Digital Signal Processing

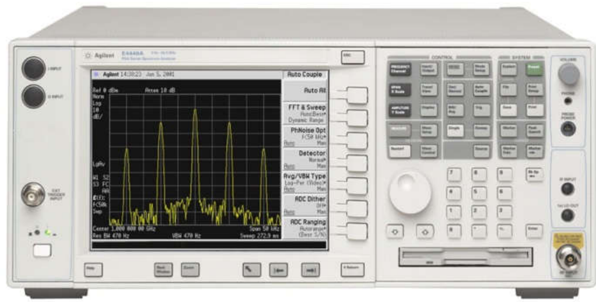
Chương 7

Biến đổi Fourier và giải thuật FFT

TS. Nguyễn Thanh Tuấn
Bộ môn Viễn thông (112-114B3)
Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG TPHCM
Email: nttuan@hcmut.edu.vn

Nội dung

- Biến đổi Fourier rời rạc thuận và ngược (DTFT/IDTFT)
- Tính biến đổi Fourier rời rạc thuận và ngược (DFT/IDFT-N điểm)
- Giải thuật biến đổi Fourier nhanh thuận và ngược (FFT/IFFT-N điểm)



Biến đổi Fourier rời rạc (DTFT)

- Định nghĩa: $\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}$ $w \in R$
- Tính chất:
  - X(w) tuần hoàn chu kì 2π (quy ước vẽ [-π ÷ π]).
  - Nếu x(n) thực thì X(-w) = X*(w) (liên hiệp phức)
    - Phổ biên độ |X(w)| đối xứng chẵn (qua trục tung)
    - Phổ pha argX(w) đối xứng lẻ (qua gốc tọa độ)
- Liên hệ với biến đổi z: $X(w) = X(z) \mid z=e^{jw}$.
- Điều kiện: x(n) ổn định

Phân loại tín hiệu theo tần số

- Định nghĩa
  - Tần số thấp: $w = (\text{quanh } 0) + k2\pi$
  - Tần số cao: $w = (\text{quanh } \pi) + k2\pi$
  - Tần số giữa: $w = (\text{khác quanh } 0 \text{ và } \pi) + k2\pi$
- Phân loại tín hiệu
  - Tín hiệu thông thấp (LPF): $|X(w=0)|$ max, $|X(w=\pi)|$ min
  - Tín hiệu thông cao (HPF): $|X(w=0)|$ min, $|X(w=\pi)|$ max
  - Tín hiệu thông dải (BPF): $|X(w\neq 0, w\neq \pi)|$ max
  - Tín hiệu chắn dải (BSF/BRF): $|X(w\neq 0, w\neq \pi)|$ min

Ví dụ 1

- Vẽ phổ và xác định đặc tính tần số của các tín hiệu sau:

1) $x(n) = \delta(n)$
2) $x(n) = \{1; 1\}$
3) $x(n) = \{1; -1\}$
4) $x(n) = \{1; 0; -1\}$
5) $x(n) = (0.5)^n.u(n)$
6) $x(n) = (-0.5)^n.u(n)$

Tính chất DTFT cơ bản

$$a_1x_1(n)+a_2x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega k}X(\omega)$$

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)=X_1(\omega)X_2(\omega)$$

$$x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$$

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2d\omega$$

Biến đổi Fourier rời rạc ngược (IDTFT)

- Định nghĩa: $$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega}$$

- Xác định đáp ứng xung h(n) của các bộ lọc lý tưởng có đáp ứng tần số sau:
  1) Lọc thông thấp tần số cắt w_c.
  2) Lọc thông cao tần số cắt w_c.
  3) Lọc thông dải băng thông $[w_{c1} \div w_{c2}]$.
  4) Lọc chắn dải băng chắn $[w_{c1} \div w_{c2}]$.

Tính biến đổi Fourier rời rạc (DFT-N điểm)

- DTFT: $w \in R$
- DFT-N điểm: lấy mẫu DTFT (tương tự DTFT nhưng chỉ tính tại N tần số w_k)

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

$$\boxed{X(k) \equiv X(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

- Thực tế (phần cứng/ phần mềm): N = L

Ví dụ 2

1) Tính DFT-1 điểm của $x(n) = \{a\}$
2) Tính DFT-2 điểm của $x(n) = \{a; b\}$
3) Tính DFT-3 điểm của $x(n) = \{a; b; c\}$
4) Tính DFT-4 điểm của $x(n) = \{a; b; c; d\}$

Ví dụ 3

- Tính DFT-4 điểm của các tín hiệu sau:

1) $x(n) = \{5; 0; -3; 4\}$
2) $x(n) = \{1; 0; 0; 0\}$
3) $x(n) = \{0; 1; 0; 0\}$
4) $x(n) = \{0; 0; 1; 0\}$
5) $x(n) = \{0; 0; 0; 1\}$
6) $x(n) = \{1; 1; 1; 1\}$
7) $x(n) = \{1; 2; -2; 3; 4; -2; -1; 1\}$

DFT dạng ma trận

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \qquad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

Tính DFT (trường hợp L < N)

- Kỹ thuật chèn zero: chèn các giá trị 0 phía sau tín hiệu cho đủ chiều dài N.

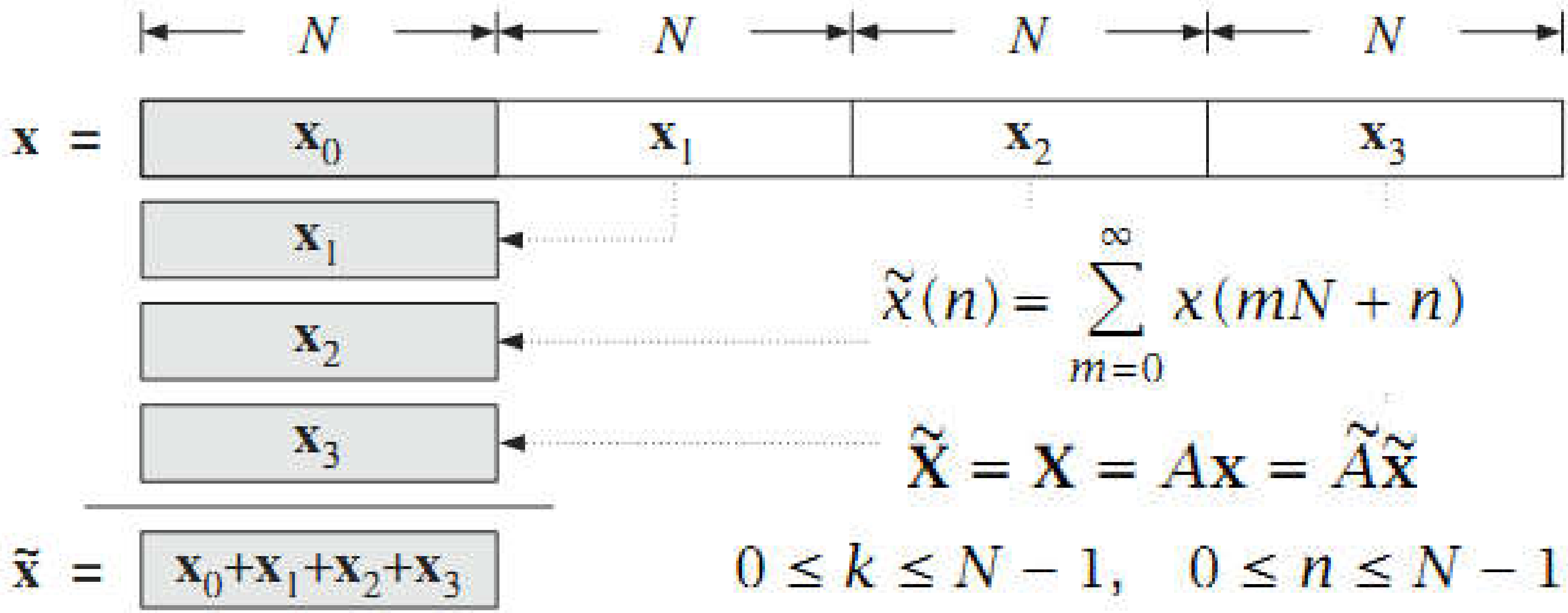
$$\mathbf{x}_D = [x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{D \text{ zeros}}]$$

- Kết quả không thay đổi.

$$X_D(\omega) = X(\omega)$$

Tính DFT
(trường hợp L > N)

- Mở rộng ma trận $A = [\tilde{A}, \tilde{A}, \tilde{A}, \ldots]$ $\tilde{A}_{kn} = W_N^{kn}$
- Kỹ thuật giảm modulo-N cho cùng kết quả.



$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mN+n)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} = A\mathbf{x} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$0 \le k \le N-1, \quad 0 \le n \le N-1$$

Ví dụ 4

$$\mathbf{X} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+4j \\ -2 \\ 8-4j \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+4j \\ -2 \\ 8-4j \end{bmatrix}$$

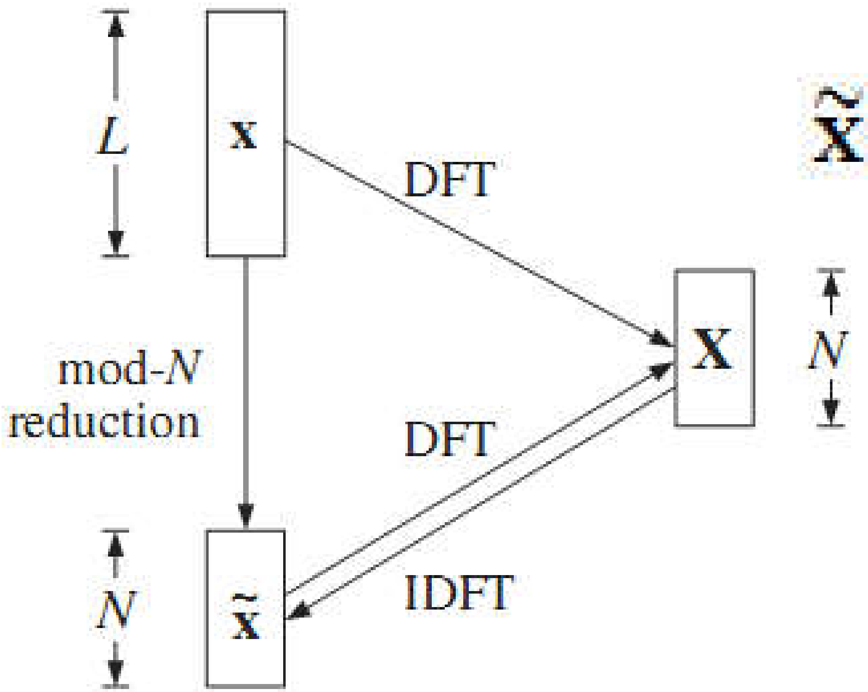
Tính không duy nhất (chồng lấn) của tín hiệu giảm modulo-N

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 + x_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 + x_7 \end{bmatrix}$$

Tính DFT ngược (IDFT-N điểm)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, n = 0,1,\ldots,N-1.$$



$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ only if $N \geq L$

$\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$ if $N < L$

Mối liên hệ giữa DFT và IDFT

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{IDFT}(\mathbf{X}) = \tilde{A}^{-1}\mathbf{X}$$

$$\frac{1}{N}\tilde{A}\tilde{A}^* = I_N \qquad \tilde{A}^{-1} = \frac{1}{N}\tilde{A}^*$$

$$\tilde{A}^*\mathbf{X} = (\tilde{A}\mathbf{X}^*)^* = [\mathrm{DFT}(\mathbf{X}^*)]^*$$

$$\mathrm{IDFT}(\mathbf{X}) = \frac{1}{N}[\mathrm{DFT}(\mathbf{X}^*)]^*$$

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} X_k \qquad \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k)e^{j\omega_k n}$$

Ví dụ 5

1) Tìm tín hiệu $x(n) = \{a; b; c; d\}$ có DFT-4 điểm $X(k) = \{6; 8 + 4j; -2; 8 – 4j\}$.
2) Tìm tín hiệu $y(n) = \{a; b; c; d; 2; 0; 1; 8\}$ có DFT-4 điểm $Y(k) = X(k)$.
3) Tìm 1 tín hiệu $v(n) = \{a; b; c; d; e\}$ có DFT-4 điểm $V(k) = X(k)$.

Tính chất DFT cơ bản

$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k)+a_2X_2(k)$
$x((n-l))_N$	$e^{-j2\pi kl/N}X(k)$
$x_1(n) \textcircled{N} x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$
$x(n+N)=x(n)$	$X(k)=X(k+N)$

$$E_x=\sum_{n=0}^{N}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

Dịch vòng

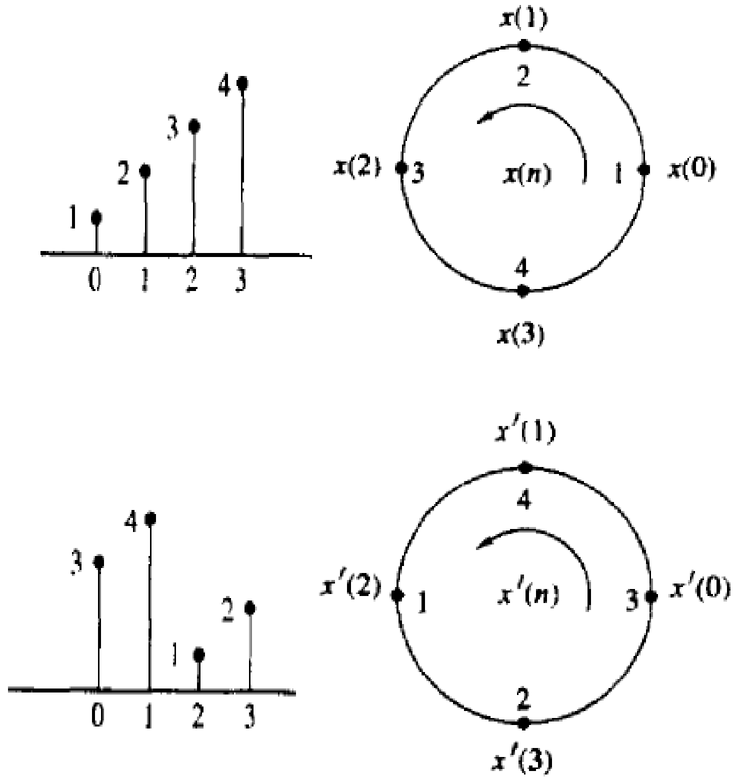
$$x'(n) = x(n-k,\ \text{modulo } N) \equiv x((n-k))_N$$

For example, if $k = 2$ and $N = 4$, we have

$$x'(n) = x((n-2))_4$$

which implies that

$$x'(0) = x((-2))_4 = x(2)$$
$$x'(1) = x((-1))_4 = x(3)$$
$$x'(2) = x((0))_4 = x(0)$$
$$x'(3) = x((1))_4 = x(1)$$



Tích chập vòng

$$x_3(m) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2((m-n))_N$$

- Ví dụ: $x_1(n) = \{2; 1; 2; 1\}$, $x_2(n) = \{1; 2; 3; 4\}$
  → $x_3(n) = \{14; 16; 14; 16\}$

DFT trong lọc (tích chập)

- Bộ lọc FIR h(n) bậc M
- Tín hiệu ngõ vào x(n) chiều dài L
- Tín hiệu ngõ ra y(n) chiều dài L + M
- Nếu N ≥ L + M, có thể dùng DFT để xác định tín hiệu ngõ ra y(n)
  - Dùng kỹ thuật chèn zero để tính DFT-N điểm H(k) và X(k).
  - Dùng tính chất tích chập để tính Y(k)=H(k).X(k)
  - Tính IDFT-N điểm để xác định y(n)

Trường hợp L vô hạn

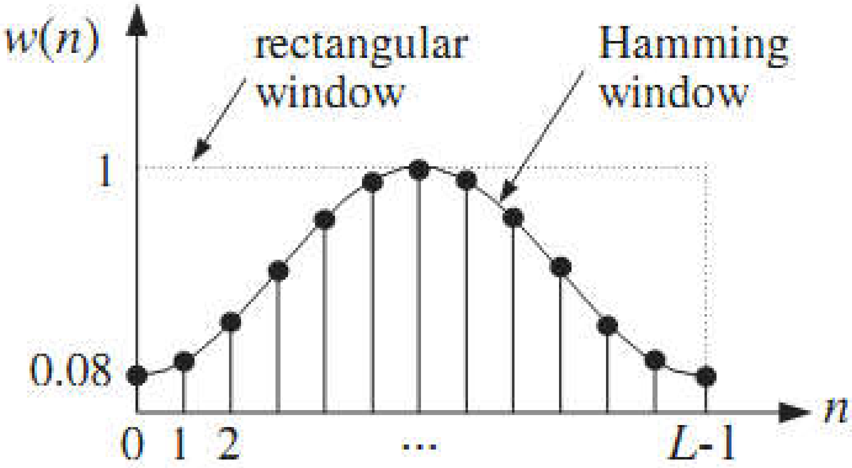
- Cửa sổ hóa: $x_L(n) = x(n)w(n)$
- Cửa sổ chữ nhật

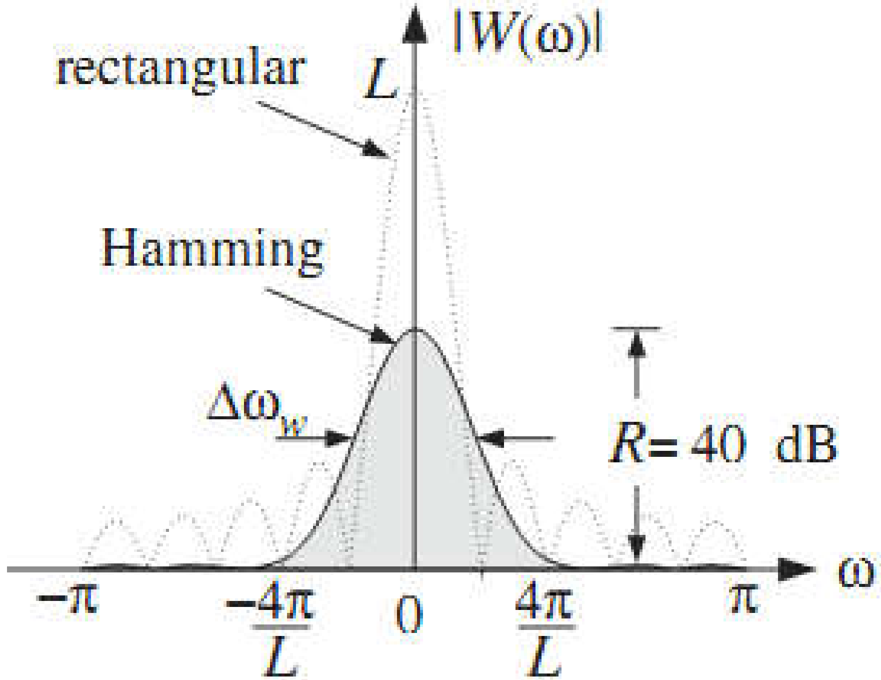
$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Cửa sổ Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{L-1}\right), & \text{if } 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

So sánh cửa sổ chữ nhật và Hamming





- Sai biệt tần số tối thiểu có thể xác định:
  - Cửa sổ chữ nhật: c = 1
  - Cửa sổ Hamming: c = 2

$$\boxed{\Delta f \geq \Delta f_w = c\,\frac{f_s}{L} = c\,\frac{1}{T_L}}$$

Giải thuật tính Fourier nhanh (FFT-N điểm)

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \quad , \; k=0,1,2,\ldots,N-1 \qquad W_N=e^{-j2\pi/N}$$

- DFT-N điểm: cần N^2 phép nhân phức và N.(N-1) phép cộng phức.
- FFT-N điểm: khai thác tính đối xứng và tuần hoàn của hệ số W_N để giảm chi phí tính toán.

$$W_N^{k+N/2}=-W_N^k \qquad\qquad W_N^{k+N}=W_N^k$$

FFT phân chia miền thời gian

- Chia đôi: chỉ số chẵn và chỉ số lẻ. $\qquad W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_N^{k(2n+1)}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^{k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

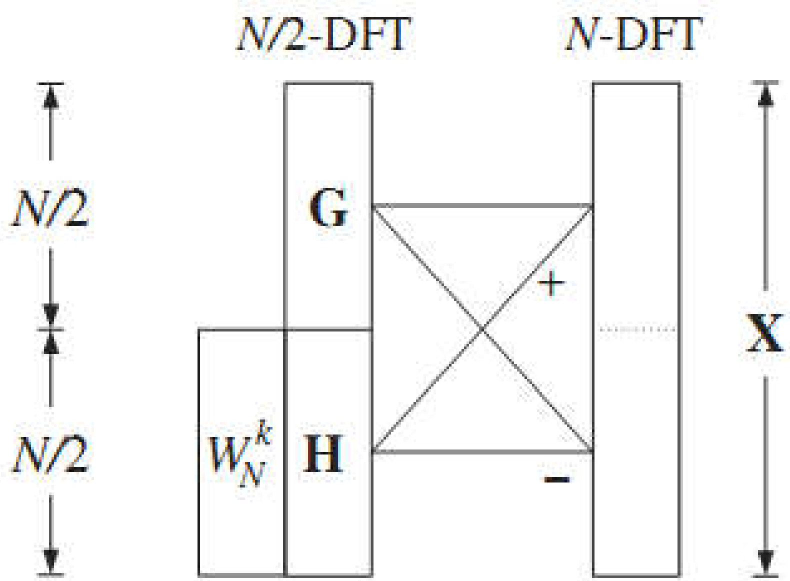
$$k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

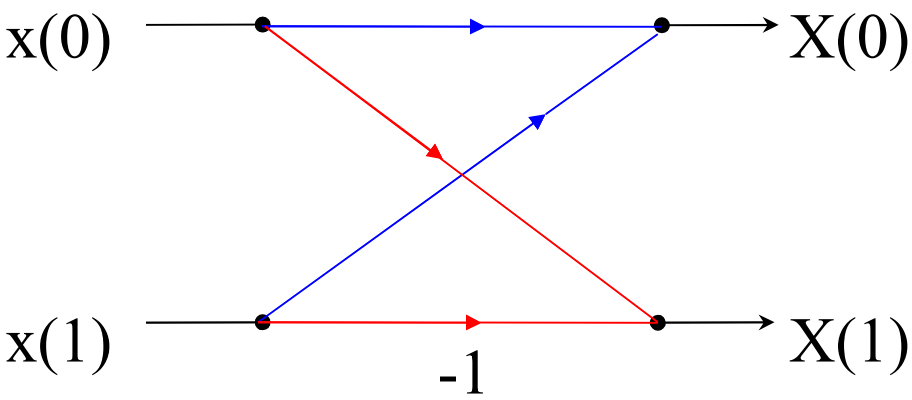
$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

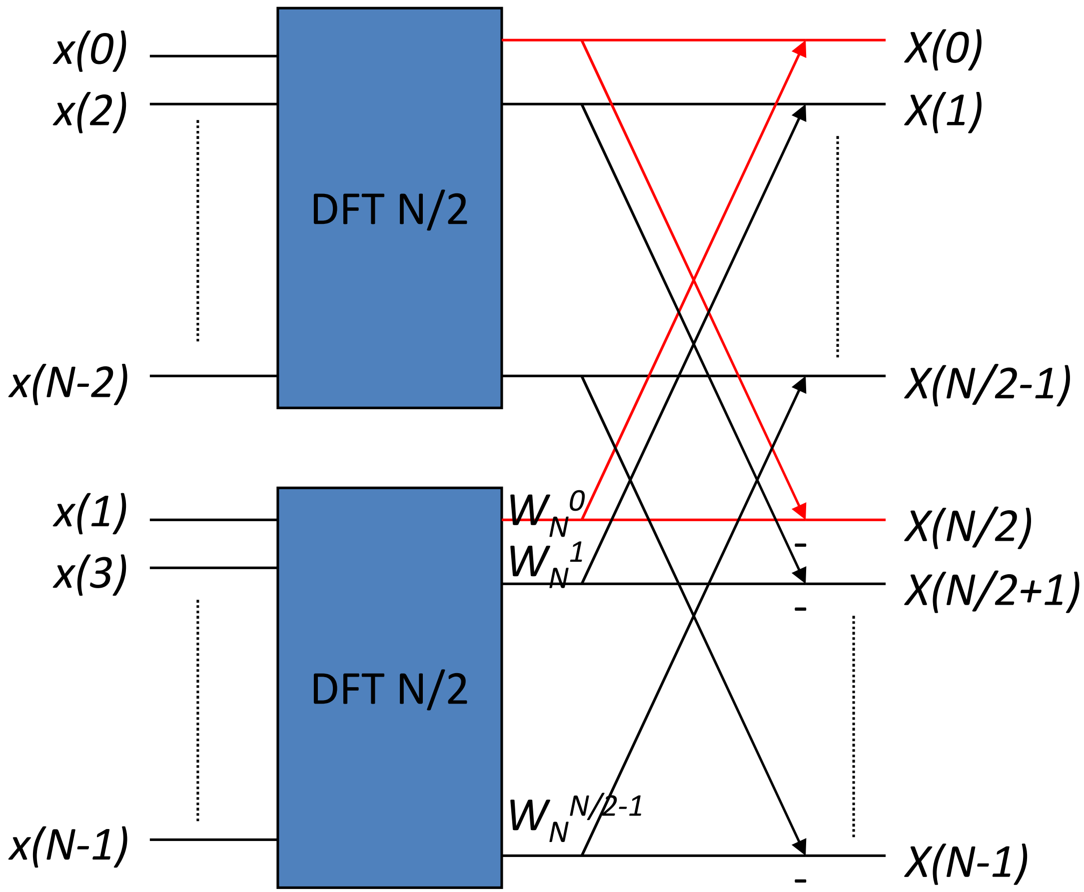
$$k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k + N/2) = G(k) - W_N^k H(k)$$





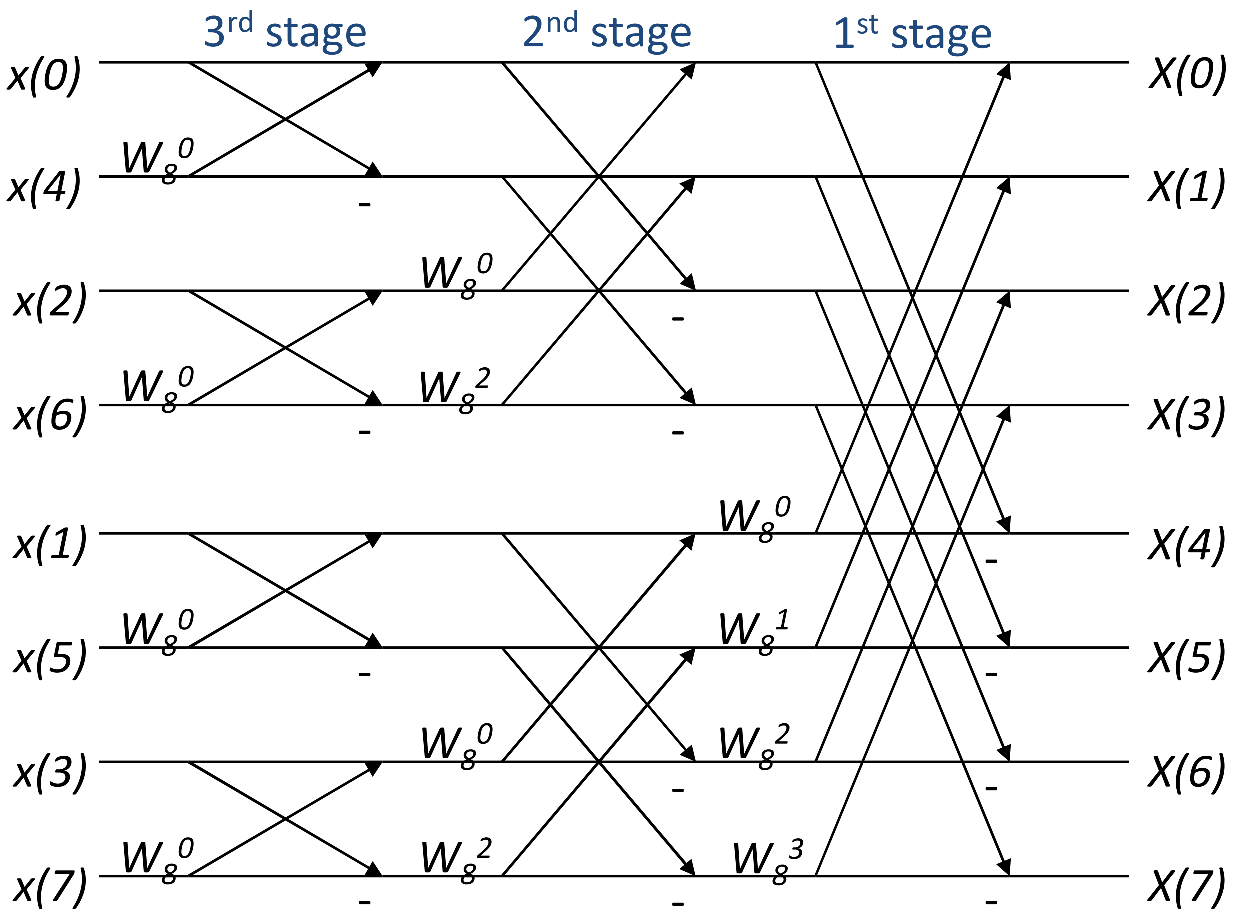
Sơ đồ FFT-N điểm phân chia miền thời gian



We need:

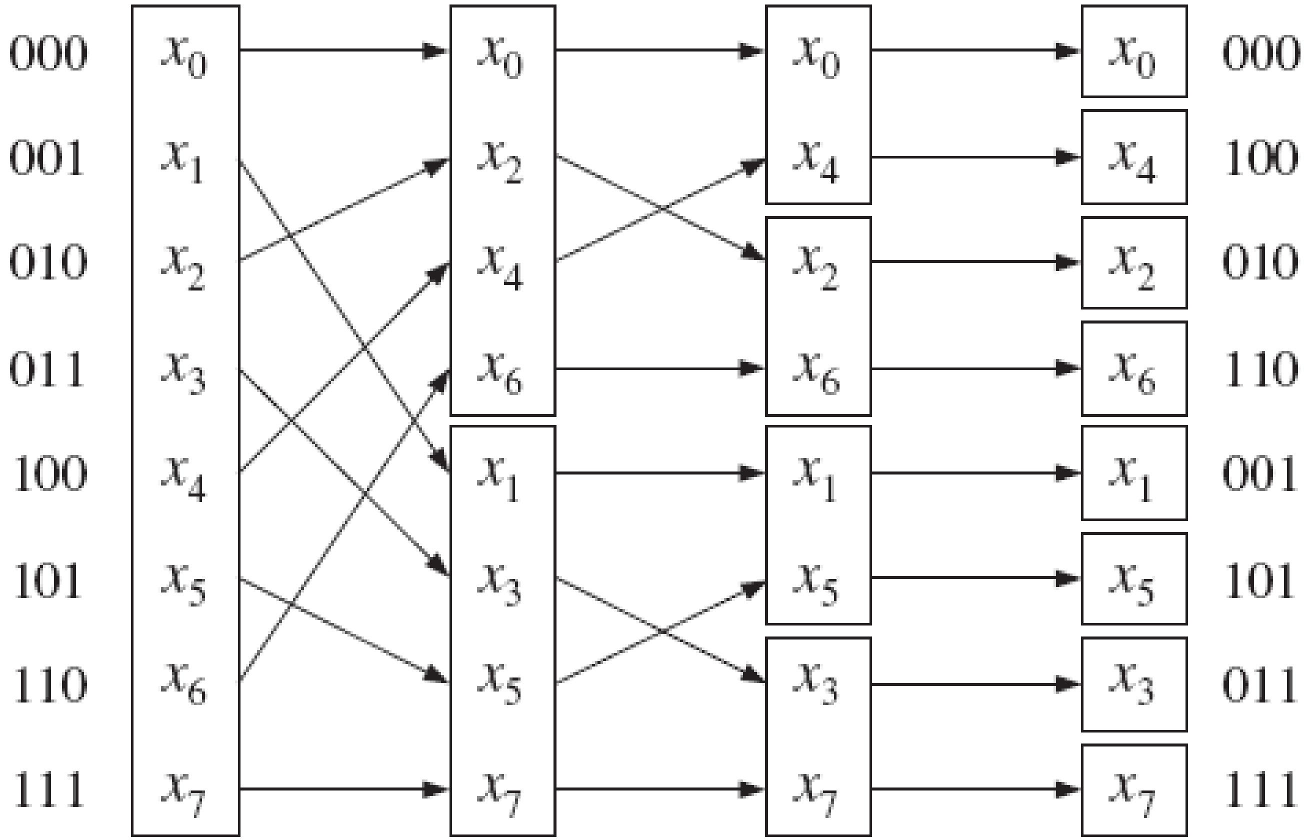
- N/2(N/2-1) complex '+' for each N/2 DFT.
- $(N/2)^2$ complex '×' for each DFT.
- N/2 complex '×' at the input of the butter-flies.
- N complex '+' for the butter-flies.
- Grand total: $N^2/2$ complex '+' N/2(N/2+1) complex '×'

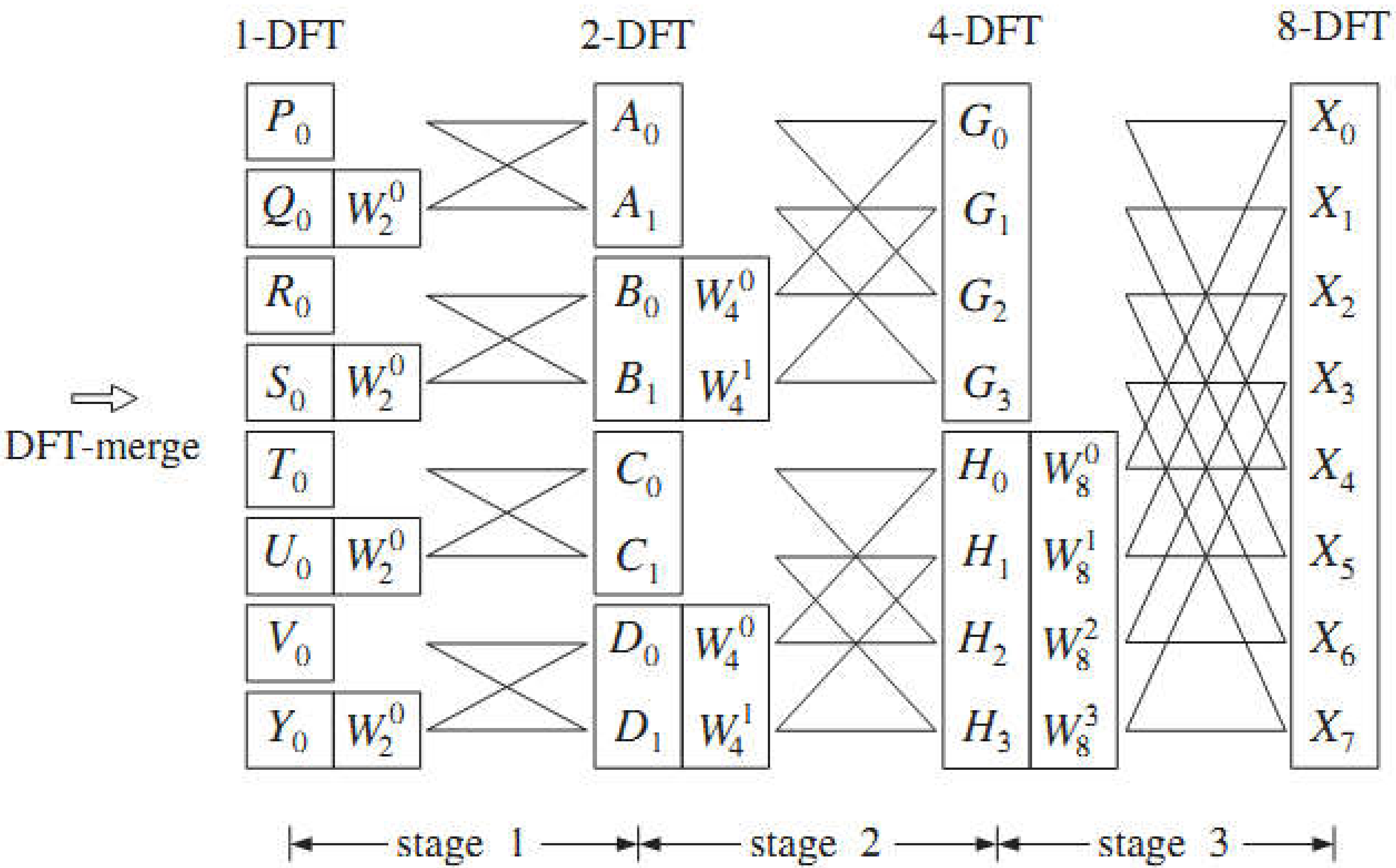
Sơ đồ FFT-8 điểm phân chia miền thời gian

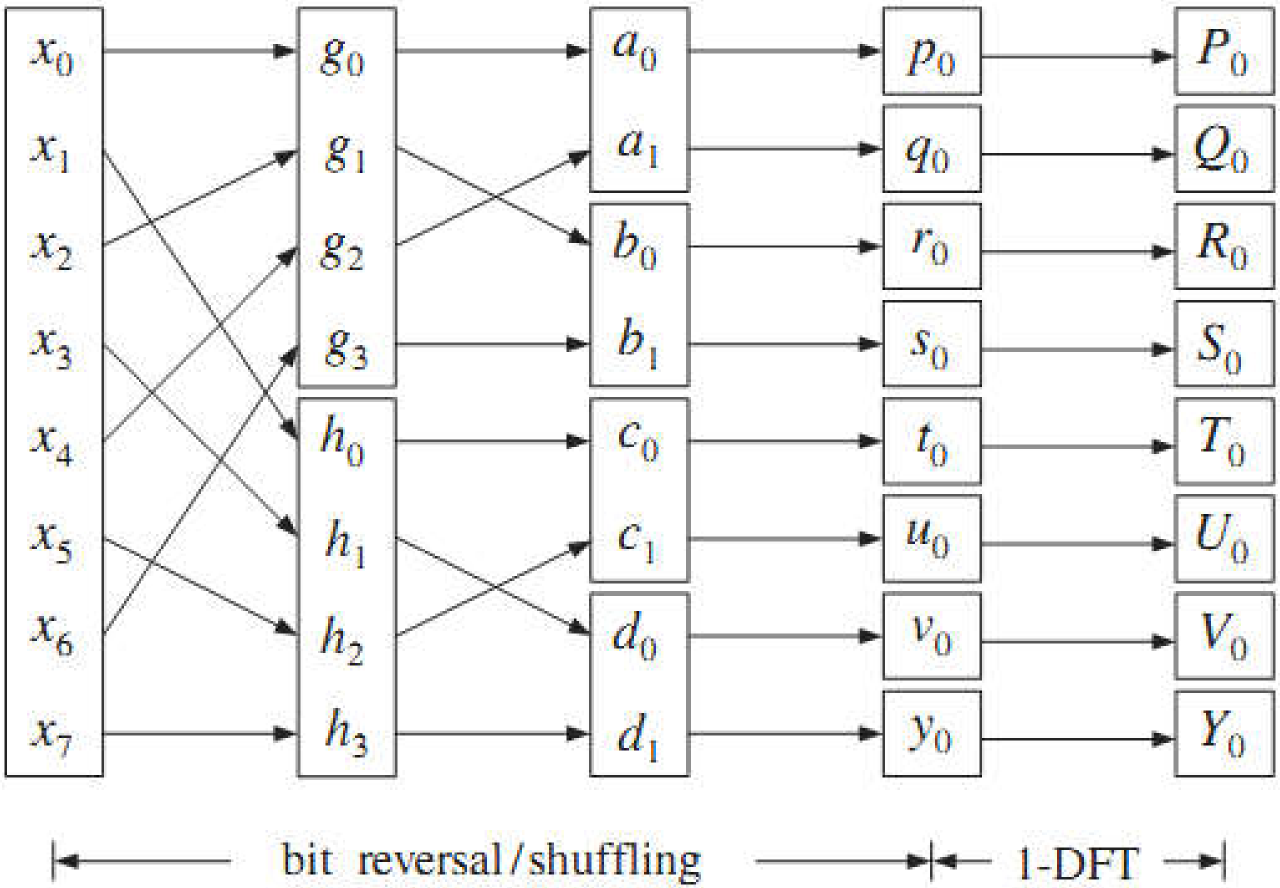


$W_8^0=1$

Giải thuật xáo trộn




1-DFT
2-DFT
4-DFT
8-DFT
DFT-merge
P_0
Q_0 W_2^0
R_0
S_0 W_2^0
T_0
U_0 W_2^0
V_0
Y_0 W_2^0
A_0
A_1
B_0 W_4^0
B_1 W_4^1
C_0
C_1
D_0 W_4^0
D_1 W_4^1
G_0
G_1
G_2
G_3
H_0 W_8^0
H_1 W_8^1
H_2 W_8^2
H_3 W_8^3
X_0
X_1
X_2
X_3
X_4
X_5
X_6
X_7
stage 1
stage 2
stage 3

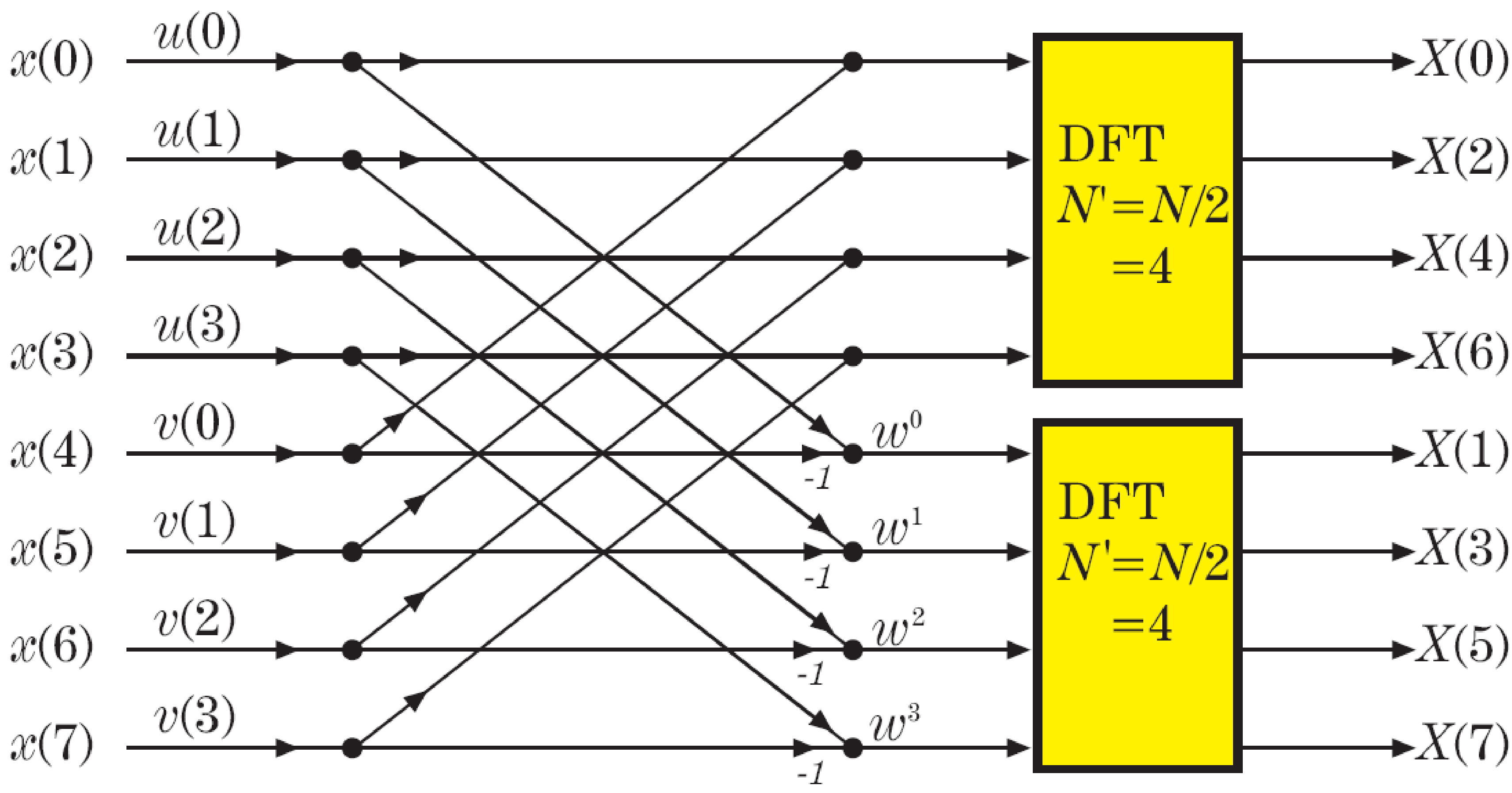


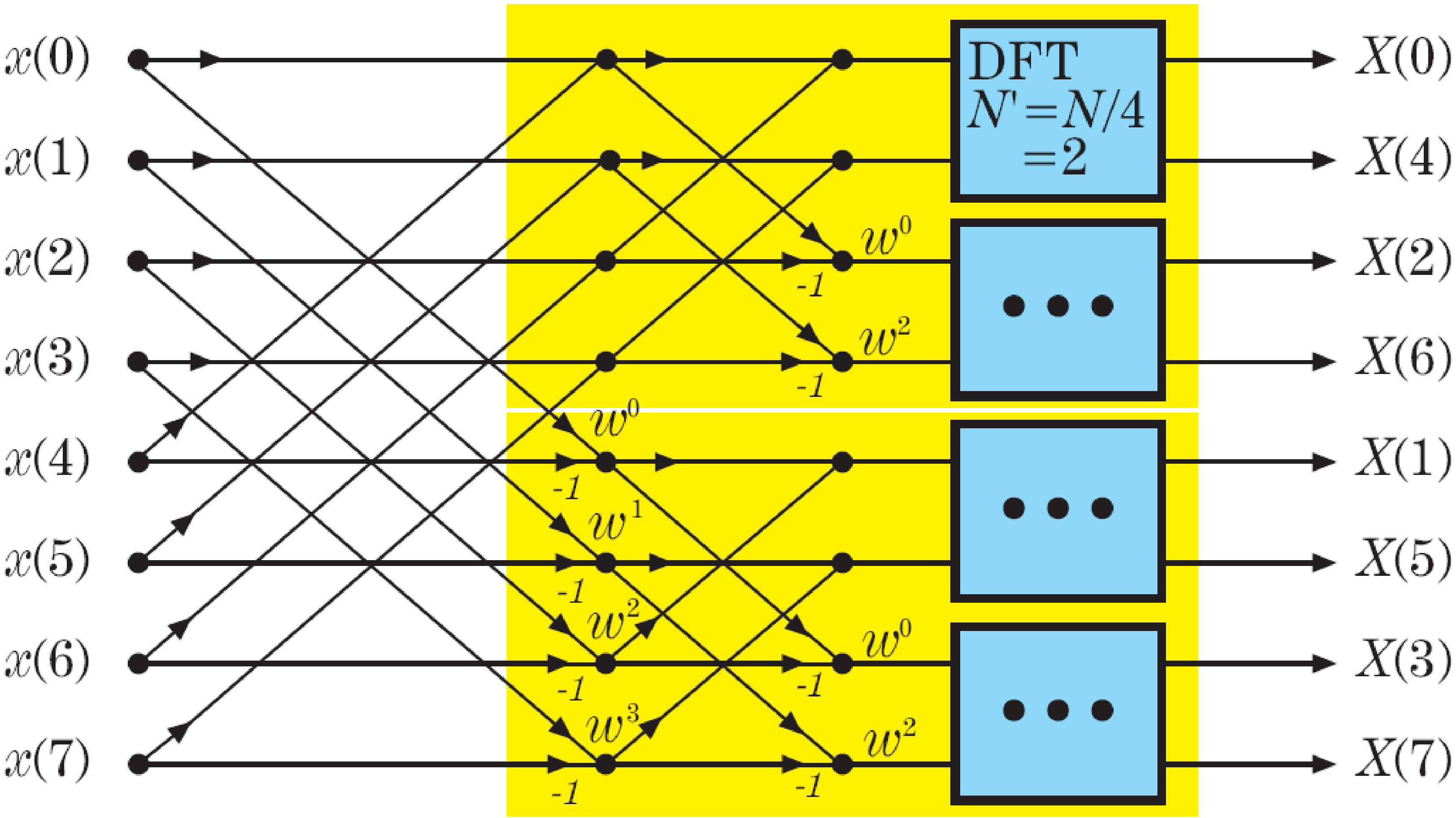
$P_0 = p_0$

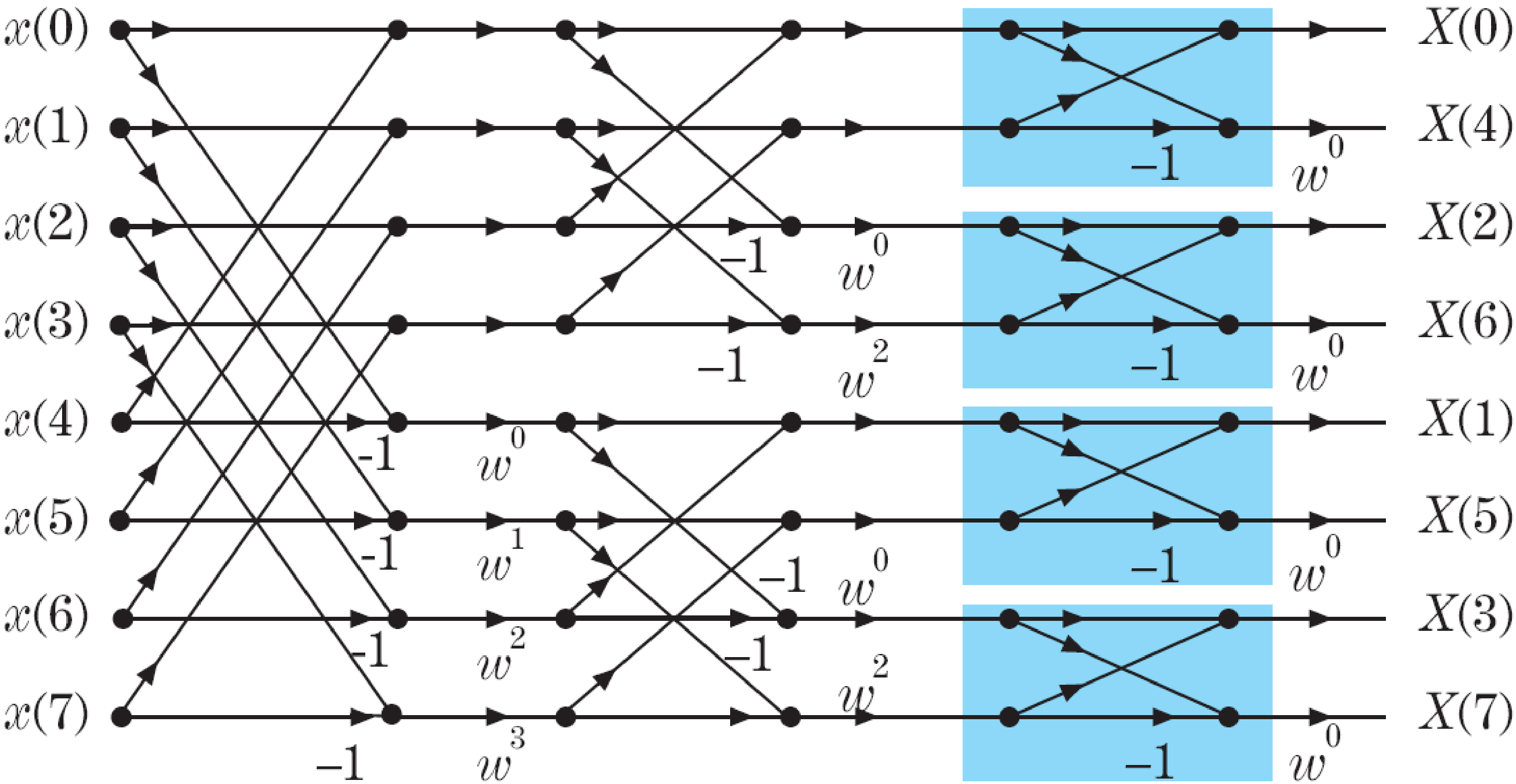
$Q_0 = q_0$, etc.

$\Rightarrow$ DFT-merge

Sơ đồ FFT phân chia miền tần số




x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
w0
w1
w2
w3
-1
DFT
N'=N/4
=2
X(0)
X(4)
X(2)
X(6)
X(1)
X(5)
X(3)
X(7)


x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
–1
-1
-1
-1
w0
w1
w2
w3
–1
–1
–1
–1
w0
w2
w0
w2
–1
–1
–1
–1
w0
w0
w0
w0
X(0)
X(4)
X(2)
X(6)
X(1)
X(5)
X(3)
X(7)

Tóm tắt

- DTFT và IDTFT
- Tính chất DTFT
- DFT-N điểm và IDFT-N điểm dùng công thức và ma trận
- Tính chất DFT-N điểm
- Kỹ thuật chèn zero
- Kỹ thuật giảm modulo-N
- FFT-N điểm và IFFT-N điểm

Bài tập 1

a) Tính DFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@↑, 1, 1, 2, 19, 11, 19, 11}.
b) Tính IDFT-4 điểm của tín hiệu X(k) = {@↑, 1 + j, 16, 1 – j}.
c) Vẽ sơ đồ thực hiện và tính FFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@↑, 1 – j, 16, 1 + j}.
d) Vẽ 1 sơ đồ tổng quát thực hiện FFT-8 điểm.
e) Vẽ 1 sơ đồ tổng quát thực hiện FFT-16 điểm.
f) Vẽ 1 sơ đồ tổng quát thực hiện IFFT-8 điểm.
g) Vẽ 1 sơ đồ tổng quát thực hiện IFFT-16 điểm.

Bài tập 2

a) Tính DFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@↑, 2, 8}.

b) Vẽ sơ đồ thực hiện và tính FFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@↑, 0, 1, 2}.

c) Xác định giá trị của A và B trong tín hiệu x(n) = {–20↑, –8, 1, 2, A, B} để DFT-4 điểm của tín hiệu trên có dạng X(k) = {5↑, 1 + j2, 1, 1 – j2}.

Bài tập 3

a) Tính DFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@, 8, 0, 5, 4, 0, 4, 1}.

b) Xác định giá trị của A và B trong tín hiệu x(n) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B} để DFT-4 điểm của tín hiệu trên có dạng X(k) = {12, 1 – j, –2, 1 + j}.

c) Vẽ sơ đồ thực hiện và tính FFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@, 8, 4, 6}.

d) Vẽ sơ đồ thực hiện tính IFFT-4 điểm của tín hiệu X(k) = {@, 8, 0, 5}.

Bài tập 4

a) Tính DFT-4 điểm của tín hiệu x(n) = {@, 2, 1, 0, 1, 1, 1}.
b) Xác định giá trị của A và B trong tín hiệu x(n) = {3, 1, 2, 0, A, B} để DFT-4 điểm của tín hiệu trên có dạng X(k) = {9, 2 – j3, 3, 2 + j3}.
c) Chứng minh và vẽ sơ đồ thực hiện tính DFT-4 điểm dựa trên các DFT-2 điểm.
d) Chứng minh và vẽ sơ đồ thực hiện tính IDFT-4 điểm dựa trên DFT-4 điểm.

Bài tập 5

a) Tính toán DFT-4 điểm X(k) của tín hiệu x(n) = {1 ; 2 ; 1 ; 0}.
b) Tính toán DFT-4 điểm của x(n) = {1 ; 2 ; 1}.
c) Tính toán DFT-3 điểm của x(n) = {1 ; 2 ; 1}.
d) Tính toán DFT-8 điểm của x(n) = {1 ; 2 ; 1}.
e) Tính toán DFT-4 điểm của x(n) = {0 ; 1 ; 2 ; 1}.
f) Tính toán DFT-4 điểm của x(n) = {0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1}.
g) Tính toán DFT-4 điểm của x(n) = {1 ; 2 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1}.
h) Xác định tín hiệu x(n) có biến đổi DFT 4 điểm là X(k)={8; 0; 4; 0} ?
i) Cho tín hiệu $x_1(n) = \{a_1 ; b_1 ; c_1 ; d_1\}$ có DFT-4 điểm $X_1(k) = \{8 ; -4j ; 0 ; 4j\}$ và tín hiệu $x_2(n) = \{a_2 ; b_2 ; c_2 ; d_2\}$ có DFT-4 điểm $X_2(k) = \{-8 ; 0 ; -4 ; 0\}$. Tính toán DFT-8 điểm X(k) của tín hiệu $x(n) = \{a_1 ; a_2 ; b_1 ; b_2 ; c_1 ; c_2 ; d_1 ; d_2\}$.