

# Rapport du Projet Statistique Multidimensionnelle

**Groupe Info n°1**

JOSSE Thomas, HUYLENBROECK Florent, DELFOSSE Charly

Année Académique 2018-2019  
Bachelier en Sciences Informatiques

Faculté des Sciences, UMonS

10 juin 2019

## **Résumé**

Ce rapport est écrit dans le cadre du cours de Statistique Multidimensionnelle dispensé par M. *Michel VOUE*. Ce projet consistait en l'application de l'Analyse en Composantes Principales vues au cours sur un cas concret, ainsi que la découverte d'une technique d'analyse non abordée au cours à savoir, l'Analyse Discriminante Linéaire ou ADL.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Question 1 : ACP sur un cas concret</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	ACP . . . . .	3
1.3	Le profil est-il stable dans le temps ? . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Groupement des Régions</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction . . . . .	12
2.2	Fonctionnement . . . . .	12
2.3	Approche statistique . . . . .	12
2.3.1	La règle bayésienne . . . . .	12
2.3.2	Hypothèse d'homoscédasticité . . . . .	13
2.3.3	Développement . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Exemple</b>	<b>14</b>

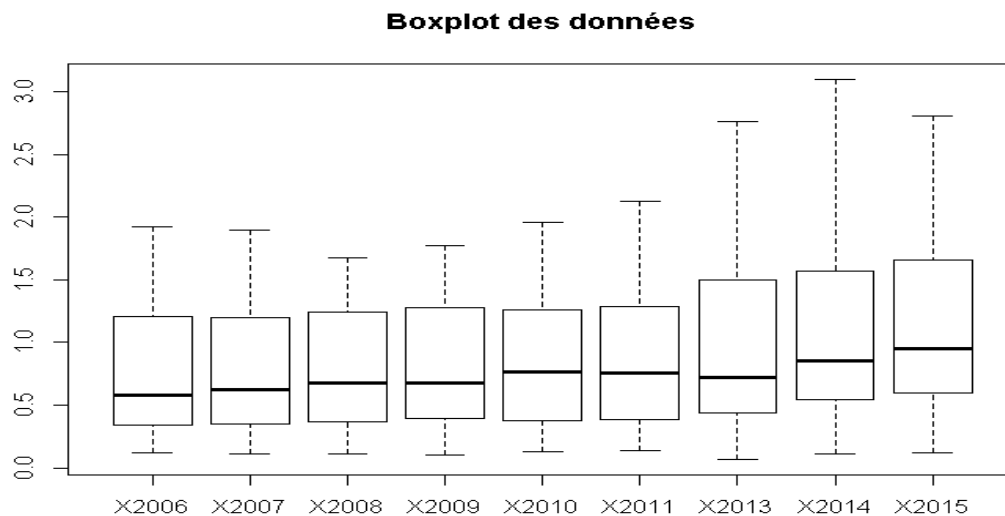
# 1 Question 1 : ACP sur un cas concret

## 1.1 Introduction

Pour cette question nous avons plusieurs sous-points à analyser : tout d'abord effectuer notre ACP des données à proprement dites, puis prédire à l'aide de notre analyse si le profil des données était stable et ensuite grouper les Provinces/Régions qui avaient des comportements similaires avec une méthode de classification hiérarchique ascendante.

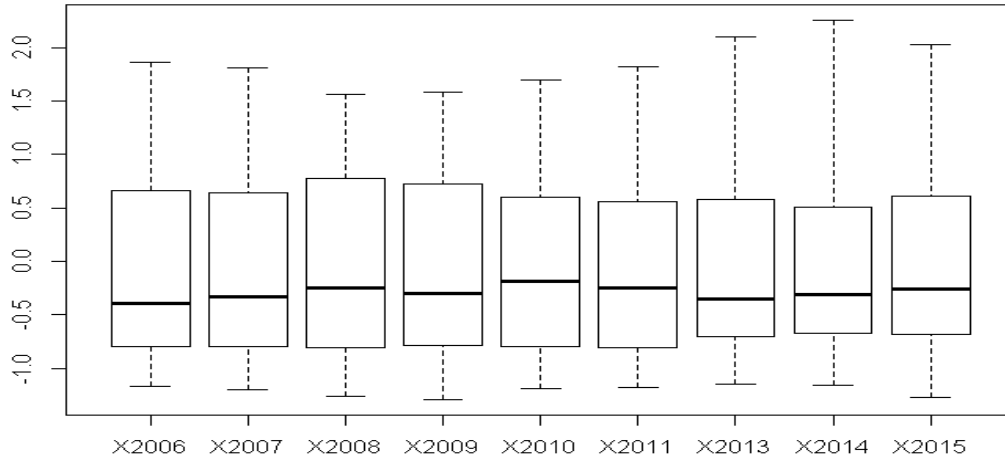
## 1.2 ACP

D'abord, les données ont été extraites et analysées. Les données représente l'évolution du pourcentage de chercheurs employés par les différentes provinces de Belgique. Un boxplot a été effectué avant et après centrage et réduction des données.

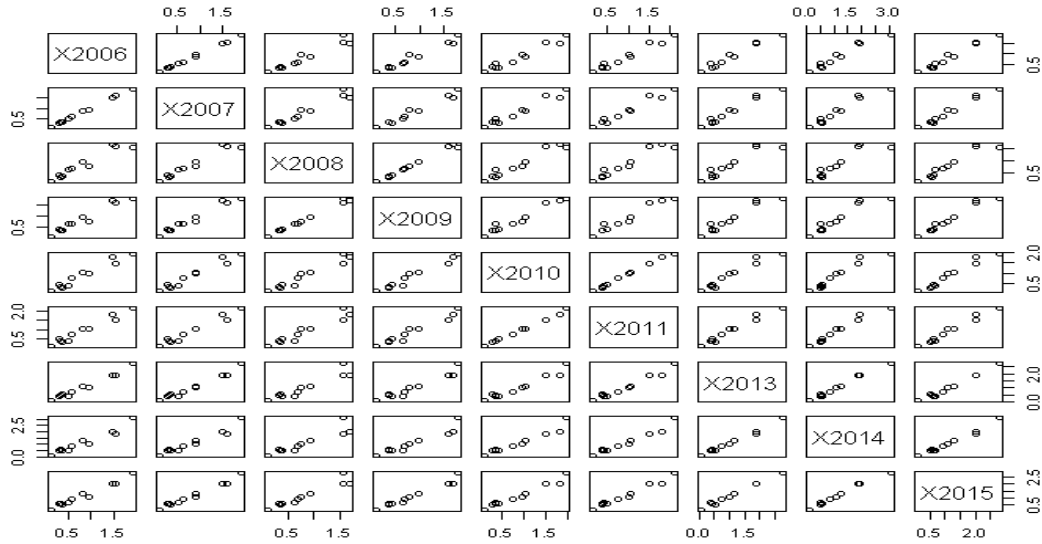


On remarque que la moyenne et les quantiles ont tendance à augmenter au fil des années. Comme nous voulons utiliser l'analyse en composantes principales centrée réduite, nous devons centrer et réduire nos données, voici un boxplot des données après cette opération.

**Boxplot des données centrées réduites**



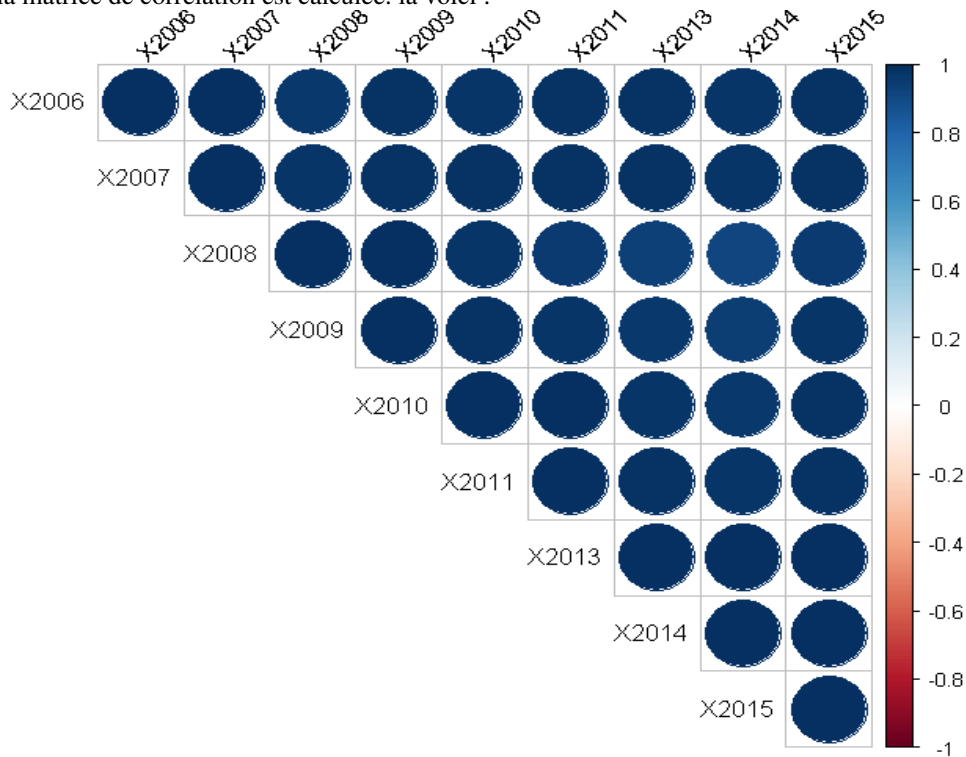
On peut déjà observer un aperçu du comportement des données d'une année à une autre.



On remarque que les données ont l'air de suivre un modèle linéaire dans le temps, nous verrons par la suite si c'est réellement le cas.

L'analyse en composante principale va permettre de mieux comprendre les données en réduisant le nombre de dimensions. Celle-ci va chercher un ou plusieurs axes ne passant plus forcément par l'origine qui maximisent la distance entre tous les individus (dans notre cas les provinces) sur cet axe c'est à dire :  $Max(H)(\sum_i^n \sum_j^n d_H^2(i, j))$  où  $n$  est le nombre d'individu,  $H$  l'axe en question et  $d_H^2(i, j)$  la distance euclidienne entre 2 individus  $i$  et  $j$  sur l'axe  $H$ . Si  $h_i$  est la projection de  $i$  sur l'axe  $H$  alors  $d_H^2(i, j) = 2n \sum_i^n (h_i - \bar{h})^2$  où  $\bar{h}$  est la moyenne des projections de l'ensemble des individus sur  $H$ . On peut montrer que maximiser cette distance revient à maximiser la distance sur  $H$  entre tous les individus et le centre de gravité, on peut donc prendre celui-ci comme nouvelle origine et maximiser la distance des points à l'origine. Les nouvelles coordonnées des individus sont données par  $x_{ij} = r_{ij} - \bar{r}_{ij}$ . On décide ensuite de réduire nos données pour les mettre à l'échelle même si les variables ont les mêmes unités (pourcentages), on obtient donc les coordonnées centrées réduites :  $x_{ij} = \frac{r_{ij} - \bar{r}_{ij}}{s_j \sqrt{n}}$  où  $s_j$  est l'écart type de  $j$ . Après cette étape, nous voulons

connaître les similarités ou assimilarités entre la façon dont les variables varient les unes par rapport aux autres, pour se faire, la matrice de corrélation est calculée. la voici :

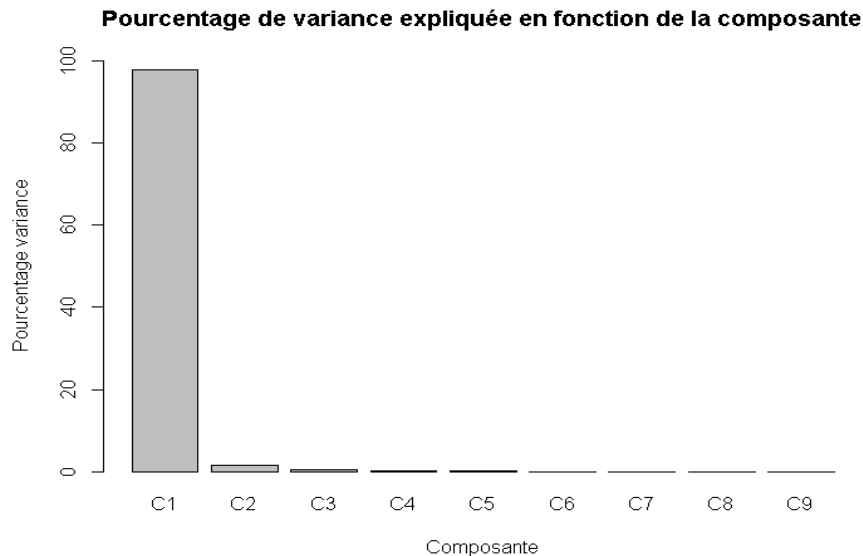


On remarque que toutes les correlations sont très proches de 1. Ceci s'explique par le fait que les données représentent l'évolution du pourcentage de chercheurs employés dans les différentes régions de Belgique au fil des ans. En effet, les valeurs de ce pourcentage d'une année à une autre sont fortement liées/correlées, la valeur de celui-ci à une année est basée sur sa valeur à l'année précédente et n'évolue pas drastiquement. La plus petite corrélation est entre l'année 2008 et 2014, celle-ci vaut 0.915, ceci s'explique par le fait qu'il y a sûrement eu une inversion de tendance entre ces 2 années, que certaines villes ont eu un pourcentage plus élevé et l'inverse pour d'autres, par exemple le brabant wallon est passé de 1.55% en 2008 à 3.1% en 2014, la majorité des autres villes n'ont pas eu une telle augmentation.

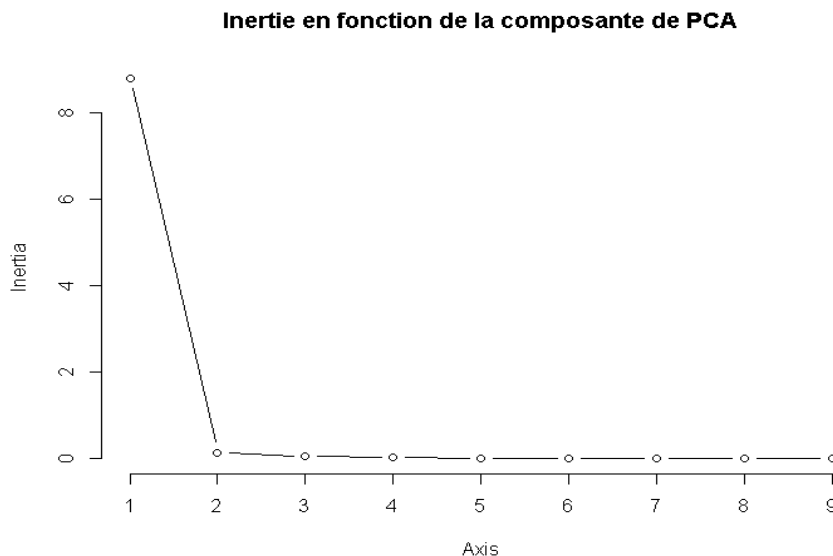
Pour déterminer les composantes principales, c'est à dire les axes donnant la direction de la plus grande variance des données (vecteurs propres), il faut déterminer la portion de variance expliquée par chaque axe, ce n'est rien d'autres que les valeurs propres de la matrice de corrélation. Les voici :

8.806	0.128	0.04	0.02	0.004	0.001	0.0005	0.0001	0.00004
-------	-------	------	------	-------	-------	--------	--------	---------

On remarque la première valeur propre est bien plus grande que les autres, en réalité le premier axe représente 97.8% du pourcentage de l'inertie, le 2e ne représente lui que 1.44%. Le graphe ci-dessous illustre ce fait.



Pour connaître le nombre de facteurs à retenir, il y a plusieurs critères possibles. Selon le critère de Kaiser, il faudrait retenir celle qui ont une valeur propre plus grande que 1, dans notre cas, il ne faudrait donc retenir que la première. Un autre critère dit qu'il faut garder la valeur avant le "coude" c'est à dire l'éboulement dans le graphe de l'inertie que voici :



On remarque que le coude s'effectue entre la première et la deuxième valeur, selon ce critère il faudrait donc aussi ne garder que le premier facteur.

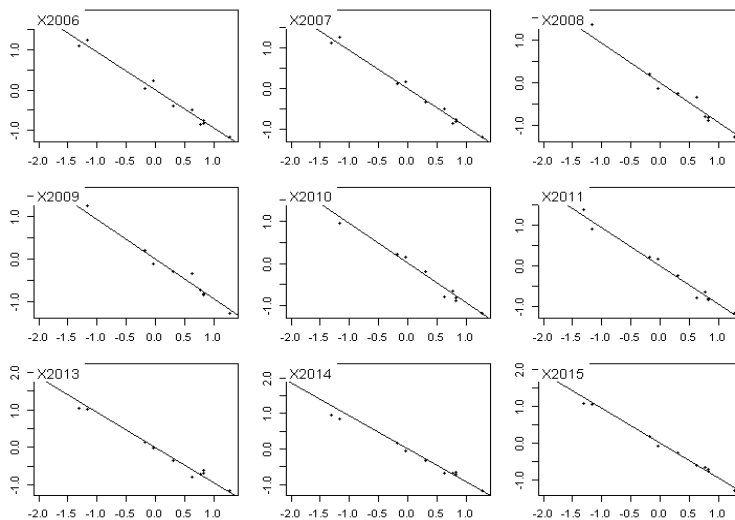
Pour appliquer l'analyse par composantes principales, il a donc été décidé de ne garder qu'une composante.

On obtient donc la seule composante principale, voici un tableau présentant les nouvelles coordonnées des variables sur cette composante(droite) par rapport leurs directions dans les anciens axes.

Les coefficients de cette composante sont quasi identiques, ceci est le résultat du fait que toutes les variables sont fortement corrélées à celle-ci.

Variables	Nouvelles coord	Anciens axes
X2006	-0.994	-0.335
X2007	-0.995	-0.335
X2008	-0.973	-0.328
X2009	-0.989	-0.333
X2010	-0.991	-0.334
X2011	-0.994	-0.335
X2013	-0.990	-0.333
X2014	-0.981	-0.330
X2015	-0.996	-0.336

Sur le graphique ci-dessous, on observe la droite de la première composante pour chaque variable, on remarque que celle-ci symbolise bien la direction de la plus grande variance dans les données, on voit même que les données suivent presque un modèle linéaire sur celle-ci.



**DROITE CORRELATION** Les nouvelles coordonnées des individus sur cette composante peuvent être obtenues par la formule :  $N_i = \sum_j^n u_j x_{ij}$  où  $n$  est le nombre de variables,  $u_j$  est le  $j^{eme}$  coefficient de la composante dans les anciens axes et  $x_{ij}$  est  $j^{eme}$  coordonnée de l'individu  $i$  dans les anciens axes (centré et réduit). On peut aussi déterminer la contribution de chaque individu à l'inertie de la composante par :  $Cr(i) = N_i^2$ .

Individus	Coordonnées	Contribution(%)
Bruxelles/Brussels Gewest	-3.472	12.443
Antwerpen	-0.109	0.012
Limburg (BE)	2.45	6.2
Oost-Vlaanderen	-0.526	0.285
Vlaams-Brabant	-3.896	15.673
West-Vlaanderen	2.451	6.201
Brabant Wallon	-5.773	34.407
Hainaut	2.296	5.44
Liège	0.911	0.858
Luxembourg (BE)	3.793	14.852
Namur	1.875	3.629

### 1.3 Le profil est-il stable dans le temps ?

Le profil est stable car on a vu au point précédent que la matrice des corrélations avaient des coefficients très proches de 1, donc en général aucune année n'a vraiment un comportement différent d'une autre dans les données, on a pas des changements imprévus c'est à dire une province qui verrait son pourcentage augmenter ou diminuer de façon inhabituelle d'une année à une autre. Le profil est donc stable dans le sens où dans le temps, celui-ci garde globalement le même comportement.

## 2 Groupement des Régions

Avant de pouvoir classer les différentes régions/provinces en groupes, nous devons effectuer les calculs pour obtenir la matrice des distances.

La voici :

X/Y	Bruxelles / Brussels	Antwerpen	Limburg (BE)	Oost-Vlaanderen	Vlaams-Brabant	West-Vlaanderen	Brabant Wallon	Hainaut	Liège	Luxembourg (BE)
Antwerpen	2.1976387									
Limburg (BE)	3.7924177	1.6421791								
Oost-Vlaanderen	1.8915634	0.4301455	1.9210062							
Vlaams-Brabant	0.4977661	2.4667642	4.0669507	2.1495597						
West-Vlaanderen	3.8006950	1.6560244	0.1286935	1.9409271	4.0820783					
Brabant Wallon	1.9575174	3.9798765	5.5491930	3.6703024	1.7755390	5.5680656				
Hainaut	3.7125903	1.5599647	0.1778578	1.8341168	3.9730810	0.2564549	5.4790390			
Liège	2.8325198	0.7078850	0.9826074	0.9572507	3.0928177	1.0089326	4.6193113	0.8853731		
Luxembourg (BE)	4.7062104	2.5412458	0.9393496	2.8423194	4.9768604	0.9233110	6.4807544	1.0232601	1.8917065	
Namur	3.5118824	1.4269053	0.5102366	1.6929400	3.7991224	0.5027041	5.3359194	0.4713670	0.7868244	1.2514964

Après avoir calculé ces distances, nous devons pouvoir trouver un moyen de regrouper ces distances pour pouvoir à la fin les classer en différents groupes. Pour cela, nous avons réalisé l'arbre des distances qui contient, sous forme d'arbre les relations entre chaque composante en fonction de sa distance par rapport aux autres. Le résultat est obtenu via l'algorithme suivant :

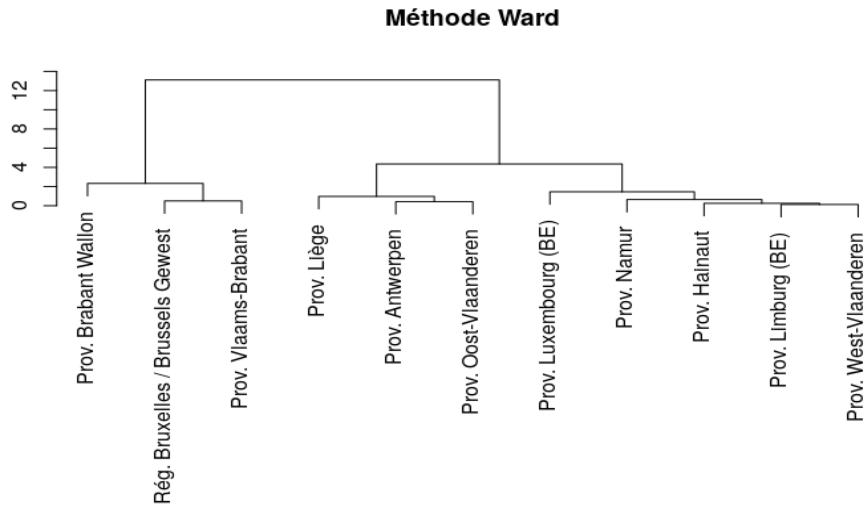
Etape 1 n élément à classer

Etape 2 Calculer la matrice des distances et chercher les individus pour lesquels la distance est minimale. Agréger ces éléments en un seul élément (ils seront frères dans l'arbre). On obtient à la fin une partition à n-1 éléments.

Etape 3 On recrée la matrice des distances avec ces modifications apportées et on boucle sur la 2<sup>ème</sup> étape jusqu'à ce que tous les individus soient contenus dans une seule classe (la racine de l'arbre).

A l'aide de cet algorithme nous avons obtenu cet arbre :

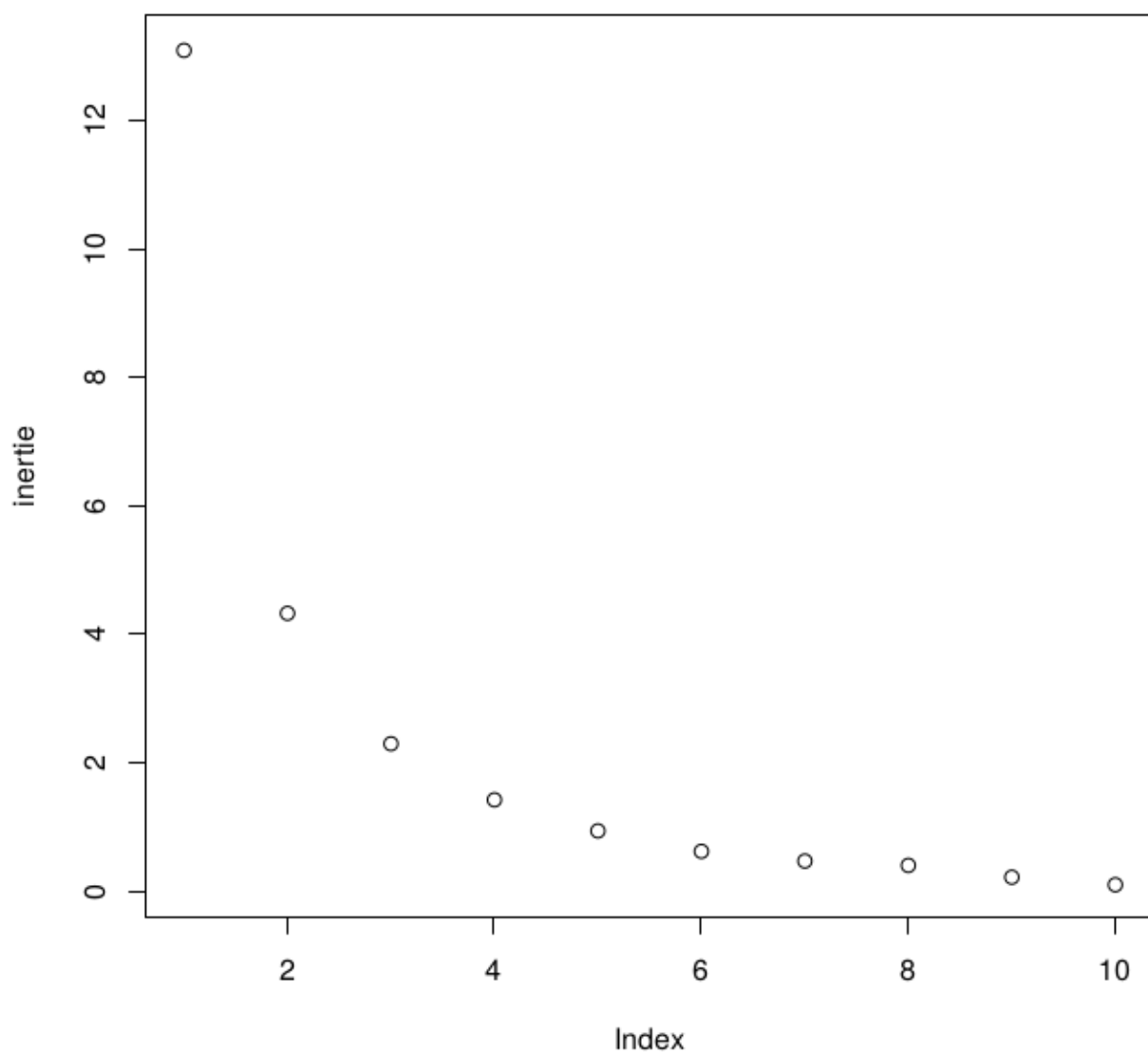




Pour réaliser celui-ci nous avons appliqué le critère de Ward généralisé qui dit que l'on doit rechercher les éléments pour lesquels la perte d'inertie interclasse est minimale.

$$\Delta I_{ii'} = \frac{m_i m_{i'}}{m_i + m_{i'}} d^2(x_i, x_{i'})$$

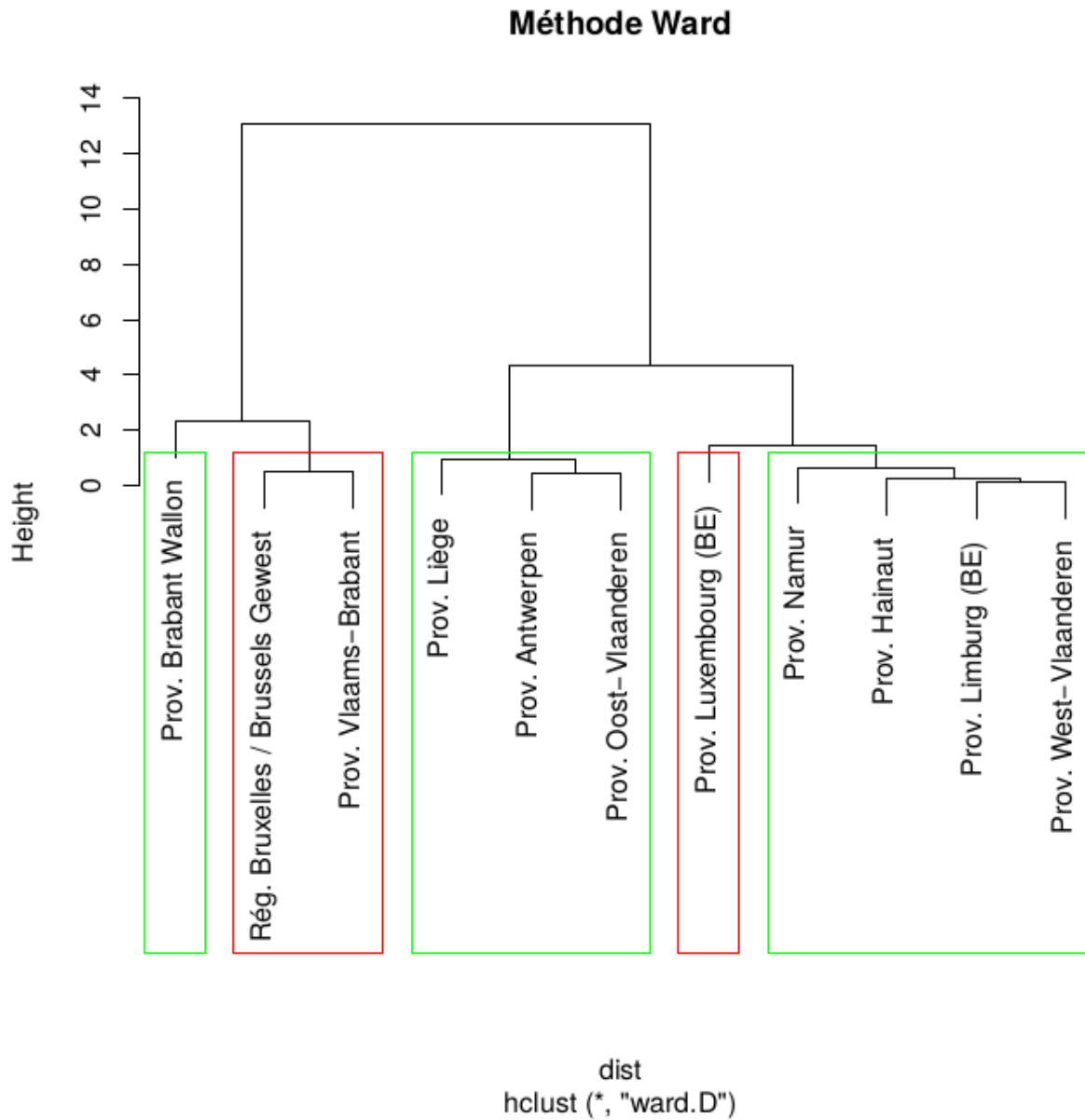
Maintenant que nous avons notre arbre des distances nous pouvons nous atteler à la tâche de diviser celui-ci en différentes classes. Comment faire cela ? Nous devons nous intéresser à la décroissance de l'inertie intraclasse. En effet, lorsque celle-ci diminue de manière plus faible cela veut dire que le nombre de groupe choisi est optimal.



D'après ce graphique, on pourrait classer nos individus en 5 groupes puisque c'est à ce niveau que l'inertie intra-classe se stabilise  $\Rightarrow$  le critère d'optimalité.

Avec toutes ces données nous pouvons donner une forme finale à notre arbre des distances qui contiendra les différents groupes d'individus.

Le voici :



Ce graphique nous montre la classification de nos régions qui ont les mêmes comportements au fur et à mesure du temps.

## Q2 : L'analyse discriminante linéaire

### 2.1 Introduction

L'analyse discriminante linéaire (ADL) est une technique d'analyse discriminante prédictive. Son but est de pouvoir expliquer et prédire l'appartenance d'un individu à un groupe prédéfini à partir de caractéristiques qui ont été mesurées au préalable grâce à des variables prédictives. Cette technique est comparable à la régression logistique.

### 2.2 Fonctionnement

Le principe de cette analyse est de calculer la distance entre  $x$  (le vecteur des variables explicatives sur un individu que l'on veut classer) et chacun des  $K$  centres de gravité des groupes  $g_1, \dots, g_K$  pour ensuite affecter  $x$  au groupe le plus proche.

Cette distance peut être trouvée via la formule :

$$d^2(x, g_k) = (x - g_k)' \mathbf{W}^{-1} (x - g_k),$$

Où  $\mathbf{W}$  est la matrice des variance-covariance intra-groupe.

Pour cela, nous allons définir notre fonction linéaire discriminante du groupe  $k$  pour savoir si  $x$  appartient au groupe  $k^*$  tel que :

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} d^2(x, g_k)$$

que l'on peut réécrire :

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} L_K(x)$$

où

$$L_K(x) = x' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}_k - \frac{1}{2} \mathbf{g}_k' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}_k$$

Et  $L_K(x)$  est notre fonction linéaire discriminante du groupe  $k$ .

Chaque  $L_k(x)$  définit donc une fonction score qui donne une note représentant la probabilité d'appartenance au groupe de la fonction linéaire.  $X$  est donc affecté au groupe dont le score est le plus élevé.

### 2.3 Approche statistique

#### 2.3.1 La règle bayésienne

Cette règle consiste à produire une estimation de la probabilité après notre affectation. Cela veut dire que nous devons réaliser une estimation pour une probabilité conditionnelle :

$$P(Y = y_k | X) = \frac{P(Y = y_k) \times P(X | Y = y_k)}{\sum_{i=1}^K P(Y = y_i) \times P(X | Y = y_i)}$$

Nous avons  $P(Y = y_k)$  qui est la probabilité d'appartenance à la classe  $y_k$  et  $P(X | Y = y_k)$  qui est la fonction de densité des  $x$  par rapport à l'appartenance à la classe  $y_k$ .

Et cette règle permet d'affecter une nouvelle observation  $x$  au groupe  $k^*$  tel que :

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} P(Y = y_k | X)$$

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} \pi_k f_k(x)$$

### 2.3.2 Hypothèse d'homoscédasticité

L'homoscédasticité est le fait que les variances de chaque groupe soit équivalente (son contraire est l'hétéroscédasticité). Cela veut dire que les données sont réparties de la même manière autour de leur moyenne, ou centre de gravité.

Pour pouvoir effectuer de l'analyse discriminante linéaire c'est la principale hypothèse que l'on doit appliquer à nos données.

### 2.3.3 Développement

L'hypothèse respectée on peut réécrire la règle de Bayes telle que :

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} x' \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k' \Sigma^{-1} \mu_k + \ln(\pi_k)$$

Il nous reste à estimer les paramètres sur l'échantillon d'apprentissage :

- $\mu_k$  est estimée par  $g_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i \in E_k} x_i$
- la matrice  $\mathbf{W}$  avec  $\Sigma$  commune à tous les groupes devient  $\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{k=1} \sum_{i \in E_k} (x_i - \mathbf{g}_k)(x_i - \mathbf{g}_k)'$  avec biais ou sans biais :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n - K} \sum_{k=1} \sum_{i \in E_k} (x_i - \mathbf{g}_k)(x_i - \mathbf{g}_k)'$$

On obtient ainsi notre règle pour classifier nos individus par l'analyse discriminante linéaire :

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} L_k(x)$$

où

$$L_k(x) = x' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}_k - \frac{1}{2} \mathbf{g}_k' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}_k + \ln(\hat{\pi}_k)$$

est la fonction linéaire discriminante du groupe  $k$  et où  $\hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n}$ . Elle fonctionne comme dans la règle géométrique.

### 3 Exemple

Pour réaliser notre exemple, nous avons utilisé la fonction `discrimin` du package `ade4` de R qui nous a permis de réaliser l'analyse discriminante de la table de données "*chazeb*" qui est fournie avec ce package ainsi que la table "*skulls*" du même package.

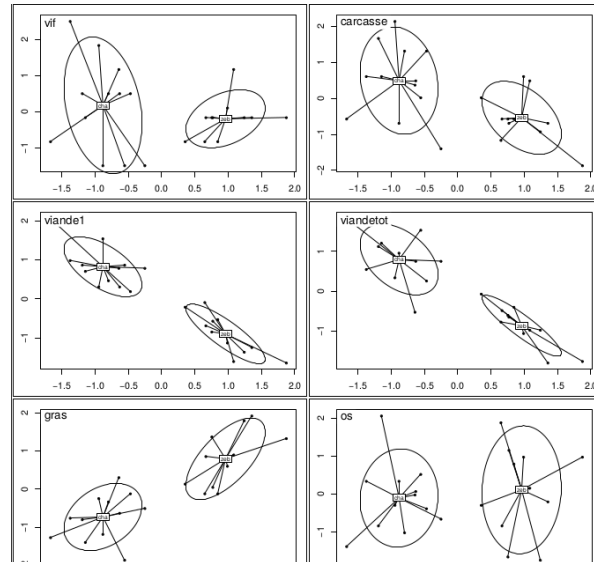


FIGURE 1 – Chazeb

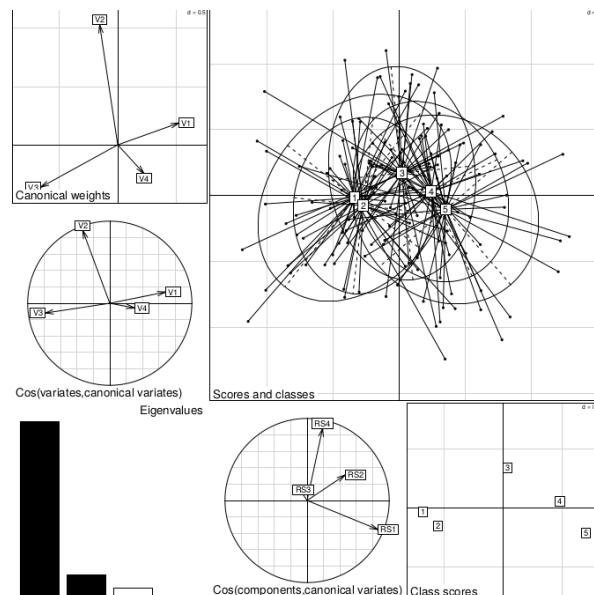


FIGURE 2 – Skulls