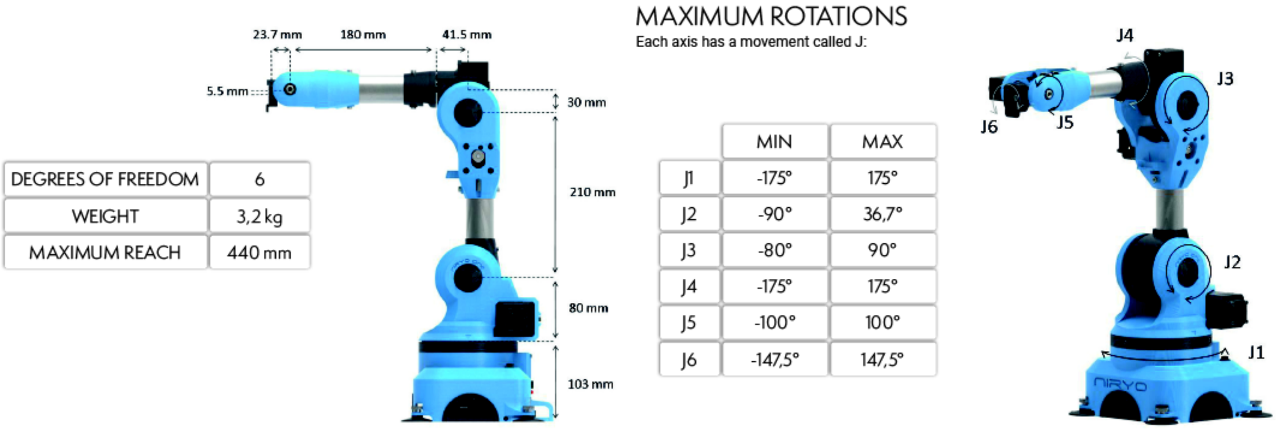
Boletín 4 - III

Matriz Jacobiana, singularidades y manipulabilidad

Ejercicio 6

En la siguiente figura se muestra el robot Niryo One 6R en su posición cero:



- Calcula la matriz Jacobiana en función de las coordenadas de las articulaciones.
- Calcula la matriz Jacobiana en la configuración en la que todas las articulaciones tienen un ángulo π y para la configuración en la que todas las articulaciones tienen un ángulo $\pi/2$.
- Calcula el volumen del elipsoide de manipulabilidad en los dos casos del punto anterior.
- Basándote en los apuntes, encuentra dos relaciones diferentes entre las coordenadas de las articulaciones que dan configuraciones singulares y demuestra con varios ejemplos concretos que en esas configuraciones el determinante de la matriz Jacobiana es nulo, es decir, que las columnas de la matriz Jacobiana son linealmente dependientes en esas configuraciones.
- Calcula qué velocidad angular habría que aplicar a cada articulación para que la velocidad del elemento terminal fuese de $1\,m/s$ en las direcciones x, y y z.
- Calcula qué velocidad angular habría que aplicar a cada articulación para que la velocidad del elemento terminal fuese de $1\,m/s$ en las direcciones x, y y z (sin rotación) para una configuración del robot en la que todos los ángulos de las articulaciones fuesen de $\pi/3$.
- Repite el cálculo del apartado anterior para los casos en los que el elemento terminal gira entorno a los ejes x, y, z con una velocidad angular de $1\,rad/s$ sin traslación.
- Calcula los torques que debes aplicar a cada una de las articulaciones del robot en la misma configuración de los apartados anteriores para que el elemento terminal aplique una fuerza de $1\,N$ en las direcciones x, y y z (sin momento).
- Repite de nuevo el cálculo del apartado anterior para los casos en los que el elemento terminal aplica un momento de de $1\,N\,m$ con componente x, y y z (ejerciendo fuerza nula).

Resultados:

La matriz Jacobiana se resuelve mediante cálculo simbólico. Las 3 primeras columnas son:

$$J_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad J_{s2} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \\ -\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 \\ 183\ \operatorname{sen}\theta_1 \\ -183\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad J_{s3} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \\ -\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 \\ (210\ \cos\theta_2 + 183)\ \operatorname{sen}\theta_1 \\ -(210\ \cos\theta_2 + 183)\ \cos\theta_1 \\ 210\operatorname{sen}\theta_2 \end{bmatrix};$$

Las matrices Jacobianas en las configuraciones en las que todas las coordenadas de las articulaciones valen π ó $\pi/2$ son:

$$J(\theta_i = \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 183 & -27 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -221.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad J(\theta_i = \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 183 & 183 & 0 & 0 & 153 \\ 0 & 0 & 0 & 153 & 11.5 & 0 \\ 0 & 0 & 210 & 0 & 0 & -11.5 \end{bmatrix}$$

El volumen de los elipsoides de manipulabilidad en esos casos se calcula como $V = \sqrt{det(JJ^T)}$:

$$V(\theta_i = \pi) = 0; \qquad V(\theta_i = \pi/2) = 72450$$

Configuraciones singulares:

- Siempre que las articulaciones 3 y 5 sean colineales, independientemente de las coordenadas del resto de las articulaciones $\Rightarrow \theta_4 = 0, n\pi$
- Siempre las articulaciones 2, 3 y 5 sean coplanares y paralelas $\Rightarrow \theta_2 = -\pi/2 + \arctan(\frac{L_4}{L_5+L_6})$, $\theta_3 = \theta_4 = 0$

Velocidad angular en las articulaciones para que el punto central de la herramienta (TCP) tenga una velocidad de $1\,m/s$ en las direcciones x, y o z (sin rotación) en una configuración en la que los ángulos de todas las articulaciones tienen el mismo valor ($\pi/3$):

$$\begin{aligned} v =& (1,0,0)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (-5.15, \quad 2.56, \quad 2.93, \quad -2.46, \quad -4.97, \quad -4)\,rad/s \\ v =& (0,1,0)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (-8.92, \quad -1.48, \quad -1.69, \quad -10.6, \quad -2.28, \quad 5.74)\,rad/s \\ v =& (0,0,1)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (0, \quad -7.2, \quad 3.55, \quad -1.83, \quad 1.83, \quad 3.66)\,rad/s \end{aligned}$$

Velocidad angular en las articulaciones para que el TCP rote entorno a los ejes x, y o z con una velocidad angular de $1\,rad/s$ (sin traslación) en una configuración en la que los ángulos de todas las articulaciones tienen el mismo valor ($\pi/3$):

$$\begin{aligned} \omega =& (1,0,0)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (0.72, \quad -0.23, \quad 0.31, \quad 1.24, \quad -0.63, \quad -0.36)\,rad/s \\ \omega =& (0,1,0)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (-0.42, \quad -0.4, \quad 0.54, \quad -0.05, \quad -0.31, \quad -1.13)\,rad/s \\ \omega =& (0,0,1)\,m/s \Rightarrow \dot{\theta} = (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0)\,rad/s \end{aligned}$$

Torques en las articulaciones para que el elemento terminal aplique una fuerza de $1\,N$ en las direcciones x, y y z (sin momento) en una configuración en la que los ángulos de todas las articulaciones tienen el mismo valor ($\pi/3$):

$$\begin{aligned} F =& (1,0,0)\,N \Rightarrow \tau = (0, \quad 0.158, \quad 0.249, \quad -0.022, \quad -0.016, \quad 0.068)\,N\,m \\ F =& (0,1,0)\,N \Rightarrow \tau = (0, \quad -0.092, \quad -0.144, \quad -0.038, \quad -0.109, \quad -0.005)\,N\,m \\ F =& (0,0,1)\,N \Rightarrow \tau = (0, \quad 0, \quad 0.182, \quad 0, \quad 0.049, \quad 0.073)\,N\,m \end{aligned}$$

Torques en las articulaciones para que el elemento terminal aplique aplica un momento de de $1\,N\,m$ con componente x, y y z (ejerciendo fuerza nula) en una configuración en la que los ángulos de todas las articulaciones tienen el mismo valor ($\pi/3$):

$$\begin{aligned} m =& (1,0,0)\,N\,m \Rightarrow \tau = (0, \quad -0.5, \quad -0.5, \quad 0.433, \quad -0.9, \quad 0.166)\,N\,m \\ m =& (0,1,0)\,N\,m \Rightarrow \tau = (0, \quad -0.866, \quad -0.866, \quad -0.25, \quad -0.058, \quad -0.962)\,N\,m \\ m =& (0,0,1)\,N\,m \Rightarrow \tau = (1, \quad 0, \quad 0, \quad -0.866, \quad -0.433, \quad -0.217)\,N\,m \end{aligned}$$