

Seminarieuppgift 2

Ville Wassberg

15 februari 2021

1 Lösning av en diofantisk ekvation

Beskrivning av använda symboler: \leq "är mindre eller lika med". $<$ "är mindre än". $>$ "är större än".
 \Leftrightarrow "är ekvivalent med" eller "om och endast om".

Problem: Finn de positiva lösningarna till den diofantiska ekvationen;

$$19x + 71y = 4000$$

För att lösa detta använder jag Euklides algoritmen dels för att hitta den största gemensamma delare (SGD), dels för att se så att SGD är delbart med högerledet av ekvationen, så jag vet om det går att hitta en lösning eller ej, samt dels för att använda algoritmen baklänges för att få fram möjliga x- och y-värden.

Euklides algoritmen:

$$71 = 3 \cdot 19 + 14$$

$$19 = 1 \cdot 14 + 5$$

$$14 = 2 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

Eftersom att jag får resten 1 innebär det att $\text{SGD}(71, 19) = 1$, 71 och 19 är alltså relativt prima och jag kan därför inte förenkla ekvationen ytterligare; och 1 delar 4000, därför är det möjligt att hitta lösningar till ekvationen.

Jag använder mig av hjälpekvationen:

$$19x + 71y = 1$$

Jag använder här Euklides algoritmen baklänges för att få fram två möjliga x- och y-värden till hjälpekvationen;

$$1 = 5 - 4$$

$$= 5 - (14 - 2 \cdot 5)$$

$$= 3 \cdot 5 - 14$$

$$= 3 \cdot (19 - 14) - 14$$

$$= 3 \cdot 19 - 4 \cdot 14$$

$$\begin{aligned}
&= 3 * 19 - 4 * (71 - 3 * 19) \\
&= 15 * 19 - 4 * 71
\end{aligned}$$

Här ser vi att;

$$15 * 19 - 4 * 71 = 1$$

Det innebär att jag kan använda $x=15$ och $y=-4$ som möjliga lösningar till hjälpekvationen. För att få en möjlig lösning till den ursprungliga ekvationen kan jag multiplicera x och y med 4000 samtidigt som högerledet, så att;

$$19 * (15 * 4000) + 71 * ((-4) * 4000) = 1 * 4000$$

Så en partikulärlösning till den diofantiska ekvationen har;

$$x_0 = 60000, y_0 = -16000$$

För att hitta en allmän lösning till ekvationen sätter jag;

$$x = x_0 + bn$$

$$y = y_0 - an$$

Där a och b kommer från formen $ax+by=c$, alltså är a och b lika med 19 och 71 respektive (från ekvationen). Detta medför att den allmänna lösningen till den diofantiska ekvationen;

$$19x + 71y = 4000$$

är;

$$x = 60000 + 71n$$

$$y = (-16000) - 19n$$

Där n är ett heltal. Men för att finna endast de positiva lösningarna behövs olikheterna lösas;

$$x = 60000 + 71n > 0$$

$$y = (-16000) - 19n > 0$$

Så;

$$60000 + 71n > 0$$

$$\Leftrightarrow 71n > (-60000)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-60000}{71} > -846$$

och;

$$(-16000) - 19n > 0$$

$$\Leftrightarrow 19n < (-16000)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{-16000}{19} < -842$$

Därför;

$$-845 \leq n \leq -843$$

De positiva lösningarna till den diofantiska ekvationen;

$$19x + 71y = 4000$$

är;

$$x = 60000 + 71n$$

$$y = (-16000) - 19n$$

Där;

$$n = -845, -844, -843$$