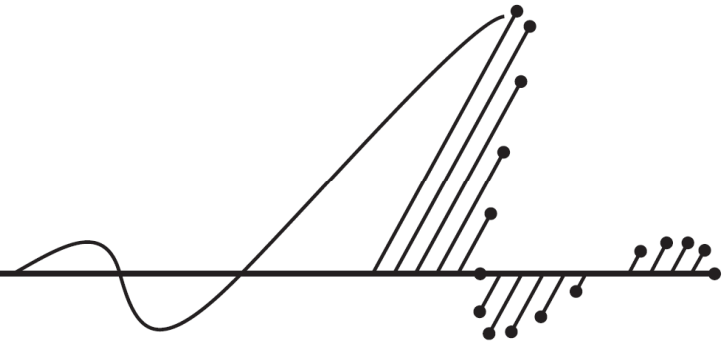




Digital Signal Processing



Chương 5

Biến đổi z

TS. Nguyễn Thanh Tuấn

Bộ môn Viễn thông (112-114B3)

Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG TP HCM

Email: nttuan@hcmut.edu.vn



Nội dung

- Biến đổi z
- Miền hội tụ ROC
- Công thức cơ bản
- Tính chất cơ bản
- Đặc tính nhân quả và ổn định
- Biến đổi z ngược (khai triển phân thức từng phần)



Biến đổi z

- Chuỗi lũy thừa theo biến phức $z \in \mathbb{C}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{(a^{N_1} - a^{N_2+1})}{(1-a)}, \quad \text{for } a \neq 1$$

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{(1-a)}, \quad \text{for } |a| < 1$$



Ví dụ 1

- Tìm biến đổi z của các tín hiệu sau:

1) $x(n) = \delta(n)$

2) $x(n) = \delta(n - 2)$

3) $x(n) = 3\delta(n + 1)$

4) $x(n) = 4\delta(n) - \delta(n - 4)$

5) $x(n) = \{2; 0; 1\uparrow; 8\}$

6) $x(n) = \{2\uparrow; 0; 1; 8\}$

7) $x(n) = \{2; 0; 1; 8\uparrow\}$



Ví dụ 2

- Tìm biến đổi z của các tín hiệu sau:

1) $x(n] = u(n) - u(n - 4)$

2) $x(n] = u(n) - u(n - 14)$

3) $x(n] = u(n)$

4) $x(n] = -u(-n - 1)$

5) $x(n] = 1$

6) $x(n] = (-1)^n u(n)$

7) $x(n] = -2^n u(-n - 1)$



Miền hội tụ (ROC)

- ROC (Region Of Convergence): tập hợp giá trị z sao cho biến đổi z hội tụ (không ra vô cùng).

$$ROC = \{z \in \mathbb{C} \mid X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \neq \infty\}$$

- Quy ước: chỉ ghi kết quả $X(z)$ hội tụ, không ghi mặc định $X(z) = \infty$
- Tín hiệu hữu hạn: luôn tồn tại ROC ($\forall z$ ngoại trừ hai giá trị 0 và ∞ cần kiểm tra)
- Tín hiệu vô hạn: có thể không tồn tại ROC



Công thức cơ bản

$$a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \text{with } |z| > |a|$$

$$-a^n u(-n-1) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \text{with } |z| < |a|$$



Tính chất cơ bản

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

$$x(n - D) \xleftrightarrow{z} z^{-D} X(z)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

- Thông thường: $\text{ROC} = \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2$
- Khi dùng tính chất, phải luôn xem xét cẩn thận bản chất của tín hiệu để xác định đúng ROC.



Ví dụ 3

- Tìm biến đổi z và ROC của các tín hiệu sau:

1) $x(n) = u(n) - u(n - 4)$

2) $x(n) = \cos(\pi n).u(n)$

3) $x(n) = \sin(\pi n/2).u(n)$

4) $x(n) = u(n) - u(-n - 1)$

5) $x(n) = (0.5)^n.u(n) + (-2)^n.u(-n - 1)$

6) $x(n) = 2^n.u(n - 1)$

7) $x(n) = u(-n)$



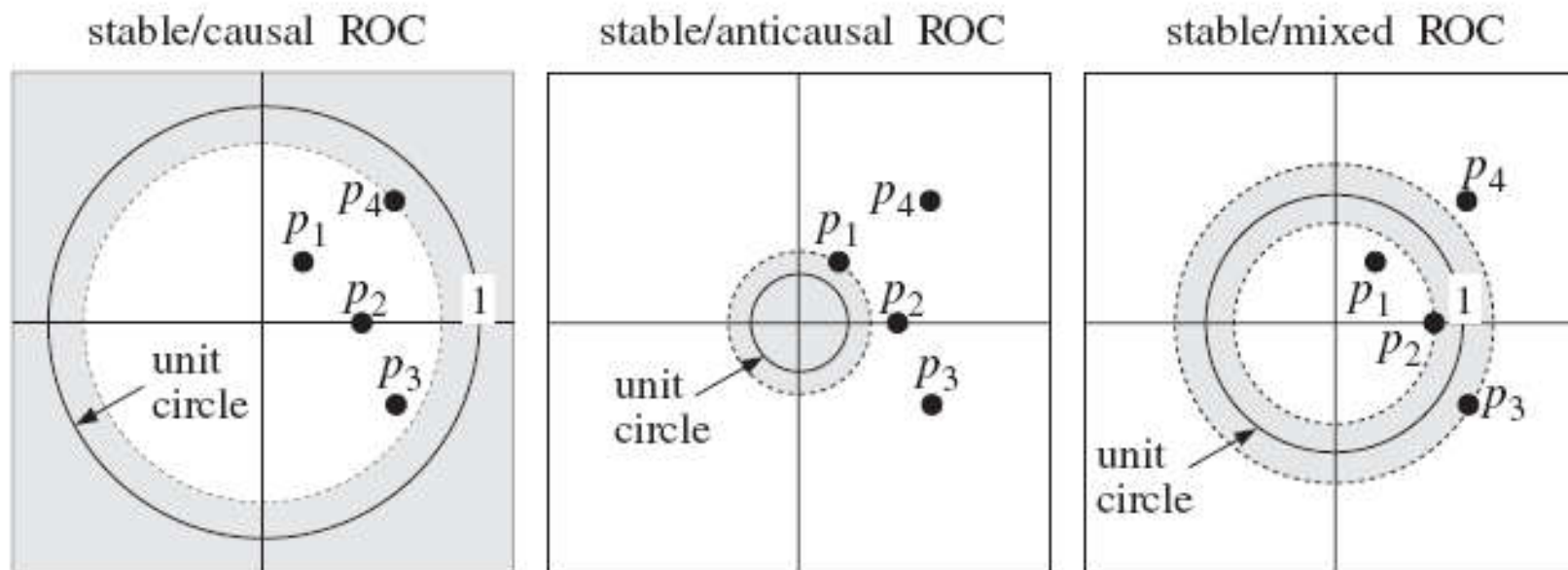
Đặc tính nhân quả và ổn định

- Nhân quả: ROC ngoài tròn ($|z| > |a|$)
- Phản nhân quả: ROC trong tròn ($|z| < |b|$)
- Hai phía: ROC vòng xuyên ($|a| < |z| < |b|$)
- Ổn định: ROC chứa vòng tròn đơn vị
 - Ổn định biên: ROC tiếp giáp vòng tròn đơn vị



Ví dụ 4

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$





Biến đổi z ngược

$$X(z), \text{ ROC} \xrightarrow{\text{inverse z-transform}} x(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad x(n) = \begin{cases} a^n u(n) & \text{if ROC } |z| > |a| \text{ (causal signals)} \\ -a^n u(-n-1) & \text{if ROC } |z| < |a| \text{ (anticausal signals)} \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_0 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

$$D(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_M z^{-1})$$



Ví dụ 5

- Tìm biến đổi z ngược của các biến đổi z sau:

1) $X(z) = 1 + 2z - z^{-2}$

2) $X(z) = 2/(1 + 2z^{-1}) + 3/(1 - 0.2z^{-1})$

3) $X(z) = 2/(1 + 2z^{-1}) \times 3/(1 - 0.2z^{-1})$

4) $X(z) = 4z^{-1}/(1 + 1.8z^{-1} - 0.4z^{-2})$

5) $X(z) = (1 + z^{-5})/(1 + 1.8z^{-1} - 0.4z^{-2})$



$D(z)$ nghiệm đơn và $N < M$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_M}{1 - p_M z^{-1}}$$

$$A_i = \left[(1 - p_i z^{-1}) X(z) \right]_{z=p_i} = \left[\frac{N(z)}{\prod_{j \neq i} (1 - p_j z^{-1})} \right]_{z=p_i}$$

- Ví dụ 6: Tìm $x(n)$ và kiểm tra đặc tính nhân quả và ổn định của biến đổi z sau:

$$X(z) = \frac{6 + z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$$



$D(z)$ nghiệm đơn và $N = M$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_M z^{-1})} \\ &= A_0 + \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{A_M}{1 - p_M z^{-1}} \end{aligned}$$

$$A_0 = X(z) \Big|_{z=0}$$

- Ví dụ 7: Tìm $x(n)$ và kiểm tra đặc tính nhân quả và ổn định của biến đổi z sau:

$$X(z) = \frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$



$D(z)$ nghiệm đơn và $N > M$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{Q(z)D(z) + R(z)}{D(z)} = Q(z) + \frac{R(z)}{D(z)}$$

- $Q(z)$ là chuỗi lũy thừa hữu hạn
- $R(z)$ có bậc $R < M$
- Ví dụ 8: tìm $x(n)$ nhân quả có biến đổi z sau

$$X(z) = \frac{6 + z^{-5}}{1 - 0.25z^{-2}}$$



D(z) nghiệm đơn phức

- Nếu D(z) hệ số thực có nghiệm đơn phức thì luôn tồn tại nghiệm liên hiệp phức.
- Nếu X(z) hệ số thực có hệ số khai triển phức thì luôn tồn tại hệ số liên hiệp phức để đảm bảo x(n) thực.

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_1^*}{1 - p_1^* z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

$$A_1 = B_1 e^{j\alpha_1} \text{ and } p_1 = R_1 e^{j\omega_1}$$

$$A_1 p_1^n + A_1^* p_1^{*n} = 2\text{Re}[A_1 p_1^n] = 2B_1 R_1^n \cos(\omega_1 n + \alpha_1)$$

- Ví dụ 9: Tìm x(n) nhân quả có biến đổi z sau và chứng minh x(n) giá trị thực.

$$X(z) = \frac{4 - 3z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.25z^{-2}}$$



Cặp biến đổi z thông dụng

	Signal, $x(n)$	z -Transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	All z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
6	$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$(\cos \omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$(\sin \omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$(a^n \cos \omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
10	$(a^n \sin \omega_0 n) u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $



Tóm tắt

- ❖ Định nghĩa biến đổi z
- ❖ Ý nghĩa miền hội tụ của biến đổi z
- ❖ Một số tính chất cơ bản (tuyến tính, trễ, tích chập) của biến đổi z
- ❖ Biến đổi z của một số tín hiệu cơ bản: $\delta(n)$, $a^n u(n)$, $a^n u(-n-1)$
- ❖ Mối liên hệ giữa miền hội tụ với đặc tính nhân quả và ổn định.
- ❖ Khai triển phân thức từng phần và biến đổi z ngược



Bài tập 1

❖ Tìm biến đổi z (tính giá trị tại $z=1@$ và $z=0.1@$) và miền hội tụ của các tín hiệu sau:

- 1) $\delta(n+2) - \delta(n-2)$
- 2) $u(n-2)$
- 3) $u(n+2)$
- 4) $u(n+2) - u(n-2)$
- 5) $u(-n)$
- 6) $u(n) + u(-n)$
- 7) $u(n) - u(-n)$
- 8) $u(1-n)$
- 9) $u(|n|)$
- 10) $2^n u(-n)$
- 11) $2^n u(n-1)$
- 12) $2^n u(1-n)$

n	$z=1@$	$z=0.1@$
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		
7)		
8)		
9)		
10)		
11)		
12)		



Bài tập 2

❖ Tìm biến đổi z (tính giá trị tại $z=1@$ và $z=0.1@$) và miền hội tụ của các tín hiệu sau:

- 1) $\cos(\pi n)u(n)$
- 2) $\cos(\pi n/2)u(n)$
- 3) $\sin(\pi n/2)u(n)$
- 4) $\cos(\pi n/3)u(n)$
- 5) $\sin(\pi n/3)u(n)$
- 6) $\cos(\pi n)u(n-1)$
- 7) $\cos(\pi n)u(1-n)$
- 8) $\cos(\pi n)u(-n-1)$
- 9) $2^n \cos(\pi n/2)u(n)$
- 10) $2^n \sin(\pi n/2)u(n)$
- 11) $3^n \cos(\pi n/3)u(n)$
- 12) $3^n \sin(\pi n/3)u(n)$

n	$z=1@$	$z=0.1@$
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		
7)		
8)		
9)		
10)		
11)		
12)		



Bài tập 3

❖ Liệt kê giá trị các mẫu ($n=0, 1, 2, 3$) của tín hiệu nhân quả có biến đổi z sau:

- 1) $2z^{-1} / (1 - 2z^{-1})$
- 2) $2z^{-1} / (1 + 2z^{-1})$
- 3) $2 / (1 - 4z^{-2})$
- 4) $2 / (1 + 4z^{-2})$
- 5) $2z^{-1} / (1 - 4z^{-2})$
- 6) $2z^{-1} / (1 + 4z^{-2})$
- 7) $2z^{-2} / (1 - 4z^{-2})$
- 8) $2z^{-2} / (1 + 4z^{-2})$
- 9) $2z^{-1} / (1 - z^{-1} - 2z^{-2})$
- 10) $2z^{-2} / (1 - z^{-1} - 2z^{-2})$
- 11) $2z^{-1} / (1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})$
- 12) $2z^{-2} / (1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})$

n	0	1	2	3
1)				
2)				
3)				
4)				
5)				
6)				
7)				
8)				
9)				
10)				
11)				
12)				



Bài tập 4

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n) = 4\delta(n) - \delta(n - 2)$. Liệt kê các giá trị ngõ vào $x(-5 < n < 5)$ và $x(n=2018)$ để tín hiệu ngõ ra $y(n)$ có dạng sau:

- 1) $y(n) = \{36, 0\uparrow, 7, 0, -4\}$
- 2) $y(n) = \{4\uparrow, 2\}$
- 3) $y(n) = \{4\uparrow, -2\}$
- 4) $y(n) = 4u(n) - u(n - 2)$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	2019



Bài tập 5

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n) = \delta(n) - \delta(n - 2)$. Liệt kê các giá trị ngõ vào $x(-5 < n < 5)$ để tín hiệu ngõ ra $y(n)$ có dạng sau:

- 1) $y(n) = \{1, 3, -1\uparrow, 1, 0, -4\}$
- 2) $y(n) = \{1, 1\uparrow\}$
- 3) $y(n) = \{1\uparrow, -1\}$
- 4) $y(n) = \{1, 0\uparrow, 1\}$
- 5) $y(n) = \delta(n)$
- 6) $y(n) = \delta(n) - \delta(n - 2)$
- 7) $y(n) = u(n) - u(n - 2)$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4



Bài tập 6

Show the z-transform of a triangular signal:

$$\sum_{n=-L}^L \left(1 - \frac{|n|}{L}\right) z^{-n} = \frac{1}{L} \left[\frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} \right]^2 z^{L-1}$$



Bài tập 7

Consider the z -transform for $|z| > 1$:

$$X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} + z^{-8} - \dots$$

Derive a rational expression for $X(z)$ in two ways: (a) by summing the above series, and (b) by showing that it satisfies the equation $X(z) = 1 - z^{-2}X(z)$.

Derive also the inverse z -transform $x(n)$ for all n .



Bài tập 8

Consider a transfer function $H(z) = N(z)/D(z)$, where the numerator and denominator polynomials have real-valued coefficients and degrees L and M in z^{-1} , and assume $L > M$. Show that $H(z)$ can be written in the form:

$$H(z) = Q(z) + \sum_{i=1}^K \frac{b_{i0} + z^{-1}b_{i1}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}$$

where $Q(z)$ is a polynomial of degree $L - M$ in z^{-1} and the second-order sections have real coefficients. The number of sections K is related to M by $K = M/2$ if M is even and $K = (M - 1)/2$ if M is odd. This result forms the basis of the *parallel realization form* of $H(z)$.



Bài tập 9

Without using partial fractions, determine the causal inverse z-transforms of:

a. $X(z) = \frac{1}{1 + z^{-4}}$

b. $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-4}}$

c. $X(z) = \frac{1}{1 + z^{-8}}$

d. $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-8}}$



Bài tập 10

Using partial fractions or power series expansions, determine all possible inverse z-transforms of the following z-transforms, sketch their ROCs, and discuss their stability and causality properties:

a. $X(z) = \frac{3(1 + 0.3z^{-1})}{1 - 0.81z^{-2}}$

b. $X(z) = \frac{6 - 3z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$

c. $X(z) = \frac{6 + z^{-5}}{1 - 0.64z^{-2}}$

d. $X(z) = \frac{10 + z^{-2}}{1 + 0.25z^{-2}}$

e. $X(z) = \frac{6 - 2z^{-1} - z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.25z^{-2})}$, ROC $|z| > 1$

f. $X(z) = -4 + \frac{1}{1 + 4z^{-2}}$

g. $X(z) = \frac{4 - 0.6z^{-1} + 0.2z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.4z^{-1})}$