
TD 4 de probabilités

1 TD4 : Distributions de probabilité à 2 dimensions

1.1 Exercice I

Une cuve d'essence d'une station-service est remplie au début de chaque semaine. Soit Y_1 la proportion de la capacité de la cuve disponible au début de la semaine ; cette quantité varie de semaine en semaine, en fonction des périodes de l'année. Soit Y_2 la proportion de la capacité de la cuve vendue par semaine. On observe que les v.a. Y_1 et Y_2 sont liées par la densité de probabilité $f(y_1, y_2) = 3y_1, 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1$ (et vaut 0 ailleurs).

1. Trouver la probabilité que moins de la moitié de la cuve soit disponible au début de la semaine et que plus du quart soit vendu dans la semaine.

1.2 Exercice II

On lance trois pièces équilibrées l'une après l'autre. Y_1 dénote le nombre de faces observées, et Y_2 la somme gagnée dans le jeu suivant : si la première face est observée sur la première pièce, on gagne 1 euro. Si elle est observée sur la deuxième ou troisième pièce, on gagne 2 ou 3 euros respectivement. Enfin, si aucune face n'est observée, on perd 1 euro.

1. Trouver la fonction de probabilité conjointe de Y_1 et Y_2 .
2. Quelle est la probabilité d'avoir strictement moins de 3 faces et qu'on gagne au plus 1 euro ?
3. Le jeu est-il rentable si on mise 1 euro ?

1.3 Exercice III

Neuf personnes sont candidates pour trois places. 4 sont mariées, 3 sont célibataires et 2 sont divorcées. Soit Y_1 le nombre de personnes mariées sélectionnées, et Y_2 le nombre de célibataires sélectionnés.

1. En supposant que les trois candidats sélectionnés sont choisis au hasard, trouver la distribution de probabilité conjointe de Y_1 et Y_2 .

2. Trouver les fonctions de distribution marginales de Y_1 et Y_2 .
3. Calculer $P(Y_1 = 1|Y_2 = 2)$.
4. Soit Y_3 , le nombre de divorcés parmi les trois sélectionnés. Calculez $P(Y_3 = 1|Y_2 = 1)$.

1.4 Exercice IV

Soit Y_1 et Y_2 la proportion de temps, sur une journée, pendant laquelle deux robots sont en activité. La fonction de densité conjointe de Y_1 et Y_2 est donnée par

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2 & \text{si } y_1, y_2 \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $P(Y_1 < \frac{1}{2}; Y_2 > \frac{1}{4})$.
2. Calculer $P(Y_1 + Y_2 \leq 1)$.

1.5 Exercice V

Un secrétariat attend deux coups de téléphone qui suivent tout deux une loi uniforme sur une période d'une heure. Ces deux appels sont indépendants l'un de l'autre.

1. Trouver la probabilité qu'ils arrivent dans la première demi-heure.
2. Trouver la probabilité qu'ils arrivent à moins de 5 minutes d'intervalle.

1.6 Exercice VI

Soit la distribution de probabilité conjointe de X et Y suivante

$X \setminus Y$	0	1
-1	$\frac{1}{3}$	0
0	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

1. Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?