Física II - Grado en Robótica (EPSE-USC Lugo)

Mecánica de Robots: Introducción

Ángel Piñeiro

E-mail: Angel.Pineiro@usc.es
Depto de Física Aplicada
Universidade de Santiago de Compostela

3 de febrero de 2025

Resumen

Definiciones

- En esta asignatura vamos a entender que un **Robot** es un un dispositivo mecánico formado por cuerpos rígidos (eslabones) conectados mediante articulaciones que se pueden controlar permitiendo movimientos relativos (traslaciones y/o rotaciones) entre ellos.
- Una **Articulación** es el punto de unión de 2 o más de los eslabones que forman un Robot.
- Un **Actuador** es un dispositivo que ejerce una fuerza (o un torque) sobre una articulación, permitiendo el movimiento relativo controlado (de rotación y/o traslación) entre eslabones.
- La **Configuración** de un Robot es la especificación completa de la posición de todos los puntos del Robot.
- **Grados de Libertad (gdl o dof)** de un Robot es el número mínimo de coordenadas necesario para representar la configuración de un Robot.
- El **Espacio de Configuraciones** es un espacio n-dimensional en el que se pueden representar todas las posibles configuraciones del Robot. Cada configuración del Robot se representa como un punto en el espacio de configuraciones.
- **Elemento Terminal** o **Efector Final** es el dispositivo situado en el extremo del Robot, diseñado para interactuar con el entorno.
- El **Espacio de Tareas** son los puntos del espacio accesibles al elemento terminal.

Clasificación de Robots

Hay muchas posibles clasificaciones de Robots atendiendo a diferentes criterios.

Atendiendo a la generación:

- **1ª Generación:** Repite la tarea programada secuencialmente. No toma en cuenta las posibles alteraciones de su entorno (hasta los años 80).
- **2ª Generación:** Adquiere información limitada de su entorno y actúa en consecuencia. Puede localizar, clasificar (visión) y detectar esfuerzos y adaptar sus movimientos en consecuencia.
- **3ª Generación:** Su programación se realiza mediante el empleo de un lenguaje natural. Posee capacidad para la planificación automática de tareas.

Aplicaciones por áreas de aplicación:

- **Robots personales y domésticos:** para tareas domésticas, de entretenimiento, asistenciales, ayuda a discapacitados, transporte personal, seguridad y vigilancia de viviendas, entre otros usos domésticos
- **Robots de servicios profesionales:** Robots de exteriores, de limpieza, inspección, construcción y demolición, sistemas logísticos, medicina, defensa, rescate y seguridad, submarinos, plataformas móviles, robots de laboratorio, relaciones públicas, propósito especial, humanoides, robots a medida, etc
- **I+D en Robótica:** percepción, actuación, micro y nanorobots, arquitecturas e integración, navegación y control, interfases con usuario y otras, investigación básica, entre otras actividades de I+D.

Clasificación atendiendo al tipo de Actuadores:

- Robot **Neumático**, **Hidráulico** ó **Eléctrico**

Clasificación de Robots

Atendiendo al número de Grados de Libertad:

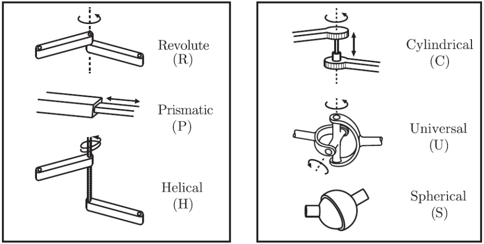
- **Robots Deficientes:** <6 grados de libertad (útiles para tareas específicas).
- **Robots de Propósito General:** 6 grados de libertad (los mínimos necesarios para manipular un objeto en el espacio 3D en cualquier posición y orientación).
- **Robots Redundantes:** >6 grados de libertad.
- **Robots Hiper-redundantes:** >12 grados de libertad en el espacio 3D. Tienen más libertad para moverse evitando obstáculos y operar en espacios confinados, tolerencia a fallos en articulaciones, ventajas cinemáticas, etc. https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/9207/10582
- **Robots Blandos:** no tienen componentes ni grados de libertad discretos, se construyen con materiales deformables en lugar de sólidos rígidos: https://wyss.harvard.edu/media-post/octobot-a-soft-autonomous-robot/.

Atendiendo al Tamaño: Ver artículo: A comparison of Scale: Macro, Micro, Nano

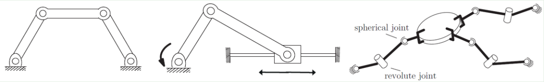
- **Nanobots y biobots:** Tamaños que van desde unos pocos nanómetros (moleculares) hasta micras (células o agregados de células). Tienen aplicaciones potenciales sobre todo en diseño de materiales inteligentes, en medicina molecular y en limpieza-degradación-encapsulación de sustancias tóxicas. Ver artículos: A scalable pipeline for designing reconfigurable organisms; Ejemplos materiales inteligentes; The inner life of the cell; Soft Robots Antropomorphic molecules - Nanoputians
- **Micro:** Suelen llamarse así a robots de tamaño pequeño en los que sus componentes son de tamaño micrométrico, aunque el conjunto no lo sea.
- **Macro:** Robots clásicos de tamaños que van desde varios centímetros hasta muchos metros.

Morfología de robots y nomenclatura en función de las articulaciones

Tipos de articulaciones y nomenclatura



Ejemplos de Robots 4R, 3RP (manivela deslizante) y de 3 Robots SRS cooperando

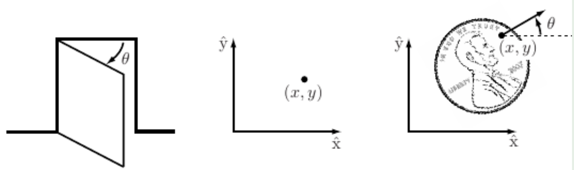


Grados de Libertad de un Sólido Rígido

La **Configuración** de un Robot responde a la pregunta: **¿ Dónde está el Robot?**
Configuración = especificación de todos los puntos que forman parte del Robot.
Robots = Conjunto de **segmentos rígidos de forma conocida** conectados por articulaciones ⇒ basta un conjunto pequeño de parámetros para representar su configuración = **número de grados de libertad (dof)**.

Ejemplo de objetos rígidos con diferentes grados de libertad

- Configuración de una **puerta** (1 dof): el ángulo de apertura (θ).
- Configuración de un **punto en el plano** (2 dof): 2 coordenadas (x, y).
- Configuración de una **Moneda sobre un plano** (3 dof): 2 coordenadas (x, y) y un ángulo (θ).

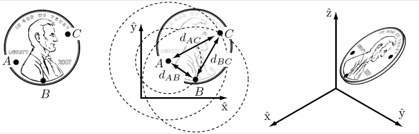


Grados de Libertad de un Sólido Rígido

Ejemplo: dof de una moneda en 2D y 3D

La proyección de 3 puntos de la moneda (A, B, C) sobre el plano en el que descansa tienen coordenadas (x_A, y_A), (x_B, y_B), y (x_C, y_C) (dado un SR en el plano).
Condición de rigidez: $d_{ij} = cte \ \forall \ i, j$.

- Si entre los 3 puntos no hubiese ninguna restricción y pudiesen estar de manera independiente en cq posición del plano, la moneda tendría 6 dof (2 por cada punto).
- d_{AB}=cte$\Rightarrow$ si fijamos el punto A, el punto B sólo puede moverse en un círculo de radio d_{AB}.
- Si los puntos A y B están fijos, el punto C debe estar en la intersección de las 2 circunferencias de radios d_{AC} y d_{BC}, centradas en A y B respectivamente. Esta intersección define la posición absoluta de la moneda en el plano, incluyendo la orientación (cara/cruz).
- Para especificar la posición de la moneda en 3D necesitamos: las 3 coordenadas de A, 2 ángulos para el punto B sobre la esfera de radio d_{AB} centrada en A, y un ángulo para el punto C sobre el círculo que resulta de la intersección de 2 esferas de radios d_{AC} y d_{BC}, centradas en A y B respectivamente.



Grados de Libertad de un Robot

dof = ($\sum$ dof de los puntos de lo componen) − ($\sum$ restricciones independientes)

¿ Cuántos dof tiene un sólido rígido en un espacio 2D? ¿ y en un espacio 3D?

Las distintas articulaciones aportan diferente número de grados grados de libertad a los robots (imponen restricciones al movimiento relativo de los eslabones). P. ej. una articulación R permite un dof de movimiento entre los 2 eslabones que une, pero también se puede entender como que introduce 5 restricciones al movimiento relativo entre ellos.

Joint type	dof f	Constraints c between two planar rigid bodies	Constraints c between two spatial rigid bodies
Revolute (R)	1	2	5
Prismatic (P)	1	2	5
Helical (H)	1	N/A	5
Cylindrical (C)	2	N/A	4
Universal (U)	2	N/A	4
Spherical (S)	3	N/A	3

Fórmula de Grübbler para calcular los dof de un Robot

N= nº de eslabones (incluyendo la base); J= nº de articulaciones; m=dof para un cuerpo rígido en el espacio considerado ($m = 3$ en 2D y $m = 6$ en 3D); f_i=dof de la articulación i; c_i=nº de restricciones de la articulación i ($f_i + c_i = m \; \forall \; i$)

$$\boxed{dof = m\,(N-1) - \sum_{i=1}^{J} c_i}$$

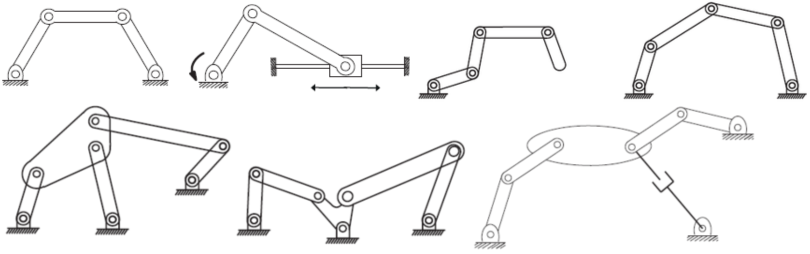
Grados de Libertad de un Robot

Fórmula de Grübbler

$$dof = m\left(N - 1 - J\right) + \sum_{i=1}^{J} f_i$$

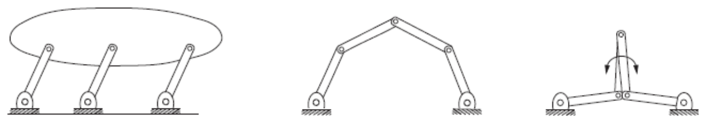
Sólo es válida si todas las restricciones sobre las articulaciones son independientes. Si esto no se verifica, esta fórmula proporciona una cota inferior al número de grados de libertad.

Calcula el número dof para los siguientes mecanismos



Grados de Libertad de un Robot

Redundancia de restricciones y singularidades

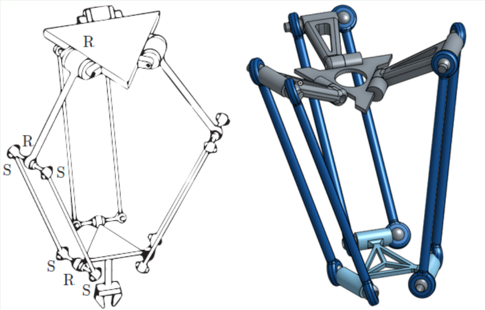


- Caso 1: ¿ $N = 5; J = 6; \sum f_i = 6; m = 3 \Rightarrow dof = 0$?
  Hay un eslabón redundante, podríamos añadir cualquier número de eslabones equivalentes paralelos sin añadir restricciones al movimiento.
  Lo correcto sería: $\boxed{N = 4; J = 4; \sum f_i = 4; m = 3 \Rightarrow dof = 1}$
- Caso 2: En general $N = 5; J = 5; \sum f_i = 5; m = 3 \Rightarrow dof = 2$
  Si bloqueamos 2 articulaciones: $N = 3; J = 3; \sum f_i = 3; m = 3 \Rightarrow dof = 0 \Rightarrow$ No habría movimiento pero si lo que bloqueamos son las articulaciones conectadas a las bases de manera que las articulaciones 2 y 4 se superpongan y los eslabones centrales tienen la misma longitud, puede haber una rotación entorno a las articulaciones superpuestas y $dof = 1$.

En estos casos, la fórmula de Grübbler nos da una cota inferior para el número de dof.

Grados de Libertad de un Robot

Robot Delta

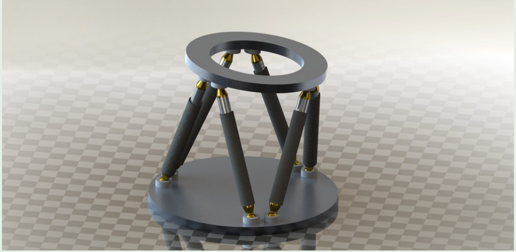


Plataforma superior fija
Plataforma inferior móvil.
Cada una de las 3 patas tiene una cadena cerrada que consta de: 3 articulaciones de revolución, 4 esféricas y 5 eslabones.

$$\boxed{N = 2 + 5x3; J = 7x3; \sum f_i = (3 + 4x3)x3; m = 6 \Rightarrow dof = 15}$$

Grados de Libertad de un Robot

Plataforma de Stewart-Gough



Plataforma inferior fija
Plataforma superior móvil
6 patas UPS

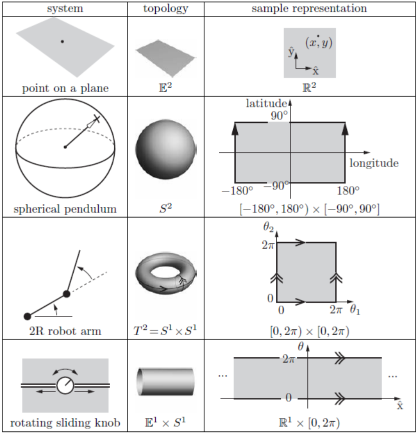
$$\boxed{N = 2 + 2x6;\ J = 3x6;\ \sum f_i = (2 + 1 + 3)x6;\ m = 6 \Rightarrow dof = 6}$$

Espacio de Configuraciones: Topología y Representación

- Dos espacios son **topológicamente equivalentes** si uno puede ser deformado de forma continua para dar el otro, sin cortar ni pegar.
- La topología es una propiedad fundamental del espacio, es independiente de cómo se escojan las coordenadas para representarlo.
- Una esfera y un balón de rugby son topológicamente equivalentes, una esfera y un plano no lo son.
- En 1D un círculo, una línea y un segmento son topológicamente diferentes.
- Una línea se representa matemáticamente como $\mathbb{E}^1$ y un plano como $\mathbb{E}^2$.
- La línea de los números reales también se puede representar como $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^1 \Rightarrow$ un segmento cerrado de una línea se puede representar como $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$
- Un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ que no incluye los puntos finales es topológicamente equivalente a una línea porque puede ser estirado para generarla. Un intervalo cerrado no es equivalente a una línea porque la línea no contiene puntos terminales.
- Un círculo se representa matemáticamente como S^1, una esfera como S^2 y en general una hiperesfera como S^n.
- Un espacio Euclídeo completo de n dimensiones se representa como $\mathbb{R}^n$

Espacio de Configuraciones: Topología y Representación

- El número de dof es la **dimensión** del espacio de configuraciones pero ¿ cuál es su **topología** (forma)?
- Algunos espacios de configuraciones se pueden expresar como producto cartesiano de 2 ó más espacios de dimensión menor:
  - Cuerpo rígido en el plano: $\mathbb{R}^2 \times S^1$
  - Robot PR: $\mathbb{R}^1 \times S^1$
  - Robot 2R: $S^1 \times S^1 = T^2$
  - Sólido rígido plano con un brazo robótico 2R acoplado: $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times T^2 = \mathbb{R}^2 \times T^3$
  - Sólido rígido 3D en el espacio: $\mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^1$



$S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$ es la superficie n-dimensional de un toro en un espacio $(n+1)$-D
Una esfera no es topológicamente equivalente a un toro: $S^2 \neq T^2$

Espacio de Configuraciones: Topología y Representación

- La topología es una propiedad fundamental del espacio, no depende de la elección de coordenadas. Hay diferentes alternativas para representar numéricamente el espacio de configuraciones.

Ventajas y desventajas de representaciones implícita y explícita

Representación explícita

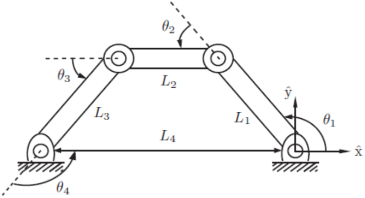
- Utiliza un número mínimo de parámetros ($dof = n$) para representar cada configuración en un espacio nD (latitud y longitud para movernos en S^2).
- No es satisfactoria para un rango de configuraciones en las que las coordenadas varían de muy rápido $\Rightarrow$ singularidades (especialmente grave cuando se calculan velocidades a partir de estas coordenadas).
- No siempre es sencillo encontrarlas. P. ej., para mecanismos de cadena cerrada.

Representación implícita

- Se representa un espacio nD dentro de un espacio de dimensión mayor. P. ej., (x, y, z) para la superficie de una esfera dentro de 3D, con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Utiliza más números de los mínimamente necesarios para representar cada configuración.
- No presenta singularidades.
- Es fácil encontrar una representación implícita incluso para mecanismos de cadena cerrada: las coordenadas de las articulaciones sometidas a las restricciones del sistema cerrado.

Espacio de Configuraciones: Velocidades

Las parametrizaciones implícitas son muchas veces más sencillas de obtener que las explícitas, sobre todo para mecanismos de cadena cerrada. P. ej., una cadena 4R cerrada tiene un solo grado de libertad. Las condiciones de ciclo cerrado pueden expresarse con las siguientes ecuaciones:



$$L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + \cdots + L_4 \cos(\theta_1+\cdots+\theta_4) = 0$$
$$L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1+\theta_2) + \cdots + L_4 \sin(\theta_1+\cdots+\theta_4) = 0$$
$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\pi = 0$$

Son 3 ecuaciones y 4 variables (θ_i)$\Rightarrow$ 1 dof. El conjunto de soluciones forma una curva 1D en el espacio 4D de coordenadas de las articulaciones.

Representamos las coordenadas θ_i como vector columna: $\theta = [\theta_1\theta_2\cdots\theta_n]^T$.

Escribimos las ecuaciones que expresan la condición de ciclo cerrado como un vector columna:

$$\begin{bmatrix} g_1(\theta_1,\cdots,\theta_4) \\ \vdots \\ g_k(\theta_1,\cdots,\theta_4) \end{bmatrix} = 0$$

Estas ecuaciones, que reducen la dimensionalidad del espacio de configuraciones, se llaman **restricciones Holonómicas**

Espacio de Configuraciones: Velocidades

Las **restricciones Holonómicas** mapean el espacio $\mathbb{R}^n$ en un espacio $\mathbb{R}^k$ de menor dimensión ($\Rightarrow g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$). El espacio de configuraciones se puede interpretar como una superficie de dimensión $n - k = dof$ contenido en $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Si el Robot se mueve: } \frac{d}{dt} g(\theta(t)) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Escrito en forma matricial: } \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta)\dot{\theta} = 0}$$

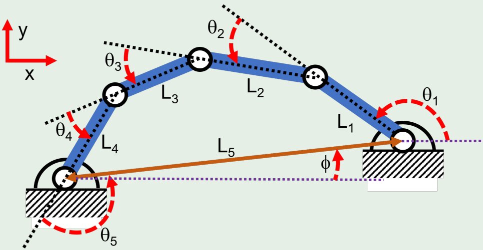
Si $A(\theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta) \Rightarrow \boxed{A(\theta)\dot{\theta} = 0}$ donde $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$

Estas no son restricciones en las posiciones sino en las velocidades. Se llaman **restricciones Pfaffianas**

La integral de las restricciones Pfaffianas (velocidades) son las restricciones Holonómicas (configuraciones).

Espacio de Configuraciones: Velocidades

Calcula las restricciones Pfaffianas del robot 5R de lazo cerrado de la figura



Restricciones Holonómicas:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \cos\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \sin\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i - 2\pi - \phi = 0$$

Restricciones Holonómicas: $g_i(\theta) = 0$

Restricciones Pfaffianas $\Rightarrow \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_i} = -\sum_{i=1}^{n} L_i \sin\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{i=1}^{n} L_i \cos\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g_3(\theta)}{\partial \theta_i} = 1}$$

Espacio de Configuraciones: Velocidades

Calcula las restricciones Pfaffianas del robot 5R de lazo cerrado de la figura

$$\mathrm{A}(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1 \sin(\theta_1) & -L_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cdots & -\sum_{i=1}^{5} L_i \sin(\sum_{j=1}^{i} \theta_j) \\ L_1 \cos(\theta_1) & L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{5} L_i \cos(\sum_{j=1}^{i} \theta_j) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Las restricciones Pfaffianas se obtienen multiplicando esta matriz por el vector columna $\dot{\theta}$:

$$\sum_{n=1}^{5} \left(\sum_{i=1}^{n} L_i \sin(\sum_{j=1}^{i} \theta_j) \right) \dot{\theta}_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{5} \left(\sum_{i=1}^{n} L_i \cos(\sum_{j=1}^{i} \theta_j) \right) \dot{\theta}_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{5} \dot{\theta}_n = 0$$

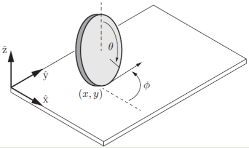
Espacio de Configuraciones: Velocidades

Moneda girando sin deslizar sobre una línea

Condición de rodadura sin deslizamiento $\Rightarrow$ restricción holonómica: $\boxed{x = r\theta}$ $\Rightarrow$ sólo tengo un grado de libertad en el espacio de configuraciones: si conozco θ ya conozco x.

Derivando : $\boxed{\dot{x} = r\dot{\theta}}$ $\Rightarrow$ restricción Pfaffiana: no puedo variar θ sin variar x.

Moneda girando sin deslizar sobre un plano: Restricción Pfaffiana no-Holonómica



El espacio de configuraciones de la moneda es 4D: $\mathbb{R}^2 \times T^2$
El vector de coordenadas $q = [q_1\, q_2\, q_3\, q_4]^T = [x\, y\, \phi\, \theta]^T$
Condición de rodadura sin deslizamiento en 2D:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = r\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\cos(q_3) \\ 0 & 1 & 0 & -r\sin(q_3) \end{bmatrix} \dot{q} = 0$$

Esta última ecuación tiene la forma $A(q)\dot{q} = 0$ por lo que representa las restricciones pfaffianas del movimiento. Estas restricciones no son integrables

$$\Rightarrow \nexists \quad g(q) \quad t.q. \quad \frac{\partial g(q)}{\partial q} = A(q)$$

Una restricción pfaffiana que no se puede integrar se llama **restricción no-holonómica**. Las restricciones no-holonómicas reducen la dimensión de las velocidades que puede alcanzar el sistema pero no las dimensiones del espacio de configuraciones. Una moneda que rueda sobre un plano sin deslizar puede alcanzar cualquier punto del espacio 4D de configuraciones a pesar de las restricciones en sus velocidades.

Espacio de Tareas y Espacio de Trabajo

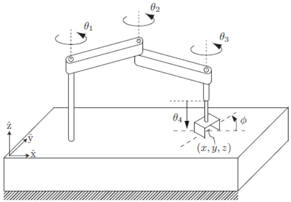
Tanto el espacio de tareas como el espacio de trabajo se definen con respecto a elemento terminal del robot, no con respecto a la configuración completa del mismo.

- **Espacio de Tareas:** Espacio en el que se expresa de manera natural la tarea del Robot. La definición del espacio de tareas depende directamente de la tarea asignada al Robot, independientemente de su configuración.
- **Espacio de Trabajo:** Especificación de las configuraciones que puede alcanzar el elemento terminal. Este espacio está predeterminado por la configuración del Robot, independientemente de su tarea.

- Tarea$\rightarrow$escribir en un papel $\Rightarrow$ espacio de tareas $\rightarrow \mathbb{R}^2$
- Tarea$\rightarrow$manipular un sólido rígido en el espacio $\Rightarrow$ espacio de tareas $\rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^1$.
- Cada punto del espacio de tareas o del espacio de trabajo puede obtenerse con diferentes configuraciones del Robot.
- No todos los puntos del espacio de tareas son alcanzables por el elemento terminal pero existe al menos una configuración del robot para todos los puntos del espacio de trabajo.
- 2 Robots con diferente espacio de configuraciones pueden tener el mismo espacio de trabajo: robot 2R con 2 eslabones de 3 cm y un robot 3R con 3 eslabones de 2 cm.
- 2 Robots con el mismo espacio de configuraciones pueden tener distinto espacio de trabajo: robot 2R plano y robot 2R con las articulaciones perpendiculares.

Espacio de Tareas y Espacio de Trabajo

Robot SCARA (3RP)



La posición del elemento terminal se define por (x, y, z, ϕ). Su espacio de tareas es $\mathbb{R}^3 \times S^1$ y su espacio de trabajo se define por los valores de (x, y, z) que se pueden alcanzar en el espacio cartesiano. En el espacio S^1 se puede alcanzar cualquier ángulo.

Robot 6R adaptado para pintar con spray

Para la tarea asignada es importante la posición cartesiana del spray (elemento terminal) y la dirección a la que se apunta para pintar. Las rotaciones entorno al eje que une el elemento terminal con el punto que se quiere pintar no son relevantes. $\Rightarrow$ 5 coordenadas: (x, y, z) y (θ, ϕ).
El espacio de tareas es $\mathbb{R}^3 \times S^2$. El espacio de trabajo son los puntos alcanzables por el espacio de tareas, está limitado a las posiciones alcanzables por el robot en el espacio $\mathbb{R}^3$.