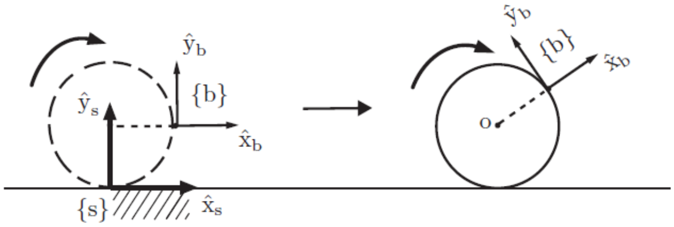
Boletín 4 - I

Matriz Jacobiana, singularidades y manipulabilidad

Los siguientes ejercicios fueron adaptados del libro *Modern Robotics*, Lynch and Park, Cambridge U. Press, 2017. `http://modernrobotics.org`

Ejercicio 1

Calcula el vector giro ν_s de la rueda de la figura en función del tiempo expresado en el SR $\{s\}$ para una velocidad angular ω hacia la derecha y un radio r. Calcula la matriz de transformación homogénea T_{sb} y la velocidad lineal del SR $\{b\}$ en coordenadas de $\{s\}$. Calcula el vector giro ν_b (en el SR $\{b\}$) después de 5 segundos si $\omega = 1\,rad/s$ y $r = 1\,m$.

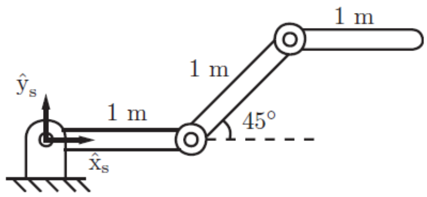


Resultado:

$$\nu_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \\ 0 \\ r\omega^2 t \\ 0 \end{bmatrix}; \; T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \operatorname{sen}\omega t & 0 & r(\omega t + \cos\omega t) \\ -\operatorname{sen}\omega t & \cos\omega t & 0 & r(1-\operatorname{sen}\omega t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; \dot{p}_{sb} = \begin{bmatrix} r\omega(1-\operatorname{sen}\omega t) \\ -r\omega\cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix}; \; \nu_{b(\omega=1,r=1,t=5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0.28 \\ -1.96 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Determina la matriz Jacobiana del robot de la figura en la configuración que se muestra y calcula los torques que se deben aplicar a cada articulación para que el elemento terminal ejerza una fuerza de $5\,N$ en la dirección del eje X y de la misma magnitud en la dirección del eje Y, con momento nulo.

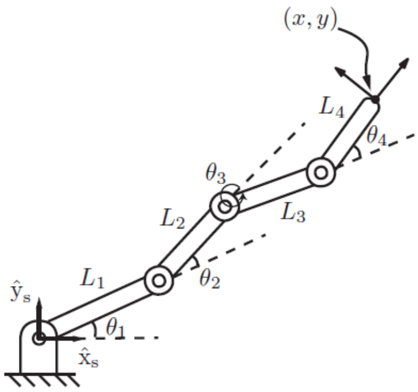


Resultado:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -(1+1/\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \tau_1 = (0, 0, 5/\sqrt{2}); \qquad \tau_2 = -5(0, 1, 1+1/\sqrt{2})$$

Ejercicio 3

Calcula la matriz Jacobiana del robot de la figura en el SR localizado en el elemento terminal. ¿ Qué torque hay que aplicar en las articulaciones para que el robot esté en equilibrio estático en la configuración $\theta = (0, 0, \pi/2, -\pi/2)$ cuando se ejerce una llave $\mathcal{F}_s = (0, 0, 10, 10, 10, 0)$ en el elemento terminal? Determina las singularidades cinemáticas para este robot.



Resultado:

$$J_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ L_3 s_4 + L_2 s_{34} + L_1 s_{234} & L_3 s_4 + L_2 s_{34} & L_3 s_4 & 0 \\ L_4 + L_3 c_4 + L_2 c_{34} + L_1 c_{234} & L_4 + L_3 c_4 + L_2 c_{34} & L_4 + L_3 c_4 & L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = J_s^T \mathcal{F}_s = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - L_1 \\ 1 - L_1 - L_2 \\ 1 - L_1 - L_2 + L_3 \end{bmatrix}$$

Es un robot plano y el elemento terminal queda perfectamente definido por sólo 2 grados de libertad (x, y). El número máximo de columnas linealmente independiente es 2 y si eso sucede ya no estoy en una singularidad porque puedo determinar las dos componentes de la velocidad del elemento terminal (v_x, v_y) escogiendo las coordenadas de las articulaciones. La última columna de J_b es constante (no depende de ningún ángulo) y las demás son proporcionales si $s_4 = s_{34} = s_{234} = 0$. Entonces las singularidades serán todas las articulaciones que verifiquen esa condición $\Rightarrow$ los ángulos θ_2, θ_3, θ_4 (los tres a la vez) han de ser múltiplos de 0 o de π. El ángulo θ_1 puede tomar cualquier valor.