Digital Signal Processing

Chương 6

Hàm truyền và hiện thực bộ lọc

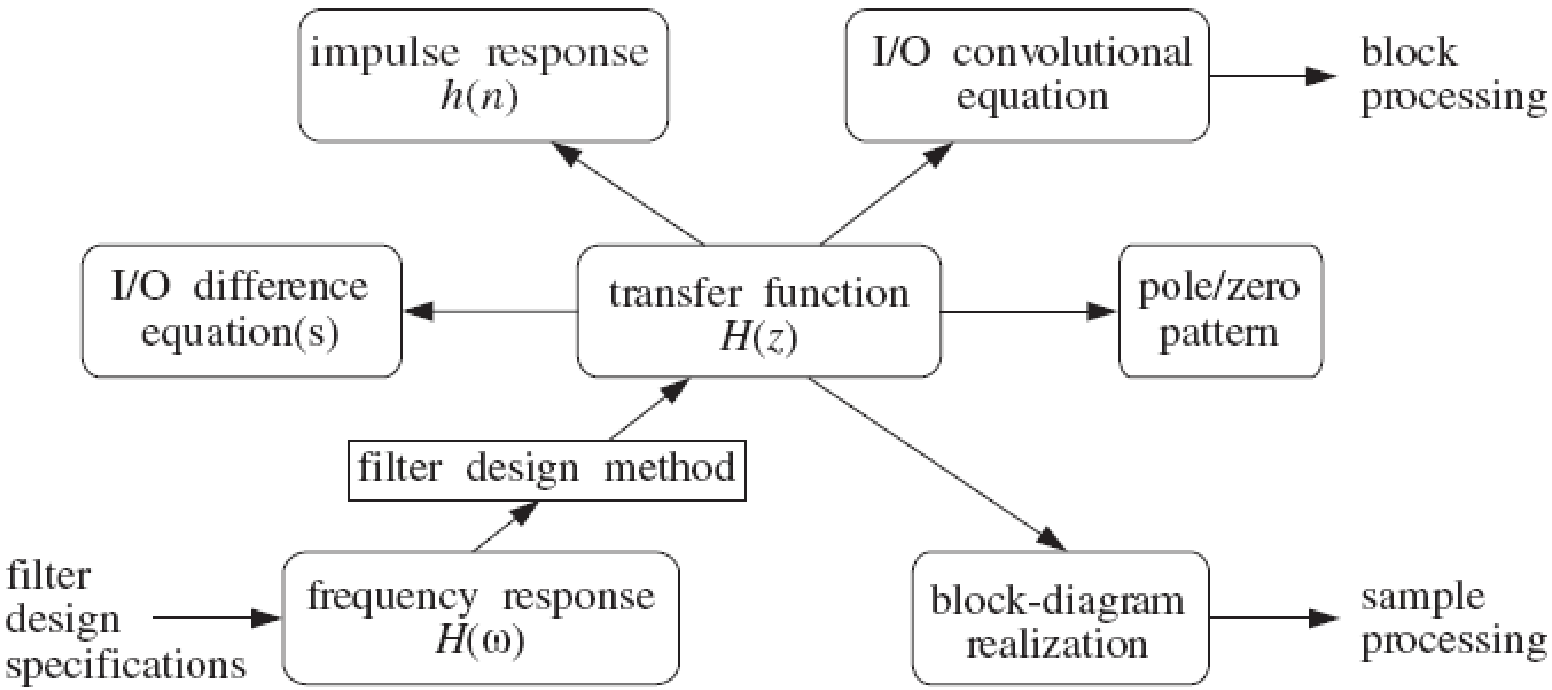
TS. Nguyễn Thanh Tuấn
Bộ môn Viễn thông (112-114B3)
Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG TPHCM
Email: nttuan@hcmut.edu.vn

Nội dung

- Hàm truyền
- Sơ đồ cực-zero
- Đáp ứng tần số
- Phân loại bộ lọc
- Đáp ứng sin/cos
- Hiện thực bộ lọc

Hàm truyền

- Biến đổi z của đáp ứng xung h(n): $\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}}$



Ví dụ 1

- Tìm đáp ứng xung nhân quả từ hàm truyền

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

n	0	1	2	3	10
h(n)					

Ví dụ 2

- Viết phương trình sai phân vào ra (nhân quả) từ hàm truyền

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Ví dụ 3

- Vẽ sơ đồ khối hiện thực hệ thống từ hàm truyền và giải thuật xử lý mẫu tương ứng.

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Sơ đồ cực-zero

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Cực (pole): các giá trị z làm cho H(z) = ∞ (D(z) = 0), ký hiệu dấu x.
- Zero: các giá trị làm cho H(z) = 0 (N(z) = 0), ký hiệu dấu o.
- Quy ước: các giá trị cực hoặc zero tại ∞ thường bỏ qua.

Đáp ứng tần số

- Điều kiện: hàm truyền H(z) có ROC chứa vòng tròn đơn vị (hệ thống ổn định).
- Đáp ứng tần số: $H(w) = H(z = e^{jw})$ với $w \in R$
- Tính chất:
  - H(w) tuần hoàn chu kì 2π (quy ước vẽ $[-\pi \div \pi]$).
  - Nếu h(n) thực thì $H(-w) = H^{*}(w)$ (liên hiệp phức)
    - Đáp ứng biên độ $|H(w)|$ đối xứng chẵn (qua trục tung)
    - Đáp ứng pha $\arg H(w)$ đối xứng lẻ (qua gốc tọa độ)

Phân loại bộ lọc theo tần số

- Định nghĩa
  - Tần số thấp: $w = (\text{quanh } 0) + k2\pi$
  - Tần số cao: $w = (\text{quanh } \pi) + k2\pi$
  - Tần số giữa: $w = (\text{khác quanh 0 và } \pi) + k2\pi$
- Phân loại bộ lọc
  - Lọc thông thấp (LPF): $|H(w=0)|$ max, $|H(w=\pi)|$ min
  - Lọc thông cao (HPF): $|H(w=0)|$ min, $|H(w=\pi)|$ max
  - Lọc thông dải (BPF): $|H(w\neq 0, w\neq\pi)|$ max
  - Lọc chắn dải (BSF/BRF): $|H(w\neq 0, w\neq\pi)|$ min

Ví dụ 4

- Cho bộ lọc có hàm truyền $H(z) = \dfrac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$

1) Vẽ sơ đồ cực-zero.
2) Vẽ đáp ứng biên độ.
3) Xác định đặc tính tần số (thông thấp, thông cao, thông dải, chắn dải) của bộ lọc.

Đáp ứng sin/cos

- Hệ thống thực: $H(w) = H^*(-w)$

$$x(n) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(\omega_k n + \phi_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(n) = D_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \,|H(\omega_k)|\cos[\omega_k n + \phi_k + \angle H(\omega_k)]$$

- $w_k = \pi$
- $w_k = \pi/2$
- $w_k = -\pi/2$

Ví dụ 5

- Cho bộ lọc có phương trình sai phân vào ra

$$y(n) = 0.25y(n-2) + x(n)$$

1) Tìm hàm truyền.
2) Tìm đáp ứng xung nhân quả.
3) Vẽ đáp ứng biên độ và xác định đặc tính bộ lọc.
4) Vẽ sơ đồ khối hiện thực bộ lọc và giải thuật xử lý mẫu.

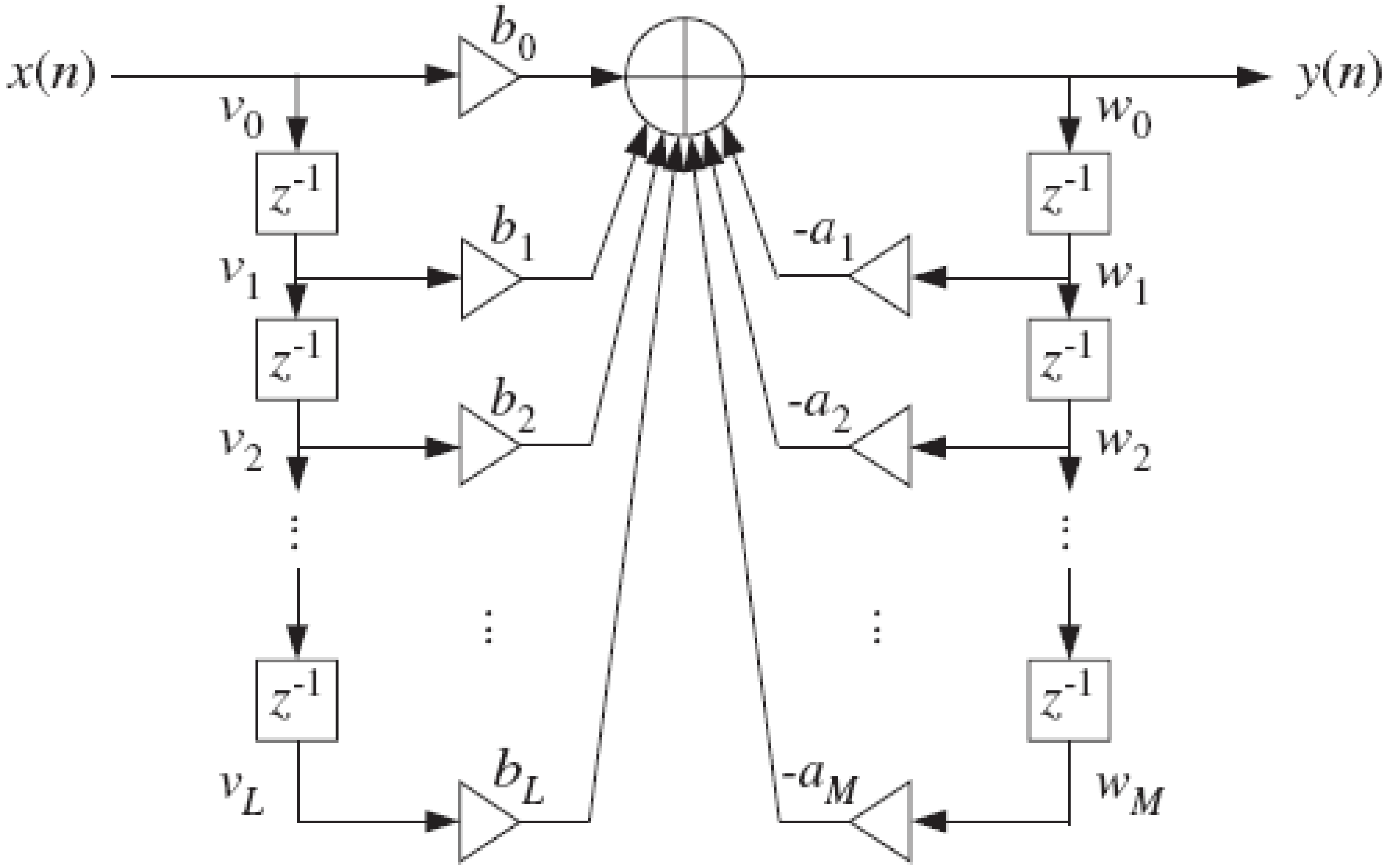
Hiện thực bộ lọc

- Bộ lọc LTI nhân quả luôn có thể hiện thực bằng 3 khối cơ bản (nhân hằng số, cộng, trễ).
  - FIR: không đệ quy
  - IIR: đệ quy
- Sơ đồ khối hiện thực bộ lọc không duy nhất.

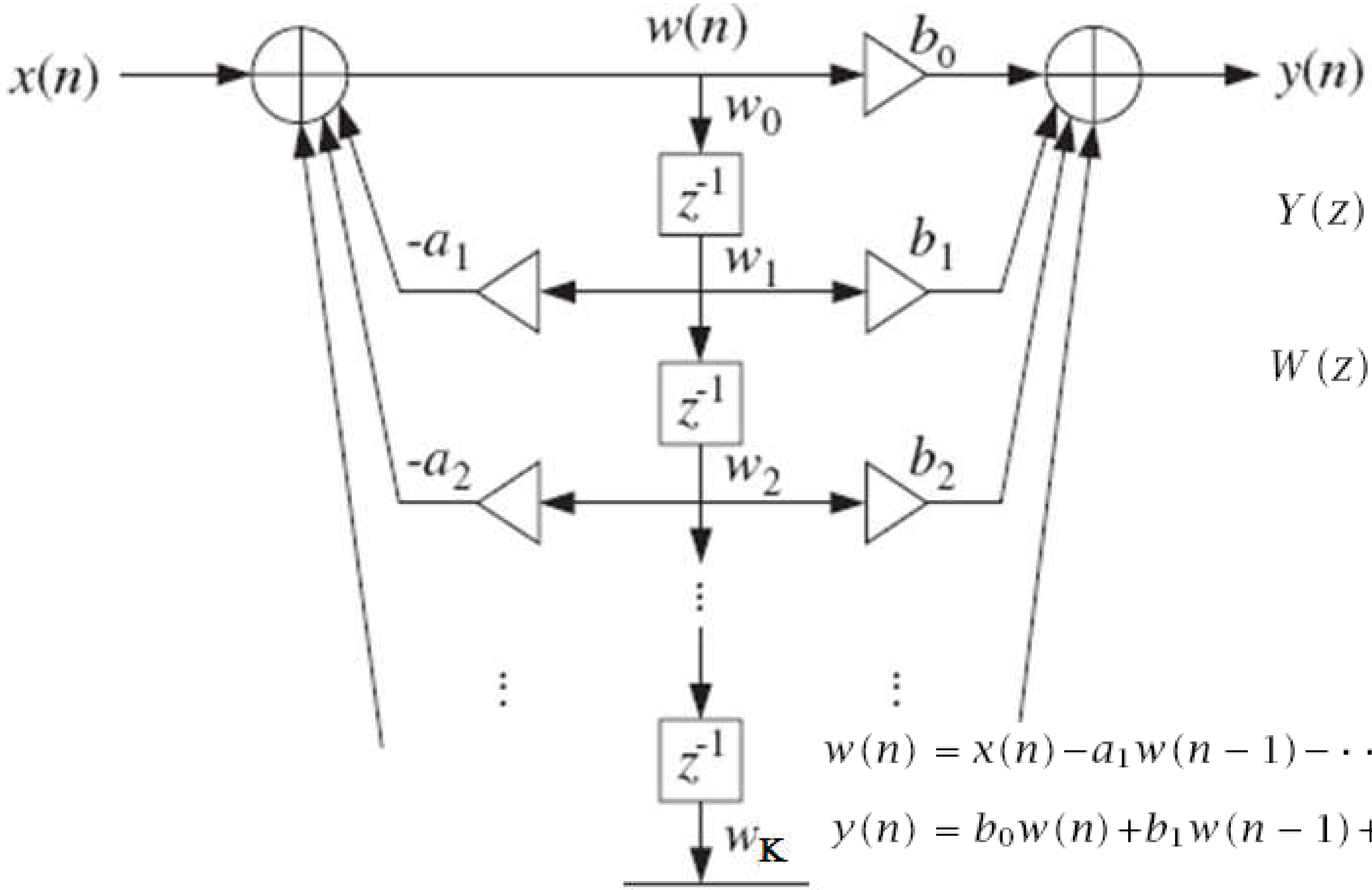
$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

$$y_n = -a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - \cdots - a_M y_{n-M} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \cdots + b_L x_{n-L}$$

Sơ đồ dạng trực tiếp (direct)



Sơ đồ dạng chuẩn tắc (canonical)



$$Y(z) = N(z)W(z)$$

$$W(z) = \frac{1}{D(z)}X(z)$$

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - \cdots - a_M w(n-M)$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \cdots + b_L w(n-L)$$

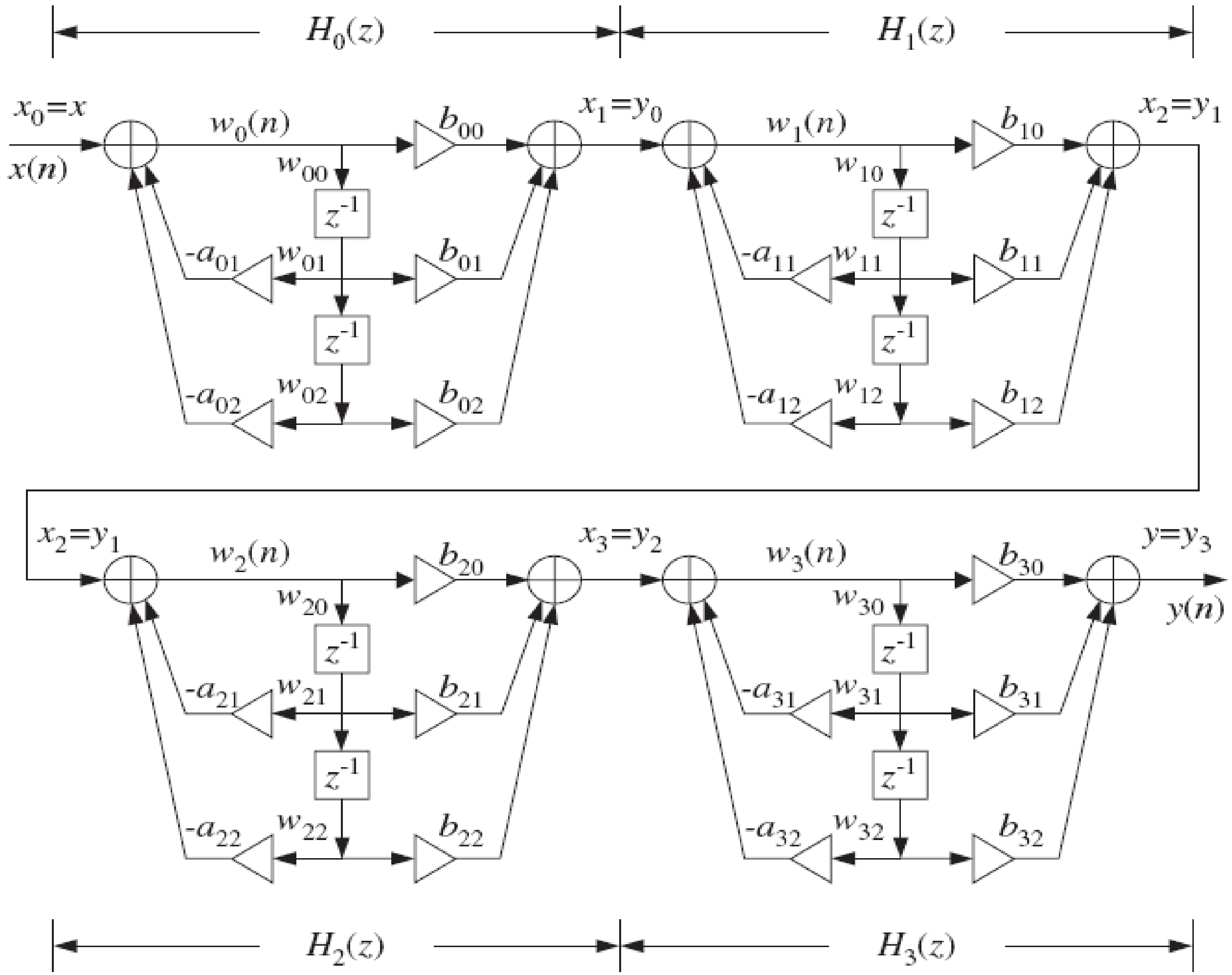
- Số bộ trễ tối thiểu: K = max(L, M)

Sơ đồ dạng liên tầng (cascade)

- Dựa trên các khối bậc 2 SOS (Second-Order Section)

$$H(z) = \prod_{i=0}^{K-1} H_i(z) = \prod_{i=0}^{K-1} \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}$$

Ví dụ 6



$H_0(z)$
$H_1(z)$
$x_0=x$
$x(n)$
$w_0(n)$
w_{00}
z^{-1}
$-a_{01}$
w_{01}
z^{-1}
$-a_{02}$
w_{02}
b_{00}
b_{01}
b_{02}
$x_1=y_0$
$w_1(n)$
w_{10}
$-a_{11}$
w_{11}
$-a_{12}$
w_{12}
b_{10}
b_{11}
b_{12}
$x_2=y_1$
$x_2=y_1$
$w_2(n)$
w_{20}
$-a_{21}$
w_{21}
$-a_{22}$
w_{22}
b_{20}
b_{21}
b_{22}
$x_3=y_2$
$w_3(n)$
w_{30}
$-a_{31}$
w_{31}
$-a_{32}$
w_{32}
b_{30}
b_{31}
b_{32}
$y=y_3$
$y(n)$
$H_2(z)$
$H_3(z)$

Tóm tắt

- Hàm truyền
- Sơ đồ cực-zero
- Đáp ứng tần số
- Phân loại bộ lọc
- Đáp ứng sin/cos
- Hiện thực bộ lọc
- Vai trò của hàm truyền trong phân tích hệ thống LTI

Bài tập 1

- Cho hệ thống rời rạc LTI có đáp ứng xung h(n) = $0.5@^n u(n-1)$.

1) Viết phương trình sai phân vào-ra và vẽ 1 sơ đồ khối thực hiện hệ thống.
2) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=2) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = \delta(n-1)$.
3) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=2) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(-n-1)$.
4) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=2) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 1$.

Bài tập 2

- Cho hệ thống nhân quả có hàm truyền H(z)= $\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1+0.5z^{-1}}$

1) Kiểm tra tính ổn định của hệ thống.
2) Tìm đáp ứng xung của hệ thống.
3) Viết phương trình sai phân vào-ra và vẽ 1 sơ đồ khối thực hiện hệ thống.
4) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=2) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 4δ(n) – δ(n – 2).
5) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=1@) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 4δ(n – 2).
6) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=1@) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 4u(n – 2).

Bài tập 3

- Cho hệ thống rời rạc LTI nhân quả có phương trình vào-ra $y(n) = x(n-1) - 0.5y(n-1)$.

1) Vẽ 1 sơ đồ khối thực hiện hệ thống.
2) Tìm đáp ứng xung của hệ thống.
3) Vẽ phác thảo biên độ đáp ứng tần số và xác định đặc tính tần số (thông thấp, thông cao, thông dải hay chắn dải) của hệ thống.
4) Tìm tín hiệu ngõ vào $x(n)$ để tín hiệu ngõ ra $y(n) = \delta(n-1)$.
5) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra $y(n=2)$ khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 1@\delta(n) - \delta(n-2)$.

Bài tập 4

- Cho hệ thống rời rạc LTI nhân quả có phương trình vào-ra $y(n) = x(n-1) + 0.5y(n-1)$

1) Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống trên với số bộ trễ ít nhất có thể.
2) Tìm đáp ứng xung của hệ thống trên.
3) Tìm giá trị của các mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 2\delta(n-2)$.
4) Tìm giá trị của các mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = u(-n-1)$.
5) Tìm giá trị của các mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 2$.

Bài tập 5

- Cho hệ thống rời rạc LTI nhân quả có hàm truyền H(z) = $\dfrac{1+z^{-2}}{4-z^{-2}}$.

1) Vẽ sơ đồ cực-zero và kiểm tra tính ổn định của hệ thống trên.
2) Viết phương trình sai phân vào-ra và vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống trên với số bộ trễ là ít nhất.
3) Vẽ phác họa đáp ứng biên độ và chỉ ra đặc tính tần số (thông thấp, thông cao, thông dải hay chắn dải) của hệ thống trên.
4) Xác định biểu thức và chỉ ra đặc tính đáp ứng xung (FIR hay IIR) của hệ thống trên.
5) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 2cos(πn/2)u(n).
6) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = u(– n) – 2δ(n).
7) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 2.
8) Tìm tín hiệu ngõ vào x(n) để tín hiệu ngõ ra y(n) = {2, 0, 2}.

Bài tập 6

- Cho hệ thống nhân quả có hàm truyền $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} + \dfrac{2}{1+0.5z^{-1}}$

1) Vẽ sơ đồ cực-zero và kiểm tra tính ổn định của hệ thống trên.
2) Viết phương trình sai phân vào-ra và vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống trên với số bộ trễ là ít nhất.
3) Vẽ phác họa đáp ứng biên độ và chỉ ra đặc tính tần số (thông thấp, thông cao, thông dải hay chắn dải) của hệ thống trên.
4) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 2\delta(n-2)$.
5) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{2, 1\}$.
6) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào $x(n) = 2$.

Bài tập 7

- Cho hệ thống tuyến tính bất biến có tín hiệu ngõ ra y(n) = {1, 0, 0, 0, -1} khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {1, 0, 1}.

1) Viết phương trình sai phân vào-ra của hệ thống trên.
2) Xác định tín hiệu ngõ ra y(n) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = {1, 0, 0, 0, -1}.
3) Xác định tín hiệu ngõ vào x(n) để tín hiệu ngõ ra y(n) = {1, 1}.
4) Tìm đáp ứng xung nhân quả của hệ thống khôi phục ghép nối tiếp ngay sau hệ thống trên để ngõ ra hệ thống khôi phục đúng bằng tín hiệu ngõ vào của hệ thống ban đầu.
5) Tìm giá trị của mẫu tín hiệu ngõ ra y(n=[2, 1@]) khi tín hiệu ngõ vào x(n) = 2δ(n – 2).

Bài tập 8

- Biết rằng ngõ vào của một hệ thống nhân quả và LTI là tín hiệu x(n) và có tín hiệu ngõ ra tương ứng ở miền Z là Y(z) như sau:

$$x(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{4}{3}2^n u(-n-1) \qquad Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

a) Tìm biến đổi Z cho tín hiệu x(n) và xác định tính chất nhân quả, phản nhân quả hay hỗn hợp của x(n).

b) Tìm đáp ứng H(z) của hệ thống trong miền Z và xác định miền hội tụ ROC và tính chất ổn định của hệ thống.

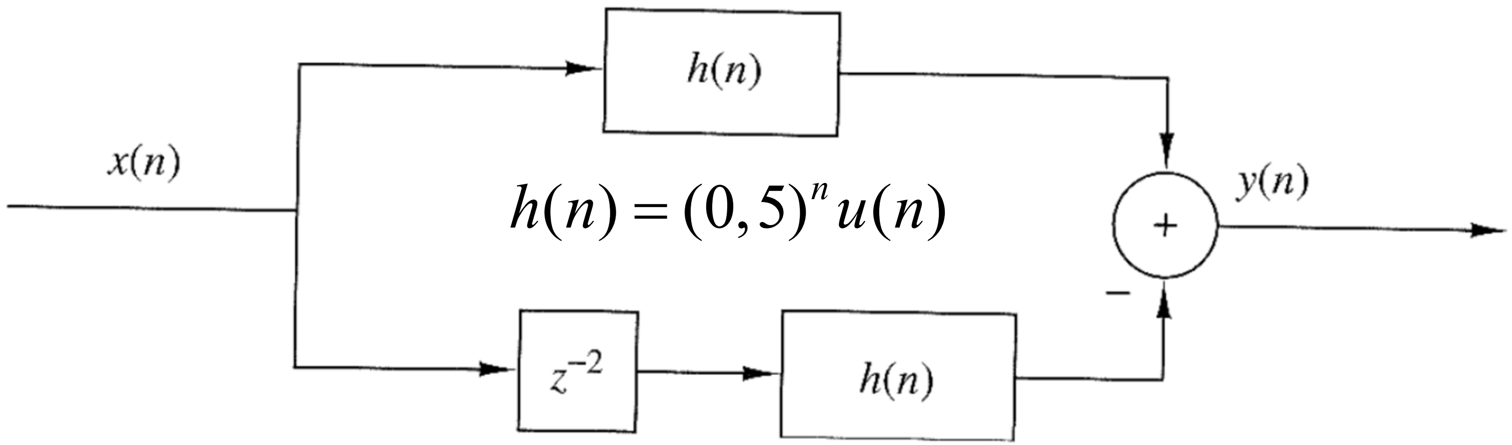
c) Xác định miền hội tụ ROC của Y(z)

d) Tìm đáp ứng xung nhân quả của hệ thống.

e) Hiện thực (vẽ) sơ đồ khối hệ thống theo dạng chính tắc (trực tiếp 2)

Bài tập 9

- Cho một hệ thống LTI nhân quả như hình dưới trong đó:



a) Tìm đáp ứng xung nhân quả $g(n)$ của hệ thống.
b) Vẽ phác thảo đáp ứng tần số của bộ lọc (hệ thống) này. Đây là bộ lọc gì ?
c) Cho đầu vào là tín hiệu $x(n) = u(n)$. Tìm tín hiệu ra y(n) của hệ thống.

Bài tập 10

Determine the transfer function $H(z)$ and the corresponding I/O difference equation relating $x(n)$ and $y(n)$ of the linear filters having the following impulse responses:

a. $h(n) = \delta(n-5)$

b. $h(n) = u(n-5)$

c. $h(n) = (0.8)^n u(n)$

d. $h(n) = (-0.8)^n u(n)$

e. $h(n) = (-0.8)^n [u(n) - u(n-8)]$

f. $h(n) = (0.8)^n u(n) + (-0.8)^n u(n)$

g. $h(n) = 2(0.8)^n \cos(\pi n/2) u(n)$

h. $h(n) = (0.8j)^n u(n) + (-0.8j)^n u(n)$

In each case, determine also the *frequency response* $H(\omega)$, the *pole/zero* pattern of the transfer function on the z-plane, draw a rough sketch of the *magnitude response* $|H(\omega)|$ over the right half of the Nyquist interval $0 \le \omega \le \pi$, and finally, draw the direct and canonical realizations implementing the I/O difference equation and state the corresponding *sample-by-sample* processing algorithms.

Bài tập 11

A digital reverberation processor has frequency response:

$$H(\omega) = \frac{-0.5 + e^{-j\omega 8}}{1 - 0.5e^{-j\omega 8}}$$

where ω is the digital frequency in [radians/sample]. Determine the *causal* impulse response $h(n)$, for all $n \geq 0$, and sketch it versus n. [*Hint:* Do not use partial fractions.]

Bài tập 12

The first few Fibonacci numbers are:

$$\mathbf{h} = [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots]$$

where each is obtained by summing the previous two.

a. Determine the linear system $H(z)$ whose causal impulse response is $\mathbf{h}$, and express it as a rational function in z^{-1}.

b. Using partial fractions, derive an expression for the nth Fibonacci number in terms of the poles of the above filter.

c. Show that the ratio of two successive Fibonacci numbers converges to the *Golden Section*, that is, the positive solution of the quadratic equation $\phi^2 = \phi + 1$, namely, $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

d. Show that the filter's poles are the two numbers $\{\phi, -\phi^{-1}\}$. Show that the geometric sequence:

$$\mathbf{y} = [0, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots]$$

satisfies the same recursion as the Fibonacci sequence (for $n \geq 3$). Show that $\mathbf{y}$ may be considered to be the output of the filter $\mathbf{h}$ for a particular input. What is that input?

Bài tập 13

For a particular causal filter, it is observed that the input signal $(0.5)^n u(n)$ produces the output signal $(0.5)^n u(n) + (0.4)^n u(n)$. What *input* signal produces the output signal $(0.4)^n u(n)$?

For a particular filter, it is observed that the input signal $a^n u(n)$ causes the output signal $a^n u(n) + b^n u(n)$ to be produced. What output signal is produced by the input $c^n u(n)$, where $c = (a + b)/2$?

The signal $(0.7)^n u(n)$ is applied to the input of an unknown causal LTI filter, and the signal $(0.7)^n u(n) + (0.5)^n u(n)$ is observed at the output. What is the causal input signal that will cause the output $(0.5)^n u(n)$? What is the transfer function $H(z)$ of the system? Determine its causal impulse response $h(n)$, for all $n \geq 0$.

Bài tập 14

Design a resonator filter of the form $H(z) = \dfrac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, which has a peak at $f_0 = 250$ Hz and a 3-dB width of $\Delta f = 20$ Hz and is operating at a rate of $f_s = 5$ kHz. What are the values of a_1 and a_2? Show that the *time constant* of the resonator is given approximately by

$$n_{\text{eff}} = -\frac{2 \ln \epsilon}{\Delta \omega}$$

which is valid for small $\Delta\omega$. For the designed filter, calculate the 40-dB value of n_{eff}, that is, corresponding to $\epsilon = 10^{-2}$. Compare the approximate and exact values of n_{eff}.

Bài tập 15

It is desired to generate the following *periodic* waveform:

$$h(n) = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, \cdots]$$

where the dots indicate the periodic repetition of the 8 samples $[1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0]$.

a. Determine the filter $H(z)$ whose impulse response is the above periodic sequence. Express $H(z)$ as a ratio of two polynomials of degree less than 8.

b. Draw the canonical and direct realization forms of $H(z)$. Write the corresponding sample processing algorithms.

Bài tập 16

A digital sawtooth generator filter has a periodic impulse response:

$$\mathbf{h} = [0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \cdots]$$

where the dots indicate the periodic repetition of the length-4 sequence $\{0, 1, 2, 3\}$.

a. Determine the transfer function $H(z)$.

b. Draw the *direct* and *canonical* realization forms. Factor $H(z)$ into second-order sections with real coefficients. Draw the corresponding *cascade* realization.

c. For each of the above three realizations, write the corresponding I/O time-domain difference equations and sample-by-sample processing algorithms.

d. Using partial fractions, do an inverse z-transform of $H(z)$ and determine a closed form expression for the above impulse response $h(n)$ in the form

$$h(n) = A + B(-1)^n + 2C\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2D\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \qquad n \geq 0$$

What are the values of A, B, C, D?

Bài tập 17

Consider the system: $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-7}}$.

a. Without using partial fractions, determine the causal impulse response of the system. Explain your reasoning.

b. Draw the *canonical* realization form of the system. Write the I/O *difference equations* and the *sample processing algorithm* describing this realization.

c. The length-3 input signal $\mathbf{x} = [3, 2, 1]$ is applied as input to the system. Using any method, determine the output signal $y(n)$ for all $n \geq 0$. Explain your method.

Bài tập 18

A causal filter has transfer function: $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-2}}$.

a. Determine the numerical values of the causal impulse response $h(n)$, for all $n \geq 0$.

b. Draw the canonical realization form of this filter and write the sample processing algorithm describing it.

Bài tập 19

A digital filter has transfer function, where $0 < a < 1$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-16}}{1 - az^{-16}}$$

a. What are the poles and zeros of this filter? Show them on the z-plane.

b. Draw a rough sketch of its magnitude response $|H(\omega)|$ over the frequency interval $0 \le \omega \le 2\pi$.

c. Determine the causal/stable impulse response $h(n)$ for all $n \ge 0$. Sketch it as a function of n. [*Hint*: Do not use PF expansions.]

d. Draw the *canonical* realization form and write the corresponding sample processing algorithm. (You may make use of the `delay` routine to simplify the algorithm.)

Bài tập 20

Let $H(z) = \dfrac{1 - a}{1 - az^{-1}}$ be a first-order lowpass filter (also called a first-order smoother), where $0 < a < 1$. Draw the canonical realization. Draw another realization that uses only one multiplier, (that is, a), one delay, and one adder and one subtractor. For both realizations, write the sample-by-sample processing algorithms. What would you say is the purpose of the chosen gain factor $1 - a$?

Bài tập 21

A discrete system is described by the difference equation

$$y(n) = 2.5y(n-1) - y(n-2) + 3x(n) + 3x(n-2)$$

Using z-transforms, find *all* possible impulse responses $h(n)$ and indicate their causality and stability properties.

For the causal filter, determine the output $y(n)$ if the input is $x(n) = g(n) - 2g(n-1)$, where $g(n) = \cos(\pi n/2)u(n)$.

Bài tập 22

A system has transfer function:

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4}}{1 - z^{-5}}$$

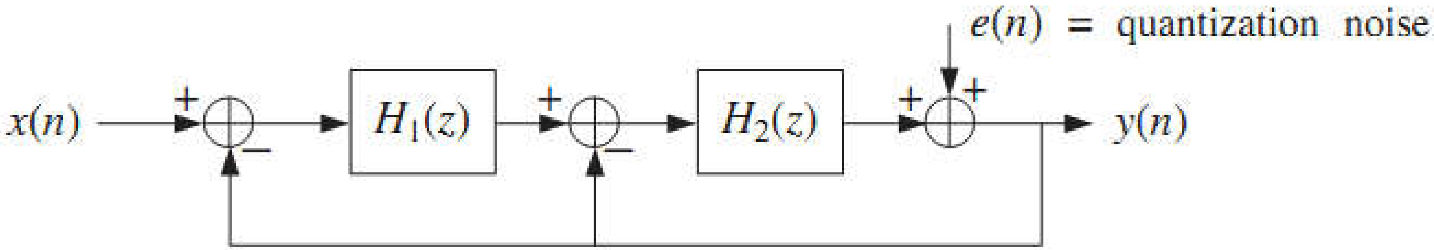
a. *Without* using partial fractions, determine the *causal* impulse response $h(n)$ of this system, for *all* $n \geq 0$, and sketch it versus n.

b. Draw the *direct* and *canonical* realization forms. Write the *difference equations* describing these realizations. Then, write the corresponding *sample processing* algorithms.

c. Factor this transfer function in the form $H(z) = H_1(z)H_2(z)$, where $H_1(z)$ is the ratio of two first-order polynomials, and $H_2(z)$ has numerator of degree 3 and denominator of degree 4. Draw the corresponding cascade realization, with each factor realized in its *canonical* form. Write the *difference equations* describing this realization, and the corresponding *sample processing* algorithm.

Bài tập 23

A discrete-time model for a second-order delta-sigma A/D converter is shown below:



a. Show that the output z-transform $Y(z)$ is related to $X(z)$ and $E(z)$ by a transfer function relationship of the form:

$$Y(z) = H_x(z)X(z) + H_e(z)E(z)$$

Express the transfer functions $H_x(z)$ and $H_e(z)$ *in terms of* the loop filters $H_1(z)$ and $H_2(z)$.

b. Determine $H_1(z)$ and $H_2(z)$ in order for $H_x(z)$ to act as a single delay and $H_e(z)$ as a second-order noise shaper, that is,

$$H_x(z) = z^{-1} \qquad \text{and} \qquad H_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

Bài tập 24

A digital filter has transfer function:

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1 + 2z^{-2})(1 + 3z^{-2})}{1 - z^{-6}}$$

a. Draw the *direct* form realization (direct form I). Write the I/O difference equation and corresponding sample processing algorithm for this realization.

b. Draw the *canonical* form realization (direct form II). Write the I/O difference equations and corresponding sample processing algorithm for this realization.

c. Factor $H(z)$ into *second-order sections* with real-valued coefficients, and draw the corresponding *cascade* realization. Write the I/O difference equations and corresponding sample processing algorithm for this realization.

d. *Without* using partial fractions, determine the causal impulse response $h(n)$ of this filter for all n. Explain your reasoning.

Bài tập 25

A linear system is described by the system of difference equations:

$$v(n) = x(n) + v(n-1)$$

$$y(n) = v(n) + v(n-2) + v(n-4)$$

Determine the transfer function from $x(n)$ to $y(n)$. Draw the direct, the canonical, and the cascade of SOS realizations (with real coefficients). In each case, state the sample-by-sample processing algorithm.

Bài tập 26

Draw the three realizations: (1) direct, (2) canonical, and (3) cascade of second-order sections for the following filter:

$$H(z) = \frac{(2 - 3z^{-1})(1 + z^{-2})}{1 - 0.25z^{-4}}$$

For each realization write the corresponding: (a) I/O difference equations and (b) sample processing algorithm.

Bài tập 27

A filter has transfer function:

$$H(z) = \frac{5}{1 + 0.25z^{-2}} - \frac{4}{1 - 0.25z^{-2}} = \frac{1 - 2.25z^{-2}}{(1 + 0.25z^{-2})(1 - 0.25z^{-2})}$$

a. Determine *all possible* impulse responses $h(n)$ and their ROCs.

b. Draw the *direct realization form* of $H(z)$.

c. Draw the *canonical realization form*.

d. Draw the *cascade form*.

In all cases, write all the *I/O difference equations* describing the realization in the time domain, and the *sample processing algorithm* implementing it.

Bài tập 28

An allpass digital reverberator with delay of 10 time units and having input $x(n)$ and overall output $y(n)$, is described by the system of difference equations:

$$w(n) = 0.75w(n-10) + x(n)$$

$$y(n) = -0.75w(n) + w(n-10)$$

a. Draw a block diagram realization of this filter. The realization must use only one 10-fold delay.

b. Write the sample processing algorithm for this filter. Then, convert this algorithm into a C routine that implements it.

c. Show that the magnitude response of the filter is identically equal to one, that is, $|H(\omega)| = 1$ for all ω.

Bài tập 29

For the following three filters,

$$H(z) = (1 + z^{-2})^3, \qquad H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}}, \qquad H(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

a. Determine *all possible* impulse responses $h(n)$, corresponding ROCs, stability, and causality properties.

b. Draw the *direct*, *canonical*, and *cascade of SOS* realization forms. Write the I/O difference equations for each realization. State the sample-by-sample processing algorithm for each realization.

c. Determine the corresponding pole/zero plots and then make a rough sketch of the magnitude responses $|H(\omega)|$ versus ω.

Bài tập 30

Consider a stable system with transfer function $H(z) = \dfrac{\dfrac{1}{16} + z^{-4}}{1 + \dfrac{1}{16} z^{-4}}$.

a. Determine the poles and zeros of $H(z)$ and place them on the complex z-plane. Pair them in conjugate pairs to write $H(z)$ as a cascade of second-order sections with real coefficients.

b. Draw the direct, canonical, and cascade realization forms. In each case, write the corresponding sample processing algorithm.

c. Determine the impulse response $h(n)$ for all n. And, finally show that $|H(\omega)| = 1$ for all ω, that is, it is an allpass filter.