Université Jean Monnet
Licence L3 Informatique

KERDONCUFF Tanguy
SEBAN Marc

Correction du TD 3 de probabilités

Table des matières

1 TD3 : Variables aléatoires continues

1.1 Exercice I

Le temps mis par les étudiants pour traiter complètement un sujet d'examen d'une heure est une v.a. dont la fonction de densité est

$$\begin{cases} cy^2 + y & \text{si} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver c pour que f soit une densité de probabilité.

   Solution: Le domaine de définition de Y est $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 &\iff \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 &(1.1)\\
&\iff \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathrm{d}t = 1 &(1.2)\\
&\iff \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 &(1.3)\\
&\iff \left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1 &(1.4)\\
&\iff \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1 &(1.5)\\
&\iff c = \frac{3}{2} &(1.6)
\end{aligned}$$

   On a bien $f_Y \geq 0$

2. Trouver F(y)

   Solution: Soit y $\in$ [0,1]

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t &(1.7)\\
&= \int_{0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t &(1.8)\\
&= \left[\frac{ct^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^y &(1.9)\\
&= \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{2} &(1.10)\\
&= \frac{1}{2}\left(y^3 + y^2\right) &(1.11)
\end{aligned}$$

Soit y < 0 : $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} 0\,\mathrm{d}t = 0$
Soit y > 1 : $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{y} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1$

3. Calculer F(-1), F(0) et F(1)

Solution:

$$F(-1) = 0 \tag{1.12}$$
$$F(0) = \frac{1}{2}\left(0^3 + 0^2\right) = 0 \tag{1.13}$$
$$F(1) = \frac{1}{2}\left(1^3 + 1^2\right) = 1 \tag{1.14}$$

Pour F(0) et F(1) on peut calculer avec 2 des formules de la question d'avant car F est dérivable donc continue.

4. Quelle est la probabilité qu'un étudiant finisse en moins d'une demi-heure ?

Solution: $P(Y \leq 0.5) = F(0.5) = \frac{1}{2}\left(0.5^3 + 0.5^2\right) = \frac{1}{2}(0.125 + 0.25) = \frac{3}{16}$

5. Sachant qu'un étudiant a besoin d'au moins un quart d'heure pour lire et comprendre le sujet, trouver la probabilité de terminer l'examen en plus d'une demi-heure.

Solution: On ne regarde que les élèves qui finissent le devoir au moins après un quart d'heure de partiel. Parmis ceux la, quel est la probabilité qu'un élèves finisse après une demi heure ?

$$P(Y > 0.5 | Y > 0.25) = \frac{P(Y > 0.5 \cap Y > 0.25)}{P(Y > 0.25)} \tag{1.15}$$
$$= \frac{P(Y > 0.5)}{P(Y > 0.25)} \tag{1.16}$$
$$= \frac{1 - P(Y \leq 0.5)}{1 - P(Y \leq 0.25)} \tag{1.17}$$
$$= \frac{1 - F(0.5)}{1 - F(0.25)} \tag{1.18}$$
$$= 0.846 \tag{1.19}$$
$$\tag{1.20}$$

1.2 Exercice II

Soit Y une v.a. de densité donnée par

$$\begin{cases} 0.2 & \text{si} \quad -1 \leq y \leq 0 \\ 0.2 + cy & \text{si} \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver c.

Solution: Le domaine de définition de Y est $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \iff \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad (1.21)$$

$$\iff \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} 0.2\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 0.2 + cy\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathrm{d}t = 1 \quad (1.22)$$

$$\iff \int_{-1}^{0} 0.2\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 0.2 + cy\,\mathrm{d}t = 1 \quad (1.23)$$

$$\iff [0.2y]_{-1}^{0} + \left[0.2y + \frac{cy^2}{2}\right]_0^1 = 1 \quad (1.24)$$

$$\iff (0.2 \times 0 - 0.2 \times -1) + (0.2 \times 1 - 0.2 \times 0) + (\frac{c}{2} \times 1 - \frac{c}{2} \times 0) = 1 \quad (1.25)$$

$$\iff 0.2 + 0.2 + \frac{c}{2} = 1 \quad (1.26)$$

$$\iff c = \frac{6}{5} \quad (1.27)$$

2. Trouver F(y)

Solution: Soit y $\in$ [-1,0]

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (1.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (1.29)$$

$$= \int_{-1}^{y} 0.2\,\mathrm{d}t \quad (1.30)$$

$$= [0.2t]_{-1}^{y} \quad (1.31)$$

$$= 0.2 \times y - 0.2 \times -1 \quad (1.32)$$

$$= 0.2y + 0.2 \quad (1.33)$$

Soit y ∈]0,1]

$$
\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t && (1.34)\\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t && (1.35)\\
&= \int_{-1}^{0} 0.2\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{y} 0.2 + ct\,\mathrm{d}t && (1.36)\\
&= [0.2t]_{-1}^{0} + \left[0.2t + \frac{6t^2}{10}ct\right]_{y}^{0} && (1.37)\\
&=(0.2 \times 0 - 0.2 \times -1) + (0.2 \times y - 0.2 \times 0) + (0.6 \times y^2 - 0.6 \times (0)^2) && (1.38)\\
&=0.2 + 0.2y + 0.6y^2 && (1.39)
\end{aligned}
$$

Soit y < -1 : $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} 0\,\mathrm{d}t = 0$
Soit y > 1 : $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{y} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 0.2 + 0.2 \times 1 + 0.6 \times 1^2 + 0 = 0.2 + 0.2 + 0.6 = 1$

3. Calculer F(-1), F(0) et F(1)

Solution:

$$
\begin{aligned}
F(-1) &= 0 && (1.40)\\
F(0) &= 0.2 \times 0 + 0.2 = 0.2 && (1.41)\\
F(1) &= 0.2 + 0.2 \times 1 + 0.6 \times 1^2 = 1 && (1.42)
\end{aligned}
$$

4. Calculer $P(0 \leq Y \leq 0.5)$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
P(0 \leq Y \leq 0.5) &= \int_{0}^{0.5} f(t)\mathrm{d}t && (1.43)\\
&= \int_{0}^{0.5} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t && (1.44)\\
&= \int_{\infty}^{0.5} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t && (1.45)\\
&=F(0.5) - F(0) && (1.46)\\
&=0.45 - 0.2 && (1.47)\\
&=0.25 && (1.48)
\end{aligned}
$$

5. Calculer $P(Y > 0.5|Y > 0.1)$.

Solution:

$$\begin{aligned}
P(Y > 0.5|Y > 0.1) =& \frac{P(Y > 0.5 \cap Y > 0.1)}{P(Y > 0.1)} && (1.49)\\
=& \frac{P(Y > 0.5)}{P(Y > 0.1)} && (1.50)\\
=& \frac{1 - P(Y \leq 0.5)}{1 - P(Y \leq 0.1)} && (1.51)\\
=& \frac{1 - F(0.5)}{1 - F(0.1)} && (1.52)\\
=& 0.71 && (1.53)\\
& && (1.54)
\end{aligned}$$

1.3 Exercice III

Les résultats d'un concours sont supposés être normalement distribués, avec moyenne de 78 et variance de 36.

1. Quelle est la probabilité pour un candidat d'avoir une note supérieure à 72 ?

Solution: On note X la V.A qui représente la note d'un candidat. $X \hookrightarrow N(78, 36)$. On pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la variable normal centré réduite.

$$P(X > 72) = P(Z > -1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

2. Un candidat est jugé très bon s'il est dans les 10% supérieurs. Quel résultat minimal doit-on alors obtenir pour mériter ce jugement ?

Solution: On cherche la note n tel que $P(X > n) = 0.1$

$$\begin{aligned}
P(X > n) = 0.1 &\iff P(Z \times \sigma + \mu > n) = 0.1 && (1.55)\\
&\iff P(Z > \frac{n - \mu}{\sigma}) = 0.1 && (1.56)\\
&\iff P(Z \leq \frac{n - \mu}{\sigma}) = 0.9 && (1.57)
\end{aligned}$$

On remarque que dans la table de la loi normal que une probabilité de 0.9 correspond à z = 1.28 ($P(Z \leq 1.28) = 0.9$). On résout l'équation

$$1.28 = \frac{n - \mu}{\sigma} \iff 1.28 \times 6 + 78 = n$$

. Donc $n = 85.68$. Au dessus de cette note la, c'est un très bon élève.

3. Quelle est, approximativement, la proportion des candidats qui ont une note supérieure d'au moins 5 points à celles des 25% les plus basses ?

Solution: (pareil que la question d'avant pour commencer) On cherche la note n tel que $P(X < n) = 0.75$

$$\begin{aligned} P(X < n) = 0.25 &\iff P(Z \times \sigma + \mu < n) = 0.25 && (1.58)\\ &\iff P(Z < \frac{n-\mu}{\sigma}) = 0.25 && (1.59)\\ &\iff P(Z \geq \frac{n-\mu}{\sigma}) = 0.75 && (1.60)\\ &\iff P(Z \leq -\frac{n-\mu}{\sigma}) = 0.75 && (1.61) \end{aligned}$$

Car la loi normal est symétrique
On remarque que dans la table de la loi normal que une probabilité de 0.75 correspond à z = 0.67 ($P(Z < 0.67) = 0.75$. On résout l'équation

$$0.67 = -\frac{n-\mu}{\sigma} \iff -0.67 \times 6 + 78 = n$$

Donc $n = 73,98$, 75% des élèves ont une note supérieur à 73,95. On cherche maintenant la probabilité d'avoir une note supérieur à $73,98 + 5 = 78,98$. On cherche $P(X > 78,98)$

$$\begin{aligned} P(X > 78,98) =& P(Z > \frac{78,98-\mu}{\sigma}) && (1.62)\\ =& P(Z > 0.16) && (1.63)\\ =& 1 - P(Z < 0.16) && (1.64)\\ =& 1 - 0.5635 && (1.65)\\ =& 0.4364 && (1.66)\\ & && (1.67) \end{aligned}$$

4. Si on sait qu'un candidat a obtenu plus de 72 points, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu plus de 84 points ?

Solution:

$$\begin{aligned}
P(X > 84|X > 72) =& \frac{P(X > 84 \cap X > 72)}{P(X > 72)} && (1.68)\\
=& \frac{P(X > 84)}{P(X > 72)} && (1.69)\\
=& \frac{P(\sigma \times Z + \mu > 84)}{P(\sigma \times Z + \mu > 72)} && (1.70)\\
=& \frac{P(Z > \frac{84-\mu}{\sigma})}{P(Z > \frac{72-\mu}{\sigma})} && (1.71)\\
=& \frac{P(Z > 1)}{P(Z > -1)} && (1.72)\\
=& \frac{1 - P(Z < 1)}{P(Z < 1)} && (1.73)\\
=& \frac{1 - 0.8413}{0.8413} && (1.74)\\
=& 0.1886 && (1.75)
\end{aligned}$$

Donc la probabilité qu'un candidat ait plus de 84 sachant qu'il a plus de 72 est de 0.1886.

1.4 Exercice IV

Le temps mis par le tram de la STAS pour aller de Bellevue à la Terrasse est uniformément distribué entre 50 et 70 minutes.

1. Quelle est la probabilité que ce trajet dure plus de 65 minutes, sachant qu'il a déjà pris plus de 55 minutes ?

Solution: On pose X la variable aléatoire qui modélise le temps mis par le tram de la STAS pour aller de Bellevue à la Terrasse. $X \hookrightarrow \mathbf{U}([50, 70])$. On cherche $P(X > 65|X > 55)$

$$\begin{aligned}
P(X > 65|X > 55) =& \frac{P(X > 65 \cap X > 55}{P(X > 55} && (1.76)\\
=& \frac{P(X > 65)}{P(X > 55} && (1.77)\\
=& \frac{1 - P(X < 65)}{1 - P(X < 55} && (1.78)\\
=& \frac{1 - F_X(65)}{1 - F_X(55)} && (1.79)\\
& && (1.80)
\end{aligned}$$

On a pour tout $x \in [50, 70]$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}$ et pour tout $x \notin [50, 70]$ $\quad f_X(x) = 0$.
On sait aussi que $F'_X = f_X$.
Pour tout $x < 50$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && (1.81)\\ &= \int_{-\infty}^{x} 0dt && (1.82)\\ &= 0 && (1.83) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [50, 70]$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && (1.84)\\ &= \int_{-\infty}^{50} f_X(t)dt + \int_{50}^{x} f_X(t)dt && (1.85)\\ &= \int_{-\infty}^{50} 0dt + \int_{50}^{x} \frac{1}{20}dt && (1.86)\\ &= 0 + [\frac{1}{20}t]_{50}^{x} && (1.87)\\ &= \frac{1}{20} \times x - \frac{1}{20} \times 50 && (1.88)\\ &= \frac{x-50}{20} && (1.89)\\ & && (1.90) \end{aligned}$$

Pour tout $x > 70$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && (1.91)\\ &= \int_{-\infty}^{50} f_X(t)dt + \int_{50}^{70} f_X(t)dt + \int_{70}^{x} f_X(t)dt && (1.92)\\ &= \int_{-\infty}^{50} 0dt + \int_{50}^{70} \frac{1}{20}dt + \int_{70}^{x} 0dt && (1.93)\\ &= 0 + [\frac{1}{20}t]_{50}^{70} + 0 && (1.94)\\ &= \frac{1}{20} \times 70 - \frac{1}{20} \times 50 && (1.95)\\ &= \frac{70-50}{20} && (1.96)\\ &= 1 && (1.97) \end{aligned}$$

Finalement on trouve $F_X(65) = \frac{65-50}{20} = 0.75$ et $F_X(55) = \frac{55-50}{20} = 0.25$

$$P(X > 65|X > 55) = \frac{1 - F_X(65)}{1 - F_X(55)} \tag{1.98}$$
$$= \frac{1 - 0.75}{1 - 0.25} \tag{1.99}$$
$$= \frac{0.25}{0.75} \tag{1.100}$$
$$= \frac{1}{3} \tag{1.101}$$