
TD5 de probabilités

1 TD5 : Echantillonnage et théorème Central Limite

1.1 Exercice I

On souhaite mesurer la teneur en impuretés de lingots d'or. Pour cela, on sélectionne des lingots au hasard, et on mesure ce taux d'impuretés, on suppose que le taux d'impureté suit une loi normale. On sait que la variance du taux, à la sortie de l'atelier de fonderie, est de $0.4 \text{ mg}^2/\text{kg}^2$.

1. Si 10 mesures sont faites, trouver la probabilité que la moyenne de l'échantillon diffère de la moyenne réelle de moins de 0.5 mg/kg .
2. Combien de mesures doit-on faire pour assurer, avec une probabilité de 95%, que cette différence soit inférieure à 0.5 mg/kg ?

1.2 Exercice II

On souhaite déterminer le pH d'un sol (on rappelle que le pH mesure l'acidité ou l'alcalinité, et varie de 0 à 14). On sait que le pH en question est compris entre 5 et 8.

1. On réalise 40 mesures. Trouver la probabilité que la moyenne de l'échantillon diffère de moins de 0.2 du pH réel du sol.
2. On veut que la moyenne de l'échantillon diffère de moins de 0.1 de la valeur réelle avec une probabilité de 0.9. Combien de mesures doit-on faire?

1.3 Exercice III

Soient X_1, \dots, X_n des V.A. indépendantes, chacune de moyenne μ_1 et de variance σ_1^2 , et Y_1, \dots, Y_n , des v.a. indépendantes, chacune de moyenne μ_2 et de variance σ_2^2

1. Montrer que U satisfait les conditions du théorème Central Limite.

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$