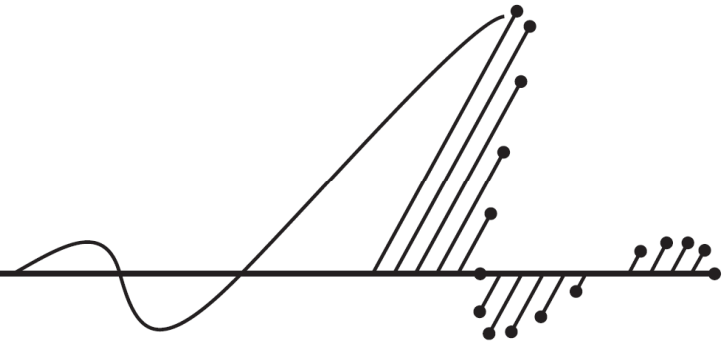




Digital Signal Processing



Chương 4

Tích chập

Nguyễn Thanh Tuấn

Bộ môn Viễn thông (112-114B3)

Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG TP HCM

Email: nttuan@hcmut.edu.vn



Nội dung

- Phương pháp xử lý khối: nhiều mẫu
 - Tích chập dùng công thức
 - Tích chập dùng bảng chéo
 - Tích chập dùng bảng dịch
 - Tích chập dạng lật và trượt
 - Tích chập dạng ma trận
 - Tích chập dùng cộng chồng lớp
- Phương pháp xử lý mẫu: từng mẫu



Hệ thống FIR

- FIR (Finite Impulse Response): hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)$ hữu hạn.
- Chiều dài đáp ứng xung L_h :
 - Định nghĩa 1: số lượng phần tử đáp ứng xung ở dạng liệt kê gọn nhất.
 - Định nghĩa 2: số lượng phần tử đáp ứng xung tính từ phần tử đầu tiên khác 0 đến phần tử cuối cùng khác 0.
- Bậc của hệ thống M_h : cho biết độ phức tạp (số bộ trễ tối thiểu) để hiện thực hệ thống nhân quả.
 - $M_h = L_h - 1$. (L_h theo định nghĩa 1)
 - $h(n = n_{\max} = M_h) \neq 0$ và $h(n = M_h + k) = 0 \quad \forall k > 0$



Tích chập dùng công thức

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$$

$$y(n) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} h(i)x(j)$$

- Xét hệ thống FIR bậc M: $\mathbf{h}=[h_0, h_1, \dots, h_M]$
- Tín hiệu ngõ vào chiều dài L: $\mathbf{x}=[x_0, x_1, \dots, x_{L-1}]$

➤ Chỉ số $h(m)$: $0 \leq m \leq M$

➤ Chỉ số $x(n-m)$: $0 \leq n-m \leq L-1$

$$\rightarrow n+L-1 \leq m \leq n$$

$$\max(0, n-L+1) \leq m \leq \min(M, n)$$

$$\rightarrow 0 \leq m \leq n \leq m+L-1 \leq M+L-1$$

$$0 \leq n \leq M+L-1$$

$$y(n) = \sum_{m=\max(0, n-L+1)}^{\min(M, n)} h(m)x(n-m) = \mathbf{h} * \mathbf{x}$$

$$L_y = L + M = L_x + M$$



Ví dụ 1

Cho $y(n)=h(n)*x(n)$ với $h(n)=\{1; 2; -1; 1\}$ và $x(n)=\{1; 1; 2; 1; 2; 2; 1; 1\}$.

- 1) Xác định chiều dài tín hiệu $y(n)$.
- 2) Xác định từng giá trị mẫu $y(n)$.
- 3) Làm lại câu 1) và 2) với $h(n)=\{1; 2^{\uparrow}; -1; 1\}$ và $x(n)=\{1; 1; 2; 1^{\uparrow}; 2; 2; 1; 1\}$. Nhận xét.



Tích chập dùng bảng chéo (trực tiếp)

$\longrightarrow j$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
h_0	h_0x_0	h_0x_1	h_0x_2	h_0x_3	h_0x_4
h_1	h_1x_0	h_1x_1	h_1x_2	h_1x_3	h_1x_4
h_2	h_2x_0	h_2x_1	h_2x_2	h_2x_3	h_2x_4
h_3	h_3x_0	h_3x_1	h_3x_2	h_3x_3	h_3x_4

$\downarrow i$



Ví dụ 2

- Tính $y(n)=h(n)*x(n)$ với $h(n)=\{1; 2; -1; 1\}$ và $x(n)=\{1; 1; 2; 1; 2; 2; 1; 1\}$ dùng bảng chéo.

$h \backslash x$	1	1	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	1	1
2	2	2	4	2	4	4	2	2
-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1
1	1	1	2	1	2	2	1	1

$$y=\{1, 3, 3, 5, 3, 7, 4, 3, 3, 0, 1\}$$



Bảng dịch (LTI)

	h_0	h_1	h_2	h_3	0	0	0	0
x_0	x_0h_0	x_0h_1	x_0h_2	x_0h_3	0	0	0	0
x_1	0	x_1h_0	x_1h_1	x_1h_2	x_1h_3	0	0	0
x_2	0	0	x_2h_0	x_2h_1	x_2h_2	x_2h_3	0	0
x_3	0	0	0	x_3h_0	x_3h_1	x_3h_2	x_3h_3	0
x_4	0	0	0	0	x_4h_0	x_4h_1	x_4h_2	x_4h_3
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7



Ví dụ 3

- Tính $y(n)=h(n)*x(n)$ với $h(n)=\{1; 2; -1; 1\}$ và $x(n)=\{1; 1; 2; 1; 2; 2; 1; 1\}$ dùng bảng dịch.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x \backslash h$	1	2	-1	1								partial output
1	1	2	-1	1								$x_0 h_n$
1		1	2	-1	1							$x_1 h_{n-1}$
2			2	4	-2	2						$x_2 h_{n-2}$
1				1	2	-1	1					$x_3 h_{n-3}$
2					2	4	-2	2				$x_4 h_{n-4}$
2						2	4	-2	2			$x_5 h_{n-5}$
1							1	2	-1	1		$x_6 h_{n-6}$
1								1	2	-1	1	$x_7 h_{n-7}$
y_n	1	3	3	5	3	7	4	3	3	0	1	$\sum_m x_m h_{n-m}$



Dạng ma trận

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = H\mathbf{x}$$

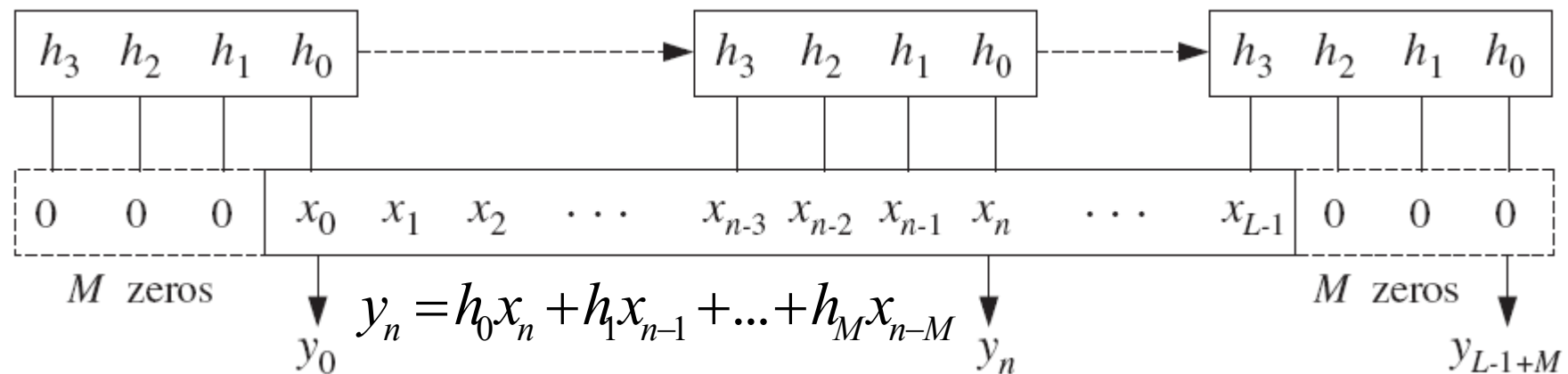


Ví dụ 4

$$H\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Dạng lật và trượt

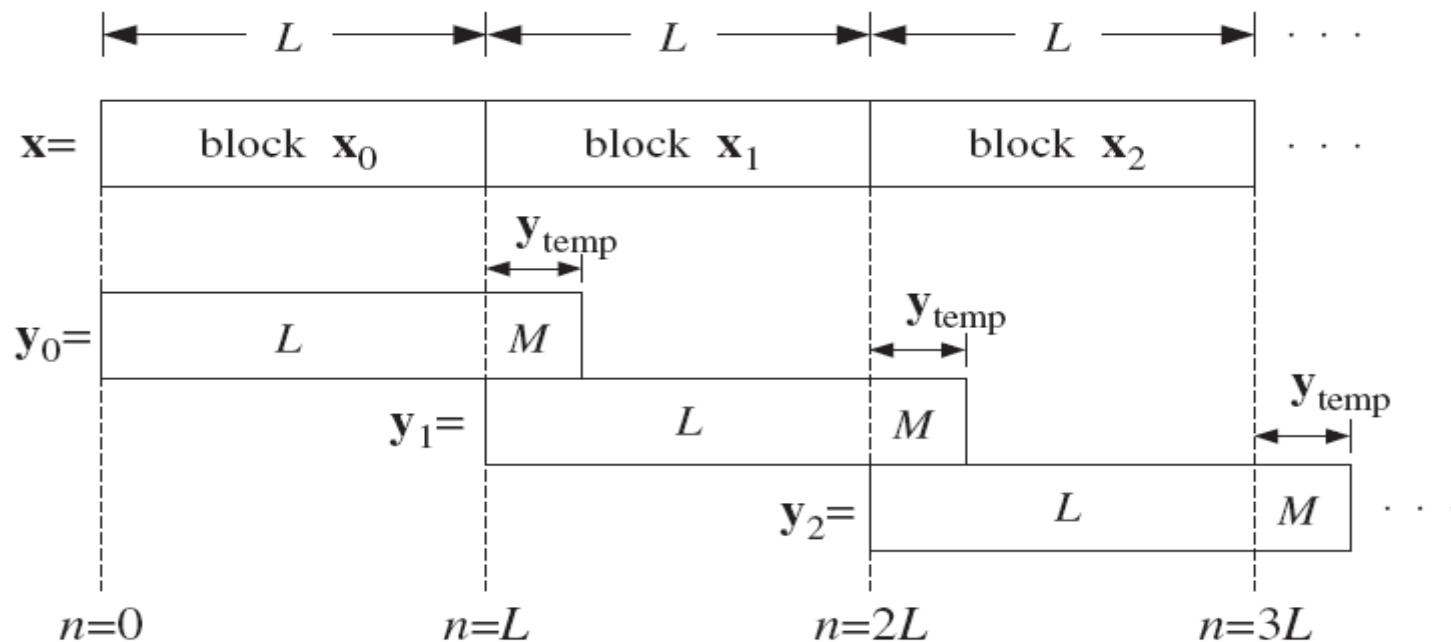


- Các trạng thái quá độ: chưa tính đủ các hệ số **h**
 - Ngõ vào mở: M trạng thái đầu tiên
 - Ngõ vào tắt: M trạng thái sau cùng
- Các trạng thái xác lập: tính đủ các hệ số **h**



Phương pháp cộng chồng lấp

- Khi chiều dài tín hiệu ngõ vào lớn, chia tín hiệu ngõ vào thành các khối không chồng lấp kích thước bằng nhau L .
- Tín hiệu ngõ ra được xác định bằng cách cộng chồng lấp các ngõ ra tích chập ở từng khối.





Ví dụ 5

		block 0			block 1			block 2		
$\mathbf{x} = [$	$1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 0]$									
	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{x}_0}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{x}_1}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{x}_2}$							
$\mathbf{h} \backslash \mathbf{x}$		1	1	2	1	2	2	1	1	0
1		1	1	2	1	2	2	1	1	0
2		2	2	4	2	4	4	2	2	0
-1		-1	-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1	0
1		1	1	2	1	2	2	1	1	0

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h} * \mathbf{x}_0 = [1, 3, 3, 4, -1, 2]$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{h} * \mathbf{x}_1 = [1, 4, 5, 3, 0, 2]$$

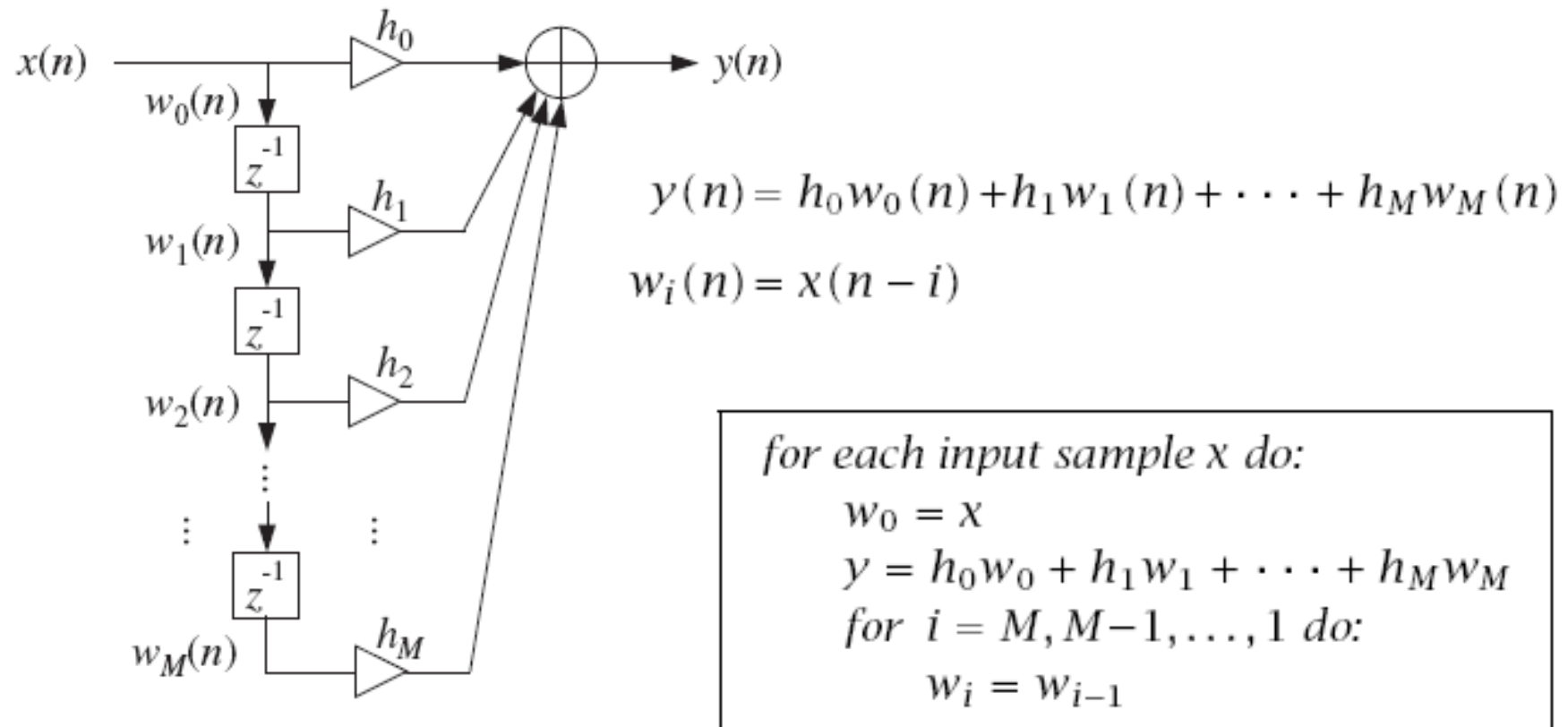
$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{h} * \mathbf{x}_2 = [1, 3, 1, 0, 1, 0]$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\mathbf{y}_0	1	3	3	4	-1	2					
\mathbf{y}_1				1	4	5	3	0	2		
\mathbf{y}_2							1	3	1	0	1
\mathbf{y}	1	3	3	5	3	7	4	3	3	0	1



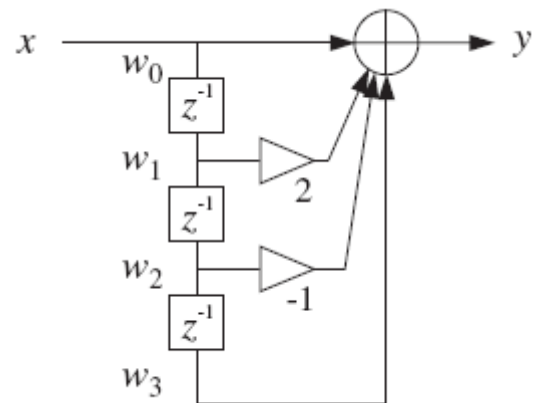
Phương pháp xử lý mẫu

$$y(n) = h_0x(n) + h_1x(n-1) + \dots + h_Mx(n-M)$$





Ví dụ 6



for each input sample x do:

$$w_0 = x$$

$$y = w_0 + 2w_1 - w_2 + w_3$$

$$w_3 = w_2$$

$$w_2 = w_1$$

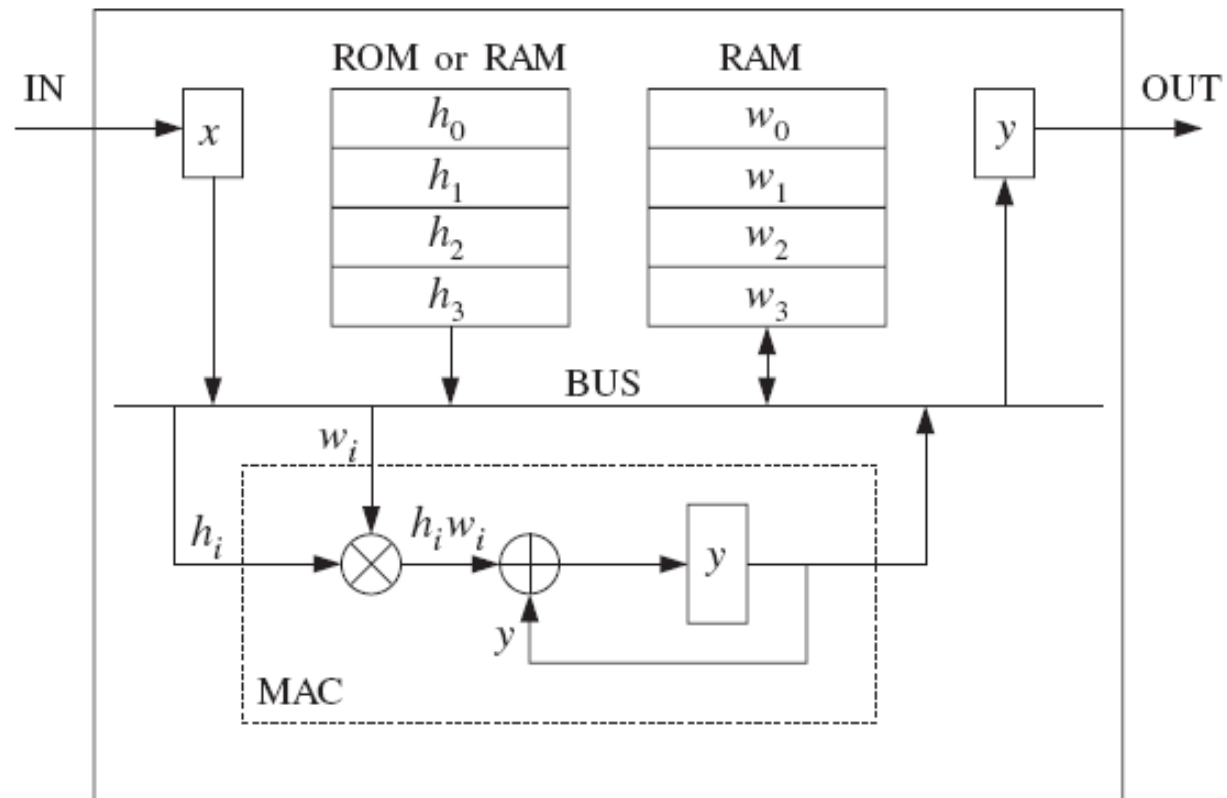
$$w_1 = w_0$$

n	x	w_0	w_1	w_2	w_3	$y = w_0 + 2w_1 - w_2 + w_3$
0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	3
2	2	2	1	1	0	3
3	1	1	2	1	1	5
4	2	2	1	2	1	3
5	2	2	2	1	2	7
6	1	1	2	2	1	4
7	1	1	1	2	2	3
8	0	0	1	1	2	3
9	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	1	1



Hiện thực phần cứng

- MAC: Multiplier Accumulator $y := y + h_i w_i$





Tính toán thời gian xử lý mẫu

- 1 chu kì lệnh (30 ÷ 80) ns

$$w_{i+1} := w_i$$

$$y := y + h_i w_i$$

```
for each input sample  $x$  do:  
   $w_0 := x$   
   $y := h_M w_M$   
  for  $i = M-1, \dots, 1, 0$  do:  
     $w_{i+1} := w_i$   
     $y := y + h_i w_i$ 
```

$$T_{\text{proc}} = (M + 1) T_{\text{instr}}$$

- Điều kiện xử lý mẫu đáp ứng thời gian thực:

$$T \geq T_{\text{proc}} \quad \Rightarrow \quad f_s \leq \frac{1}{T_{\text{proc}}}$$



Ví dụ 7

- Xác định chiều dài đáp ứng xung tối đa của hệ thống FIR có thể thực hiện với chip DSP chu kì lệnh 50 ns cho ứng dụng âm thanh số lấy mẫu 44.1KHz.



Hệ thống IIR

- IIR (Infinite Impulse Response): hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n)$ vô hạn.
- Phương trình sai phân vào ra ở dạng đệ quy (hồi tiếp).
- Bậc của hệ thống IIR **nhân quả**:
 - Định nghĩa 1: số bộ trễ tối thiểu để hiện thực hệ thống (giá trị lớn nhất giữa số bộ trễ tối thiểu ở ngõ vào và số bộ trễ tối thiểu ở ngõ ra).
 - Định nghĩa 2: số bộ trễ tối thiểu ở ngõ ra.

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)$$



Ví dụ 8

An LTI filter has infinite impulse response $h(n) = a^n u(n)$, where $|a| < 1$. Using the convolution summation formula $y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$, derive closed-form expressions for the output signal $y(n)$ when the input is:

- a. A unit step, $x(n) = u(n)$
- b. An alternating step, $x(n) = (-1)^n u(n)$.

In each case, determine the steady state and transient response of the filter.



Tóm tắt

- Phương pháp xử lý khối và xử lý mẫu
- Tính tích chập dùng công thức
- Tính tích chập dùng bảng chéo
- Tính tích chập dùng bảng dịch
- Tính tích chập dùng cộng chồng lấp
- Xác định các trạng thái (quá độ, xác lập)
- Lập bảng xử lý mẫu
- Tính toán thời gian xử lý mẫu



Bài tập 1

- Cho hệ thống có đáp ứng xung $h(n) = 2\delta(n) + \delta(n - 2) + 7\delta(n - 3)$. Xác định các giá trị tín hiệu ngõ ra $y(n = [1, 2])$ khi tín hiệu ngõ vào
- 1) $x(n) = \delta(n - 1) - \delta(n - 4)$
 - 2) $x(n) = \delta(n - 1) + \delta(n + 4)$
 - 3) $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$
 - 4) $x(n) = \{1, 2, 3^\uparrow, 4\}$
 - 5) $x(n) = u(n - 1) - u(n - 4)$
 - 6) $x(n) = u(n - 1)$
 - 7) $x(n) = u(-n - 1)$
 - 8) $x(n) = u(n) - 1$
 - 9) $x(n) = -1$
 - 10) $x(n) = \cos(\pi n)$
 - 11) $x(n) = \cos(\pi n)u(n)$
 - 12) $x(n) = 0.5^n u(n)$



Bài tập 2

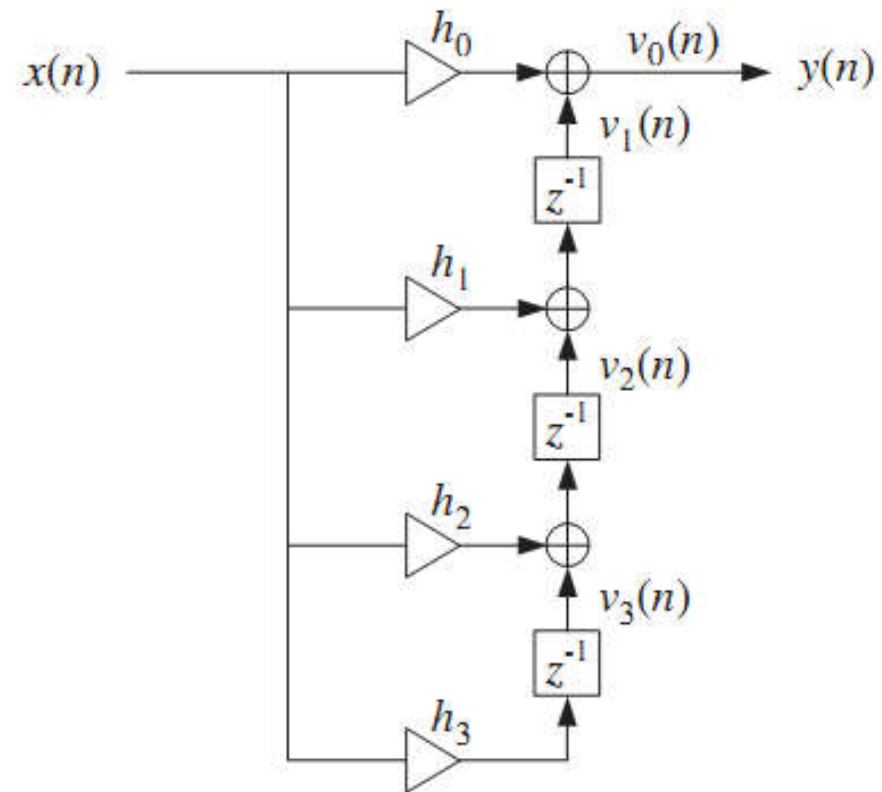
❖ Tính tích chập $y = h * x$, với $h(n) = \{1, -1, -1, 1\}$ và $x(n) = \{1, 2, 3, 4, @, -3, 2, -1\}$ theo các phương pháp sau:

- 1) Bảng chéo
- 2) Bảng dịch
- 3) Cộng chồng lấp với kích thước khối $L=3$
- 4) Cộng chồng lấp với kích thước khối $L=4$
- 5) Cộng chồng lấp với kích thước khối $L=5$



Bài tập 3

Lập bảng giải thuật xử lý mẫu để xác định tín hiệu ngõ ra $y(n)$ cho bộ lọc có đáp ứng xung $h(n) = \{1, -1, 1, -1\}$ và tín hiệu ngõ vào $x(n) = \{1, 2, 3, 4, @, -3, 2, -1\}$ được thiết kế theo hình vẽ.





Bài tập 4

The impulse response $h(n)$ of a filter is nonzero over the index range $3 \leq n \leq 6$. The input signal $x(n)$ to this filter is nonzero over the index range $10 \leq n \leq 20$. Consider the direct and LTI forms of convolution:

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m) = \sum_m x(m)h(n-m)$$

- Determine the overall index range n for the output $y(n)$. For each n , determine the corresponding summation range over m , for both the direct and LTI forms.
- Assume $h(n) = 1$ and $x(n) = 1$ over their respective index ranges. Calculate and sketch the output $y(n)$. Identify (with an explanation) the input on/off transient and steady state parts of $y(n)$.



Bài tập 5

Let $\mathbf{x} = [1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1]$ be an input to the filter described by the I/O equation:

$$y(n) = x(n) - x(n - 2) + 2x(n - 3)$$

- Determine the impulse response $h(n)$ of this filter.
- Compute the corresponding output signal $y(n)$ using the *LTI form* of convolution. Show your computations in table form.
- Compute the same output using the overlap-add method of block convolution by partitioning the input signal into length-4 blocks.
- Draw a block diagram realization of this filter. Then, introduce appropriate internal states and write the corresponding sample processing algorithm.