# 小作业一：图像透视变换

一、实验要求

读入一幅灰度图像，对图像进行透视变换，显示结果。

二、算法原理和基本思路

透视变换(Perspective Transformation)是指利用透视中心、像点、目标点三点共线的条件，按透视旋转定律使承影面(透视面)绕迹线(透视轴)旋转某一角度，破坏原有的投影光线束，仍能保持承影面上投影几何图形不变的变换。常用于对图像进行校准。

透视变换通用的变换公式：

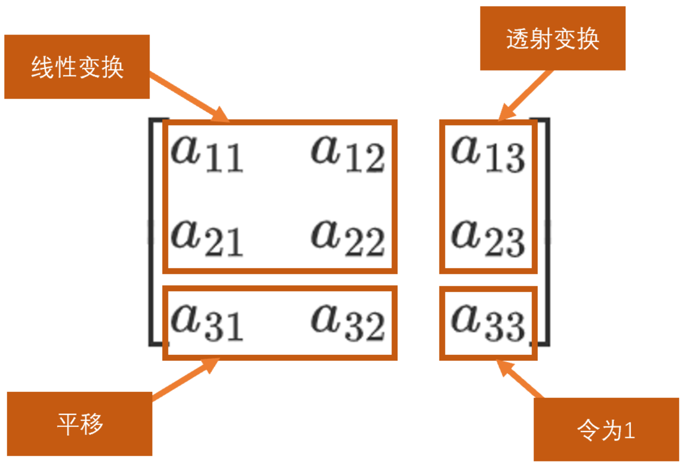
$$[x' \quad y' \quad \omega'] = [u \quad v \quad 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$u$ 和 $v$ 是原始图像坐标，通过透视变换后得到的图片坐标为$x$ , $y$ ，其中

$$x = \frac{x'}{\omega'}$$
$$y = \frac{y'}{\omega'}$$

这是一个从二维空间变换到三维空间的转换，因为图像在二维平面，故除以 $\omega'$.

变换矩阵可以拆分为四部分：




重写之前的变换公式可以得到：

$$x = \frac{x'}{w'} = \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}}{a_{13}u + a_{23}v + 1}$$
$$y = \frac{y'}{w'} = \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}}{a_{13}u + a_{23}v + 1}$$

所以，已知变换对应的几个点就可以求取变换公式，特定的变换公式也能产生新的变换后的图片。简单的看一个正方形到四边形的变换。
变换的4组对应点可以表示成：
$(0,0) \rightarrow (x_0,y_0), (1,0) \rightarrow (x_1,y_1), (1,1) \rightarrow (x_2,y_2), (0,1) \rightarrow (x_3,y_3)$

根据变换公式得到：

$$
\begin{aligned}
a_{31} &= x_0 \\
a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 &= x_1 \\
a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 &= x_2 \\
a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 &= x_3 \\
a_{32} &= y_0 \\
a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 &= y_1 \\
a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{23}y_2 - a_{23}y_2 &= y_2 \\
a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 &= y_3
\end{aligned}
$$

定义几个辅助变量：

$$
\begin{matrix}
\Delta x_1 = x_1 - x_2 & \Delta x_2 = x_3 - x_2 & \Delta x_3 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\
\Delta y_1 = y_1 - y_2 & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & \Delta y_3 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3
\end{matrix}
$$

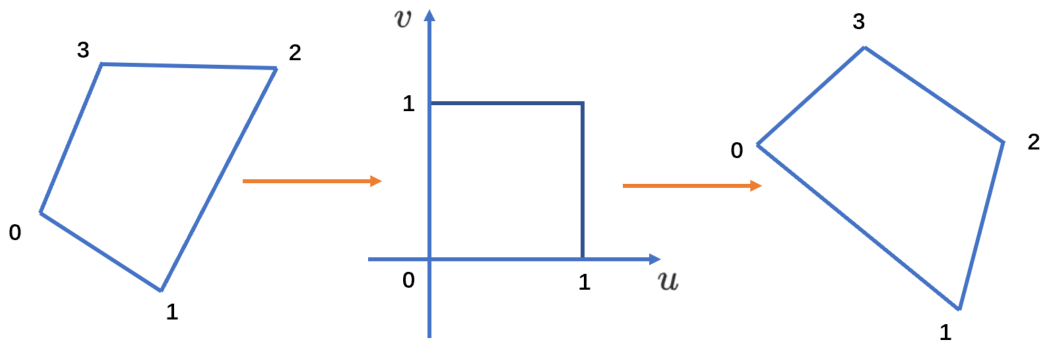
$\Delta x_3, \Delta y_3$都为0时变换平面与原来是平行的，可以得到：

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= x_1 - x_0 \\
a_{21} &= x_2 - x_1 \\
a_{31} &= x_0 \\
a_{12} &= y_1 - y_0 \\
a_{22} &= y_2 - y_1 \\
a_{32} &= y_0 \\
a_{13} &= 0 \\
a_{12} &= 0
\end{aligned}
$$

$\Delta x_3, \Delta y_3$不为0时，得到：

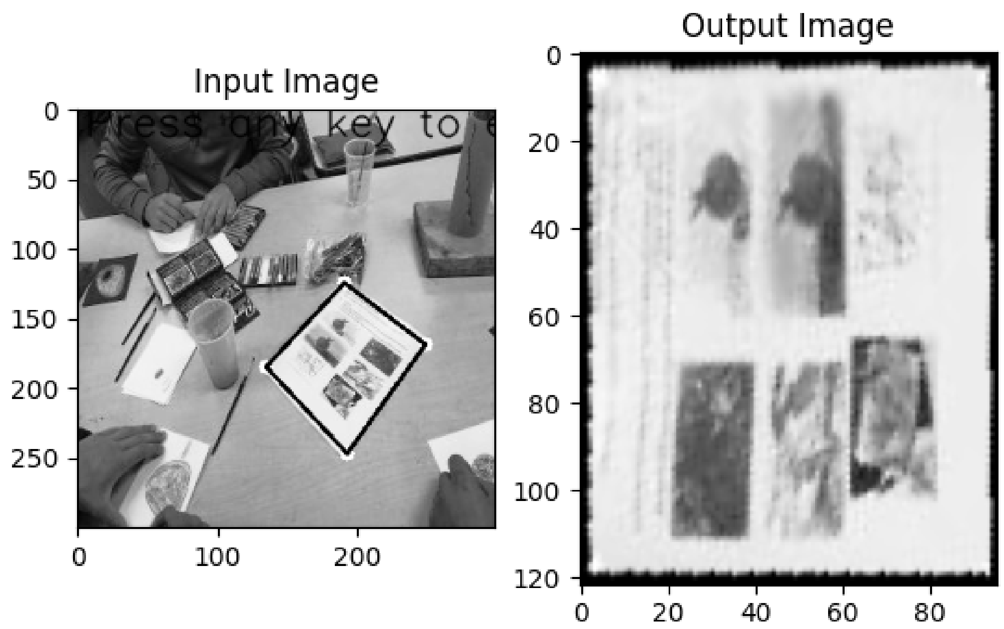
$$
\begin{aligned}
a_{11} &= x_1 - x_0 + a_{12}x_1 \\
a_{21} &= x_3 - x_0 + a_{12}x_2 \\
a_{31} &= x_0 \\
a_{12} &= y_1 - y_0 + a_{13}y_1 \\
a_{22} &= y_3 - y_0 + a_{23}y_3 \\
a_{32} &= y_0 \\
a_{13} &= \begin{vmatrix} \Delta x_3 & \Delta x_2 \\ \Delta y_3 & \Delta y_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix} \\
a_{12} &= \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

求解出的变换矩阵就可以将一个正方形变换到四边形。反之，四边形变换到正方形也是一样的。于是，我们通过两次变换：四边形变换到正方形+正方形变换到四边形就可以将任意一个四边形变换到另一个四边形。




三、实验结果

在原图上截取一块区域进行透视变换，得到的输出图像如下：




参考资料：

[(32条消息) 一文弄懂numpy数组_罗罗攀的博客-CSDN博客]

[【Python基础】Python中读取图片的6种方式*51CTO*博客python 读取图片]

[(32条消息) 【图像处理】透视变换 Perspective Transformation_xiaowei_cqu的博客-CSDN博客_透视变换]