Räkneövning 30/9-2021

MacLaurin och Taylorutvecklingar

2.62a) Skriv upp Taylors formel av andra ordningen av $f(x,y)$

b) Taylorutveckla $f(x,y)=\sqrt{1+x+y}$ kring $(1,0)$

a) kring (a,b):

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right]+$$

$$+(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$$

där $B(h,k)$ är en begränsad funktion i en omgivning till origo.

---

b) $f(x,y)=\sqrt{1+x+y} \Rightarrow f(1,0)=\sqrt{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}}=-\frac{1}{8\sqrt{2}} \text{ i } (1,0)$$

2.62 forts.

$$f(1+h,k) = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)k +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)k^2\right)$$

$$+ (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k)$$

$$f(1+h,k) = \sqrt{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}} + \frac{k}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{h^2}{8\sqrt{2}} - \frac{2hk}{8\sqrt{2}} - \frac{k^2}{8\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k)$$

$$\boxed{f(1+h,k) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(h+k) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(h^2+2hk+k^2) + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k)}$$

Taylors formel
—״— utveckling } Ta med resttermen

Taylor polynom: ingen restterm

2.60) Bestäm Taylorpolynomet av ordningen 1 och 2 i punkten (1,1) till

a) $f(x_1,x_2)=(1+x_1+2x_2)^2$ b) $g(x_1,x_2)=(1+x_1+2x_2)^{-1}$

a) $f(1,1)=(1+1+2)^2=16$

$f'_{x_1}(x_1,x_2)=2(1+x_1+2x_2) \Rightarrow f'_{x_1}(1,1)=8$

$f'_{x_2}(x_1,x_2)=4(1+x_1+2x_2) \Rightarrow f'_{x_2}(1,1)=16$

Ordning 1: $\underline{f(1+h,1+k)=16+8h+16k}$

$f''_{x_1x_1}(x_1,x_2)=2$, $f''_{x_1x_2}(x_1,x_2)=4$, $f''_{x_2x_2}=8$

Ordning 2: $f(1+h,1+k)=16+8h+16k+\frac{1}{2}(2h^2+8h\cdot k+8k^2)$

$$=16+8h+16k+h^2+4hk+4k^2$$

b) $g(1,1)=\frac{1}{4}$

$g'_{x_1}=-(1+x_1+2x_2)^{-2} \Rightarrow g'_{x_1}(1,1)=-\frac{1}{16}$

$g'_{x_2}=-2(1+x_1+2x_2)^{-2} \Rightarrow g_{x_2}(1,1)=-\frac{1}{8}$

Ordning 1: $\underline{g(1+h,1+k)=\frac{1}{4}-\frac{h}{16}-\frac{k}{8}}$

2.60 b forts.)

$$g''_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 2(1+x_1+2x_2)^{-3} \; ; \; g''_{x_1x_1}(1,1) = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}$$

$$g''_{x_1x_2}(x_1,x_2) = 2(1+x_1+2x_2)^{-3} \cdot 2 \; ; \; g''_{x_1x_2}(1,1) = \frac{1}{16}$$

$$g''_{x_2x_2} = 4(1+x_1+2x_2)^{-3} \cdot 2 \; ; \; g''_{x_2x_2}(1,1) = \frac{1}{8}$$

Ordning 2:

$$g(1+h,1+k) = \frac{1}{4} - \frac{h}{16} - \frac{k}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{32} + \frac{2 \cdot hk}{16} + \frac{1}{8}k^2\right)$$

9.22) Finn McLaurinutvecklingen av ordning 4 till

a) $e^{\sin x}$ b) $e^{\cos x}$

b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)$

$$e^{\cos x} = e^{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right)} = e^1 \cdot e^{\overbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)}^{t}}$$

$$= \left\{ e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^4) \right\} =$$

$$= e\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\frac{x^2}{2}}_{\to x^4} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right)^2 + o(x^6)\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^6)\right]$$

forts!

9.22 b forts

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{ex^4}{6} + \underbrace{O(x^6)}_{x^6 B(x)}$$

där $B(x)$ är begränsad i en omgivning till origo

obs! $eO(x^6) = O(x^6)$

$$\therefore\ \boxed{e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + x^6 B(x)}$$