

Física II - Grado en Robótica (EPSE-USC Lugo)

Mecánica de Robots: Cinemática Inversa

Ángel Piñeiro

E-mail: Angel.Pineiro@usc.es

Depto de Física Aplicada
Universidade de Santiago de Compostela

5 de mayo de 2025

Resumen

1 Introducción

2 Cinemática Inversa Analítica

- Robot PUMA-6R
- Robot Stanford-2RP3R

3 Cinemática Inversa Numérica

- Algoritmo de N-R para resolución numérica de ecuaciones no lineales
- Algoritmo N-R para resolución numérica del problema cinemático inverso
- Robot plano 2R

Introducción

Problema Cinemático Inverso

Consiste en encontrar el conjunto de coordenadas de las articulaciones que satisfacen $T(\theta) = X$ para una matriz de transformación homogénea $X \in SE(3)$.

Las coordenadas del elemento terminal, ignorando su orientación, vienen dadas por:

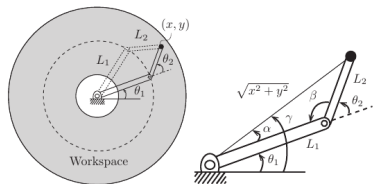
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Si $L_1 > L_2$ los puntos alcanzables (el espacio de trabajo) es un anillo de radio interno $L_1 - L_2$ y radio externo $L_1 + L_2$.

Para una posición dada del elemento terminal (x, y) habrá uno, dos o ningún conjunto de coordenadas θ válidas, en función de si (x, y) son puntos del interior del anillo, de su frontera o del exterior del mismo.

En este caso es posible encontrar una solución analítica para las coordenadas de las articulaciones, despejando θ_1 y θ_2 .

En el caso de la cinemática directa la solución era única, en el caso del problema cinemático inverso puede haber múltiples soluciones, una o ninguna.



Introducción

El problema cinemático directo de un robot de n dof se expresa mediante el siguiente producto de matrices exponenciales:

$$T(\theta) = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_n]\theta_n} M$$

Si me dan la posición y orientación del elemento terminal como una matriz $X \in SE(3)$, el problema cinemático inverso consiste en encontrar las coordenadas de las articulaciones $\theta \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(\theta) = X$.

Para resolver analíticamente el problema cinemático inverso haremos uso de las siguientes relaciones matemáticas:

- $\text{atan2}(y, x) \in [-\pi, \pi] \rightarrow$ ángulo entre el origen y un punto (x, y) en el plano.
- Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, con a, b, c los lados de un triángulo y C el ángulo opuesto al lado c .

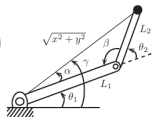
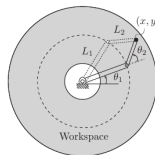
Resolviendo para el robot plano 2R:

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos \beta = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\cos \beta = \frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2}; \quad \cos \alpha = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\gamma = \text{atan2}(y, x) \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \gamma - \alpha \text{ y } \theta_2 = \pi - \beta \\ \theta_1 = \gamma + \alpha \text{ y } \theta_2 = \beta - \pi \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ soluciones}$$

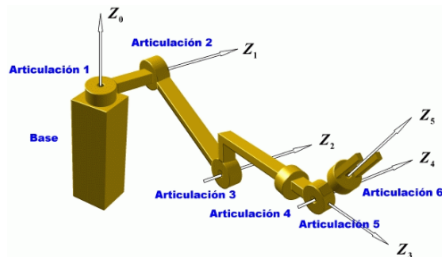
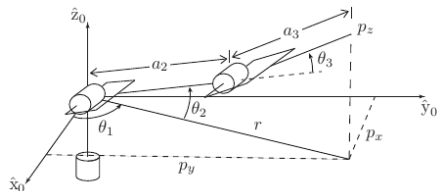
Si $(x^2 + y^2)$ está fuera del rango $[L_1 - L_2, L_1 + L_2] \Rightarrow$ no hay solución.



En las figuras se muestran 2 representaciones de un robot 6R tipo PUMA en su configuración cero en la que:

- Los 2 ejes del hombro se intersectan de manera ortogonal en un punto común con el eje de la primera articulación en la orientación z y el de la segunda en la dirección y .
- El eje de la tercera articulación (el codo) está en el plano xy y es paralelo al eje de la segunda articulación.
- Los 3 ejes de la muñeca se intersectan de manera ortogonal en un punto común (el centro de la muñeca) y están alineados con los ejes x, y, z .
- Llamamos a_2 y a_3 a las longitudes del segundo y tercer eslabón.

El problema cinemático inverso puede descomponerse en la resolución de la posición y de la orientación de forma separada.



Robot PUMA-6R

Para la configuración cero del robot, si $p = (p_x, p_y, p_z)$ es la posición del centro de la muñeca $\Rightarrow \theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$

Cuando $p_x = p_y = 0$ el brazo está en un posición singular y hay infinitas posibles soluciones para θ_1 .

Si d_1 es la longitud del eslabón que une las dos primeras articulaciones (el hombro) \Rightarrow habrá 2 soluciones para θ_1 , como se muestra en la figura de la dcha:

$$\theta_1 = \phi - \alpha \quad \text{y} \quad \theta_1' = \phi - \alpha'$$

donde $\phi = \text{atan2}(p_y, p_x)$

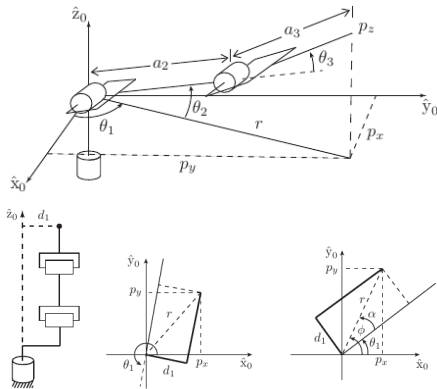
$$\alpha = \text{atan2}(d_1, \sqrt{r^2 - d_1^2})$$

y $\alpha' = \text{atan2}(-\sqrt{r^2 - d_1^2}, d_1)$

La determinación de los ángulos θ_2 y θ_3 es equivalente al problema cinemático inverso de una cadena plana de 2 eslabones (ejemplo anterior):

$$\cos \theta_3 = \frac{r^2 - d_1^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = D \Rightarrow \theta_3 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - D^2}, D) \quad (\text{codo-arriba/abajo})$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(p_z, \sqrt{r^2 - d_1^2}) - \text{atan2}(a_3 s_3, a_2 + a_3 c_3)$$



Robot PUMA-6R

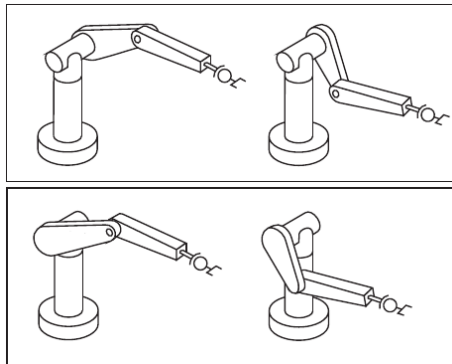
⇒ El Robot tiene 4 soluciones para el problema cinemático inverso de la posición →

Problema cinemático inverso para la orientación implica encontrar $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$.

Una vez resuelta la parte posicional, la cinemática directa puede escribirse como:

$$e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} = e^{-[S_3]\theta_3} e^{-[S_2]\theta_2} e^{-[S_1]\theta_1} XM^{-1}$$

donde todos los factores del lado derecho son conocidos y las componentes ω_i de $[S_4]$, $[S_5]$, y $[S_6]$ son $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente.



$$\Rightarrow e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} = Rot(z, \theta_4) Rot(y, \theta_5) Rot(x, \theta_6) = R$$

donde $Rot(i, \theta_j)$ es la matriz de rotación de un ángulo θ_j entorno al eje i y $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ son los ángulos de Euler, que se pueden calcular analíticamente.

Robot Stanford-2RP3R

La articulación R del codo se sustituye por una articulación prismática. Hay 2 posibles soluciones para las 2 primeras articulaciones:

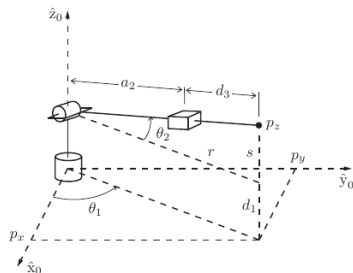
$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad \theta'_1 = \pi + \text{atan2}(p_y, p_x)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(s, r) \quad \theta'_2 = \pi - \text{atan2}(s, r)$$

La distancia de traslación θ_3 se calcula a partir de la siguiente relación:

$$(\theta_3 + a_2)^2 = r^2 + s^2 \Rightarrow \theta_3 = \sqrt{r^2 + s^2}$$

Si ignoramos la solución negativa de la raíz para θ_3 , tenemos 2 soluciones para la posición cinemática inversa (mientras el centro de la muñeca (p) no interseque el eje z del SR fijo (en este caso hay una singularidad)). En el caso de que la segunda articulación esté desplazada hacia un lado con respecto a la primera, las soluciones se desdoblan en una hacia la dcha y otra hacia la izda.



Cinemática Inversa Numérica

El problema cinemático inverso en muchos casos no tiene solución analítica \Rightarrow se resuelve numéricamente. La solución numérica también sirve para optimizar resultados analíticos, por ejemplo en los casos en los que el alineamiento entre ejes del brazo no son perfectos (la solución analítica asume idealidad). En estos casos la solución analítica puede usarse para inicializar el cálculo numérico.

Tb se utilizan métodos de optimización numéricos en los casos en los que no existe una solución exacta y buscamos una aproximación o en los casos en los que hay infinitas soluciones (robots redundantes) y buscamos una solución óptima con respecto a algún criterio.

Método de Newton-Raphson para resolución numérica de ecuaciones no lineales

Dada una función diferenciable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la resolución numérica de la ecuación $g(\theta) = 0$ partiendo de una semilla θ^0 se puede realizar siguiendo iterativamente la siguiente expresión:

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$$

hasta que se alcanza un criterio de convergencia:

$|g(\theta^k) - g(\theta^{k+1})|/|g(\theta^k)| \leq \epsilon$ donde el valor de ϵ ha de ser suficientemente pequeño.

Si la función g es multidimensional

$\Rightarrow g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el proceso es análogo, con:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \theta_1}(\theta) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial \theta_n}(\theta) \end{bmatrix}$$

Algoritmo numérico para resolver el problema cinemático inverso

- Configuración deseada para el elemento terminal de un Robot: $T_{sd} \in SE(3)$.
- Planteamos una hipótesis inicial θ^0 para las coordenadas de las articulaciones, que esté razonablemente cerca de la solución deseada (semilla) y resolvemos el problema cinemático directo \Rightarrow obtenemos $T_{sb}(\theta^0)$
- Calculamos la matriz de transformación homogénea que nos lleva desde la configuración actual hasta la configuración deseada: $T_{bd}(\theta^0) = T_{sb}^{-1}(\theta^0) T_{sd}$
- Calculamos el vector giro correspondiente como matriz $se(3)$: $[\nu_b] = \log(T_{bd}(\theta^0))$ y lo transformamos en vector columna de 6 componentes (ν_b) .
- Transformamos este vector giro al SR fijo: $\nu_s = [Ad_{T_{sb}(\theta^0)}]\nu_b$
- Mientras los módulos de este vector no superen un umbral predeterminado $\Rightarrow ||\omega_s|| > \epsilon_\omega$ o $||v_s|| > \epsilon_v$, hacemos $\theta^{i+1} = \theta^i + J_s^\dagger(\theta^i)\nu_s$ y repetimos el ciclo con las nuevas coordenadas.

El cálculo también se puede realizar en el SR $\{b\}$, utilizando $J_b(\theta)$ en lugar de $J_s(\theta)$ y $\nu_b = [Ad_{T_{bs}}]\nu_s$

La Matriz pseudoinversa J^\dagger es análoga a la matriz inversa pero se puede calcular incluso para matrices no cuadradas y no invertibles (*numpy.linalg.pinv(J)*).

- Si $n < m$, el algoritmo devuelve la solución más aproximada al objetivo.
- Si $n > m$ hay infinitas soluciones y el algoritmo devuelve la que da el cambio más pequeño en las coordenadas de las articulaciones.

Robot plano 2R

Apliquemos el algoritmo N-R para encontrar los ángulos de las articulaciones que sitúan el elemento terminal en la posición $(x, y) = (0.366 \text{ m}, 1.366 \text{ m})$, con una orientación que corresponde a la siguiente matriz de transformación:

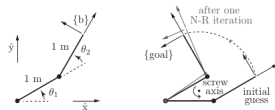
$$T_{sd} = \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 & 0 & 0.366 \\ \cos 30 & -\sin 30 & 0 & 1.366 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cinemática directa, expresada en el SR del elemento terminal, viene dada por los siguientes valores de M y B_i :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizamos: $\theta^0 = (0, \pi/6)$ $\epsilon_\omega = 0.001 \text{ rad}$ y $\epsilon_v = 10^{-4} \text{ m}$

i	(θ_1, θ_2)	(x, y)	$\nu_b = (\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$
0	(0.00, 30.00)	(1.866, 0.500)	(1.571, 0.498, 1.858)
1	(34.23, 79.18)	(0.429, 1.480)	(0.115, -0.074, 0.108)
2	(29.98, 90.22)	(0.363, 1.364)	(-0.004, 0.000, -0.004)
3	(30.00, 90.00)	(0.366, 1.366)	(0.000, 0.000, 0.000)



La solución final $\theta_d = (\pi/6, \pi/2)$ se obtiene en sólo 4 iteraciones.