationer senare i kursen.

Övningar:
Inlärningsuppgifter: WW PS2: 16- 20, ÖPB: 3.27a, 3.28, 3.31, 3.32 (vid behov 3.37)
Problemlösningsuppgifter: 3.26, 3.43

Dag 11

Dagen handlar om två grundläggande integrationstekniker: partiell integration och variabelsubstitution.

Avsnitt 5.1

Man behöver känna till de ”elementära” primitiva funktionerna, dock behöver inte formel (12) memoreras. Formlerna för partiell integration och variabelsubstitution (formel (17) respektive (19)) är mycket viktiga. Enkla exempel på partialintegration är ex. 3-5 och på variabelsubstitution ex. 7, 8. Ex. 6 är viktigt - där används ett speciellt knep som är svårt att komma på själv. Ex. 9 är förberedelse till nästa avsnitt.

Kommentarer

Eftersom $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, får vi följande variant av formel (8) som ibland kan vara användbar: $\int (1 + \tan^2 x)\, dx = \tan x + C$. På liknande sätt får vi en variant av formel (9): $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = -\cot x + C$.
Formlerna (13) och (14) är egentligen överflödiga, de följer omedelbart genom variabelsubstitution $f(x) = t$.
Vid variabelsubstitution använder man oftast skrivsättet

$$\int f(g(t))g'(t)\, dt = [x = g(t),\ dx = g'(t)\, dt] = \int f(x)\, dx = F(x) + C = F(g(t)) + C,$$

där F är en primitiv funktion till f. T.ex. är (med omvända roller mellan x och t)

$$\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = [x^2 + 1 = t,\ 2x\, dx = dt,\ x\, dx = \frac{1}{2}\, dt] = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Skrivsättet $dx = g'(t)\, dt$ betyder egentligen att uttrycket $g'(t)\, dt$ under integraltecknet ersätts med dx. Om man så föredrar, kan man använda det mer formella skrivsättet $dx/dt = g'(t)$.
Ibland behöver man använda både partialintegration och variabelsubstitution. Ett enkelt exempel på detta:

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = [x^2 = t,\ 2x\, dx = dt] = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int te^t\, dt.$$

Nu kan man partialintegrera som i ex. 3 i boken. (Svar: $\frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C$.)
OBS1! Man kan alltid verifiera om man har integrerat rätt genom att derivera och se om man får tillbaka integranden. T.ex. är derivatan av $\frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C$ lika med $x^3 e^{x^2}$ (kolla detta).

OBS2! Begrunda övning 5.6 och svaret till den i ÖPB. Övningen handlar om ett vanligt (**och mycket grovt!**) integrationsfel.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: ÖPB: 5.2f, 5.6, 5.9bd, 5.10g, 5.16bc, 5.17a-c
Problemlösningsuppgifter: ÖPB: 5.16ad, 5.17d, 5.20

Dag 12

Dagen ägnas åt integration av rationella och trigonometriska funktioner.

Avsnitt 5.2

Första delen av avsnittet (fram till 1:a stycket på sid. 274) handlar om partialbråksuppdelning. Detta skall vara bekant från algebrakursen men bör repeteras vid behov.
Efter att ha partialbråksuppdelat en rationell funktion behöver man kunna integrera funktioner av typ 1–4 på sid. 274. De första två fallen är enkla. Fall 3 är svårare och löses som i ex. 9 (dag 11) och ex. 15. Fall 4 (inklusive ex. 16) kan hoppas över. Ex. 17 läses.

Avsnitt 5.4

Hela avsnittet läses.

Kommentarer

Substitutionen $t = \tan\frac{x}{2}$ används bara i undantagsfall om inget annat fungerar. Ofta (men inte alltid) kan man undvika den. I ex. 23 används den för att integrera $1/\sin x$. Här är en alternativ lösning:

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = [\cos x = t,\ -\sin x\,dx = dt] = \int \frac{dt}{t^2-1}.$$

Nu kan man partialbråksutveckla. Svaret blir $\frac{1}{2}(\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) + C$. Visa gärna med trigonometriska formler att detta är lika med $\ln|\tan\frac{x}{2}| + C$ (som är bokens svar).
Ex. 26 kan lösas på ett alternativt sätt med hjälp av en omskrivning. Man vet från algebrakursen att $\cos\theta = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$ och $\sin\theta = (e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i$ (Eulers formler för komplexa exponentialfunktioner). Så

$$\cos ax \sin bx = \underbrace{\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}}_{\cos ax}\underbrace{\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}}_{\sin bx} = \frac{e^{i(a+b)x}-e^{i(a-b)x}+e^{-i(a-b)x}-e^{-i(a+b)x}}{4i}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{i(a+b)x}-e^{-i(a+b)x}}{2i} - \frac{1}{2}\frac{e^{i(a-b)x}-e^{-i(a-b)x}}{2i} = \frac{1}{2}\sin(a+b)x - \frac{1}{2}\sin(a-b)x.$$

Så

$$\int \cos ax \sin bx\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(a+b)x - \sin(a-b)x)\,dx,$$

och högerledet är enkelt att integrera. Svaret kommer att till synes skilja sig från bokens men även här kan man med trigonometriska formler visa att båda svaren är lika.
En alternativ lösning till ex. 28: Vi integrerar partiellt två gånger så att e^x integreras båda gångerna.

$$F(x) = \int e^x \cos x\,dx = e^x\cos x - \int(-e^x\sin x)\,dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) - F(x) + C'$$

(på slutet behöver vi lägga till en integrationskonstant). Vi får $2F(x) = e^x(\cos x+\sin x) + C'$ och slutligen $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$, där vi ersatte $C'/2$ med en ny konstant C.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: WW PS3: 1-11; ÖPB: 5.23ab, 5.27b, 5.40b, 5.51
Problemlösningsuppgifter: WW PS3: 12; ÖPB: 5.23c, 5.38 (eventuellt även 5.39)

Dag 13

Dagen handlar om introduktion till begreppet integral över ett slutet och begränsat intervall.

Avsnitt 6.1

Här definieras Riemannintegralen (som är den "vanliga" integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ och som ibland även kallas den bestämda integralen). Man inför först begreppen trappfunktion och dess integral och därefter begreppet Riemannintegralen för en **begränsad** funktion (definition 3). I slutet av avsnittet klargörs skillnaden mellan en primitiv funktion (som ibland även kallas obestämd integral) och en Riemannintegral.

Avsnitt 6.2

Sats 3 är mycket viktig, bevis hoppas dock över. Begreppet Riemannsumma och sats 4 (utom bevis) bör man känna till. Exempel 1 kan eventuellt hoppas över.

Avsnitt 6.3

Hela avsnittet fram till (och inklusive) sats 6 läses. Bevisen utgår.

Kommentarer

Intuitivt betyder integrerbarhet av en funktion f att man kan hitta 2 trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ i $[a, b]$ och den area som stängs in mellan Φ och Ψ blir så liten som man vill. Mer exakt: för varje givet (litet) tal kan man finna Φ och Ψ som ovan så att arean mellan dem blir mindre än det givna talet.
Observera att Riemannintegralen har definierats för begränsade funktioner på begränsade intervall. En utvidgning av begreppet integral, som omfattar både obegränsade intervall och obegränsade funktioner, kommer i avsnitt 6.5.
Som framgår av sats 3 är kontinuerliga funktioner integrerbara över $[a, b]$. Många, dock inte alla, diskontinuerliga (och begränsade) funktioner är integrerbara.
En (icke-obligatorisk) uppgift för den som är teoriintresserad: Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{om } x \textit{ är rationellt, } x \in [0,1], \\ 1 & \textit{om } x \textit{ är irrationellt, } x \in [0,1] \end{cases}$$

inte är integrerbar över $[0, 1]$.
Det är viktigt att förstå att om $f \geq 0$ och f är integrerbar, så är $\int_a^b f(x)\,dx$ den area som begränsas av x-axeln, grafen för $y = f(x)$ och linjerna $x = a$, $x = b$. Om $f \leq 0$, så är $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ och integralens värde svarar mot minus arean. Om f byter tecken, så är $\int_a^b f(x)\,dx$ "area med tecken" - den area som finns ovan x-axeln kommer med plustecken och den som finns under kommer med minustecken.
Riemannsumma är ett sätt att approximera integralen med summan av areor för ett antal rektanglar, se figuren på sid. 300. För att approximationen skall bli bra måste rektanglarna vara tillräckligt smala.
Lägg märke till formel (13) som **definierar** $\int_a^b f(x)\,dx$ för $a \geq b$. Med den definitionen gäller formel (12) oavsett hur a, b, c är placerade i förhållande till varandra.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: WW PS3: 13-18; ÖPB: 6.1be (uppgiften kan eventuellt hoppas över)
Problemlösningsuppgifter: WW PS3: 19, 20; ÖPB: 6.2, 6.3

Dag 14

Dagen handlar om beräkning av integraler och om generaliserade integraler

Avsnitt 6.3

Resten av avsnittet med undantag för sats 8 läses. Bevis för sats 7 utgår.

Avsnitt 6.4

Hela avsnittet läses. Det är även lämpligt att läsa bevis för sats 9 och 10. Observera hur integralkalkylens medelvärdessats används i beviset för sats 9.

Avsnitt 6.5

Förutom definitioner och en sats innehåller avsnittet ett flertal exempel. Det är viktigt att tillgodogöra sig exemplen (exempel 21 kan dock hoppas över). Resultat av exempel 12 och 14 är värda att lägga på minnet eller snabbt kunna härleda: $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ konvergerar om och endast om $\alpha > 1$, $\int_0^1 1/x^\alpha\,dx$ konvergerar om och endast om $\alpha < 1$.

Kommentarer

En mycket viktig följd av sats 9 är att **för varje kontinuerlig funktion existerar en primitiv funktion**. T.ex. är $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ en primitiv funktion till e^{x^2}. Man kan dock visa (med betydligt mer avancerade metoder än de som ingår i kursen) att det inte går att uttrycka $\int e^{x^2}\,dx$ med hjälp av ändligt många summor, produkter, sammansättningar osv. av elementära funktioner (dvs. det går inte att uttrycka $\int e^{x^2}\,dx$ så som vi helst skulle vilja).

Följande exempel kompletterar exemplen 4 och 5 i boken:

Vi vill derivera $\displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$. Sätt $S(x) = \displaystyle\int_a^x e^{t^2}\,dt$ (här kan man välja vilket a som helst, t.ex. $a = 0$).

Vi får $D\displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt = D\int_x^a e^{t^2}\,dt + D\int_a^{x^2} e^{t^2}\,dt = -D\int_a^x e^{t^2}\,dt + D\int_a^{x^2} e^{t^2}\,dt = -D(S(x)) + D(S(x^2)) = -S'(x) + S'(x^2)\cdot D(x^2) = -e^{x^2} + 2xe^{(x^2)^2} = -e^{x^2} + 2xe^{x^4}$.

Sats 10 (insättningsformeln) utgör grunden för integration. Det är mycket viktigt att notera att integrationsgränserna ändras när man gör variabelsubstitution. Tänk igenom detta i samband med genomgången av exempel 8.

Första delen av sats 11 säger att om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerar, så konvergerar $\int_a^\infty f(x)\,dx$. **Man kan dock inte dra någon slutsats om konvergens av** $\int_a^\infty g(x)\,dx$ om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerar. Om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **divergerar**, så divergerar även $\int_a^\infty g(x)\,dx$ enligt andra delen av satsen (men igen, ingen slutsats om konvergens av $\int_a^\infty f(x)\,dx$ kan dras om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerar). Samma slutsatser gäller för generaliserade integraler över ett ändligt intervall och även för integraler generaliserade på flera sätt.

Övningar:

Inlärningsuppgifter: ÖPB: 6.17a, 6.26abd

Problemlösningsuppgifter: ÖPB: 6.9, 6.12ad (kan eventuellt hoppas över), 6.15a, 6.18b, 6.33ade, 6.45