Física II - Grado en Robótica (EPSE-USC Lugo)

Mecánica de Robots: Herramientas matemáticas para localización espacial de cuerpos rígidos

Ángel Piñeiro

E-mail: Angel.Pineiro@usc.es
Depto de Física Aplicada
Universidade de Santiago de Compostela

17 de febrero de 2025

Resumen

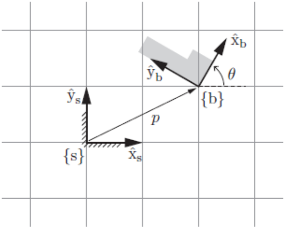
Introducción

- Utilizaremos **2 sistemas de referencia** (SR), uno fijo en el espacio $\{s\}$ y otro fijo en el cuerpo rígido que queremos estudiar $\{b\}$ (p. ej. el elemento terminal del Robot) para describir la configuración de un sólido rígido en el espacio.
- Utilizaremos una **matriz 4×4 para representar la configuración del sólido rígido** ($\{b\}$ en coordenadas de $\{s\}$) $\Rightarrow$ **representación implícita** del espacio de configuraciones (16 números cuando sólo necesitamos 6).
- Esta matriz 4×4 también sirve para trasladar y rotar un vector en un SR dado o para cambiar la representación de un vector entre distintos SR.
- **Velocidades espaciales** o **Giros:** Representación de la velocidad de un cuerpo rígido como un punto en $\mathbb{R}^6$ cuyas 3 primeras coordenadas son velocidades angulares y las otras 3 velocidades lineales.
- Cualquier configuración de un sólido rígido puede obtenerse a partir de una configuración inicial de referencia, **integrando un Giro** constante durante un tiempo específico. Este movimiento se parece al movimiento helicoidal de un punto en un tornillo, rotando y trasladándose a lo largo de un eje fijo.
- **Coordenadas exponenciales:** es una representación 6D de la configuración de un cuerpo rígido basada en que **la configuración inicial seguida de un giro nos da la configuración final**. Los 6 números $\Rightarrow$ dirección del eje helicoidal utilizado para alcanzar la configuración final y la magnitud del desplazamiento a lo largo del eje.
- **Fuerza espacial** o **Llave**: Vector 6D cuyas componentes son los momentos (torques) y las fuerzas ejercidas sobre un sólido rígido en determinado instante.

Movimiento Plano de un Sólido Rígido

Teorema de Chasles-Mozzi

Todo desplazamiento de un sólido rígido, tanto en 2D como en 3D, puede obtenerse mediante una traslación y rotación finitas entorno a un eje helicoidal fijo.



Posición y configuración del cuerpo plano $\Rightarrow$ posición y orientación de $\{b\}$ con respecto a $\{s\}$.

- Posición del origen de $\{b\}$: $p = p_x \hat{x}_s + p_y \hat{y}_s$.
- Orientación $\Rightarrow \theta$.

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_b &= \cos\theta \hat{x}_s + \operatorname{sen}\theta \hat{y}_s \\ \hat{y}_b &= -\operatorname{sen}\theta \hat{x}_s + \cos\theta \hat{y}_s \end{aligned}\right\}$$

Si escribimos el punto p como un vector columna y los vectores $(\hat{x}_b, \hat{y}_b)$ como columnas en una matriz:

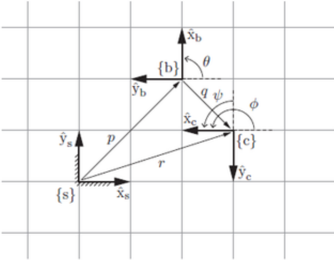
$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}; \qquad [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = P \qquad \text{Matriz de rotación}$$

La matriz P tiene 4 números pero está sujeta 3 restricciones: cada columna es un vector unitario y las 2 columnas deben ser ortogonales entre ellas. El dof que queda libre es el ángulo de rotación θ.

- El par (p, P) fija la posición y orientación de $\{b\}$ con respecto a $\{s\}$.

Movimiento Plano de un Sólido Rígido

Definimos los SR $\{b\}$ y $\{c\}$ con respecto a $\{s\}$:



{b}: $p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}; \qquad [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = P$

{c}: $r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}; \qquad [\hat{x}_c \quad \hat{y}_c] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = R$

Podemos describir también $\{c\}$ con respecto a $\{b\}$:

{c'}: $q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}; \qquad [\hat{x}_{c'} \quad \hat{y}_{c'}] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = Q$

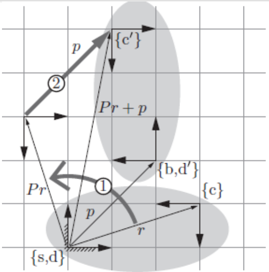
Donde el vector q está expresado en coordenadas de $\{b\}$ $\Rightarrow$ para pasarlo a coordenadas de $\{s\}$ hay que premultiplicarlo por la matriz $P \Rightarrow q_s = Pq_b$.

Conociendo la configuración de $\{b\}$ con respecto a $\{s\}$ y la de $\{c\}$ con respecto a $\{b\}$, podemos conocer la de $\{c\}$ con respecto a $\{s\}$:

$$R = PQ \qquad r = Pq + p$$

Esto significa que el par (P, p) no sólo sirve para representar $\{b\}$ con respecto a $\{s\}$ sino que además podemos utilizarlo para convertir la representación de un punto o SR desde $\{b\}$ a $\{s\}$.

Movimiento Plano de un Sólido Rígido



$\{d\}$ y $\{c\}$ son 2 SR fijos sobre sólido rígido. $\{d\}$ coincide inicialmente con $\{s\}$ y $\{c\}$ se relaciona con $\{s\}$ a través de (R, r).

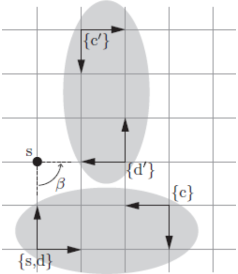
$\{d\}$ se mueve a $\{d'\}$, que coincide con un SR $\{b\}$ representado por (P, p) en $\{s\}$. ¿ Dónde termina $\{c\}$ después de este movimiento?

Si representamos $\{c'\}$ con $(R', r') \Rightarrow R' = PR$; $r' = Pr + p$.

Estamos utilizando el par (P, p) para 3 propósitos distintos:

- Representar la configuración de un sólido rígido en $\{s\}$
- Cambiar el SR en el cual se representa un vector
- Desplazar un vector o un SR

Este movimiento puede obtenerse como una rotación seguida de una traslación: rotando el cuerpo un ángulo β entorno a un punto fijo s con un movimiento helicoidal (tornillo), que puede parametrizarse con (β, s_x, s_y), donde $(s_x, s_y) = (0, 2)$ y $\beta = \pi/2$.

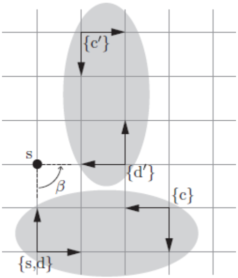


Movimiento Plano de un Sólido Rígido

Movimiento helicoidal $\rightarrow$ desplazamiento obtenido por el efecto simultáneo de velocidades angular y lineal.

Si rotamos el cuerpo entorno al punto s con ($w = 1\, rad/s$) $\Rightarrow$ un punto en el origen de $\{s\}$ se mueve a 2 unidades por segundo en la dirección positiva del eje $x \Rightarrow v = (v_x, v_y) = -\omega \times s = (2, 0)$

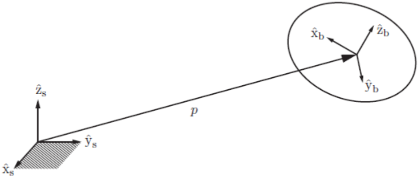
Construimos el vector $\mathcal{S} = (\omega, v_x, v_y) = (1, 2, 0)$ que representa el eje helicoidal. Si seguimos este eje durante un ángulo $\theta = \pi/2$, se obtiene el desplazamiento final $\Rightarrow$ podemos representar el desplazamiento utilizando las 3 coordenadas $\mathcal{S}\theta = (\pi/2, \pi, 0)$.



Coordenadas Exponenciales: eje helicoidal $\times$ ángulo del desplazamiento.
Para representar la combinación de una velocidad angular y lineal (Giro) utilizamos un eje helicoidal $\mathcal{S} = (\omega, v_x, v_y)$ con $\omega = 1$, y lo escalamos multiplicándolo por la velocidad de rotación $\dot{\theta}$. El giro es $\nu = \mathcal{S}\dot{\theta}$.
El desplazamiento neto obtenido rotando un ángulo θ entorno al eje helicoidal $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}\theta$) es equivalente al desplazamiento obtenido rotanto entorno al eje $\mathcal{S}$ a una velocidad $\dot{\theta} = \theta$ por unidad de tiempo; por tanto $\nu = \mathcal{S}\dot{\theta}$ también pueden considerarse coordenadas exponenciales.

Movimiento General de un Sólido Rígido en el espacio

Los conceptos anteriores se pueden generalizar a 3D. De nuevo tomamos un SR $\{s\}$ fijo en el espacio y otro SR $\{b\}$ que se mueve con el sólido rígido (siempre $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$).



$$p = p_1\hat{x}_s + p_2\hat{y}_s + p_3\hat{z}_s$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_b &= r_{11}\hat{x}_s + r_{21}\hat{y}_s + r_{31}\hat{z}_s \\ \hat{y}_b &= r_{12}\hat{x}_s + r_{22}\hat{y}_s + r_{32}\hat{z}_s \\ \hat{z}_b &= r_{13}\hat{x}_s + r_{23}\hat{y}_s + r_{33}\hat{z}_s \end{aligned}\right\}$$

$$\text{Representando} \quad p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; \quad R = [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Obtenemos la posición y orientación de $\{b\}$ con respecto a $\{s\}$ con 12 escalares. Sólo 3 de las 9 componentes de la matriz son independientes.

Utilizando **coordenadas exponenciales** tenemos una representación de la rotación con 3 números que definen el eje de rotación y el ángulo rotado entorno a un eje helicoidal.

De manera análoga a 2D, podemos definir unas coordenadas exponenciales para la configuración de un sólido rígido, que se obtiene de integrar un **giro** de 6 componentes (3 para la velocidad angular y otras 3 para la velocidad lineal).

También fusionaremos los momentos y las fuerzas en un vector de 6 componentes al que llamaremos **Llave**.

Utilizando estos vectores 6D (el Giro y la Llave), resolveremos todos los problemas de cinemática y dinámica de Robots.

Rotaciones y velocidades angulares

De las 9 componentes de una matriz de rotación, sólo 3 son independientes $\Rightarrow$ existen 6 restricciones. Como las 3 columnas representan a vectores unitarios en la dirección de los ejes de $\{b\}$, deben verificarse las condiciones de ortonormalidad:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que se pueden escribir de manera más compacta como: $R^T R = \mathbb{I}$; donde R^T es la matriz traspuesta de R y $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.
Hay una restricción a mayores dada por la condición $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ pero esta restricción no reduce los grados de libertad. Esta condición implica que $\det(R) = +1$

Grupo especial Ortogonal $SO(3)$

Es el conjunto de matrices R reales 3×3 que verifican $R^T R = \mathbb{I}$ y $\det(R) = +1$.
Al conjunto de matrices 2×2 que verifican las mismas condiciones se le llama $SO(2)$.

Como se puede ver a partir de su definición (ejes en el SR rotado como vectores columna), todas las matrices $R \in SO(2)$ pueden escribirse como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{donde } \theta \in [0, 2\pi)$$

Propiedades de las matrices de rotación

$SO(3)$ **y** $SO(2)$ **se llaman grupos porque verifican las propiedades de un grupo matemático con la operación de multiplicación** $\Rightarrow \forall\, A, B \in SO(n)$**:**

- Producto interno: El producto AB nos da otro elemento del grupo (otra matriz de rotación). **Las matrices de $SO(3)$ no verifican la propiedad conmutativa pero las de $SO(2)$ sí**.
- Propiedad asociativa: $(AB)C = A(BC)$
- Elemento identidad: Existe un elemento $\mathbb{I}$ tal que $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$
- Elemento inverso: $\forall\, A \in SO(n)\ \exists\, A^{-1}$ t. q. $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$.
  El inverso de una matriz de rotación es también una matriz de rotación que coincide con la matriz traspuesta $\Rightarrow R^{-1} = R^T$.

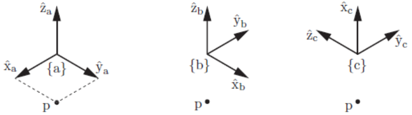
La acción de una matriz de rotación sobre un vector (rotándolo) no afecta a su módulo.

¿ Para qué se puede utilizar una matriz de rotación?

- para representar una orientación (R se entiende como un SR)
- para cambiar el SR en el cual se representa un vector o un SR (se utiliza como operador)
- para rotar un vector o un SR (se utiliza como operador)

Propiedades de las matrices de rotación

$\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ tienen el mismo origen pero diferentes orientaciones. Un SR fijo $\{s\}$ coincide con $\{a\}$.
Las orientaciones de los 3 SR con respecto a $\{s\}$ vienen dadas por:



$$R_{sa} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{sc} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sólo hay que poner los nuevos ejes como vectores columna en coordenadas de $\{s\}$.

$$p_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

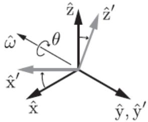
- $R_{ij} = R_{ji}^T \Rightarrow \forall$ par de sistemas de referencia $(\{i\}, \{j\})$, $R_{ij}R_{ji} = \mathbb{I}$
- $\forall$ conjunto de sistemas de referencia $(\{i\}, \{j\}, \{k\})$, $R_{ij}R_{jk} = R_{i\cancel{j}}R_{\cancel{j}k} = R_{ik}$
- Análogamente, para cambiar un vector de un SR a otro: $R_{ij}p_j = R_{i\cancel{j}}p_{\cancel{j}} = p_i$
- Las matrices R_{ij} pueden entenderse como operadores de rotación $\Rightarrow$ expresan la rotación de un SR o de un vector.

Propiedades de las matrices de rotación

Las siguientes matrices expresan rotaciones entorno a los ejes x, y, z:

$$Rot(\hat{x},\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad Rot(\hat{y},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

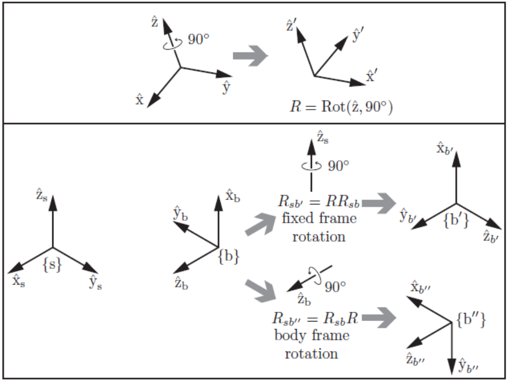


La rotación entorno a un eje genérico $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3)$ vendría dada por:

$$Rot(\hat{\omega},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{\omega}_1^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) - \hat{\omega}_3 s_\theta & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_2 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) + \hat{\omega}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_2^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_1 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_2 s_\theta & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix}$$

donde $s_\theta = \operatorname{sen}\theta$ y $c_\theta = \cos\theta$.
Cualquier matriz de rotación ($R \in SO(3)$) puede obtenerse a partir de la matriz identidad ($\mathbb{I}$) rotando un ángulo θ alrededor de algún eje $\hat{\omega}$.
$Rot(\hat{\omega},\theta) = Rot(-\hat{\omega},-\theta)$

Eje de rotación y sistema de referencia



$R_{sb} \Rightarrow \{b\} \rightarrow$SR en el sólido rígido.
Premultiplicación $\Rightarrow$ rotación entorno a $\{s\}$.
Postmultiplicación $\Rightarrow$ rotación entorno a $\{b\}$.

La rotación de vectores sólo involucra el SR en el que el vector está expresado y el eje de rotación $\hat{\omega}$ debe interpretarse en el mismo SR. El vector rotado, en el mismo SR es: $v' = Rv$

Ejercicios

Matrices de Rotación

- Crea 3 funciones $Rotx(\theta)$, $Roty(\theta)$ y $Rotz(\theta)$ en Python que incluyan las rotaciones entorno a los ejes cartesianos como funciones.
- Crea un programa que utilice las funciones anteriores. El input debe ser un vector v, el eje entorno al cual se debe rotar (x, y o z) y el ángulo de rotación (θ). El output debe ser las componentes del vector rotado v'.
- Crea una función $Rotv(v, \theta)$ en Python que devuelva la matriz genérica de rotación de un ángulo θ entorno a cualquier eje v.
- Crea un programa en Python que utilice la función anterior. Los input deben ser el vector que se va a rotar, el eje de rotación y el ángulo a rotar. El output debe ser el vector rotado un ángulo θ entorno al eje de rotación especificado. Comprueba que los resultados sean los mismos del ejercicio anterior cuando se realizan rotaciones entorno a los ejes cartesianos. Prueba a hacer rotaciones entorno a un eje diferente a los ejes cartesianos (recuerda normalizar el vector que indica el eje de rotación para poder aplicar la fórmula general).
- Comprueba las propiedades no conmutativa y asociativa de rotaciones sucesivas utilizando los programas anteriores.

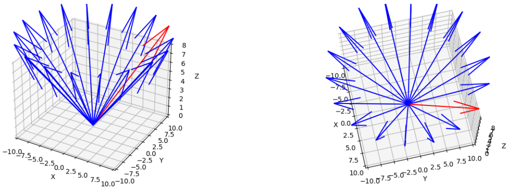
Ejercicios

Comprueba con el siguiente código cómo rotar un vector entorno al eje Z.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir el vector original
vector_original = np.array([10, 10, 10])

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Dibujar el vector original en rojo
ax.quiver(0, 0, 0, vector_original[0], vector_original[1], vector_original[2], color='r', label='Original')

# Rotar el vector en incrementos de 10 grados y dibujar cada vector rotado
for angulo in range(20, 350, 20):
    angulo_rad = np.radians(angulo)
    matriz_rotacion = np.array([[np.cos(angulo_rad), -np.sin(angulo_rad), 0],
                                [np.sin(angulo_rad), np.cos(angulo_rad), 0],
                                [0, 0, 1]])
    vector_rotado = np.dot(matriz_rotacion, vector_original)

    # Dibujar el vector rotado
    ax.quiver(0, 0, 0, vector_rotado[0], vector_rotado[1], vector_rotado[2], color='b')

# Establecer los límites de la gráfica
ax.set_xlim([-10, 10])
ax.set_ylim([-10, 10])
ax.set_zlim([0, 8])

ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
plt.show()
```

Ejercicios

Como resultado del código anterior deberías obtener una imagen en 3D como esta:



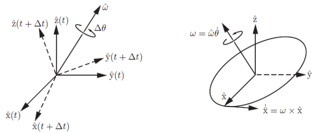
Matrices de Rotación

- Utiliza el código anterior como plantilla para validar gráficamente las funciones que programaste hasta el momento. Para ello genera un triedro ortogonal de 3 vectores de distinto color y rótalos diferentes ángulos entorno a diferentes ejes. Verifica los resultados obtenidos para la rotación de un vector a partir del producto de 2 matrices de rotación en distinto orden ($R_1 \cdot R_2$ y $R_2 \cdot R_1$) y explica los resultados que observas. Verifica que la multiplicación de una matriz de rotación por su inversa (=traspuesta) aplicada sobre un vector no lo cambia. Haz esto para varias rotaciones de distintos vectores entorno a ejes de rotación diferentes y guarda las gráficas.

Velocidades angulares

Derivada respecto al tiempo de los ejes de un SR $\{b\}$ sujeto a un sólido rígido que rota.

Los vectores unitarios en la dirección de los ejes de $\{b\}$ son $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, que se pueden poner como vectores columna en una matriz R_{sb}, representando $\{b\}$ en coordenadas de $\{s\}$.



El cambio en cada eje en un tiempo Δt viene dado por la rotación de un ángulo $\Delta\theta$ entorno a un eje $\hat{\omega}$ que pasa por el origen de coordenadas.

En el límite cuando $\Delta t \to 0$ el eje $\hat{\omega}$ es el eje de rotación instantáneo y la velocidad angular se puede definir como $\omega_s = \dot{\theta}\hat{\omega}_s$, expresado en coordenadas de $\{s\}$.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \omega_s \times \hat{x} \\ \dot{\hat{y}} &= \omega_s \times \hat{y} \\ \dot{\hat{z}} &= \omega_s \times \hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{r}_i = \omega_s \times r_i \Rightarrow \dot{R} = [\omega_s \times r_1 \quad \omega_s \times r_2 \quad \omega_s \times r_3] = \omega_s \times R = [\omega_s]R$$

Representación de vectores como matrices antisimétricas $\in so(3)$

Dado un vector $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$, definimos la matriz antisimétrica $[x] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de manera que $[x] = -[x]^T$.

El conjunto de todas las matrices reales 3×3 antisimétricas se llama $so(3)$.

Dado cq $\omega \in \mathbb{R}^3$ y $R \in SO(3) \Rightarrow R[\omega]R^T = [R\omega]$

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidades angulares

Ejercicios

- Crea una función $VecToso3(v)$ en Python que devuelva la representación de un vector como matriz antisimétrica $\in so(3)$ y otra función $so3ToVec(v)$ que haga la operación contraria.
- Utilizando las funciones de tu librería, verifica que $R[\omega]R^T = [R\omega]$ para un par de combinaciones diferentes de ejes y matrices de rotación.

Con esta notación $[\omega_s]R = \dot{R} \Rightarrow \boxed{[\omega_s] = \dot{R}R^{-1}}$

Por otro lado, $\omega_b = R_{sb}^{-1}\omega_s \Rightarrow [\omega_b] = [R^T\omega_s] = R^T[\omega_s]R = R^T(\dot{R}R^{-1})R = R^T\dot{R} \Rightarrow$
$\boxed{[\omega_b] = R^{-1}\dot{R}}$

- ω_b no es la velocidad angular relativa a un SR móvil sino a un SR $\{b\}$ estacionario que coincide instantáneamente con un SR pegado al cuerpo móvil.
- ω_s no depende de la elección de $\{b\}$ y ω_b no depende de la elección de $\{s\}$. Aunque R sí depende de los dos SR, el producto $\dot{R}R^{-1}$ no depende de $\{b\}$ y el producto $R^{-1}\dot{R}$ no depende de $\{s\}$.
- Una velocidad angular expresada en un SR conocido $\{d\}$ puede ser expresada en cq otro SR $\{c\}$ si conocemos la matriz de rotación $R_{cd} \Rightarrow \omega_c = R_{cd}\omega_d$

Coordenadas exponenciales

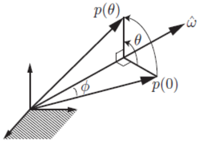
Las coordenadas exponenciales parametrizan una rotación que se puede representar mediante la matriz R en términos de un eje y un ángulo de rotación entorno a ese eje. Así, podemos parametrizar una rotación con sólo 3 números: un vector $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$. Esta representación se puede interpretar de diferentes maneras:

- El eje y el ángulo de rotación ($\hat{\omega}$ y θ) tal que, si un SR inicialmente coincidente con $\{s\}$ fuese rotado un ángulo θ entorno a $\hat{\omega}$, su orientación final relativa a $\{s\}$ vendría expresada por R.
- La velocidad angular $\hat{\omega}\theta$ expresada en $\{s\}$ tal que, si un SR inicialmente coincidente con $\{s\}$ siguiese $\hat{\omega}\theta$ durante una unidad de tiempo ($\Rightarrow$ si integramos $\hat{\omega}\theta$ durante ese intervalo de tiempo), su orientación final vendría expresada por R.
- La velocidad angular $\hat{\omega}$ expresada en $\{s\}$ tal que, si un SR inicialmente coincidente con $\{s\}$ siguiese $\hat{\omega}$ durante un tiempo θ ($\Rightarrow$ si integramos $\hat{\omega}$ durante ese intervalo de tiempo), su orientación final vendría expresada por R.

El nombre de coordenadas exponenciales viene de que su relación con una ecuación diferencial nos permite expresar las rotaciones como una exponencial de su valor.

Coordenadas exponenciales

Rotamos $p(0)$ un ángulo θ entorno a un eje $\hat{\omega}$ para obtener $p(\theta)$.



$p(\theta)$ se obtiene rotando $p(0)$ a una velocidad angular constante de 1 rad/s entorno a $\hat{\omega}$ (vector unitario) durante un tiempo θ.

Si $p(t)$ es la trayectoria que describe $p \Rightarrow \dot{p} = \hat{\omega} \times p \Rightarrow \dot{p} = [\hat{\omega}]p$

Esta es una ecuación diferencial lineal de la forma $\dot{x} = Ax$ cuya solución es: $p(t) = e^{[\hat{\omega}]t}p(0) \Rightarrow p(\theta) = e^{[\hat{\omega}]\theta}p(0)$

Fórmula de Rodrigues

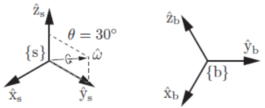
Dado un vector $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$, tal que θ es cq escalar y $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario, la matriz exponencial de $[\hat{\omega}]\theta = [\hat{\omega}\theta] \in so(3)$ es:

$$Rot(\hat{\omega}, \theta) = e^{[\hat{\omega}]\theta} = \mathbb{I} + \text{sen}\,\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2 \ \in SO(3)$$

- $\Rightarrow$ se puede construir una matriz de rotaciones a partir de la matriz exponencial cuyo argumento es el producto de un eje $\hat{\omega}$ y un ángulo $\theta \Rightarrow e^{[\hat{\omega}]\theta}p(0)$ nos da la rotación de $p \in \mathbb{R}^3$ entorno al vector $\hat{\omega}$ por un ángulo θ.
- Una matriz de rotación se puede considerar como 3 vectores columna $\Rightarrow R' = e^{[\hat{\omega}]\theta}R = Rot(\hat{\omega}, \theta)R$ es la orientación alcanzada rotando R un ángulo θ entorno al eje $\hat{\omega}$ definido en el SR fijo $\{s\}$.
- Si invertimos el orden de multiplicación de la matriz: $\Rightarrow R' = Re^{[\hat{\omega}]\theta} = R\,Rot(\hat{\omega}, \theta)$ es la orientación alcanzada rotando R un ángulo θ entorno al eje $\hat{\omega}$ definido en el SR $\{b\}$.

Coordenadas exponenciales

$\{b\}$ se obtiene rotando rotando $\{s\}$ entorno al eje $\hat{\omega}_1 = (0, 0.866, 0.5)$ un ángulo de $\theta_1 = 30$ $(= 0.524\, rad)$.



$\Rightarrow R_{sb} = e^{[\hat{\omega}_1]\theta_1} = \mathbb{I} + \text{sen}\,\theta_1[\hat{\omega}_1] + (1 - \cos\theta_1)[\hat{\omega}_1]^2$

$$R = I + 0.5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.134 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.250 & 0.433 \\ 0.250 & 0.967 & 0.058 \\ -0.433 & 0.058 & 0.899 \end{bmatrix}$$

La orientación de $\{b\}$ puede representarse por R o por la combinación del vector $\hat{\omega}_1 = (0, 0.866, 0.5)$ y el ángulo $\theta_1 = 30 \Rightarrow$ la coordenada exponencial $\hat{\omega}_1\theta_1 = (0, 0.453, 0.262)$.

Si hacemos una rotación adicional de un ángulo $\theta_2 \Rightarrow R' = e^{[\hat{\omega}_2]\theta_2} R$.
Si esta misma rotación la realizamos entorno a un vector $\hat{\omega}_2$ expresado en coordenadas de $\{b\} \Rightarrow R'' = Re^{[\hat{\omega}_2]\theta_2}$
Ojo con el orden del producto!!! $R' \neq R''$

Matriz logaritmo de rotaciones

- Si $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$ representa las coordenadas exponenciales de una matriz de rotación R, la matriz antisimétrica $[\hat{\omega}\theta]$ es la matriz logaritmo de la rotación.
- La matriz exponencial integra la representación matricial de una velocidad angular $[\hat{\omega}]\theta \in so(3)$ durante un segundo para dar una orientación $R \in SO(3)$.
- La matriz logaritmo deriva una matriz $R \in SO(3)$ para devolver la representación matricial de una velocidad angular constante $[\hat{\omega}]\theta \in so(3)$ que, si se integra durante un segundo, rota un SR $\mathbb{I}$ para dar R.

$$\begin{aligned} exp: &\quad [\hat{\omega}]\theta \in so(3) \rightarrow R \in SO(3) \\ log: &\quad R \in SO(3) \rightarrow [\hat{\omega}]\theta \in so(3) \end{aligned}$$

Matriz logaritmo de rotaciones

Matriz logaritmo de rotaciones

Dada $R \in SO(3)$ la matriz logaritmo ($log(R)$) devuelve el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ y un eje de rotación $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, t.q. $e^{[\hat{\omega}]\theta} = R$. El vector $\hat{\omega}\theta$ contiene las coord. exponenciales para R $\Rightarrow log(R) = [\hat{\omega}]\theta \in so(3)$ (grupo de matrices antisimétricas). ¿ Cómo se obtiene?

- Si $R = \mathbb{I} \Rightarrow \theta = 0$ y $\hat{\omega}$ no está definido.
- Si $tr(R) = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ y $\hat{\omega}$ tiene 3 posibles soluciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}}\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1+r_{33} \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ 1+r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}}\begin{bmatrix} 1+r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$$

- En cq otro caso $\theta = \cos^{-1}[0.5(tr(R)-1)] \in [0, \pi]$ y $[\hat{\omega}] = (2\,\mathrm{sen}\,\theta)^{-1}(R - R^T)$.

Todas las matrices $R \in SO(3)$ satisfacen uno de los 3 casos $\Rightarrow \forall R\ \exists$ una matriz logaritmo $[\hat{\omega}]\theta$ y un conjunto de coordenadas exponenciales para la rotación $\hat{\omega}\theta$.

Las coord. exponenciales resultantes de $\log(R) \Rightarrow ||\hat{\omega}\theta|| \leq \pi \Rightarrow$ podemos representar el grupo de rotaciones $SO(3)$ como una esfera sólida de radio π. $\forall r \in \mathbb{R}^3$ que esté dentro de esta esfera $\hat{\omega} = r/||r||$ y $\theta = ||r|| \Rightarrow r = \hat{\omega}\theta$.
Si $tr(R) \neq -1 \Rightarrow$ sólo hay una solución. Si $tr(R) = -1 \Rightarrow \log(R)$ viene dada por 2 puntos opuestos en la superficie de la esfera sólida $\Rightarrow$ si $\exists r$ t. q. $R = e^{[r]}$ con $||r|| = \pi \Rightarrow R = e^{[-r]}$ también es solución y ambos r y $-r$ dan la misma rotación.

Matrices exponenciales y matrices logaritmo

Ejercicios

- Crea una función $MatrixExp3(\hat{\omega}, \theta)$ en Python que calcule la matriz exponencial para la rotación correspondiente a un determinado eje unitario $\hat{\omega}$ y un ángulo θ.
- Crea una función $MatrixLog3(R)$ en Python que calcule el eje unitario y el ángulo de rotación a partir de una matriz $SO(3)$, devolviendo todas las soluciones posibles.
- Valida las dos funciones que acabas de crear haciendo la transformación de varias rotaciones en los dos sentidos.
- Haz un pequeño programa para verificar que las rotaciones que obtienes a partir de estas matrices son las mismas que obtenías con las funciones que desarrollaste anteriormente para las matrices de rotación entorno a los ejes cartesianos y entorno a un eje de rotación genérico.

Movimientos de sólidos rígidos y Giros

A continuación vamos a generalizar la formulación anterior para representar configuraciones y velocidades de sólidos rígidos.

- Las matrices de Transformación Homogénea (T) son una generalización de las matrices de Rotación (R), que además de rotaciones incluyen desplazamientos
- Los ejes helicoidales $\mathcal{S}$ son una generalización de los ejes de rotación $\hat{\omega}$
- Los giros ν se pueden expresar como $\mathcal{S}\dot{\theta}$ tal como la velocidad angular la expresábamos como $\omega = \hat{\omega}\dot{\theta}$
- Las coordenadas exponenciales $\mathcal{S}\theta \in \mathbb{R}^6$ para un sólido rígido son análogas a las coordenadas exponenciales $\hat{\omega}\dot{\theta} \in \mathbb{R}^3$ para rotaciones.

Matrices de Transformación Homogéneas

Matrices de Transformación Homogéneas

Las Matrices de transformación homogénea, grupo de movimientos de sólidos rígidos o grupo Especial Euclídeo (SE(3)) es el conjunto de todas las matrices 4×4 de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{donde } R \in SO(3) \text{ y } p \in \mathbb{R}^3 \text{ es un vector columna.}$$

Dado que muchos sólidos rígidos y sus movimientos son planos, definimos también el grupo $SE(2)$ como las matrices reales 3×3:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & p_1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

- La inversa de una Matriz de Transformación Homogénea es otra MTH.
- Propiedad asociativa: $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$ (no conmutativa: $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$)
- Dado $T \in SE(3)$ y $x, y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow ||Tx - Ty|| = ||x - y||$; con $||x|| = \sqrt{(x^T x)} \Rightarrow$ la transformación x a Tx mantiene el módulo (T mantiene distancias).
- Dado $T \in SE(3)$ y $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow < Tx - Tz, Ty - Tz > = < x - z, y - z >$; donde $< x, y > = x^T y$ (producto vectorial) $\Rightarrow$ la transformación mantiene los ángulos.

Usos de las Matrices de Transformación Homogéneas

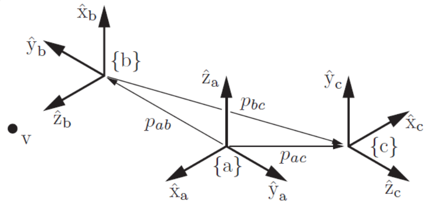
Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ representan los 3 vértices de un triángulo, el triángulo formado por los vértices transformados $\{Tx, Ty, Tz\}$ tiene las mismas dimensiones y ángulos que el original (son isométricos). Si $\{x, y, z\}$ son 3 puntos de un sólido rígido $\Rightarrow \{Tx, Ty, Tz\}$ representa una configuración diferente del cuerpo. Por este motivo $SE(3)$ se puede identificar con los movimientos de un sólido rígido.

Usos de las Matrices de Transformación Homogéneas:

- Representar la configuración (posición y orientación) de un sólido rígido.
- Cambiar el SR en el que se representa un vector o un SR (actúa como un operador).
- Desplazar un vector o un SR (actúa como un operador).

Matrices de Transformación Homogéneas

Si el sistema de referencia fijo $\{s\}$ coincide con $\{a\}$, las matrices que expresan los distintos SR son:



$$T_{sa} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ T_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ T_{sc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier par de SR pueden ser conectados a través de una Matriz de Transformación Homogénea. Por ejemplo:

$$T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar también que para cualquier para de SR $T_{de} = T_{ed}^{-1}$
Para cambiar de SR un SR o un vector se verifica la ley de cancelación de subíndices consecutivos

$$T_{ab}T_{bc} = T_{a\cancel{b}}T_{\cancel{b}c} = T_{ac}$$
$$T_{ab}v_b = T_{a\cancel{b}}v_{\cancel{b}} = v_a$$

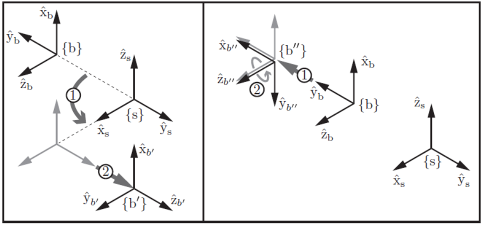
Matrices de Transformación Homogéneas

Una matriz de transformación puede actuar sobre un SR rotándolo un ángulo θ entorno a un eje $\hat{\omega}$ y trasladándolo con un vector p. Podemos extender el operador de rotación R a una matriz de transformación homogénea 4×4 que rota sin trasladar:

$$Rot(\hat{\omega}, \theta) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente podemos definir un operador de traslación, que traslada sin rotar, como:

$$Tras(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Igual que en las matrices R, la pre-multiplicación y la post-multiplicación indican si el eje de rotación de T está expresado en el SR fijo $\{s\}$ o en $\{b\}$.

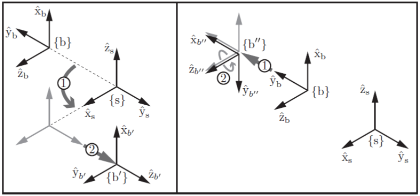
$$\textbf{\{s\}:}\ T_{sb'} = TT_{sb} = Tras(p)Rot(\hat{\omega}, \theta)T_{sb} \Rightarrow$$

$$T_{sb'} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR_{sb} & Rp_{sb} + p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\{b\}:}\ T_{sb''} = T_{sb}T = T_{sb}Tras(p)Rot(\hat{\omega}, \theta) \Rightarrow$$

$$T_{sb''} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb}R & R_{sb}p + p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Transformación Homogéneas



$TT_{sb} \Rightarrow$ rotación de $\{b\}$ un ángulo θ entorno a $\hat{\omega}_s$ ($\Rightarrow$ desplazamiento del origen de $\{b\}$) + traslación del SR resultante un vector p_s para acabar con un SR $\{b'\}$.
$T_{sb}T \Rightarrow$ traslación de $\{b\}$ un vector p_b + rotación entorno a $\hat{\omega}_b$ (esta rotación no mueve el origen de $\{b\}$) para acabar con un SR $\{b''\}$.

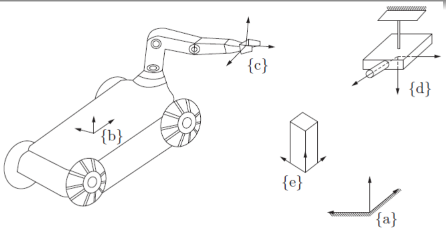
Para una rotación de $\theta = \pi/2$ entorno a un eje $\hat{\omega} = (0, 0, 1)$ y un desplazamiento de $p = (0, 2, 0)$, para el SR $\{b\}$ tal como se define en la figura:

$$T(Rot(\hat{\omega}, \theta), p) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; T_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TT_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; T_{sb}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Transformación Homogéneas

El dibujo muestra un brazo robótico sobre una plataforma móvil y una cámara fija en el techo. Los SR $\{b\}$ y $\{c\}$ están pegados a la base de la plataforma y en el elemento terminal del brazo robótico, respectivamente. Se define también un SR fijo $\{a\}$ y el robot ha de recoger un objeto al que se fija un SR $\{e\}$.



Supongamos que las transformaciones T_{db} y T_{de} se pueden calcular a partir de medidas realizadas con la cámara. La transformación T_{bc} puede calcularse utilizando las medidas de las articulaciones del brazo robótico. La transformación T_{ad} se supone conocida:

$$T_{db} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 250 \\ 0 & -1 & 0 & -150 \\ -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; T_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 30 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -40 \\ 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Transformación Homogéneas

Para calcular cómo mover el brazo robótico de manera que coja el objeto, debemos determinar la configuración del objeto relativo al elemento terminal del robot T_{ce}.

$T_{ab} T_{bc} T_{ce} = T_{ad} T_{de}$; donde $T_{ab} = T_{ad} T_{db} \Rightarrow \boxed{T_{ce} = (T_{ad} T_{db} T_{bc})^{-1} T_{ad} T_{de}}$

$$T_{ad} T_{de} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; T_{ad} T_{db} T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 230 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 160 \\ 1 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T_{ad} T_{db} T_{bc})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 70/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 390/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ce} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -260/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 160/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También se puede calcular haciendo simplemente: $\boxed{T_{ce} = T_{bc}^{-1} T_{db}^{-1} T_{de}}$

Giros

Consideremos un SR móvil $\{b\}$ en coordenadas de un SR fijo $\{s\}$

$$T_{sb} = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que pre-multiplicando o post-multiplicando $\dot{R}$ por R^{-1} obtenemos la representación antisimétrica del vector velocidad angular en $\{s\}$ o en $\{b\}$ ($[\omega_s] = \dot{R}R^{-1}$; $[\omega_b] = R^{-1}\dot{R}$). ¿ Funciona también con T?

$$T^{-1}\dot{T} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T\dot{R} & -R^T\dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow T^{-1}\dot{T}$ representa las velocidades angular y lineal del SR móvil con respecto a $\{b\}$, que en el instante considerado está alineado con el SR móvil.
Unimos la velocidad angular y la velocidad lineal en un vector 6D al que llamamos

velocidad espacial o **Giro** en {b}: $\nu_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$

que se puede expresar también como una matriz antisimétrica: $T^{-1}\dot{T} = \quad [\nu_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$

donde $[\omega_b] \in so(3)$ y $v_b \in \mathbb{R}^3$. El conjunto de matrices 4×4 de esta forma se llama *Álgebra de Lie* $se(3)$ y comprende las representaciones matriciales de los Giros asociados con las configuraciones del *Grupo de Lie* $SE(3)$ de un sólido rígido. $se(3)$ contiene todos los posibles $\dot{T}$ cuando $T = \mathbb{I}$.

Giros

$$\dot{T}T^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}R^T & \dot{p} - \dot{R}R^T p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[\omega_s] = \dot{R}R^{-1} \rightarrow$ velocidad angular expresada en coordenadas de $\{s\}$
$v_s = \dot{p} - \dot{R}R^T p$ no es la velocidad lineal de $\{b\}$ en coordenadas de $\{s\}$; esa cantidad sería directamente $\dot{p}$. v_s puede también escribirse como:

$$v_s = \dot{p} - \omega_s \times p = \dot{p} + \omega_s \times (-p)$$

v_s es la velocidad instantánea de un punto del sólido rígido trasladado a $\{s\}$ y expresado en coordenadas del mismo SR $\{s\}$. De nuevo definimos el vector 6D

$$\nu_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6; \quad [\nu_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{T}T^{-1} \in se(3)$$

donde $[\nu_s]$ es la representación matricial 4×4 de la velocidad espacial o giro ν_s expresado en el SR fijo $\{s\}$. Hay una analogía entre $\nu_s = (\omega_s, v_s)$ y $\nu_b = (\omega_b, v_b)$:

- ω_b es la velocidad angular expresada en $\{b\}$ y ω_s es la velocidad angular expresada en $\{s\}$.
- v_b es la velocidad lineal de un punto situado en el origen de $\{b\}$ expresado en coordenadas de $\{b\}$ y v_s es la velocidad lineal de un punto situado en el origen de $\{s\}$ expresado en coordenadas de $\{s\}$. $v_s = 0$ en un movimiento de rotación entorno a $\{s\}$ y $v_s = \dot{p}$ en un movimiento de traslación puro.

Relación entre los dos Giros: $[\nu_b] = T^{-1}\dot{T} = T^{-1}[\nu_s]T$ y $[\nu_s] = T[\nu_b]T^{-1}$

Giros

Representación adjunta de una matriz de transformación homogénea

Dada una matriz de transformación homogénea $T = (R, p) \in SE(3)$

$$[Ad_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}; \quad \forall\ \nu\ in\ \mathbb{R}^6 \quad \nu' = [Ad_T]\nu = Ad_T(\nu)$$

$\forall\, \nu \in \mathbb{R}^6$, ν' es el **Mapa Adjunto** asociado a T

En términos de la forma matricial $[\nu] \in se(3)$ de $\nu \in \mathbb{R}^6 \Rightarrow [\nu'] = T[\nu]T^{-1}$

La matriz adjunta verifica las siguientes propiedades:

$$\forall T_1, T_2 \in SE(3)\, y\, \nu = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6 \Rightarrow \begin{cases} Ad_{T_1}(Ad_{T_2}(\nu)) = Ad_{T_1 T_2}(\nu) \\ [Ad_{T_1}][Ad_{T_2}]\nu = [Ad_{T_1 T_2}]\nu \end{cases}$$

$$\forall T \in SE(3) \Rightarrow [Ad_T]^{-1} = [Ad_{T^{-1}}]$$

Giros

Resumiendo, dado un SR fijo $\{s\}$, un SR pegado al cuerpo móvil $\{b\}$ y una matriz de transformación homogénea diferenciable $T_{sb}(t) \in SE(3)$,

$$T_{sb}(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_{sb}^{-1}\dot{T}_{sb} = [\nu_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \\ \\ \dot{T}_{sb}T_{sb}^{-1} = [\nu_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \end{cases}$$

Son las representaciones matriciales del Giro en $\{s\}$ y en $\{b\}$.

$$\nu_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = [Ad_{T_{sb}}]\nu_b$$

$$\nu_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ -R^T[p] & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = [Ad_{T_{bs}}]\nu_s$$

De manera general, para cq par de SR $\{c\}$ y $\{d\}$ los Giros correspondientes se relacionan por: $\nu_c = [Ad_{T_{cd}}]\nu_d$

Igual que en el caso de las velocidades angulares, para un Giro dado su representación en el SR $\{s\}$ no depende de la elección del SR $\{b\}$, así como su representación en $\{b\}$ no depende de la elección de $\{s\}$.

Matrices de transformación homogénea y vectores giro

Ejercicios

- Crea una función $RpToTrans(R, p)$ en Python que convierta una matriz de rotación y un vector de posición en una matriz de transformación homogénea.
- Crea una función $TransToRp(T)$ en Python que convierta una matriz de transformación homogénea en una matriz de rotación y en un vector posición.
- Crea una función $TransInv(T)$ en Python que calcule la matriz inversa de una matriz de transformación homogénea. Recuerda que: $T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y que la matriz inversa de una matriz de rotación es igual a su traspuesta: $R^{-1} = R^T$ y se puede calcular fácilmente utilizando la librería numpy:

```
Rinv = np.array(R).T
```

- Crea una función $VecTose3(V)$ en Python que convierta un vector giro $\nu \in \mathbb{R}^6$ en una matriz $\in se(3)$.
- Crea una función $se3ToVec(se3mat)$ en Python que convierte una matriz $se(3)$ en un vector giro ν.
- Utilizando las funciones anteriores, realiza una transformación de un vector giro en la representación matricial $[\nu] \in se(3)$ (matriz 4×4) entre dos SR. Recuerda que:

$$[\nu_b] = T^{-1}\dot{T} = T^{-1}[\nu_s]T \quad \text{y} \quad [\nu_s] = T[\nu_b]T^{-1}$$

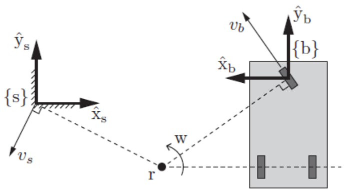
Matrices adjuntas

Ejercicios

- Crea una función $Adjunta(T)$ en Python que devuelva la representación adjunta de una matriz de transformación homogénea. Recuerda que: $[Ad_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]\,R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$.
- Propón un par de matrices de transformación homogéneas T y comprueba que $[Ad_T]^{-1} = [Ad_{T^{-1}}]$.
- Utilizando la función $Adjunta(T)$, realiza una transformación de un vector giro en la representación $\nu \in \mathbb{R}^6$ entre dos SR.

Giros

En la figura se muestra un coche visto desde arriba con una sola rueda frontal. El eje z de $\{b\}$ está hacia la parte inferior del coche y el eje z de $\{s\}$ va justo en la dirección opuesta. El ángulo de la rueda frontal hace que el movimiento del coche sea una rotación pura con velocidad angular $\omega = 2\,rad/s$ entorno a un eje hacia fuera de la página que pasa por el punto r del plano.



$$r_s = (2, -1, 0); \qquad \omega_s = (0, 0, 2);$$
$$r_b = (2, -1.4, 0); \qquad \omega_b = (0, 0, -2)$$

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

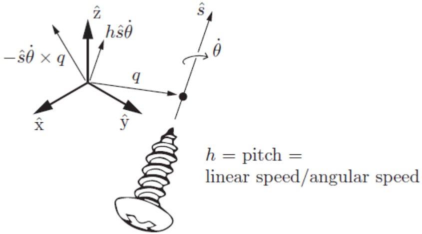
$$v_s = \omega_s \times (-r_s) = r_s \times \omega_s = (-2, -4, 0)$$
$$v_b = \omega_b \times (-r_b) = r_b \times \omega_b = (2.8, 4, 0)$$

$$\Rightarrow \nu_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}; \; \nu_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2.8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Confirma este resultado calculando $\nu_s = [Ad_{T_{sb}}]\nu_b$

Giros

La velocidad angular ω puede verse como $\hat{\omega}\dot{\theta}$, donde $\hat{\omega} \rightarrow$ vector unitario en la dirección del eje de rotación y $\dot{\theta} \rightarrow$ razón de cambio de ángulo entorno a ese eje.
Análogamente, un giro puede interpretarse en términos de un **eje helicoidal** $\mathcal{S}$ y una velocidad $\dot{\theta}$ entorno a ese eje.



Un movimiento helicoidal se puede representar con el movimiento de un tornillo: rotando entorno a un eje al tiempo que hay traslación a lo largo del mismo.

Representación de un eje helicoidal: $\{q, \hat{s}, h\}$ donde $q \in \mathbb{R}^3$ es cq punto del eje, $\hat{s}$ es un vector unitario en la dirección del eje y h es el **paso de la hélice** (pitch), ($h \rightarrow$cociente entre la velocidad lineal a lo largo del eje helicoidal y la velocidad angular entorno al mismo).

El Giro $\nu = (\omega, v)$ correspondiente a una velocidad angular $\dot{\theta}$ entorno a un eje helicoidal $\mathcal{S} = \{q, \hat{s}, h\}$ puede escribirse como:

$$\nu = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}\dot{\theta} \\ -\hat{s}\dot{\theta} \times q + h\hat{s}\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

donde la velocidad lineal v tiene una contribución debido a traslación a lo largo del eje helicoidal ($h\hat{s}\dot{\theta}$) y otra debido al movimiento lineal en el origen inducido por la rotación a lo largo del eje ($-\hat{s}\dot{\theta} \times q$).

Giros

$$\nu = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}\dot{\theta} \\ -\hat{s}\dot{\theta} \times q + h\hat{s}\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

el término $h\hat{s}\dot{\theta}$ de v es paralelo a $\hat{s}$
el término $-\hat{s}\dot{\theta} \times q$ está en el plano perpendicular a $\hat{s}$

- $\forall\, \nu = (\omega, v)$ donde $\omega \neq 0 \;\Rightarrow \exists$ un eje helicoidal $\{q, \hat{s}, h\}$ y una velocidad $\dot{\theta}$, donde $\hat{s} = \omega/||\omega||$, $\dot{\theta} = ||\omega||$, $h = \hat{\omega}^T v/\dot{\theta}$ y q se escoge de manera que el término $-\hat{s}\dot{\theta} \times q$ devuelve la contribución a v que es perpendicular al eje helicoidal.
- Si $\omega = 0 \Rightarrow h = \infty$. En este caso $\hat{s} = v/||v||$ y $\dot{\theta}$ se interpreta como la velocidad lineal $||v||$ a lo largo del eje $\hat{s}$.
- Un eje helicoidal $\{q, \hat{s}, h\}$ se puede representar como un Giro normalizado $\nu = (\omega, v)$ correspondiente al movimiento entorno a ese eje:
- Si $\omega \neq 0 \Rightarrow \mathcal{S} = \nu/||\omega|| = (\omega/||\omega||, v/||\omega||) \Rightarrow \nu = \mathcal{S}\dot{\theta}$; donde $||\omega|| = \dot{\theta}$.
- Si $\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{S} = \nu/||v|| = (0, v/||v||) \Rightarrow \nu = \mathcal{S}\dot{\theta}$; donde $||v|| = \dot{\theta}$.
- De manera general, podemos escribir el eje helicoidal $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ donde:
  - $||\omega|| = 1 \Rightarrow v = -\omega \times q + h\omega$, donde q es un punto del eje helicoidal y h es el paso de la hélice ($h = 0$ para un movimiento de rotación puro).
  - $||\omega|| = 0 \Rightarrow h = \infty$ y el Giro es una traslación pura a lo largo del eje definido por el vector v.

Giros

Un eje helicoidal $\mathcal{S} = (\omega, v)$, como Giro normalizado, se puede representar como una matriz 4×4:

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3); \qquad \text{con} \qquad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in so(3)$$

$\mathcal{S}$ puede transformarse entre diferentes SR: $\mathcal{S}_a = [Ad_{T_{ab}}]\mathcal{S}_b$

Ejercicios

- Dados dos SR $\{s\}$ y $\{b\}$, relacionados mediante una matriz de transformación homogénea T, calcula el eje helicoidal y el vector giro correspondientes a la rotación de $\{b\}$ entorno a un eje perpendicular al plano xy con una velocidad angular $||\omega|| = 2\, rad/s$ y situado en el punto $P = (-1, 3, 0)$ (ambos en coordenadas de $\{s\}$). Da el resultado en coordenadas de ambos SR.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizando las funciones que desarrollaste en los ejercicios anteriores, calcula la transformación del eje helicoidal a coordenadas del SR $\{b\}$. Resuelve el ejercicio de dos maneras diferentes: (i) utilizando directamente la matriz de transformación homogénea y su inversa, con la representación matricial del eje helicoidal; y (ii) utilizando la representación vectorial del eje helicoidall en $\mathbb{R}^6$ y la matriz adjunta.

Movimiento de Sólidos Rígidos en Coordenadas Exponenciales

- **Teorema de Chasles-Mozzi** $\rightarrow$ todo desplazamiento de un sólido rígido = un desplazamiento a lo largo de un eje helicoidal $\mathcal{S}$ fijo en el espacio.
- Por analogía con las coordenadas exponenciales $\hat{\omega}\dot{\theta}$ para rotaciones, definimos las **coordenadas exponenciales 6D de una transformación homogénea** T como $\mathcal{S}\theta \in \mathbb{R}^6$, donde $\mathcal{S}$ es el eje helicoidal y θ es la distancia que se debe recorrer a lo largo del eje helicoidal para llevar el SR desde el origen $\mathbb{I}$ a T.
- Si el paso de la hélice $\mathcal{S} = (\omega, v)$ es finito $\Rightarrow ||\omega|| = 1$ y θ es el ángulo de rotación entorno al eje helicoidal. Si el paso de la hélice es infinito $\Rightarrow \omega = 0$, $||v|| = 1$ y θ es la distancia lineal que se recorre a lo largo del eje de la hélice.
- **Matriz Exponencial** $e^{[\mathcal{S}]\theta}$ para un eje helicoidal $\mathcal{S} = (\omega, v)$
  - Si $||\omega|| = 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$ = distancia recorrida a lo largo del eje $\Rightarrow$

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & (\mathbb{I}\theta + (1-\cos\theta)[\omega] + (\theta - \operatorname{sen}\theta)[\omega]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Si $||\omega|| = 0$ y $||v|| = 1 \Rightarrow e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Dada una transformación arbitraria $(R, p) \in SE(3)$, siempre se puede encontrar un eje helicoidal $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$ (donde $||\omega|| = 1$ ó $||v|| = 1$) y un escalar $\theta \in [0, \pi]$ tal que $e^{[\mathcal{S}]\theta} = T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ la matriz $[\mathcal{S}]\theta = \begin{bmatrix} [\omega]\theta & v\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$ es la **Matriz Logaritmo** de $T = (R, p)$.

Movimiento de Sólidos Rígidos en Coordenadas Exponenciales

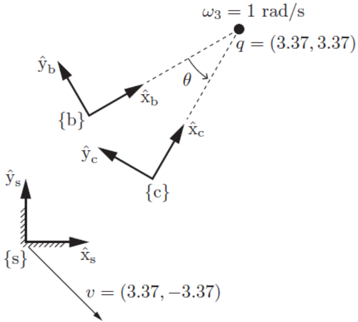
¿ Cómo se calculan las coordenadas exponenciales a partir de la matriz de transformación homogénea? $\Rightarrow$ Matriz Logaritmo

- Si $R = \mathbb{I} \Rightarrow \omega = 0$, $v = p/||p||$ y $\theta = ||p||$.
- En cq otro caso, se utiliza la matriz logaritmo sobre $SO(3)$ para determinar ω (ver sección de rotaciones) y θ para R. Una vez calculadas ω y θ, se calcula $v = G^{-1}(\theta)p$ donde
$$G^{-1}(\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{I} - \frac{1}{2}[\omega] + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)[\omega]^2$$

Veamos un ejemplo donde el movimiento del sólido rígido es plano. $\{s\}$ es el SR fijo, $\{b\}$ es el SR en la posición inicial y $\{c\}$ es el SR en la posición final. Representamos los SR $\{b\}$ y $\{c\}$ por matrices $SE(3)$.

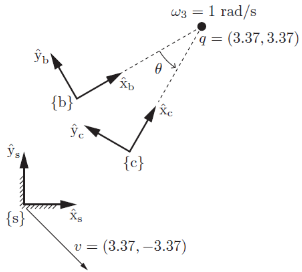
$$T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\operatorname{sen} 30 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen} 30 & \cos 30 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{sc} = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 & 0 & 2 \\ \operatorname{sen} 60 & \cos 60 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Movimiento de Sólidos Rígidos en Coordenadas Exponenciales

Como el movimiento tiene lugar en el plano xy, la hélice correspondiente tiene su eje en la dirección del eje z. Además, el paso de la hélice es nulo ($h = 0$) por ser movimiento plano. El eje helicoidal $\mathcal{S} = (\omega, v)$ expresado en $\{s\}$ tiene la forma $\omega = (0, 0, \omega_3)$ y $v = (v_1, v_2, 0)$. Buscamos el movimiento helicoidal que desplaza $\{b\}$ a $\{c\} \Rightarrow T_{sb} \rightarrow T_{sc} \Rightarrow T_{sc} = e^{[\mathcal{S}]\theta} T_{sb}$ ó $T_{sc} T_{sb}^{-1} = e^{[\mathcal{S}]\theta}$



$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 & v_1 \\ \omega_3 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo para el cálculo de la matriz logaritmo sobre $T_{sc} T_{sb}^{-1}$ obtenemos:

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3.37 \\ 1 & 0 & 0 & -3.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3.37 \\ -3.37 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \theta = \frac{\pi}{6}\, rad \quad (\theta = 30)$$

$\Rightarrow \theta = 1\, rad/s$ entorno al eje z y $v = (3.37, -3.37, 0)$ expresados en $\{s\}$.

Movimiento de Sólidos Rígidos en Coordenadas Exponenciales

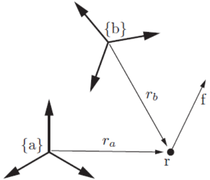
Ejercicios

- Crea una función $MatrixExp6(se3mat)$ en Python que calcule la matriz exponencial de un vector giro en representación matricial 4×4.
- Crea una función $MatrixLog6(T)$ en Python que calcule la matriz logaritmo de una matriz de transformación homogénea.
- Prueba ambas funciones calculando las transformaciones sobre diferentes vectores, incluyedo traslaciones y rotaciones puras, y representando los resultados con FreeCAD.

Llaves

Una fuerza lineal f actúa sobre un sólido rígido en un punto r. $r_a \in \mathbb{R}^3$ es el punto r en coordenadas del SR $\{a\}$. La fuerza $= f_a \in \mathbb{R}^3$. Esta fuerza crea un torque o momento $m_a = r_a \times f_a$.
Unimos el momento y la fuerza en un vector 6D llamado **Fuerza Espacial** o **Llave**:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} m_a \\ f_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$



Si sobre un sólido rígido actúa más de una llave, la llave total se calcula como la suma de las llaves, siempre que éstas estén expresadas en el mismo SR. Una llave con componente lineal nula se llama momento puro.
Las llaves pueden expresarse en diferentes SR si se conoce la matriz de transformación correspondiente. Para encontrar la relación entre llaves de distintos SR se puede hacer como con los Giros pero también podemos sacar partido del hecho de que la potencia generada o disipada por un par $(\mathcal{F}, \nu)$ debe ser el mismo independientemente del SR utilizado (el producto punto de una fuerza por una velocidad es una potencia y la potencia es independiente de las coordenadas).

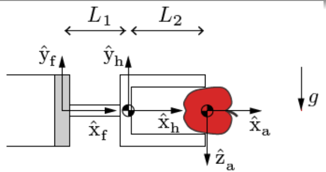
$$\nu_b^T \mathcal{F}_b = \nu_a^T \mathcal{F}_a = ([Ad_{T_{ab}}]\nu_b)^T \mathcal{F}_a = \nu_b^T [Ad_{T_{ab}}]^T \mathcal{F}_a \Rightarrow \mathcal{F}_b = [Ad_{T_{ab}}]^T \mathcal{F}_a$$

Por tanto, podemos definir la Llave en cq SR y relacionarlas mediante la siguiente ecuación:

$$\mathcal{F}_b = Ad_{T_{ab}}^T(\mathcal{F}_a) = [Ad_{T_{ab}}]^T \mathcal{F}_a$$

Llaves

El Robot de la figura sostiene una manzana de $100\,g$ en un campo gravitacional $\Rightarrow g = 10\,m/s^2$ hacia abajo. La masa de la mano del robot es de $0.5\,kg$. ¿ Qué fuerza y momento mide el sensor de fuerza/par de 6 ejes localizado entre la mano y el brazo del robot?



$\{f\}$ SR en el punto donde está localizado el sensor de fuerza/par; $\{h\}$ SR en el centro de masas de la mano; y $\{a\}$ SR en el c.o.m. de la manzana.
Llave gravitacional sobre la mano en $\{h\}$: $\mathcal{F}_h = (0, 0, 0, 0, -5\,N, 0)$
Llave gravitacional sobre la manzana en $\{a\}$: $\mathcal{F}_a = (0, 0, 0, 0, 0, 1\,N)$.
Dados $L_1 = 10\,cm$ y $L_2 = 15\,cm$, las matrices de transformación son:

$$T_{hf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1\,m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad T_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.25\,m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La Llave medida por el sensor de fuerza/par es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f &= [Ad_{T_{hf}}]^T \mathcal{F}_h + [Ad_{T_{af}}]^T \mathcal{F}_a \\ &= [0 \quad 0 \quad -0.5\,Nm \quad 0 \quad -5\,N \quad 0]^T + [0 \quad 0 \quad -0.25\,Nm \quad 0 \quad -1\,N \quad 0]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad -0.75\,Nm \quad 0 \quad -6\,N \quad 0]^T \end{aligned}$$