Môn: phân tích thiết kế thuật toán

# PHÂN TÍCH BÀI TOÁN NUMBER PARTITIONING

23rd January 2021

GIẢNG VIÊN: PHẠM NGUYỄN TRƯỜNG AN

Võ Huy Khôi - 18520949 Hứa Văn Sơn - 18521344 Nguyễn Thịnh Quyền - 18521322

## Contents

| 1        | Giớ | Giới thiệu bài toán                               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----------|-----|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|          | 1.1 | Mô tả hình thức                                   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 1.2 | Ứng dụng bài toán                                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 1.3 | Một ứng dụng thực tế                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| <b>2</b> | Phu | Phương pháp thiết kế thuật toán                   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.1 | Mã giả  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.2 | Tính độ phức tạp bằng lý thuyết                   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.3 | Mã nguồn cài đặt                                  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.4 | Phân tích input, output kiểm tra độ đúng đắn      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.5 | Phân tích độ phức tạp thuật toán bằng thực nghiệm |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|          | 2.6 | Tham khảo   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

## 1 Giới thiệu bài toán

Partition hay number partitioning là bài toán xem xét 1 tập hợp số nguyên dương có thể chia thành 2 tập hợp con có tổng bằng nhau hay không.

#### 1.1 Mô tả hình thức

- Input: list các số nguyên S, n số phần tử trong S
- $\bullet$  Output: True nếu S có 2 tập hợp S1, S2 với sum<br/>(S1) = sum(S2). False nếu S không có.

Điều kiện: n \*  $(sum/2) < 10^9$ 

## 1.2 Ứng dụng bài toán

Bài toán number partitioning có rất nhiều ứng dụng như:

- Úng dung trong phân chia công việc.
- Thao túng các cuộc bầu cử.

### 1.3 Một ứng dụng thực tế

Khi phân chia lượng công việc cho nhóm với một số lượng công việc nhất định, áp dụng number partioning để tìm ra lượng công việc bằng nhau để chia cho 2 người, nếu không có lượng công việc bằng nhau có thể nâng cấp bài toán lên thành chia công việc sao cho tỉ lệ chênh lệch công việc là thấp nhất.

## 2 Phương pháp thiết kế thuật toán

## Dynamic programming

Dynamic programming được phát minh bởi nhà toán học Richard Bellman vào năm 1953 là phương pháp giúp tối ưu thời gian chạy cho những bài toán có dạng bài toán con gối nhau (overlapping subprolem) và cấu trúc con tối ưu (optimal substructure).

Giải quyết bài toán bằng cách chia bài toán thành các bài toán con nhỏ hơn và lưu lại kết quả cho những lần tính toán tiếp theo. Từ đó giải quyết cho toàn bộ bài toán.

Ý tưởng: Áp dụng phương pháp của bài toán subset sum cho number partitioning. Nếu trong list ban đầu có subset có tổng bằng sum/2 với sum là tổng tất cả phần tử trong list. Tạo một mảng 2 chiều với hàng là subset trong list theo thứ tự và cột là tổng từ 1 đến sum/2.

Ưu điểm: tiết kiệm thời gian tính toán.

Nhược điểm: tốn nhiều bộ nhớ với việc các phần tử trong list có giá trị càng lớn hoặc càng nhiều phần tử thì mảng 2 chiều càng lớn.

#### 2.1 Mã giả

Parttion(arr, n):

- 1. sum = 0
- 2. for i = 0,...,n: sum+=1
- 3. if sum div 2 != 0 : return False
- 4. Initalize M[i][j] = True for i = 0,...,n+1, for j = 0,..., sum/2 + 1
- 5. M[i][0] = False for i = 1,...,sum/2+1
- 6. for i = 1,...,sum/2 + 1
  - 7. for j = 1,...,n+1
  - 8. M[i][j] = M[i][j-1]
  - 9. if  $i \ge arr[j-1]$ : M[i][j] = M[i][j] | M[i-arr[j]][j-1]
- 10. return M[sum/2][n]

## 2.2 Tính độ phức tạp bằng lý thuyết

- Tại dòng 1, 3: phép gán và phép so sánh => độ phức tạp là 3
- Tại dòng 2: vòng lặp chạy từ 0->n và thực hiện phép cộng mỗi vòng lặp=> độ phức tạp thời gian n
- Tại dòng 4: Khởi tạo gán M trong 2 vòng lặp n<br/> và  $\mathrm{sum}/2 => \mathrm{d} \hat{\mathrm{o}}$  phức tạp n\*sum/2
- Tại dòng 5: vòng lặp chạy từ 1-> sum/2 + 1 và thực hiện phép gán => độ phức tạp sum/2
- Tại dòng 6,7,8,9: phép gán dòng 8 có độ phức tạp 1, phép so sánh dòng 9 có độ phức tạp 2 vì trong điều kiện có phép gán và phép logic. Dòng 8, 9 lặp lại sum/2\*n lần => độ phức tạp n\*sum/2

Áp dụng quy tắc cộng: độ phức tạp của thuật toán là n\*sum/2 + n\*sum/2 + n + sum/2 + 3.

Áp dụng qui tắc bỏ hằng số và lấy Max: độ phức tạp thời gian là O(n\*sum). Độ phức tạp không gian: O((n+1)\*(sum/2+1)) = O(n\*sum)

## 2.3 Mã nguồn cài đặt

## 2.4 Phân tích input, output kiểm tra độ đúng đắn

- Mảng rỗng hoặc chỉ có 1 phần tử: return False
- Mảng có tổng lẻ: return False
- Mảng có n phần tử bằng nhau: nếu n lẻ return False, n chẵn return True

## 2.5 Phân tích độ phức tạp thuật toán bằng thực nghiệm

| sum//2  | n   | operations   | 297176.98605673*sqrt(n)  | MSE         | 5.22949542e+08*log(n)  | MSE  | 17.00518159*n  | MSE   | 0.86625649*nlog(n) | MSE         | 4.70586713e-08*n^2 | MSE         |
|---------|---|--|--|-------------|--|--|--|---|--------------------|-------------|--------------------|-------------|
| 13196   | 171548  | 2929817  | 123085814.4  | 123050940.1 | 9093178828   | 9093178356   | 2917204.891  | 271557.13   | 2583973.799        | 1380908.057 | 1384.876287        | 2929816.67  |
| 14976   | 209664  | 3579591  | 136074612.8  | 136027522.2 | 9244555390   | 9244554697   | 3565374.393  | 318711.728  | 3210676.952        | 1582727.153 | 2068.651797        | 3579590.40  |
| 24947   | 374205  | 6386781  | 181789990.5  | 181677763.3 | 9681610296   | 9681608190   | 6363423.977  | 545716.806  | 6001280.11         | 2185316.586 | 6589.596661        | 6386777.60  |
| 28295   | 452720  | 7724906  | 199953962.2  | 199804686.7 | 9825311709   | 9825308673   | 7698585.809  | 637141.463  | 7368222.513        | 2320230.53  | 9644.928724        | 7724899.97  |
| 43487   | 782766  | 13350924   | 262924556.8  | 262585367.9 | 10238422002  | 10238413297  | 13311077.97  | 1030715.7   | 13275524.67        | 1416903.836 | 28833.91194        | 13350892.8  |
| 102572  | 2666872   | 45439987   | 485306669.3  | 483174679.5 | 11163255958  | 11163163476  | 45350642.64  | 2848092.51  | 49315083.03        | 19162071.8  | 334690.9768        | 45438754.3  |
| 126079  | 4160607   | 70857143   | 606168719.6  | 602013107.8 | 11498804146  | 11498585829  | 70751877.56  | 3860898.33  | 79249418.95        | 35492755.46 | 814616.217         | 70852460.19 |
| 161439  | 5811804   | 98962918   | 716424870  | 709556858.4 | 11750966246  | 11750549522  | 98830782.39  | 5112298.13  | 113128297.9        | 54811975.3  | 1589503.834        | 98950152.1  |
| 169753  | 7129626   | 121374338  | 793502954.5  | 784165294.3 | 11905152872  | 11904534144  | 121240584.8  | 5696536.02  | 140601009.7        | 70971219.52 | 2392065.998        | 121350764.  |
| 243107  | 11182922  | 190353812  | 993785879.6  | 975384950   | 12244755728  | 12243276043  | 190167619.3  | 8417262.4   | 226825635.3        | 123350294.2 | 5885051.29         | 19026281    |
| 296047  | 14802350  | 251937116  | 1143353454   | 1115251008  | 12456304000  | 12453755941  | 251716649.7  | 10537489.2  | 305426406.2        | 172664354.1 | 10311005.02        | 251726028.  |
| 383752  | 23025120  | 391812131  | 1425988834   | 1371104449  | 12789622856  | 12783619834  | 391546346.7  | 14429288.3  | 487805120.4        | 290580607.6 | 24948444.05        | 391017034.  |
| 623764  | 53643704  | 912568643  | 2176579591   | 1976035725  | 13427725982  | 13396680317  | 912220927.7  | 25189428.1  | 1193185431         | 768706670.1 | 135418243.3        | 902465194.  |
| 714746  | 67186124  | 1142880941   | 2435874827   | 2151118158  | 13597556171  | 13549441205  | 1142512239   | 29028075.3  | 1513307426         | 991928686.4 | 212421677.9        | 112296655   |
| 918252  | 113863248   | 1936596215   | 3171078243   | 2511042079  | 13995555784  | 13860922654  | 1936265209   | 35804212.8  | 2639735616         | 1793822517  | 610108108.5        | 183798068   |
| 1371220 | 223508860   | 3801025445   | 4442859153   | 2300261512  | 14504401306  | 13997494876  | 3800808751   | 40586571.4  | 5370086300         | 3793419623  | 2350872889         | 2986836303  |
| 1888969 | 370237924   | 6295938008   | 5718151069   | 2634688550  | 14885171670  | 13488124416  | 6295963129   | 17785463.7  | 9128963365         | 6610532256  | 6450620091         | 140415959   |
| 71810   | 10771500  | 183190629  | 975333781.7  | 957975562.9 | 12216475645  | 12215102062  | 183171313.5  | 2660162.65  | 217976077.8        | 118130283.7 | 5459992.326        | 183109243.  |
| 181404  | 32834124  | 558365513  | 1702855870   | 1608709442  | 13057366375  | 13045422362  | 558350241  | 4129711.62  | 710178856.8        | 438841614.4 | 50732998.18        | 556055940.  |
| 333182  | 72633676  | 1235110489   | 2532702541   | 2211127368  | 13656375075  | 13600407430  | 1235148850   | 9734548.97  | 1643085545         | 1083619947  | 248265121.1        | 120990179   |
|         |   |  |  |             |  |  |  |   |                    |             |                    |             |
|         |   |  |  | 1164737751  |  | 11951707166  |  | 10931194.1  |                    | 818746048.1 |                    | 570352264.  |
|         | 13196<br>14976<br>24947<br>28295<br>43487<br>102572<br>126079<br>161439<br>169753<br>243107<br>296047<br>383752<br>623764<br>714746<br>918252<br>1371220<br>188896<br>71810<br>181404 | 13196 171548<br>14976 20964<br>24947 37476<br>28295 452720<br>45487 32797<br>126079 416060<br>161439 58160<br>161439 58160<br>161430 58160<br>161430 58160<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>161400<br>161400<br>161400<br>161400<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140<br>16140 | 13196 171548 2929817 14976 209664 3579591 14976 209664 3579591 24947 374205 6386781 28295 452720 772490 126279 4160607 70857143 1661439 5811804 98962918 169753 7129626 12137438 243107 11182922 190353812 243107 1182922 190353812 243107 1182921 19353812 23525 23025120 391812131 383752 23025120 391812131 383752 23025120 391812131 383752 23053120 391812131 3171240 225308860 380102545 3811240 2308860 380102545 381296 370237924 6259538086 71810 10771500 183190629 71810 10771500 183190629 | 13196       | 13166         171548         2929817         123085814.4         123085941.4           14976         209664         3579591         136074612.8         136027522           24947         37405         6386781         181789990.5         181677763.3           28295         452700         7724906         199953962.2         199804586.7           43487         782766         13350924         262924558.8         2585387.9           102572         2666872         45439987         485306669.3         483174679.5           126079         4160607         70857143         606188719.6         602013107.8           169733         7129626         121374388         793502954.5         784165294.3           245107         71182922         19335312         993785875.6         797584950           252764         53463704         91256843         2175679951         7117078243         251102125           252764         53463740         91256843         2175679951         710700275         251118185           188899         370237924         6295938008         5718151099         2634688550         7181010971500         183190629         973337817         997575529         181404         32834124         58365513 | 13196         171548         2029817         123085814.4         123050940.1         9093178828           14976         20964         3579591         15607412.8         156027522.2         9244555390           24947         374205         6386781         181789990.5         181677763.3         9681610298           28295         452720         7724906         199953962.2         199904886.7         9825311709           43487         782766         13350924         262924558.8         28558587.9         10238422020           102572         2666872         45439987         465306669.3         48174679.5         1116325958           126079         4160607         70857143         606168718.6         602013107.8         119988041-6           16439         5811804         98962918         7142424870         79055688.4         11750966248           169733         7129626         11374338         798302954.5         784165294.3         11905152872           249107         1182921         190353812         999785876.5         797384959         1224475728           236274         158463740         91256643         217579959.5         1790057528         13427729982           23726         2594647         91467349 <td>13196         171548         229817         1230858144         12050940.1         9093178828         9093178828           14976         209664         3579591         136074612         136027522.2         924455390         92455390         92455390         924554697           24947         374205         5886781         181879990.5         131677763.3         9681600289         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9825301873         9825301873         1023441229         10238412297         10234412297         10238412297         10</td> <td>13196         171548         292917         123085814.4         12300940.1         9093178828         9093178355         291720A,891           14976         209664         3579591         1360746128         186077522.2         924455590         2944554697         356373.393           24947         374205         686781         18179999.5         181677769.3         9681610296         9681608190         6863423.977           26295         452720         7724906         199953962.2         199804686.7         982531079         9825508673         7698585.809           102572         2666872         45439987         485306669.3         483174679.5         11163255958         11163163476         45530642.64           126079         4166007         7085714.3         60168719.6         602013107.8         1448804146         1149858522.7         70751877.5           164789         5181804         98962918         716424870         7085685.84         11905152872         1190434144         11224059883         12934744         12244755728         11905152872         1190434144         12124059848         122417577281         12244755728         122423750943         1905152872         1190434144         1212405948.8         25191649.7         14624870         7085858.94         1190</td> <td>  13186</td> <td>  13196</td> <td>  13196</td> <td>  13196</td> | 13196         171548         229817         1230858144         12050940.1         9093178828         9093178828           14976         209664         3579591         136074612         136027522.2         924455390         92455390         92455390         924554697           24947         374205         5886781         181879990.5         131677763.3         9681600289         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9681601829         9825301873         9825301873         1023441229         10238412297         10234412297         10238412297         10 | 13196         171548         292917         123085814.4         12300940.1         9093178828         9093178355         291720A,891           14976         209664         3579591         1360746128         186077522.2         924455590         2944554697         356373.393           24947         374205         686781         18179999.5         181677769.3         9681610296         9681608190         6863423.977           26295         452720         7724906         199953962.2         199804686.7         982531079         9825508673         7698585.809           102572         2666872         45439987         485306669.3         483174679.5         11163255958         11163163476         45530642.64           126079         4166007         7085714.3         60168719.6         602013107.8         1448804146         1149858522.7         70751877.5           164789         5181804         98962918         716424870         7085685.84         11905152872         1190434144         11224059883         12934744         12244755728         11905152872         1190434144         12124059848         122417577281         12244755728         122423750943         1905152872         1190434144         1212405948.8         25191649.7         14624870         7085858.94         1190 | 13186              | 13196       | 13196              | 13196       |

trong đó: sum: tổng các phần tử trong list

size: số phần tử trong list

n: sum\*size

MSE:

- $\sqrt{sum * size} = 1164737751$
- $\log(sum * size) = 11951707166$
- sum\*size = 10931194.11
- sum\*size \*  $\log (sum * size) = 818746048.1$
- $(sum * size)^2 = 570352264.6$

Có thể thấy MSE của sum\*size là bé nhất, như vậy độ phức tạp của thuật toán theo thực nghiệm là O(sum\*size), bằng với độ phức tạp phân tích lý thuyết.

## Thuật toán tối ưu hóa không gian

Thay vì tạo một mảng 2 chiều có kích thước bằng (size+1)\*(sum/2 +1) Tạo một mảng với số phần tử bằng sum/2. + 1 Phần tử thứ j sẽ là True có tập hợp con có tổng bằng j, ngược lại là False. Do đó độ phức tạp không gian là O(sum).

 $part[j] = True \ if \ there \ is \ a \ subset \ with \ sum \ equal \ to \ j, \ otherwise \ False.$ 

#### 2.6 Tham khảo

- 1. https://www.geeksforgeeks.org/partition-problem-dp-18
- 2. https://en.wikipedia.org/wiki/Partition\_problem

#### Trace back tim subset

Bài toán nâng cấp từ number partition: Áp dụng bài toán trên để tìm ra 2 subset có tổng bằng nhau. Thực hiện traceback từ ma trận đã tạo của number partition.

- Input: ma trận partition part, tổng các phần tử trong list sum, list S
- Output: 2 subset có tổng bằng sum/2.