Université Jean Monnet
Licence L3 Informatique

KERDONCUFF Tanguy
SEBAN Marc

Correction des TDS de probabilités

Table des matières

1 TD2 : Variables aléatoires discrètes **1**
1.1 Exercice I 1
1.2 Exercice II 2
1.3 Exercice III 3
1.4 Exercice IV 4
1.5 Exercice V 4
1.6 Exercice VI 5
1.7 Exercice VII 6
1.8 Exercice VIII 6
1.9 Exercice IX 7

1 TD2 : Variables aléatoires discrètes

1.1 Exercice I

Une épreuve d'examen consiste en un QCM qui comporte 5 questions. 3 d'entre elles proposent 3 réponses possibles, et les 2 autres 2 réponses possibles.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant répondant au hasard ait juste à strictement plus de 3 (à changer en 2) questions ?

Solution: On pose X la variable aléatoire suivant la loi binomiale B($3,\frac{1}{3}$). Cette variable est associé à la réalisation de des trois première questions (somme de Bernoulli indépendantes) et représente le nombre de réponse juste sur ces trois première questions. De même on pose Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale B($2,\frac{1}{2}$).
On pose Z = X + Y qui représente le nombre total de bonne réponse.
On cherche $P(Z > 2) = 1 - P(Z = 0 \cup Z = 1 \cup Z = 2) = 1 - (P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2))$ car les évènements sont disjoints.
$P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0)$ car X et Y sont indépendants. Ceci est probablement faux, dans un questionnaire les questions précédentes influences toujours les réponses qui suivent. Mais ceci sera admis ici (cela était d'ailleurs déjà nécessaire pour que la somme des bernoullis se transforment en binomial).

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X=0)P(Y=0) \\
&= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-0)}\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-0)} \\
&= \frac{8}{27}\frac{1}{4} \\
&= \frac{8}{108}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
P(Z=1) &= P((X=1\cap Y=0)\cup(X=0\cap Y=1)) \\
&= P(X=1)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=1) \\
&= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-1)}\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-0)} \\
&\quad+\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-0)}\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-1)} \\
&= \frac{12}{27}\frac{1}{4}+\frac{8}{27}\frac{2}{4} \\
&= \frac{28}{108}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$
\begin{aligned}
P(Z=2) &= P((X=2\cap Y=0)\cup(X=0\cap Y=2)\cup(X=1\cap Y=1)) \\
&= P(X=2)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1) \\
&= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-2)}\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-0)} \\
&\quad+\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-0)}\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-2)} \\
&\quad+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{(3-1)}\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{(2-1)} \\
&= \frac{6}{27}\frac{1}{4}+\frac{8}{27}\frac{1}{4}+\frac{12}{27}\frac{2}{4} \\
&= \frac{38}{108}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Donc $P(Z>2)=1-\frac{8+28+38}{108}=1-\frac{74}{108}=\frac{34}{108}=0.31$. Un étudiant à presque une chance sur trois d'avoir au moins 3 réponses de juste en répondant au hasard.

2. Pour éviter l'influence du hasard, le correcteur décide de neutraliser les x premières réponses justes, ce qui conduit à mettre un 0 à l'étudiant dont le nombre de réponses justes n'est pas supérieur à celui qu'il peut espérer atteindre en répondant au hasard. Quelle est la valeur de x et combien de points doit-on accorder par réponse juste au delà de la xème pour que l'étudiant répondant parfaitement à toutes les questions ait 20/20 ?

   Solution: On va regarder en moyenne combien de réponse juste a un étudiant qui répond au hasard. $E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}=2$. Un étudiant qui réponse au hasard à donc en moyenne 2 bonnes réponses. Si on applique la méthode décrite dans l'énoncer on neutralise 2 questions juste et on répartit les points sur les autres : $20/3=6.66$ points par question juste au dessus des deux premières.

1.2 Exercice II

Un service administratif est constitué de dix personnes qui disposent toutes d'une ligne téléphonique indépendante. On constate qu'en moyenne chaque personne passe 15 minutes par heure au téléphone.

1. Une réorganisation du standard téléphonique conduit à ramener à 4 le nombre des lignes. Si l'on suppose que le comportement des membres du service ne varie pas, quelle est la probabilité qu'à un moment donné le nombre des lignes soit insuffisant pour couvrir les besoins ?

   Solution: (Problème de file d'attente, très analyser pour les standards téléphonique). A un instant donné t la probabilité pour qu'un individu soit au téléphone est de 1/4 (15 minutes/heure). Et on veut savoir avec quel probabilité plus de 4 lignes seront occupé en

même temps. On pose X la variable aléatoire qui représente le nombre de ligne occupé. X suit une loi binomiale comme somme de bernoulli indépendante, de paramètre p=1/4 et n=10.
On cherche $P(X > 4) = 1-P(X \leq 4) = 1-P(X = 0)-P(X = 1)-P(X = 2)-P(X = 3) - P(X = 4)$.
$P(X = 0) = \binom{10}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^{(10-0)} = (\frac{3}{4})^{10} = 0.0563$
$P(X = 1) = \binom{10}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^{(10-1)} = 10\frac{3^9}{4^{10}} = 0.1877$
$P(X = 2) = \binom{10}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{(10-2)} = 0.2816$
$P(X = 3) = \binom{10}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^{(10-3)} = 0.2503$
$P(X = 4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^{(10-4)} = 0.1460$
Ce qui donne $P(X > 4) = 0.0781$, près d'une chance sur 8 pour que la ligne soit occupé à un instant t donné.

1.3 Exercice III

Un service administratif est constitué de dix personnes qui disposent toutes d'une ligne téléphonique indépendante. On constate qu'en moyenne chaque personne passe 15 minutes par heure au téléphone.

1. La probabilité qu'une souris contracte une maladie après injection d'un sérum est de 0.2. Calculer la probabilité qu'au plus 3 souris parmi 30 d'un échantillon testé contractent la maladie.

   Solution: On pose X la variable aléatoire qui compte le nombre de souris qui ont contracté la maladie. X est la somme de variable aléatoire de bernoulli indépendantes, elle suit donc une loi binomiale de paramètre p=1/5 et n=30.
   On cherche $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
   $P(X = 0) = \binom{30}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{(30-0)} = 0.00123$
   $P(X = 1) = \binom{30}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{(30-1)} = 0.00928$
   $P(X = 2) = \binom{30}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{(30-2)} = 0.03365$
   Donc $P(X \leq 2) = 0.04416$. Il y a 4 chance sur 100 que le nombre de souris malade soit inférieur à 2.

2. En utilisant une approximation par la loi de Poisson, vérifiez que les résultats sont assez éloignés de ceux de la loi d'origine. Pourquoi ?

Solution: On utilise l'approximation de la loi de poisson pour faire des calculs plus rapide (très lourd actuellement). En théorie il faudrait avoir n>50 p < 0.1 et np<15, ce qui n'est pas vérifier ici. Ce ne sont pas des évènement assez "rare".
On dit donc que $X \approx \Lambda$ avec Λ qui suit une loi de poisson de paramètre np=6.
$P(\Lambda = 0) = e{-}6\frac{6^0}{0!} = 0.00248$
$P(\Lambda = 1) = e{-}6\frac{6^1}{1!} = 0.01487$
$P(\Lambda = 2) = e{-}6\frac{6^2}{2!} = 0.04461$
Donc $P(X \leq 2) = 0.06196$. Il y a 6 chance sur 100 que le nombre de souris malade soit inférieur à 2.

1.4 Exercice IV

L'expérience montre que, lorsqu'on les questionne sur un sujet sensible (comme par exemple ≪Avez-vous déjà fumé du haschich ?≫), la plupart des gens n'ont pas envie de répondre ≪Oui ≫. Supposons que 80% de la population n'ait jamais fumé, et que 70% de ceux qui l'ont déjà fait répondraient ≪Non ≫à la question posée.

1. Donner la distribution de probabilité de Y, nombre de personnes à interroger avant d'obtenir la première réponse positive.

   Solution: La loi de Y est la loi du nombre d'échec avant d'obtenir un succès. Il s'agit donc d'une loi géométrique de paramètre p. Pour tout y appartenant au entier naturelle $P(Y = y) = (1 - p)^{y-1}p$. La valeur du paramètre p correspond à la probabilité qu'une personne réponde ≪Oui ≫au sondage. Théorème des système complet d'évènement : $P("Oui") = P("Oui" \cap "fume") + P("Oui" \cap "jamais fume") = P("Oui"|"fume")P("fume") + P("Oui"|"jamais fume")P("jamais fume") = 0.3 * 0.2 + 0 * 0.8 = 0.06$

2. Quelle est la probabilité pour que le 5ème individu interrogé soit le premier qui réponde ≪Oui ≫ ?

   Solution: On fini simplement par appliquer la formule : $P(Y = 5) = 0.94^4 0.06 = 0.0468$

1.5 Exercice V

Un distributeur de composants a 10 disques durs en stock. Chacun est vendu 150 euros, mais le distributeur a pour devise ≪satisfait ou remboursé deux fois ≫.

1. En considérant qu'il vende tous les disques, calculer l'espérance de gain net pour le vendeur, si la probabilité pour un disque dur d'être défectueux est de 0.08.

   Solution: Chaque disque dur est indépendant des autres. Chacun est soit en panne soit en marche. On pose X qui est le nombre d'appareil défectueux. X est donc une somme de bernoulli indépendante et identique, c'est donc une loi binomiale de paramètre n = 10 et p = 0.08 (attention ici le succès est que l'appareil tombe en panne).

On pose G la variable aléatoire qui représente le gain. $G = 150 * 10 - Y * (2 * 150)$. On cherche E(G) et on sait que E(X) = np = 0.8. E(gain)= 150*10 - E(X) * (2*150) = 1260.

1.6 Exercice VI

Un laboratoire pharmaceutique conditionne des gélules par boites de 25. La vérification d'un lot de 100 boites conduit à constater l'existence d'un dosage défectueux dans certaines gélules : 20 boites comportent une gélule dont le dosage n'est pas satisfaisant, et 5 boites deux gélules au dosage incorrect. On ne sait rien sur les autres boites **sauf qu'elles ne contiennent ni 1 ni 2 gélules**.

1. Quelle est la probabilité qu'une boite contienne (exactement) :une gélule mal dosée ? deux gélules mal dosées ?

   Solution: P(X=1) = 20/100 = 0.2
   P(X=2) = 5/100 = 0.05

2. Quelle est l'espérance mathématique du nombre de gélules mal dosées dans une boite ?

   Solution: X est la somme de bernoulli indépendantes et identique. X suit une loi binomiale de paramètre n = 25 et p à déterminer. p est la probabilité qu'une gélule soit mal dosé. Le manque d'information concernant les autres boites ne nous permet pas d'avoir directement accès à p. Il faut donc passer par les informations que nous connaissons sur la loi binomiale et résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 0.2 = P(X=1) = \binom{25}{1} pq^{24} \\ 0.05 = P(X=2) = \binom{25}{2} p^2q^{23} \\ p+q=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.2 = 25pq^{24} \\ 0.05 = 300p^2q^{23} \\ p+q=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.2 \times 300p^2q^{23} = 0.05 \times 25pq^{24} \\ p+q=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 60p = 1.25q \\ p+q=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p + 48p = 1$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{49} = 0.0204$$

   Donc $E(X) = np = 25 \times 0.0204 = 0.5102$

3. Calculez en adoptant la loi de Poisson, la probabilité que le nombre de gélules mal dosées dans une boite soit de 1 et 2.

Solution: On peut déjà noter que les 3 conditions nécessaires n>50 p <0.1 et np <15 ne sont pas toutes vérifiés.
$\lambda = E(X) = 0.5102$ P(X = x) = $\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$
P(X = 0) = $\frac{0.5102^0}{0!}e^{-0.5102} = 0.6004$
P(X = 1) = $\frac{0.5102^1}{1!}e^{-0.5102} = 0.3063$
P(X = 2) = 0.0781
P(X = 3) = 0.0133

1.7 Exercice VII

Soit la fonction génératrice des moments de la v.a. Y :

$$m(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{3}{6}e^{3t}$$

1. Calculer E(Y) et V(Y).

Solution:

$$E(Y) = \frac{dm(t)}{dt}(0) = \frac{1}{6}e^0 + \frac{4}{6}e^0 + \frac{9}{6}e^0 = \frac{7}{3}$$

$$E(Y^2) = \frac{d^2m(t)}{dt^2}(0) = \frac{1}{6}e^0 + \frac{6}{6}e^0 + \frac{27}{6}e^0 = 6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$$

1.8 Exercice VIII

Soit Y une v.a. suivant une loi binomiale de paramètres n et p. (Remarque : Exercice beaucoup trop compliqué, binome de newton pas connu, très intéressant a expliquer mais pas le temps dans ce TD)

1. Montrer que la fonction génératrice des moments de Y est (ou q = 1 - p)

$$m(t) = (pe^t + q)^n$$

.

Solution: Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} m(t) =& E(e^{tY}) && (1.4)\\ =& \sum_{y=0}^{n} e^{ty}\binom{n}{y}p^y q^{n-y} && (1.5)\\ =& \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y}(pe^y)^t q^{n-y} && (1.6)\\ =& (pe^t+q)^n && (1.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) =& m_0^1 && (1.8)\\ =& \frac{dm}{dt}(0) && (1.9)\\ =& npe^t(pe^t+q)^{n-1} && (1.10)\\ =& npe^0(pe^0+q)^{n-1} && (1.11)\\ =& np(p+q)^{n-1} && (1.12)\\ =& np && (1.13) \end{aligned}$$

$V(Y) = m_0^2 - (m_0^1)^2$

$$\begin{aligned} m_0^2 =& \frac{d^2m}{dt^2}(0) && (1.14)\\ =& \frac{dnpe^t(pe^t+q)^{n-1}}{dt}(0) && (1.15)\\ Quelqueserreursici... =& (n-1)n(pe^t)^2(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1} && (1.16)\\ =& (n-1)n(pe^0)^2(pe^0+q)^{n-2} + npe^0(pe^0+q)^{n-1} && (1.17)\\ =& (n-1)np^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} && (1.18)\\ =& (n-1)np^2 + np && (1.19) \end{aligned}$$

Donc $V(Y) = (n-1)np^2 + np - (np)^2 = np^2 + np = np(1+p) = npq$

1.9 Exercice IX

Le nombre moyen de vers de terre par m^3 de sol est de 3600.

1. En supposant une distribution de Poisson des vers, donner un intervalle du nombre de ver qui contiendra au moins $\frac{5}{9}$ des mesures du nombre de vers par m^3.

Solution: "intervalle" il faut penser à Chebyshev, attention encadrement très grossier. On note X la variable aléatoire associé à cette loi de Poisson de paramètre 3600. X est donc le nombre de vers.

$$\forall k > 0 \quad P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\forall k > 0 \quad P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

On veut que la probabilité de l'encadrement du nombre de vers soit au moins de 5/9.

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq \frac{5}{9}$$

$$P(3600 - \frac{3}{2} \times 60 \leq X \leq 3600 + \frac{3}{2} \times 60) \geq \frac{5}{9}$$

$$P(3510 \leq X \leq 3690) \geq \frac{5}{9}$$

Donc si on prend un mètre cube, on a au moins 5 chances sur 9 pour que le nombre de vers soit compris entre 3510 et 3690.