Digital Signal Processing

Chương 3

Hệ thống rời rạc (LTI)

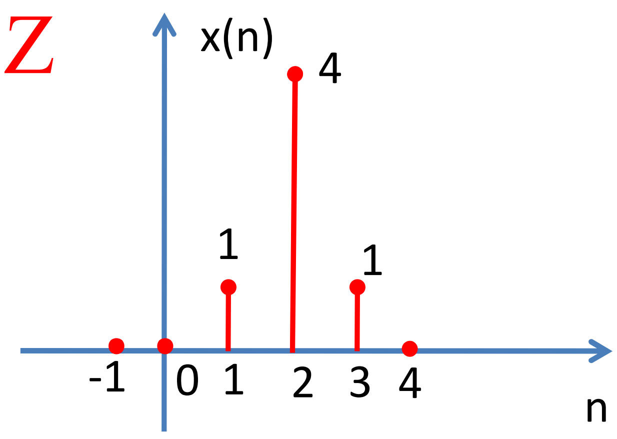
TS. Nguyễn Thanh Tuấn
Bộ môn Viễn thông (112-114B3)
Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG TPHCM
Email: nttuan@hcmut.edu.vn

Nội dung

- Biểu diễn tín hiệu rời rạc
- Phân loại tín hiệu rời rạc
- Phương trình sai phân vào ra
- Sơ đồ khối hiện thực hệ thống rời rạc
- Hệ thống tuyến tính bất biến
- Đáp ứng xung
- Tích chập
- FIR và IIR

Biểu diễn tín hiệu rời rạc

- Tín hiệu rời rạc: x(n) với $n \in Z$
- Biểu diễn tín hiệu rời rạc
  - Đồ thị (dạng sóng)
  - Hàm số (biểu thức)
  - Bảng



n	-1	0	1	2	3	4
x(n)	0	0	1	4	1	0

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1,3 \\ 4 & \text{for } n = 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

  - Liệt kê: chỉ số mẫu (n) tăng 1 qua từng phần tử

$$x(n) = [0, 0\uparrow, 1, 4, 1, 0] = [0, 1, 4, 1]$$

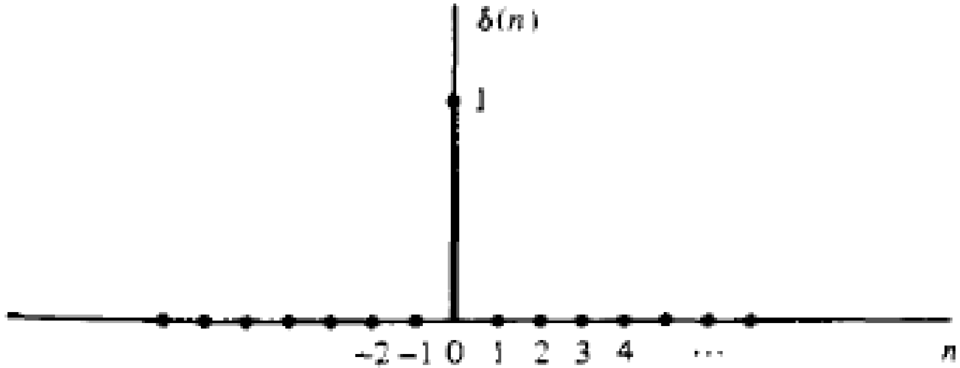
Quy ước liệt kê tín hiệu rời rạc

- Quy ước 1: trong trường hợp không có dấu hiệu cho biết vị trí mẫu n=0 thì vị trí này tương ứng với phần tử đầu tiên.
- Quy ước 2: các phần tử ngoài dấu ngoặc liệt kê có giá trị bằng 0. Do đó, cần liệt kê gọn nhất có thể.
- Quy ước 3: nếu còn phần tử khác 0 ngoài dấu ngoặc liệt kê, phải dùng ký hiệu …. Do đó, cần liệt kê càng nhiều càng tốt (trên 3 phần tử).

Hàm xung và bước đơn vị

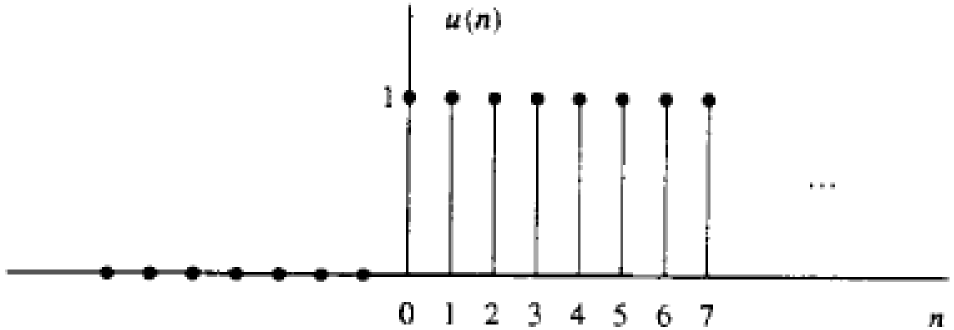
- Hàm xung đơn vị

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$



- Hàm bước đơn vị

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$



Ví dụ 1

- Liệt kê đúng quy ước các tín hiệu sau:

1) $x_1(n) = \delta(n)$
2) $x_2(n) = \delta(n + 2)$
3) $x_3(n) = \delta(n - 3)$
4) $x_4(n) = 4\delta(n) - 3\delta(n + 2) + 2\delta(n - 3)$
5) $x_5(n) = u(n)$
6) $x_6(n) = u(n + 1)$
7) $x_7(n) = u(n - 2)$
8) $x_8(n) = u(n - 2) - u(n + 1)$
9) $x_9(n) = u(-n)$
10) $x_{10}(n) = u(-n - 1)$

Ví dụ 2

- Viết biểu thức các tín hiệu sau theo hàm xung δ():

1) $x_1(n) = \{2; 0; 1; 9\}$
2) $x_2(n) = \{2; 0\uparrow; 1; 9\}$
3) $x_3(n) = \{2; 0; 1\uparrow; 9\}$
4) $x_4(n) = \{2; 0; 1; 9; 0\uparrow\}$
5) $x_5(n) = u(n - 1) - u(n - 2)$
6) $x_6(n) = u(n - 2) - u(n + 1)$
7) $x_7(n) = (-2)^n.\{u(n) - u(n - 2)\}$
8) $x_8(n) = u(n)$
9) $x_9(n) = u(-n)$
10) $x_{10}(n) = u(-n - 1)$

Chiều dài tín hiệu rời rạc

Định nghĩa 1: số lượng phần tử ở dạng liệt kê gọn nhất.

Định nghĩa 2: số lượng phần tử tính từ phần tử đầu tiên khác 0 đến phần tử cuối cùng khác 0.

Tín hiệu	Chiều dài	
	Định nghĩa 1	Định nghĩa 2
{1; 0; 2}	3	3
{0; 1; 0; 2}	4	3

Phân loại tín hiệu rời rạc

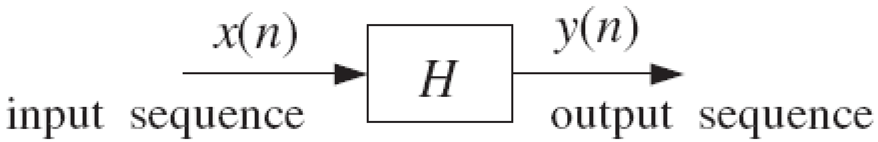
Hữu hạn	**Vô hạn**
Chiều dài (số lượng phần tử) hữu hạn	Chiều dài (số lượng phần tử) vô hạn
Liệt kê không có dấu … (đầu/ cuối)	Liệt kê có dấu … (đầu/ cuối)

Nhân quả	**Không nhân quả**	
	Phản nhân quả	**Hai phía (hỗn hợp)**
$x(n) = 0 \ \forall \ n < 0$	$x(n) = 0 \ \forall \ n \geq 0$	$x(n) \neq 0 \ \exists \ n < 0$ $x(n) \neq 0 \ \exists \ n \geq 0$

Ổn định	**Không ổn định**
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n) \rvert < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n) \rvert = \infty$

Phương trình vào ra

- Hệ thống rời rạc: xử lý tín hiệu rời rạc ($n \in Z$)



- Phương trình vào ra: cho biết quy tắc biến đổi tín hiệu rời rạc ngõ vào x(n) thành tín hiệu rời rạc ngõ ra y(n).

$$y(n) = H\{x(n)\}$$

Phương pháp xử lý rời rạc

- Xử lý mẫu: từng mẫu

$$x_0 \xrightarrow{H} y_0, x_1 \xrightarrow{H} y_1, x_2 \xrightarrow{H} y_2$$

- Xử lý khối: nhiều mẫu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{H} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

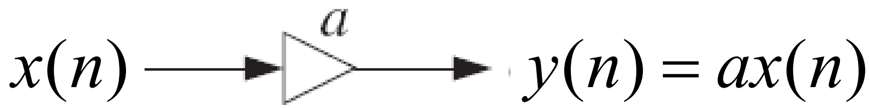
Ví dụ 3

- Cho tín hiệu ngõ vào $x(n)=\{2; 0\uparrow; 1; 9\}$. Liệt kê tín hiệu ngõ ra y(n) với các hệ thống có phương trình vào ra sau:

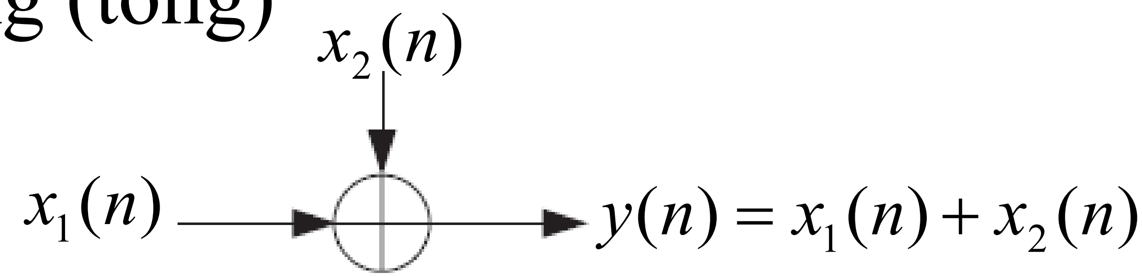
1) $y(n)=2x(n)$
2) $y(n)=x(n-2)$
3) $y(n)=x(n+3)$
4) $y(n)=x(n)+4$
5) $y(n)=x(n)+x(n-1)$
6) $y(n)=x(n-1)-x(n-2)$
7) $y(n)=n.x(n)$
8) $y(n)=x(-n)$
9) $y(n)=x(2n)$
10) $y(n)=x^2(n)$

Sơ đồ khối cơ bản

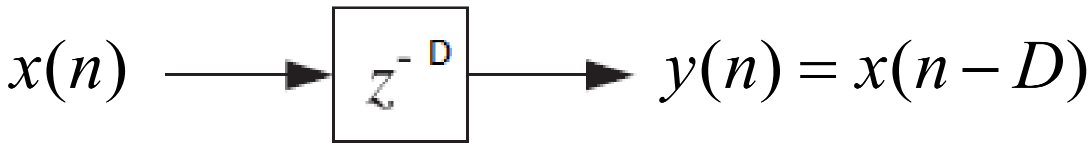
- Bộ nhân hằng số (khuếch đại, tỉ lệ)



- Bộ cộng (tổng)



- Bộ trễ



Đánh giá sơ đồ khối hệ thống

- Khi đánh giá chi phí (độ phức tạp) dựa vào các bộ trễ (một mẫu) và bộ cộng (hai ngõ vào).
- Thứ tự ưu tiên
  - Bộ trễ
  - Bộ cộng
  - Bộ nhân

Ví dụ 4

- Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống và thống kê độ phức tạp (số bộ trễ, bộ cộng, bộ nhân) cho các hệ thống sau:

1) $y(n)=2x(n-1)-x(n-2)$
2) $y(n)=x(n)-2x(n-2)+3x(n-3)$
3) $y(n)=x(n)-y(n-1)$
4) $y(n)=x(n-1)+y(n-1)$
5) $y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)+\dots$

Ví dụ 5

- Cho hệ thống có phương trình vào-ra như sau: $y(n) = x(-n) - 1$. Liệt kê tất cả giá trị ngõ ra của hệ thống với từng ngõ vào sau:

1) $x_1(n) = \{2, 0\uparrow, 1, 9\}$
2) $x_2(n) = 2x_1(n)$
3) $x_3(n) = x_1(n-2)$
4) $x_4(n) = x_2(n) + x_3(n)$

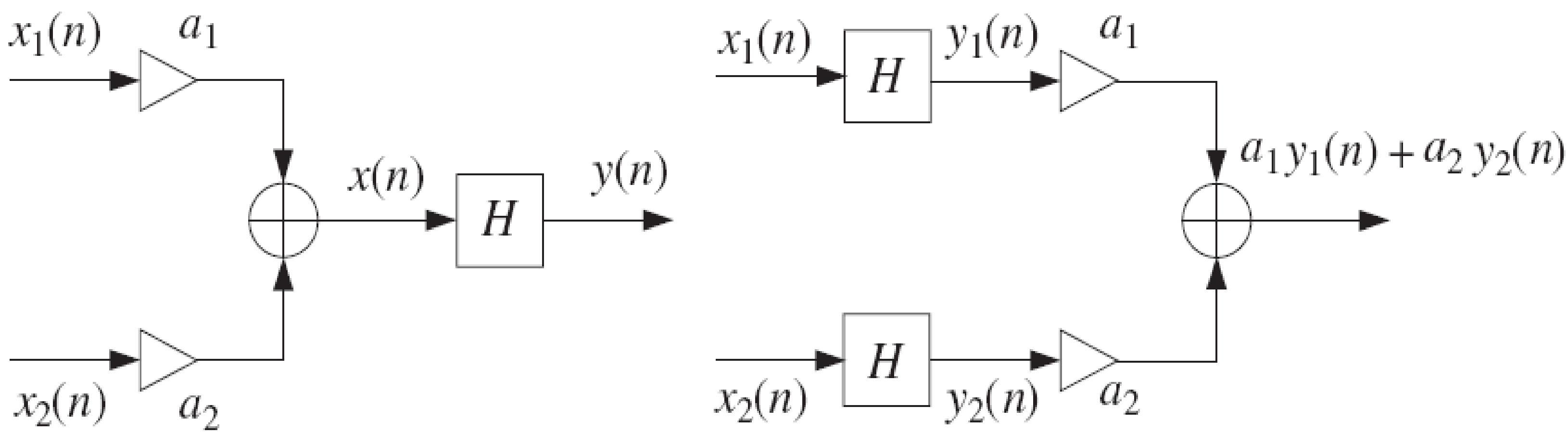
Ví dụ 6

- Cho hệ thống có phương trình vào-ra như sau: $y(n) = -x(n-1)$. Liệt kê tất cả giá trị ngõ ra của hệ thống với từng ngõ vào sau:

1) $x_1(n) = \{2, 0\uparrow, 1, 9\}$
2) $x_2(n) = 2x_1(n)$
3) $x_3(n) = x_1(n-2)$
4) $x_4(n) = x_2(n) + x_3(n)$

Hệ thống tuyến tính và phi tuyến

- Thực hiện kiểm tra theo 2 quá trình sau:



- Nếu $y(n)=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$ $\forall$ a_1, a_2 thì hệ thống tuyến tính. Ngược lại, hệ thống phi tuyến.

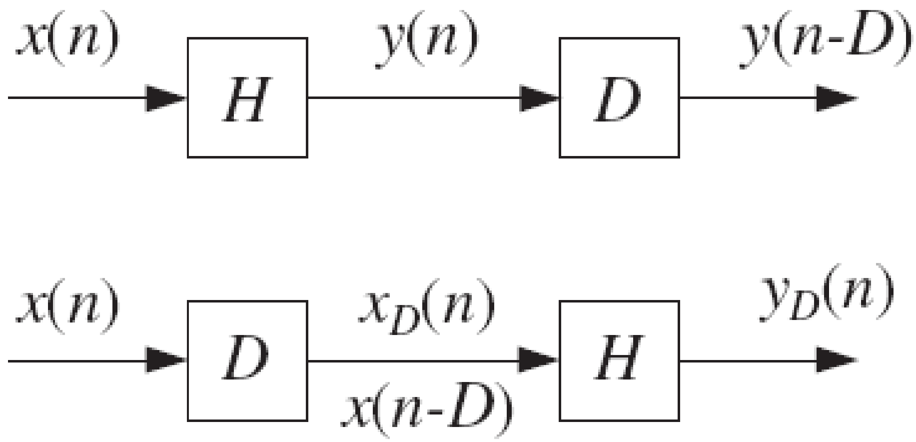
Ví dụ 7

- Kiểm tra tính tuyến tính của các hệ thống sau:

1) $y(n)=nx(n)$
2) $y(n)=x(n^2)$
3) $y(n)=x^2(n)$
4) $y(n)=2x(n)+3$

Hệ thống bất biến và thay đổi

- Thực hiện kiểm tra theo 2 quá trình sau:



- Nếu $y_D(n)=y(n-D)$ $\forall$ D thì hệ thống bất biến. Ngược lại, hệ thống thay đổi theo thời gian.

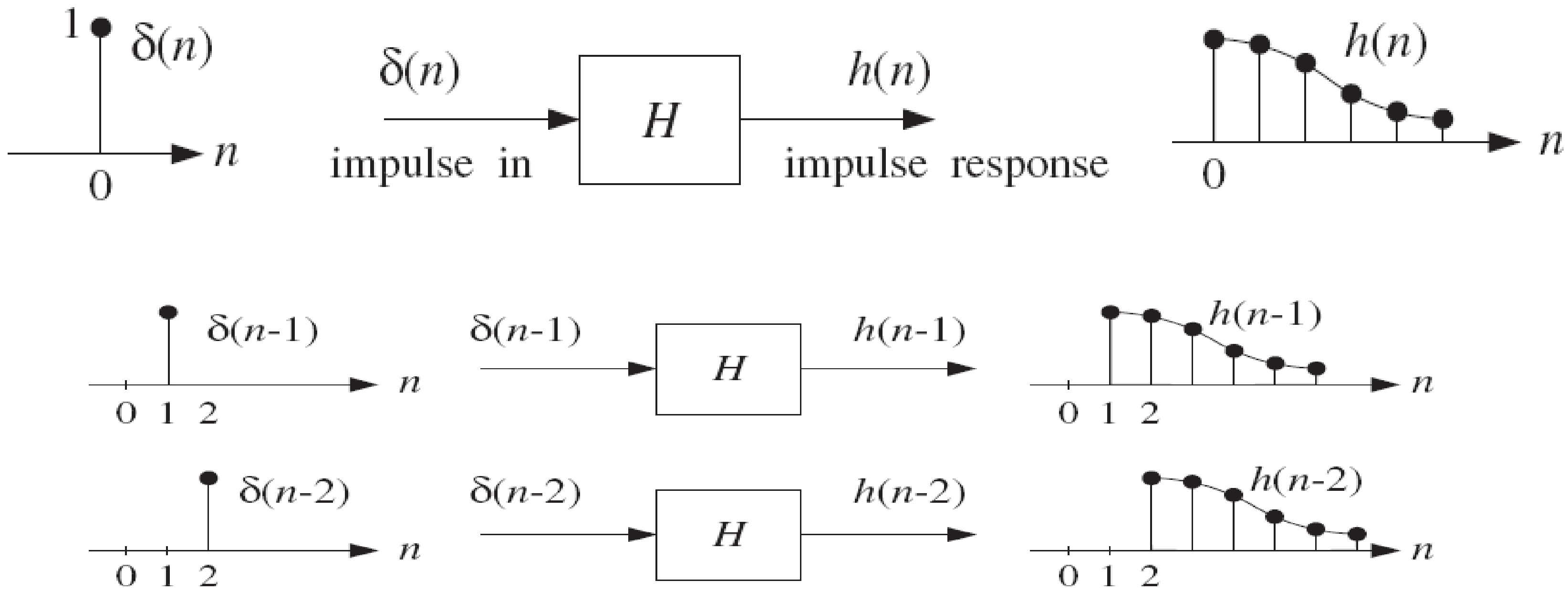
Ví dụ 8

- Kiểm tra tính bất biến của các hệ thống sau:

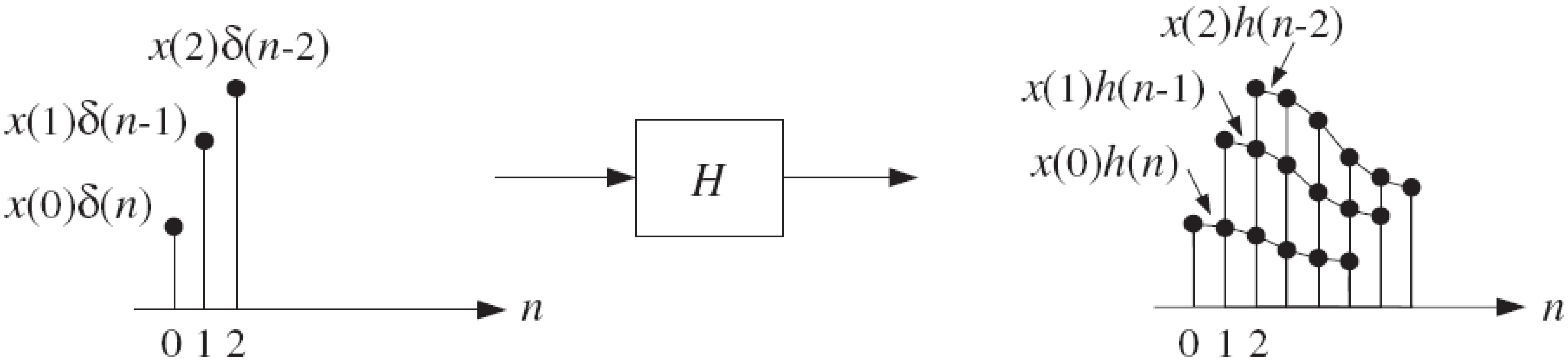
1) $y(n)=nx(n)$
2) $y(n)=x(n)-x(n-1)$
3) $y(n)=x(-n)$
4) $y(n)=x(2n)$

Hệ thống tuyến tính bất biến (LTI)

- Thỏa cả hai tính chất tuyến tính và bất biến.
- Đặc trưng bởi **đáp ứng xung** h(n) là ngõ ra của hệ thống khi ngõ vào dạng xung δ(n).



Tích chập (convolution)



- Dạng LTI $$\boxed{y(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)}$$

- Dạng trực tiếp $$\boxed{y(n) = \sum_m h(m)x(n-m) = h(n) * x(n)}$$

Một số đặc tính hệ thống LTI

- Tín hiệu ngõ ra được xác định qua tích chập của đáp ứng xung và tín hiệu ngõ vào.
  – Dạng LTI: theo từng giá trị tín hiệu ngõ vào
  – Dạng trực tiếp: theo từng giá trị đáp ứng xung
- Phương trình vào-ra có dạng sai phân.
- Sơ đồ khối hiện thực chỉ cần 3 loại: bộ trễ, bộ cộng và bộ nhân hằng số.

Ví dụ 9

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)=\{2; 0\uparrow; 1; 9\}$. Xác định tín hiệu ngõ ra y(n) các trong trường hợp tín hiệu ngõ vào x(n) sau:

1) $x(n) = \delta(n)$
2) $x(n) = \delta(n - 2)$
3) $x(n) = 3\delta(n + 1)$
4) $x(n) = \delta(n - 1) + 2\delta(n - 2)$
5) $x(n) = \{3; -1; 1\uparrow; 0; 2\}$

Ví dụ 10

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)=\{3; -1; 1\uparrow; 0; 2\}$ và tín hiệu ngõ vào $x(n)=\{2; 0\uparrow; 1; 9\}$. Xác định các giá trị tín hiệu ngõ ra y(n) sau:

1) $y(n = 0)$
2) $y(n = 2)$
3) $y(n = -2)$
4) $y(n = 4)$
5) $y(n = -4)$

Ví dụ 11

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)=\{3\uparrow; -1; 1; 0; 2\}$ và tín hiệu ngõ vào $x(n)=\{2\uparrow; 0; 1; 9\}$. Xác định các giá trị tín hiệu ngõ ra y(n) sau:

1) $y(n = 0)$
2) $y(n = 2)$
3) $y(n = -2)$
4) $y(n = 4)$
5) $y(n = -4)$

Ví dụ 12

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)=\{0\uparrow; 3; -1; 1; 0; 2\}$ và tín hiệu ngõ vào $x(n)=\{0\uparrow; 0; 2; 0; 1; 9\}$. Xác định các giá trị tín hiệu ngõ ra y(n) sau:

1) $y(n = 0)$
2) $y(n = 2)$
3) $y(n = -2)$
4) $y(n = 4)$
5) $y(n = -4)$

Hệ thống nhân quả, phản nhân quả và hai phía

- Hệ thống nhân quả (causal): giá trị ngõ ra $y(n = n_0)$ được xác định bởi các giá trị ngõ vào $x(n \le n_0)$ và ngõ ra $y(n < n_0)$ $\forall n_0$. Ngược lại, hệ thống không nhân quả (non-causal).
- Hệ thống phản nhân quả (anti-causal): giá trị ngõ ra $y(n = n_0)$ được xác định bởi các giá trị ngõ vào $x(n > n_0)$ và ngõ ra $y(n > n_0)$ $\forall n_0$.
- Hệ thống hai phía (two-sided) hay hỗn hợp (mixed): không thỏa nhân quả cũng như phản nhân quả.
- Tính chất hệ thống nhân quả: $y(n < n_0) = 0 \;\; \forall \; x(n < n_0) = 0$.
- **Hệ thống LTI nhân quả/phản nhân quả/hai phía**: tương đương đáp ứng xung h(n) nhân quả/phản nhân quả/hai phía.

Ví dụ 13

- Xác định tính chất (nhân quả, phản nhân quả, hai phía) của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = x(n) - 2x(n-1)$
2) $y(n) = x(n) - 2x(n+1)$
3) $y(n) = x(-n)$
4) $y(n) = x(2n)$
5) $y(n) = n.x(n)$
6) $y(n) = x(n^2 + 1)$

Hệ thống ổn định và không ổn định

- Tiêu chuẩn BIBO (Bounded Input Bounded Output)
- Hệ thống ổn định: giá trị ngõ ra luôn bị chặn ($|y(n)| \leq B$ hay $y(n) \neq \infty$) khi giá trị ngõ vào bị chặn ($|x(n)| \leq A$ hay $x(n) \neq \infty$) $\forall n$. Ngược lại, hệ thống không ổn định.
- **Hệ thống LTI ổn định**: tương đương đáp ứng xung h(n) ổn định.

Ví dụ 14

- Xác định tính chất (ổn định, không ổn định) của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = x(n) - 2x(n-1)$
2) $y(n) = x(n) - 2x(n+1)$
3) $y(n) = x(-n)$
4) $y(n) = x(2n)$
5) $y(n) = n.x(n)$
6) $y(n) = x^2(n)$

Hệ thống LTI nhân quả và ổn định

- **Hệ thống LTI nhân quả/phản nhân quả/hai phía**: tương đương đáp ứng xung h(n) nhân quả/phản nhân quả/hai phía.
- **Hệ thống LTI ổn định/không ổn định**: tương đương đáp ứng xung h(n) ổn định/không ổn định.

Nhân quả	Phản nhân quả	Hai phía (hỗn hợp)
$h(n) = 0 \ \forall \ n < 0$	$h(n) = 0 \ \forall \ n \geq 0$	$h(n) \neq 0 \ \exists \ n < 0$ $h(n) \neq 0 \ \exists \ n \geq 0$

Ổn định	Không ổn định
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert h(n) \rvert < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert h(n) \rvert = \infty$

Hệ thống FIR

- FIR (Finite Impulse Response): hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n) hữu hạn.
- Chiều dài đáp ứng xung L_h:
  - Định nghĩa 1: số lượng phần tử đáp ứng xung ở dạng liệt kê gọn nhất.
  - Định nghĩa 2: số lượng phần tử đáp ứng xung tính từ phần tử đầu tiên khác 0 đến phần tử cuối cùng khác 0.
- Bậc của hệ thống M_h: cho biết độ phức tạp (số bộ trễ tối thiểu) để hiện thực hệ thống nhân quả.
  - $M_h = L_h - 1$. (L_h theo định nghĩa 1)
  - $h(n = n_{max} = M_h) \neq 0$ và $h(n = M_h + k) = 0 \ \forall\ k > 0$

Ví dụ 15

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n) = \delta(n) - \delta(n - 2)$.

1) Hệ thống trên có là FIR không? Giải thích.
2) Hệ thống trên có nhân quả không? Giải thích.
3) Hệ thống trên có ổn định không? Giải thích.
4) Xác định bậc của hệ thống.
5) Viết phương trình sai phân vào ra.
6) Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống.
7) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = \delta(n - 2) - \delta(n + 2)$.
8) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n - 2) - u(n + 2)$.
9) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n)$.
10) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(-n-1)$.

Ví dụ 16

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n) = u(n) - u(n - 2)$.

1) Hệ thống trên có là FIR không? Giải thích.
2) Hệ thống trên có nhân quả không? Giải thích.
3) Hệ thống trên có ổn định không? Giải thích.
4) Xác định bậc của hệ thống.
5) Viết phương trình sai phân vào ra.
6) Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống.
7) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = \delta(n - 2) - \delta(n + 2)$.
8) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n - 2) - u(n + 2)$.
9) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n)$.
10) Liệt kê ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = u(-n-1)$.

Hệ thống IIR

- IIR (Infinite Impulse Response): hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n) vô hạn.
- Phương trình sai phân vào ra ở dạng đệ quy (hồi tiếp).
- Bậc của hệ thống IIR nhân quả:
  - Định nghĩa 1: số bộ trễ tối thiểu để hiện thực hệ thống (giá trị lớn nhất giữa số bộ trễ tối thiểu ở ngõ vào và số bộ trễ tối thiểu ở ngõ ra).
  - Định nghĩa 2: số bộ trễ tối thiểu ở ngõ ra.

$$\boxed{y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)}$$

Ví dụ 17

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n)=u(n).

1) Hệ thống trên là FIR hay IIR? Giải thích.
2) Hệ thống trên có nhân quả không? Giải thích.
3) Hệ thống trên có ổn định không? Giải thích.
4) Viết phương trình sai phân vào ra.
5) Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống.
6) Xác định bậc của hệ thống.
7) Liệt kê ngõ ra y(n) khi ngõ vào x(n)=δ(n–2)–δ(n+2).
8) Liệt kê ngõ ra y(n) khi ngõ vào x(n)=u(n–2)–u(n+2).
9) Liệt kê ngõ ra y(n) khi ngõ vào x(n)=u(n).
10) Liệt kê ngõ ra y(n) khi ngõ vào x(n)=u(–n–1).

Ví dụ 18

- Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n) sau:

$$\boxed{h(n)=\begin{cases} 0 & for\ n<0 \\ 2 & for\ n=0 \\ 4(0.5)^{n-1} & for\ n\geq 1 \end{cases}}$$

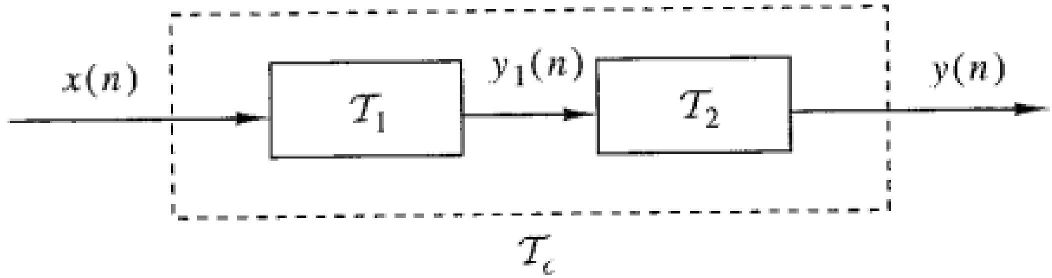
1) Hệ thống trên là FIR hay IIR? Giải thích.
2) Hệ thống trên có nhân quả không? Giải thích.
3) Hệ thống trên có ổn định không? Giải thích.
4) Viết phương trình sai phân vào ra.
5) Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống.
6) Xác định bậc của hệ thống.
7) Viết phương trình đáp ứng xung h(n) ở dạng đệ quy.

Hệ thống tĩnh và động

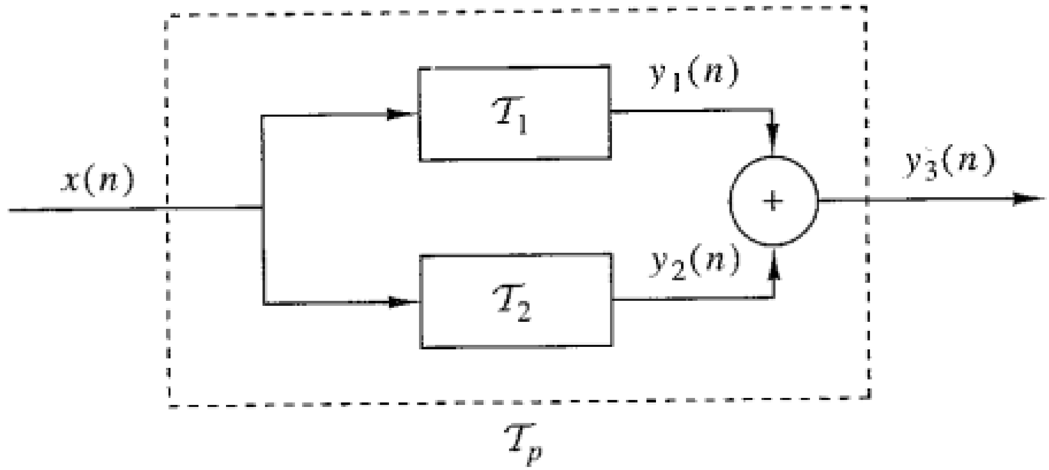
- Hệ thống tĩnh (static): giá trị ngõ ra $y(n = n_0)$ được xác định bởi giá trị ngõ vào $x(n = n_0)$. Ngược lại, hệ thống động (dynamic).
- Tính chất hệ thống tĩnh: không cần bộ nhớ.

Ghép hệ thống

- Liên tầng (nối tiếp)
  - LTI: $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$



- Song song: $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$



Tín hiệu và hệ thống rời rạc

Tính chất	Tín hiệu rời rạc x(n)	Hệ thống rời rạc y(n)=H{x(n)}	Hệ thống LTI đáp ứng xung h(n)
Tuyến tính	$x(n) = a.n + b$	$H\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1H\{x_1(n)\} + a_2H\{x_2(n)\}$	$x(n) \leftrightarrow \delta(n)$ $y(n) \leftrightarrow h(n)$ $y(n) = h(n) * x(n)$ $y(n) = x(n) * h(n)$ FIR & IIR
Bất biến	$x(n) = const$	$x_D(n) = x(n – D)$ $y(n – D)=H\{x_D(n)\}$	
Nhân quả	$x(n) = 0\ \forall\ n < 0$	$y(n < n_0) = 0$ $\forall\ x(n < n_0) = 0$	h(n) nhân quả
Ổn định	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert < \infty$	$y(n) \neq \infty$ $\forall\ x(n) \neq \infty$	h(n) ổn định

Tóm tắt

- ❖ Các quy ước liệt kê tín hiệu rời rạc.
- ❖ Các hàm δ(n) và u(n). So sánh với các hàm δ(t) và u(t).
- ❖ Phương trình sai phân vào-ra của hệ thống rời rạc.
- ❖ Xác định các tính chất tuyến tính, bất biến, nhân quả, ổn định của hệ thống rời rạc.
- ❖ Xác định các tính chất nhân quả và ổn định của tín hiệu rời rạc.
- ❖ Đáp ứng xung của hệ thống LTI.
- ❖ Vẽ sơ đồi khối hiện thực hệ thống LTI.
- ❖ Xác định tính chất FIR/IIR và bậc của hệ thống LTI.
- ❖ Tích chập.

Bài tập 1

- Cho hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến có đáp ứng xung h(n)={0↑, @, -1}.

a) Xác định phương trình sai phân vào-ra của hệ thống trên.
b) Vẽ 1 sơ đồ khối thực hiện hệ thống trên.
c) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n = 1) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {1, 0↑, -1}.
d) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n = 2) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = $\delta(n) - \delta(n-2)$.
e) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n = 3) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = $u(n) - u(n-3)$.
f) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n = 4) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = $u(n+4) - u(n-4)$.
g) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n = 5) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = $u(-n) - u(-n-5)$.

Bài tập 2

- Cho hệ thống rời rạc có phương trình sai phân vào-ra $y(n) = 2x(n) - 3x(n-3)$.

a) Tìm đáp ứng xung của hệ thống trên.

b) Tìm các giá trị của tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = \delta(n+@) + 2\delta(n-2)$.

c) Tìm 5 giá trị (n=0,1,2,3,4) của tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(n)$.

d) Tìm 5 giá trị (n=0,1,2,3,4) của tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(-n)$.

e) Tìm 5 giá trị (n=0,1,2,3,4) của tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(2-n)$.

f) Tìm 5 giá trị (n=0,1,2,3,4) của tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(n-2)$.

Bài tập 3

- Cho hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến nhân quả có phương trình sai phân vào-ra $y(n) = 2x(n-2) - y(n-1)$.

a) Vẽ 1 sơ đồ khối thực hiện hệ thống trên với số bộ trễ là ít nhất có thể.

b) Tìm giá trị của đáp ứng xung $h(n = @)$.

c) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = 2\delta(n)$.

d) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = \delta(n-2)$.

e) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = \delta(n)-\delta(n-2)$.

f) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n)-u(n-2)$.

g) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = u(n)$.

h) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = u(-n)$.

i) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = u(-n-1)$.

j) Tìm giá trị mẫu ngõ ra $y(n = @)$ khi ngõ vào $x(n) = 1$.

Bài tập 4

- Kiểm tra tính chất tuyến tính, bất biến, nhân quả, ổn định, tĩnh của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = x(n) + 2$.
2) $y(n) = 2 - x(n)$.
3) $y(n) = x(2 - n)$.
4) $y(n) = x^2(n)$.
5) $y(n) = x(n^2)$.
6) $y(n) = x(2n)$.
7) $y(n) = x(2n + 1)$.
8) $y(n) = nx(n)$.
9) $y(n) = x(2^{|n|})$.
10) $y(n) = 2^{x(n)}$.
11) $y(n) = 2^{n}x(n)$.
12) $y(n) = 2^{-n}x(n)$.

Bài tập 5

- Kiểm tra tính chất tuyến tính, bất biến, nhân quả, ổn định, tĩnh của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = \cos\{x(n)\}$.
2) $y(n) = \cos\{x(2n)\}$.
3) $y(n) = \cos\{x^2(n)\}$.
4) $y(n) = \cos^2\{x(n)\}$.
5) $y(n) = \cos(n)x(n)$.
6) $y(n) = \cos\{nx(n)\}$.
7) $y(n) = \cos(n) + x(n)$.
8) $y(n) = x(n) + 2x(n-3) - 3x(n+2)$.
9) $y(n) = 2x(n) + y(n-1)$.
10) $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$.
11) $y(n) = x(n) + n.y(n-1)$ với $n \geq 0$ và $y(n)=0$ với $n<0$.
12) $y(n) = y(n-1) - y(n-2)$.

Bài tập 6

- Xác định và vẽ tín hiệu ngõ ra tương ứng với tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{-@, 0, 1, 2, 3\uparrow\}$ của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = nx(n)$.
2) $y(n) = x(n-2)$.
3) $y(n) = x(n+2)$.
4) $y(n) = x(n) + 2$.
5) $y(n) = x(2n)$.
6) $y(n) = x(2n-1)$.
7) $y(n) = x(-n)$.
8) $y(n) = x(2-n)$.
9) $y(n) = x^2(n)$.
10) $y(n) = x(n) + x(n+2)$.
11) $y(n) = x(n) - x(n-2)$.
12) $y(n) = x(n) + x(-n)$.

Bài tập 7

- Xác định và vẽ tín hiệu ngõ ra tương ứng với tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{0\uparrow, 4, 5, @\}$ của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = nx(n)$.
2) $y(n) = x(n - 2)$.
3) $y(n) = x(n + 2)$.
4) $y(n) = x(n) + 2$.
5) $y(n) = x(2n)$.
6) $y(n) = x(2n - 1)$.
7) $y(n) = x(-n)$.
8) $y(n) = x(2 - n)$.
9) $y(n) = x^2(n)$.
10) $y(n) = x(n) + x(n + 2)$.
11) $y(n) = x(n) - x(n - 2)$.
12) $y(n) = x(n) + x(-n)$.

Bài tập 8

- Xác định và vẽ tín hiệu ngõ ra tương ứng với tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{-@, 0, 1, 2, 3\uparrow, 4, 5, @\}$ của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = nx(n)$.
2) $y(n) = x(n-2)$.
3) $y(n) = x(n+2)$.
4) $y(n) = x(n) + 2$.
5) $y(n) = x(2n)$.
6) $y(n) = x(2n-1)$.
7) $y(n) = x(-n)$.
8) $y(n) = x(2-n)$.
9) $y(n) = x^2(n)$.
10) $y(n) = x(n) + x(n+2)$.
11) $y(n) = x(n) - x(n-2)$.
12) $y(n) = x(n) + x(-n)$.

Bài tập 9

- Xác định và vẽ tín hiệu ngõ ra tương ứng với tín hiệu ngõ vào $x(n) = @\delta(n) + 2\delta(n-2) - 3\delta(n+3)$ của các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = nx(n)$.
2) $y(n) = x(n-2)$.
3) $y(n) = x(n+2)$.
4) $y(n) = x(n) + 2$.
5) $y(n) = x(2n)$.
6) $y(n) = x(2n-1)$.
7) $y(n) = x(-n)$.
8) $y(n) = x(2-n)$.
9) $y(n) = x^2(n)$.
10) $y(n) = x(n) + x(n+2)$.
11) $y(n) = x(n) - x(n-2)$.
12) $y(n) = x(n) + x(-n)$.

Bài tập 10

- Vẽ sơ đồ khối thực hiện các hệ thống rời rạc sau:

1) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 3x(n-3)$.
2) $y(n) = 2x(n-1) + y(n-1)$.
3) $y(n) = x(n-1) + 2y(n-1)$.
4) $y(n) = x(n-1) + y(n-1)/2$.
5) $y(n) = y(n-1) - y(n-2)$.
6) $y(n) = x(n-1) - y(n-2)$.
7) $y(n) = x(n-2) - y(n-2)$.
8) $y(n) = x(n-2) - y(n-1)$.
9) $y(n) = 2x(n) - y(n-2)$.
10) $y(n) = 0.5\{2x(n) - y(n-2)\}$.
11) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 3y(n-2)$.
12) $y(n) = x(n) + 2x(n-2) - 3y(n-2)$.

Bài tập 11

- Liệt kê và vẽ dạng sóng của các tín hiệu rời rạc sau:

1) $x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$.
2) $x(n) = 2\delta(n-2) - \delta(n+2)$.
3) $x(n) = u(n) - u(n-2)$.
4) $x(n) = u(-n)$.
5) $x(n) = u(2-n)$.
6) $x(n) = u(2+n)$.
7) $x(n) = u(n) + u(-n)$.
8) $x(n) = u(-n) - u(-n-1)$.
9) $x(n) = nu(n)$.
10) $x(n) = nu(-n-1)$.
11) $x(n) = u(n) - 1$.
12) $x(n) = 1 - u(-n-1)$.

Bài tập 12

- Liệt kê và vẽ dạng sóng của các tín hiệu rời rạc sau:

1) $x(n) = \cos(\pi n)u(n)$.
2) $x(n) = \cos(\pi n)u(n-1)$.
3) $x(n) = (-1)^n u(n)$.
4) $x(n) = (-1)^n u(n-1)$.
5) $x(n) = (-1)^{n-1} u(n)$.
6) $x(n) = (-1)^{n-1} u(n-1)$.
7) $x(n) = (-1)^n u(-n)$.
8) $x(n) = (-1)^n u(-n-1)$.
9) $x(n) = (-1)^n u(1-n)$.
10) $x(n) = nu(-n-1)$.
11) $x(n) = \cos(\pi n/2)u(n)$.
12) $x(n) = \sin(\pi n/2)u(n)$

Bài tập 13

1) Một hệ thống cho tín hiệu ngõ ra y(n) = {2, 2, 1, 8, 7} khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {2, 0, 1, 7}.
   a) Có thể kết luận hệ thống tuyến tính bất biến (LTI) không?
   b) Nếu biết trước hệ thống LTI, có thể xác định FIR hay IIR không? Tìm đáp ứng xung của hệ thống?
2) Một hệ thống LTI cho tín hiệu ngõ ra y(n) = {2, 2, 1, 8, 7} khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {2, 0, 1, 8}. Có thể xác định FIR hay IIR không? Tìm đáp ứng xung của hệ thống?
3) Một hệ thống LTI cho tín hiệu ngõ ra y(n) = {2, 2, 1, 8, 7} khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {2, 0, 1, 0}. Có thể xác định FIR hay IIR không? Tìm đáp ứng xung của hệ thống?

Bài tập 14

- Một hệ thống LTI cho tín hiệu ngõ ra $y(n) = \{2, 2, 1, 8, 7\}$ khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{2, 0, 1, 7\}$.

1) Tìm ngõ ra $y_1(n)$ khi ngõ vào $x_1(n) = \{2, 0, 1, 7, 2, 0, 1, 7\}$.
2) Tìm ngõ ra $y_2(n)$ khi ngõ vào $x_2(n) = \{2, 2, 1, 8, 7\}$.
3) Tìm ngõ ra $y_3(n)$ khi ngõ vào $x_3(n) = \{2, 0, 1, 8\}$.
4) Tìm ngõ ra $y_4(n)$ khi ngõ vào $x_4(n) = \delta(n)$.
5) Tìm ngõ ra $y_5(n)$ khi ngõ vào $x_5(n) = u(n)$.
6) Tìm ngõ ra $y_6(n)$ khi ngõ vào $x_6(n) = u(-n-1)$.
7) Tìm ngõ ra $y_7(n)$ khi ngõ vào $x_7(n) = 0.5^n u(n)$.
8) Tìm ngõ ra $y_8(n)$ khi ngõ vào $x_8(n) = -1$.
9) Tìm ngõ vào $x_9(n)$ khi ngõ ra $y_9(n) = \{1, 2, 1\}$.
10) Tìm ngõ vào $x_{10}(n)$ khi ngõ ra $y_{10}(n) = \{1, 3, 1\}$.
11) Tìm ngõ vào $x_{11}(n)$ khi ngõ ra $y_{11}(n) = \delta(n)$.
12) Tìm ngõ vào $x_{12}(n)$ khi ngõ ra $y_{12}(n) = (-1)^n u(n)$.

Bài tập 15

Consider the interconnection of LTI systems as shown in Fig. P2.35.

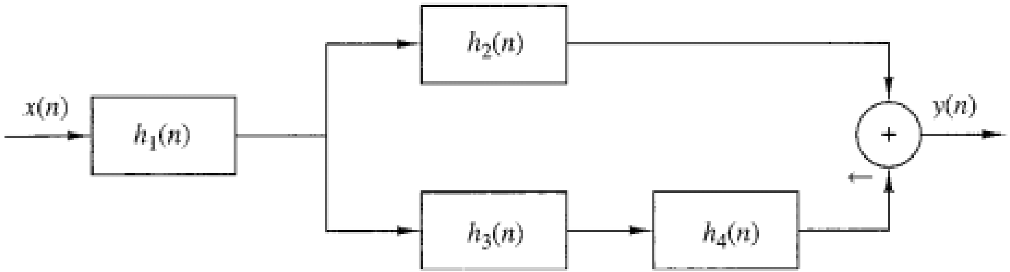


Figure P2.35

(a) Express the overall impulse response in terms of $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$, and $h_4(n)$.

(b) Determine $h(n)$ when

$$h_1(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

(c) Determine the response of the system in part (b) if

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$$

Bài tập 16

Consider the system in Fig. P2.36 with $h(n) = a^n u(n)$, $-1 < a < 1$. Determine the response $y(n)$ of the system to the excitation

$$x(n) = u(n+5) - u(n-10)$$

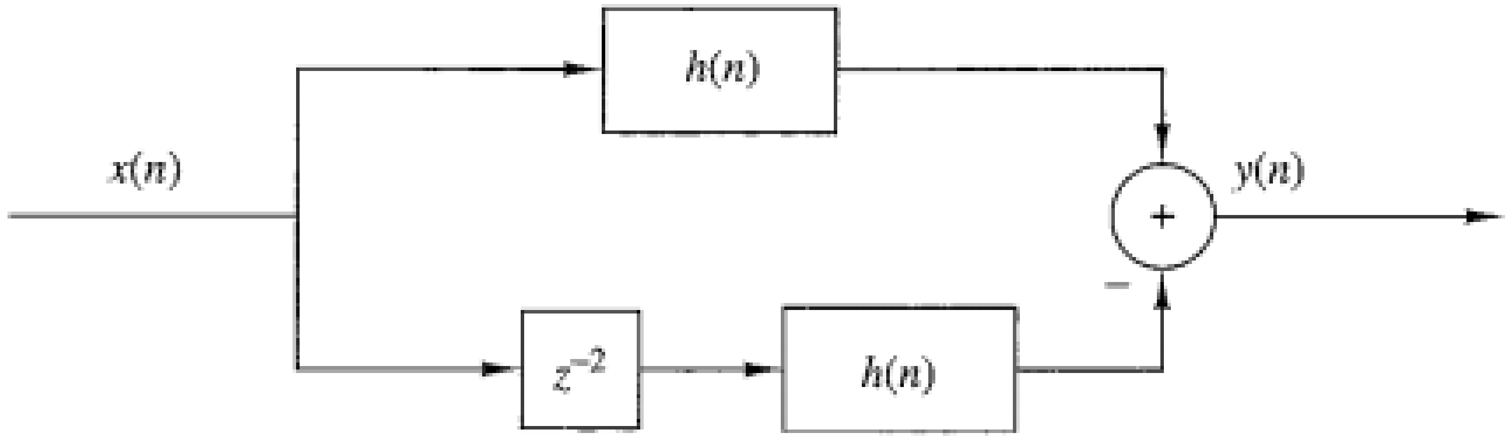


Figure P2.36

Bài tập 17

Consider the discrete-time system shown in Fig. P2.47.

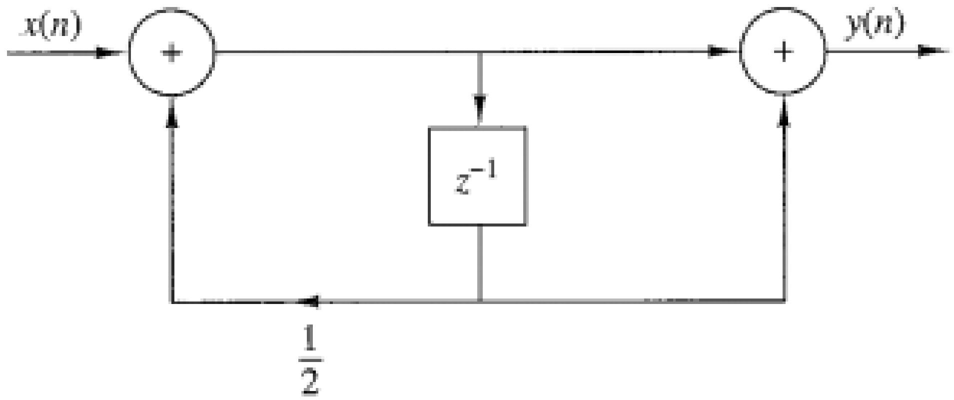


Figure P2.47

(a) Compute the 10 first samples of its impulse response.

(b) Find the input–output relation.

(c) Apply the input $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, \ldots\}$ and compute the first 10 samples of the output.

(d) Compute the first 10 samples of the output for the input given in part (c) by using convolution.

(e) Is the system causal? Is it stable?

Bài tập 18

A discrete-time system is realized by the structure shown in Fig. P2.49.

(a) Determine the impulse response.

(b) Determine a realization for its inverse system, that is, the system which produces $x(n)$ as an output when $y(n)$ is used as an input.

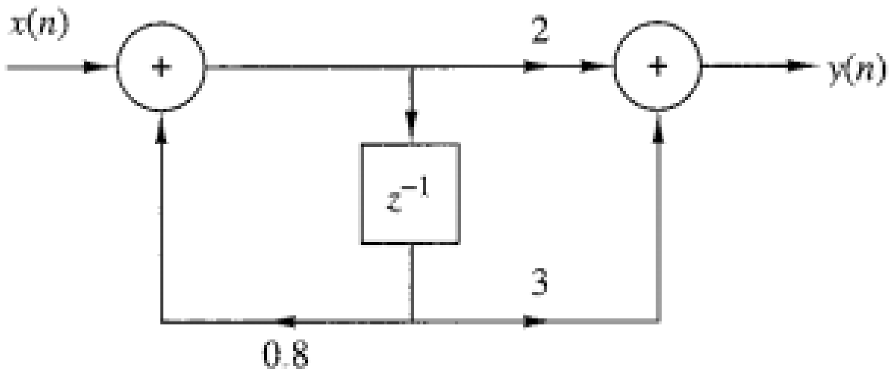


Figure P2.49

Bài tập 19

Consider the systems shown in Fig. P2.52.

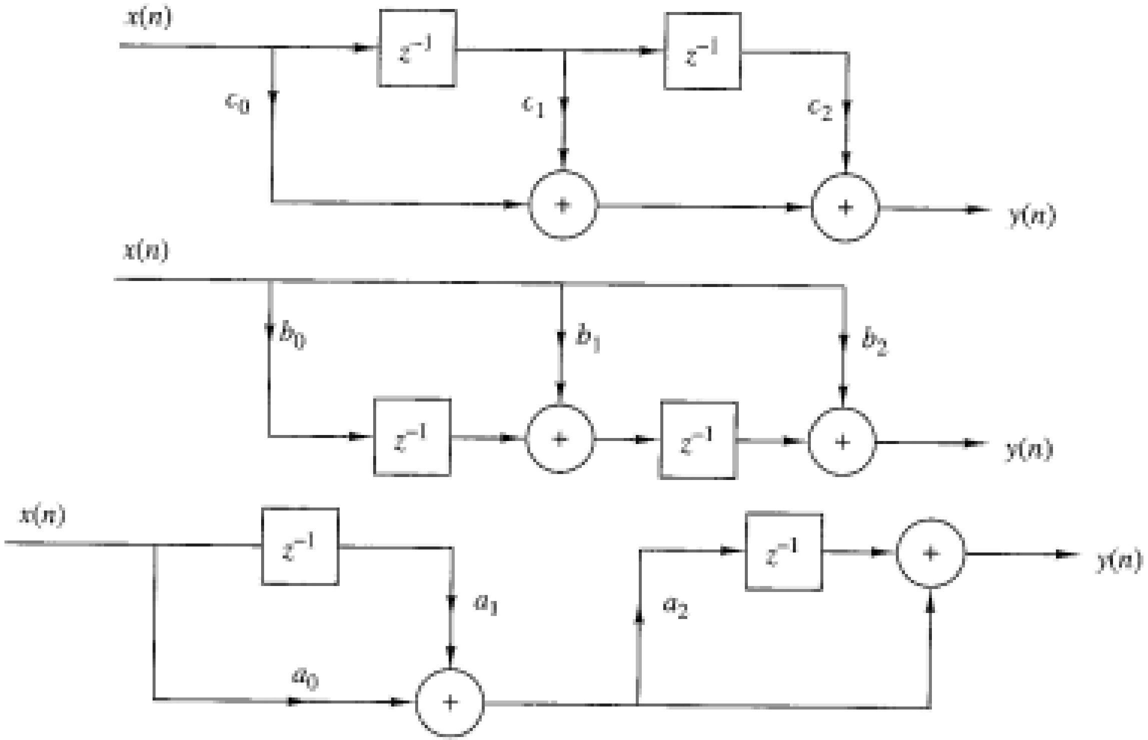


Figure P2.52

(a) Determine and sketch their impulse responses $h_1(n)$, $h_2(n)$, and $h_3(n)$.

(b) Is it possible to choose the coefficients of these systems in such a way that

$$h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$$

Bài tập 20

Consider the system shown in Fig. P2.53.

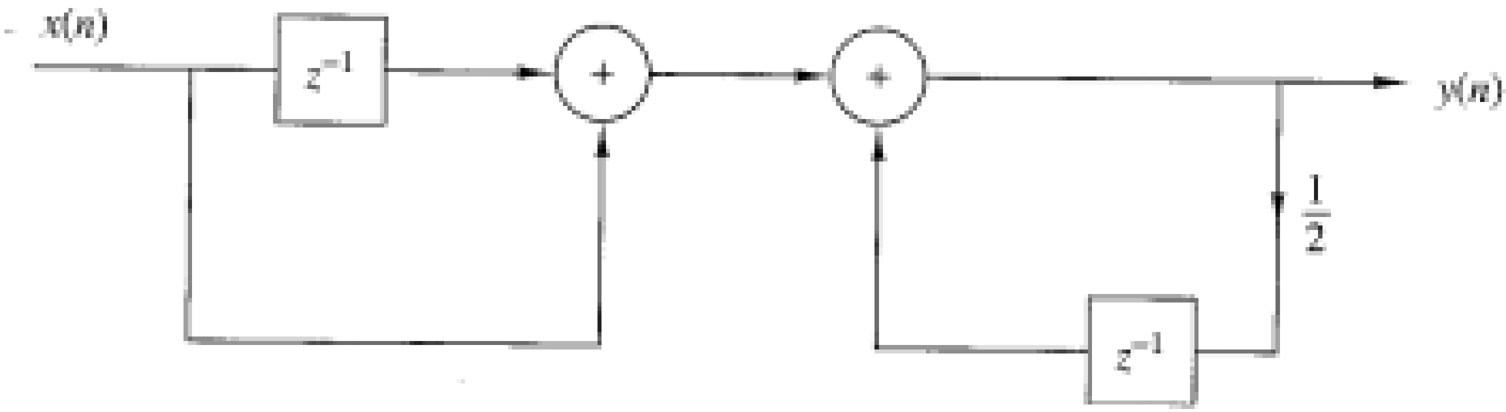


Figure P2.53

(a) Determine its impulse response $h(n)$.

(b) Show that $h(n)$ is equal to the convolution of the following signals:

$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$h_2(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

Bài tập 21

A causal linear time-invariant filter has impulse response:

$$h_n = C_1 p_1^n + C_2 p_2^n, \qquad n \geq 0$$

Working in the time domain, show that the difference equation satisfied by h_n for all $n \geq 0$ and the difference equation relating the input and output signals are of the form:

$$h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1}$$

Determine $\{a_1, a_2, b_0, b_1\}$ in terms of $\{C_1, C_2, p_1, p_2\}$.

Bài tập 22

A causal linear time-invariant filter has impulse response:

$$h_n = C_0\delta(n) + C_1 p_1^n + C_2 p_2^n\,, \qquad n \geq 0$$

Show that the difference equation satisfied by h_n for all $n \geq 0$ and the difference equation relating the input and output signals are of the form:

$$h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + b_2\delta(n-2)$$

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$$

Determine $\{a_1, a_2, b_0, b_1, b_2\}$ in terms of $\{C_0, C_1, C_2, p_1, p_2\}$.

Bài tập 23

A causal linear time-invariant filter has impulse response:

$$h_n = C_1 p_1^n + C_2 p_2^n + C_3 p_3^n, \qquad n \geq 0$$

Working in the time domain, show that the difference equation satisfied by h_n for all $n \geq 0$ and the difference equation relating the input and output signals are of the form:

$$h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + a_3 h_{n-3} = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + b_2 \delta(n-2)$$

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$$

Determine $\{a_1, a_2, a_3, b_0, b_1\}$ in terms of $\{C_1, C_2, C_3, p_1, p_2, p_3\}$.