概率和期望

随机试验

- 随机试验:
- （1）不能预先确知结果
- （2）试验之前可以预测所有可能结果或范围
- （3）可以在相同条件下重复实验

- 样本空间：随机试验所有可能结果组成的集合
- 离散样本空间、无穷样本空间

随机事件

- 样本空间的任意一个子集称之为事件

- 事件发生：在一次试验中，事件的一个样本点发生

- 必然事件：样本空间全集
- 不可能事件：空集

事件的关系与运算

- 包含
- 相等
- 互斥
- 补
- 和
- 差
- 积

事件的运算律

- 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 对偶律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

概率

- 定义：为样本空间的每一个事件定义一个实数，这个实数称为概率。事件A的概率称为$P[A]$。

- 1、$P(A) \geq 0$
- 2、$\sum P(A) = 1$
- 3、设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件，则有
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

概率若干性质

- $P(\emptyset) = 0$
- 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相交，则$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
- 如果$A \subset B$，$P(B - A) = P(B) - P(A)$
- 更一般的，$P(B - A) = P(B) - P(AB)$
- $0 \leq P(A) \leq P(1)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

条件概率

- 则定义已知事件B发生时事件A发生的概率为$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

- 乘法法则：$P(AB) = P(A|B)P(B)$

条件概率性质

- $P(\emptyset|A) = 0$
- 设$B_1, \cdots, B_n$互不相容，则$P\left(\cup_{i=1}^{n} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{N} P(B_i|A)$
- $P\left(\bar{B}\middle|A\right) = 1 - P(B|A)$
- $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$

期望

- $E[f(X)] = \sum \quad f(x)P(X = x)$

- 定理：
- $E[c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots] = c_1E[X_1] + c_2E[X_2] + \cdots$
- 如果X_1, X_2独立，则$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2]$

- 期望的和=和的期望

Question 1

- 箱子里有三个1一个2，每次取一个数不放回
- 事件A：第一次取到1
- 事件B：第二次取到1
- 求$P(B|A)$

贝叶斯公式

- 设$B_1, B_2, \cdots, B_n$是样本空间的划分
- 则有
- $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum P(A|B_j)P(B_j)}$

Question 2

- 某电子设备厂所用的joy-con手柄是由三家制造商制造的，且有如下数据

手柄制造厂	次品率	提供的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

- 1、任取一个手柄，是次品的概率为多少
- 2、任取一只，若它是次品，则由每个厂制造的概率分别是多少

Question 3

- 对以往数据分析结果表明，当switch状态良好时，合格率为98%；当switch发生故障时，合格率为55%；当switch开机时，状态良好的概率是95%。已知某台switch开机的时候合格了，问该switch状态良好的概率是多少。

独立事件

- 如果$P(AB) = P(A)P(B)$
- 那么AB独立

- 不可能事件、必然事件和任何事件都是独立的

独立事件

- A, B独立的$P(B|A) = P(B)$

Question 4.

假设有 3 张形状相同的卡片，其中一张两面都是黑色，一张两面都是红色，另一张是一面红一面黑，随机取出一张放在桌上，朝上的面为红色，那么另一面是黑色的概率是多少？

Question 5.

n 个人按任一顺序依次抓阄，每个人抓完阄后立即打开，当某个人抓到“中”时，整个抓阄过程结束（后面的人就不必抓了）．问：此种抓阄方式是否公平，请说明理由.

Question 7.

一个人左右口袋里各放一盒火柴，每盒 n 支，每次抽烟时随机选一盒拿出一支用掉，由于习惯的原因，选右面口袋的概率是 $p > \dfrac{1}{2}$．问：下述两种情形的概率是否相等？试求概率的值.

（1） 到某次他发现取出的这一盒已经空了，这时另一盒恰有 m 支火柴.

（2） 到他用完某一盒时另一盒恰有 m 支火柴.

Question 8.

假设袋中有 a 个黑球，b 个白球，每次取出一个球，并将其换成黑球放回，记第 k 次取出的是黑球的概率为$P(B_k)$，求$P(B_2)$，$P(B_3)$；若已知第二次取出的是黑球，则第三次取出的也是黑球的概率是多少？是否等于$P(B_2)$？

Question 9.

26. 设男女两性人口之比为 51:49. 又设男人色盲率为 2% ,女人色盲率为 0.25% . 现随机抽到一个人为色盲,问"该人为男人"的概率是多少?

Question 10

- 在小葱和小泽面前有三瓶药，其中有两瓶是毒药，每个人必须喝一瓶
- 小葱和小泽各自选了一瓶药，小泽手速比较快将药喝了下去，然后就挂掉了
- 小葱想活下去，他是应该喝掉手上的这瓶，还是另外剩下的一瓶呢？

Question 11

- 小胡站在原点，手里拿着两枚硬币。抛第一枚硬币正面向上的概率为p，第二枚正面向上的概率为q。
- 小胡开始抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向x轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 接下来小胡继续抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向y轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 现在小胡想回来了，于是他开始抛第二枚硬币，如果小胡抛到正面小胡就向x轴的负方向走一步，否则小胡就向y轴的负方向走一步。
- 现在小胡想知道他在往回走的时候经过原点的概率是多少呢?

Question 12

- 我们可以枚举小胡在第一轮中走到的点(x, y)
- 小胡走到点(x, y)的概率$(1-p)^{x+y} \times p^2$
- 小胡从点(x, y)走回原点的概率
- $q^x \times (1-q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$

Question 12

- 所以最终的概率为
- $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{x+y}\times p^2 \times q^x \times (1-q)^y\times \frac{(x+y)!}{x!\times y!}$
- 不好求?
- 改变枚举量

Question 12

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{x+y} \times p^2 \times q^x \times (1-q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(1-p)^{i} \times p^2 \times q^j \times (1-q)^{i-j} \times \binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} \times p^2 \sum_{j=0}^{i} q^j \times (1-q)^{i-j} \times \binom{i}{j}$$

$$\binom{i}{j} = C_i^j = \frac{i!}{(i-j)! \times j!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} \times p^2$$

$$= p$$

为什么？

Problem 1

- 给出一个无向图，两个人初始在两个点上。当一个人在一个点i上的时候，每一次，他有p[i]的概率留在原位，有1−p[i]的概率等概率地选择直接连边的一个点走出去。当两个人在同一时刻走到同一个点，那么他们相遇，过程结束。现在求他们在每一个点相遇的概率。

- $n \leq 20$

Problem 1

- 将问题转换为期望次数

- f[i][j]表示在移动过程中该状态发生的期望次数
- 最后每个点的期望次数即为概率
- 高斯消元即可
- https://noip.ac/show_problem/3196

Problem 2

- N次挑战 容量为K的包
- 依次$1-N$进行N次挑战 第i个挑战成功率为p_i 属性为a_i
- 如果$a_i \geq 0$ 挑战成功则容量增加a_i
- 如果$a_i = -1$，则挑战成功会得到一个体积为1的物品
- 至少要挑战成功L次并且把所有得到的物品带走才算成功
- 问成功的概率
- $K \leq 2000, L \leq N \leq 200, -1 \leq a_i \leq 1000$

Problem 2

- Dp+空间优化
- F[i][j][k]
- 前i次成功j次 体积还剩k

- https://noip.ac/show_problem/3197

Problem 3

- 给定一棵树
- 每条边有一定通电的概率
- 每个点有一定充电的概率
- 问期望有多少个点能有电

- $N \leq 500000$

Problem 3

- 转化为求每个点通电的概率
- F[i]表示子树内部能够使得i通电的概率
- G[i]表示i能够通电的概率
- F[i]树形dp搞定
- G[i]再dfs一次搞定

- https://noip.ac/show_problem/3198

Problem 4

- N*M的格子
- 每次随机刷掉一个矩形
- 问K次之后期望刷掉了多少个格子
- N,M<=1000,K<=100

Problem 4

- 期望染的格子数=每个格子期望染的概率之和
- K次染一个格子的期望概率
- 补集转化
- https://noip.ac/show_problem/3199

Problem 5

- 检验矩阵A*B=C是否成立
- N<=1000

Problem 5

- A:N*N B:N*N C:N*N
- D:N*1 0和1组成的矩阵
- A*B=C
- (A*B)*D=C*D
- A*(B*D)=C*D
- 复杂度N^2
- https://noip.ac/show_problem/3200

Problem 6

- 给定平面上N个点
- 找到一个最小的圆覆盖住他们

- $N \leq 10^6$

Problem 6

- 随机化
- https://noip.ac/show_problem/3201

Problem 7

- N次操作，第i次操作成功的概率为p_i
- 成功记为1否则记为0
- 连续x个1会贡献x^3的分数
- 求期望分数

- $N \leq 10^5$

Problem 7

- $f[i]$表示结尾部分期望长度
- $g[i]$表示结尾部分长度平方和的期望
- $h[i]$表示结尾部分长度三次方和的期望

- $f[i] = (f[i-1]+1) \times p[i]$
- $g[i] = (g[i-1]+2 \times f[i-1]+1) \times p[i]$
- $h[i] = (h[i-1]+3 \times g[i-1]+3 \times f[i-1]+1) \times p[i]$
- https://noip.ac/show_problem/3202

Problem 8

- 给定一个排列
- 每次随机交换两个位置
- 问最后期望的逆序对数量

- $N \le 5 \times 10^5, k \le 10^9$

Problem 8

- 考虑给定数对(A, B)
- 如果A, B不在给定位置上，剩下每个位置的概率都相等
- 考虑$(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, C)$这七种关系之间的转移即可

- https://noip.ac/show_problem/3203

Problem 9

- 一个圆 均等被分为N个扇形 编号1-N（抽奖轮盘）
- 一开始每个位置都为0 主持人第i轮会将某个随机的长度为s[i] 的区域的数+1
- 在N轮结束之后 你需要选择两个位置（但注意你不知道这个时候的分数）
- 选择位置1之后主持人会告诉你这个位置的分数
- 你的目标是使得你的分数的和最大
- 问最大期望是多少
- N 300

Problem 9

- 第一次选择哪个位置无所谓 默认为1
- F[i][j][k] 表示 第i轮 第1位为j 第k位数字的期望
- G[i][j] 第i轮 第1位为j的概率
- G的转移考虑这一轮有没有覆盖住第一个位置
- F[i][j][k] 是由 f[i-1][j-1][k] 和 F[i-1][j][k]转移

- https://noip.ac/show_problem/3204

Problem 10

- 给定01序列
- 一个指针每次开始随机指向一个位置
- 每次该指针随机移动到一个位置
- 改变该位置的值
- 代价为两个位置之间的距离
- 求将整个序列变成全0或1的期望代价
- $N<=20$

Problem 10

- 按位置做高斯消元
- 状态：有a个位置和i一样 b代表ij是否一样 c代表指针是否在i的位置