计算几何

zhx

实数的计算

- 请，永远，不要，使用float
- 我们只有两种实数类型：
- Double
- Long double
- 一般情况使用double足够
- Double的读入： double rqy;scanf(“%lf”,&rqy);
- Long double的读入： long double a;double b;scanf(“%lf”,&b);a=b;
- Long double的输出： printf(“%lf\n”,a);

实数的计算

- 实数判断大小关系以及是否相等
- 请永远自己手写sign函数
- Int sign(double x) {
- if (fabs(x)<=eps) return 0;
- If x>0 return 1;
- Else return -1;
- }
- 当x=0，返回0，x>0，返回1，x<0，返回-1.

实数的计算

- a>b => sign(a-b)>0
- a<b => sign(a-b)<0
- a==b => sign(a-b)==0

实数的计算

- 各种你需要的函数，cmath里面都有
- Exp,tan,cos,sin,acos,fabs,pow
- 适用类型为double
- 如果想使用long double并且使用cmath里面的函数
- Powl,fabsl
- 依次类推

三角形

- 设三角形三边长度为a, b, c.
- 半周长：$P = (a + b + c) \div 2$
- 面积：$S = a \times H_a \div 2 = ab\sin(\angle C) = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$
- 中线：$M_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \div 2 = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos(\angle A)} \div 2$
- 角平分线：$T_a = \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} \div (b + c) = 2bc\cos(\angle A \div 2) \div (b + c)$
- 高线：$H_a = b\sin(\angle C)$

三角形

- 内切圆半径：$r=\frac{S}{P}=\mathrm{a}\sin(\angle B\div 2)\sin(\angle C\div 2)\div\sin\left((\angle B+\angle C)\div 2\right)=4R\sin(\angle A\div 2)\sin(\angle B\div 2)\sin(\angle C\div 2)=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)\div P}=P\tan(\angle A\div 2)\tan(\angle B\div 2)\tan(\angle C\div 2)$
- 外接圆半径：$R=abc\div 4S=a\div 2\sin(\angle A)$

圆

- 弧长：$l = rA$
- 弦长：$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r\sin(\angle A \div 2)$
- 弓形高：$h = r - \sqrt{r^2 - a^2 \div 4} = r\left(1 - \cos(\angle A \div 2)\right)$

向量

- 表示方向的一个东西
- 两个属性：
- 方向
- 长度

- 二维表示方法(x, y)
- 三维表示方法(x, y, z)

向量的运算

- 向量加减法：$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x1 \pm x2, y1 \pm y2)$
- 向量数乘：$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

向量的运算

- 向量的点积：
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$
- $a \cdot b = |a||b| \times \cos\theta$
- 其中，$|a|$叫做a的模长
- $|a| = \sqrt{a \cdot a}$
- θ是两向量之间的夹角

向量的运算

- 向量的叉积（二维）：
- $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$
- $a \times b = |a||b| \times \sin\theta$
- 叉积的意义：
- 数值代表面积
- 符号代表方向
- 角度为第一个向量顺时针转到第二个向量的角度

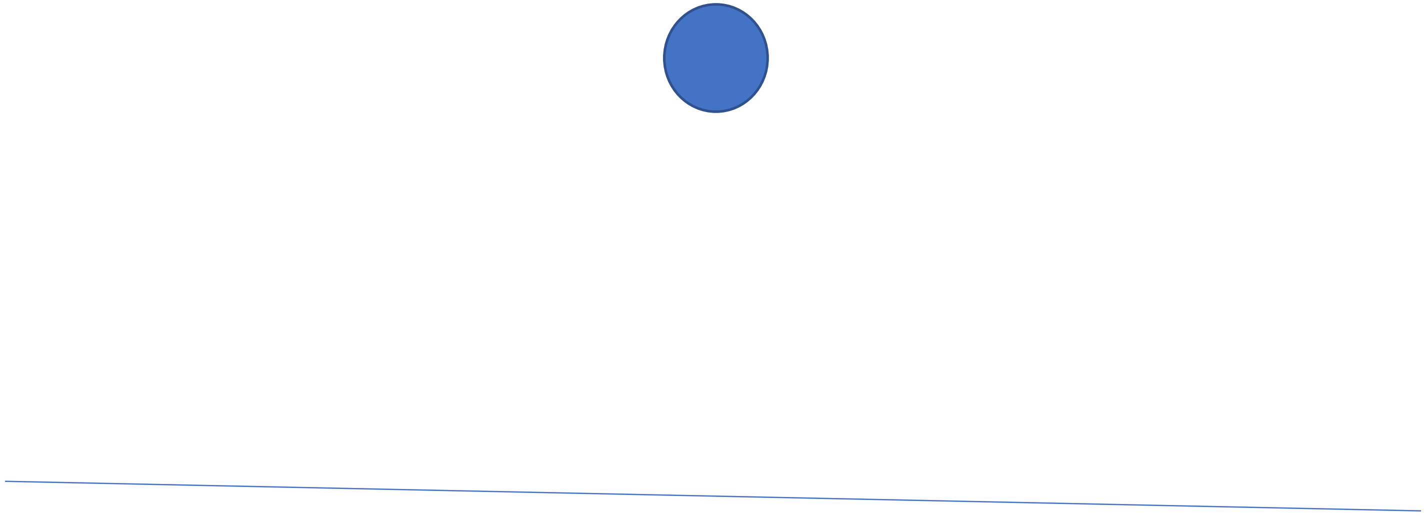
直线

- 解析法：$y = kx + b$
- 双点法：用两个点表示一条直线
- 点向法：用一个点加一个向量表示一条直线
- 推荐第三种
- 如何找到一个与当前直线垂直的直线？

点与线的关系

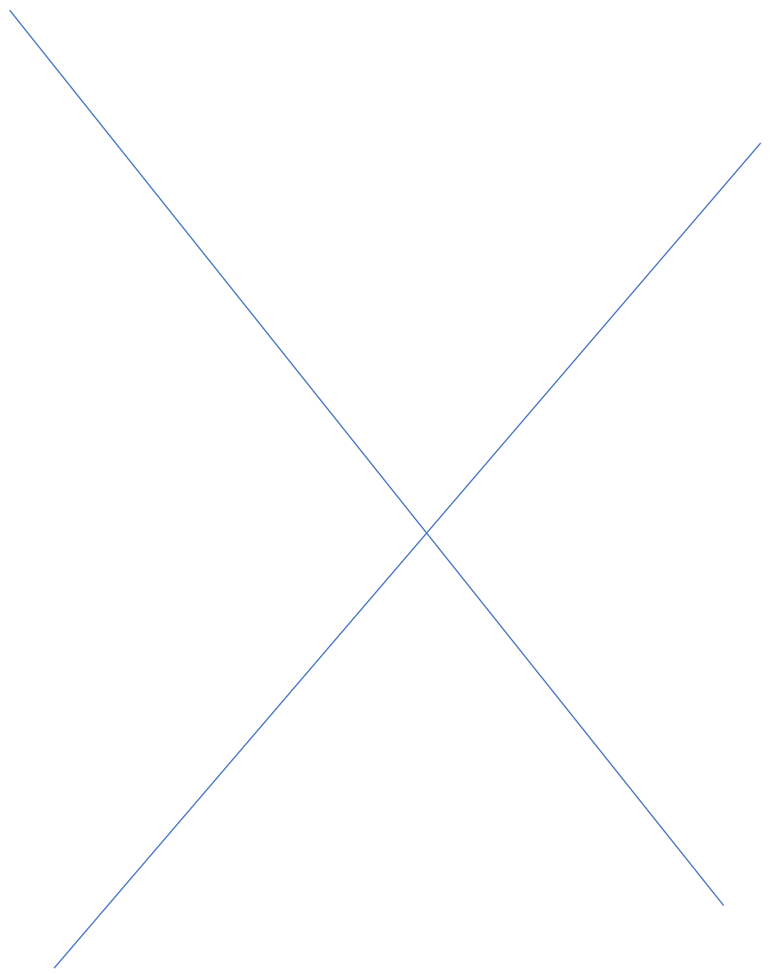
- 点与直线的关系
- 点与射线的关系
- 点与线段的关系

点到直线的距离



直线与直线

- 两条直线的交点?
- 两条线段的交点?



三角形

- 三角形的角平分线?
- 中线?
- 垂线?

多边形

- 一坨点的 顺序排列
- 凸多边形和凹多边形:
- 是否有角大于180度

多边形

- 如何计算一个点是否在多边形内部?
- 上闭下开

多边形

- 如何计算多边形的面积?

凸包

- 给定点集S，最小的能把所有点包住的凸多边形

水平序Graham扫描算法

- 对顶点按x为第一关键字，y为第二关键字进行排序。
- 准备一个空栈，并将前两个点压入栈。
- 对于每一个顶点A，只要栈中还有至少两个顶点，记栈顶为T，栈中第二个为U。若$\overrightarrow{UT} \times \overrightarrow{TA} \leq 0$，则将$T$弹出。重复此过程。
- 直到上一步不再弹出顶点，将A压入栈。扫描完一遍之后得到凸包的下凸壳。
- 将点集倒过来再进行一次，得到凸包的上凸壳，两个凸壳组合起来就得到了凸包。

旋转卡壳

- 如何计算N个点中距离最远的两个点的距离

半平面交

- 什么是半平面?
- 什么是半平面交?
- 怎么求半平面交?

- 角度排序+双端队列扫描

圆

- 圆的表示方法：$(x, y), r$
- 圆与直线的交点？
- 圆与圆的交点？

向量的运算

- 向量的叉积（三维）：
- $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) =$
- $(y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$
- 本质上是一个垂直于前两个向量所在平面的第三个向量
- 其数值为面积
- 符号为方向
- $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

向量的运算

- 混合积
- $(a, b, c) = (a \times b) \cdot c$
- $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

三维直线

- 解析法
- 两点法
- 点向法

异面直线的距离

- 两条直线上距离最小的两点之间的距离
- 距离线一定垂直于两条直线
- 距离线又称为两直线的公垂线段

异面直线的距离

- 叉积后点积

三维直线交点

- 基本同二维

平面

- $Ax + By + Cz + D = 0$
- 点向法：
- 点加法向量

平面

- 点到平面距离?
- 直线与平面交点?
- 平面与平面的交线?

扫描线

- 矩形面积并、三角形面积并
  - 从所有顶点做竖直直线，排序后得到一族扫描线
  - 相邻扫描线间的答案容易计算

- 给N个互不相交的圆，求出每个圆被多少圆包含。

辛普森积分

- $S=\frac{b-a}{6}\times\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$
- 自适应积分：
- 如果左半部分+右半部分=全部
- 那么停止递归

Problem 1

- 凸四边形
- 三边长度一样
- 给出这三边的中点
- 问原四边形?

Problem 1

- 垂直平分线
- 解方程
- https://noip.ac/show_problem/3221

Problem 2

- 给一个多边形和半圆，求交

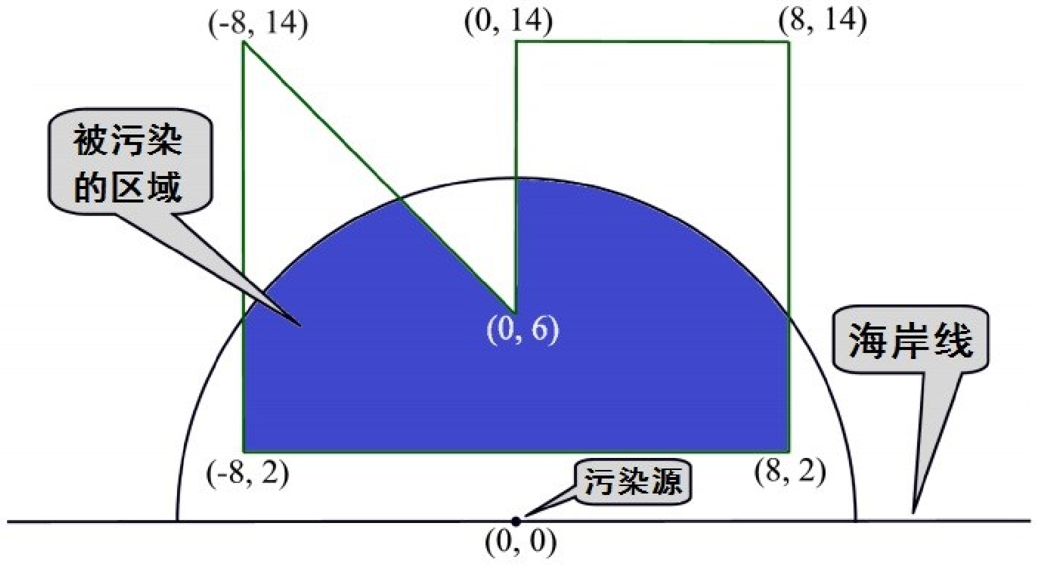


图1：对于样例输入的图示

Problem 2

- 辛普森积分
- https://noip.ac/show_problem/3222

Problem 3

- N种合金 其中每种合金由三种金属组成 比例为$a_i : b_i : c_i$
- M次询问新给定的某种合金能否用N种合金组合而成

Problem 3

- 凸包
- https://noip.ac/show_problem/3219

Problem 4

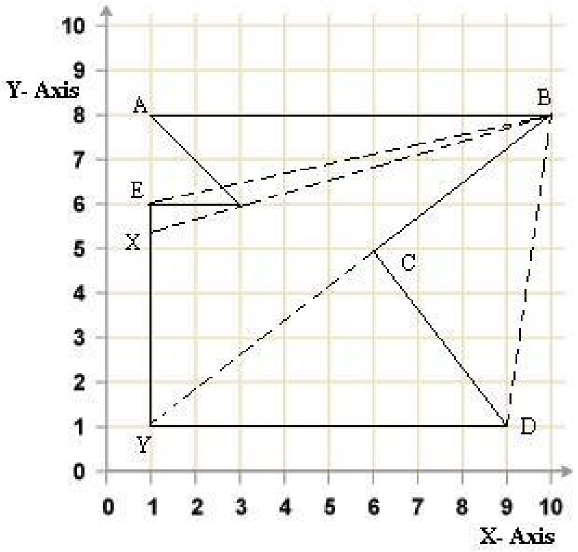
- 龙卷风在两个点(xt_1, yt_1)和(xt_2, yt_2)间以速度vt匀速来回运动。追风人从(xw_1, yw_1)出发，向(xw_2, yw_2)以速度vw匀速运动。求运动过程中追风人与龙卷风的**最短距离**。

Problem 4

- 以追风人为参考系。那么龙卷风的轨迹是一条折线。问题转化为点到折线的最短距离。
- 分为两部分：点到一堆点的最短距离，点到一堆线段的最短距离。
- 对于点，可以分为两组，每组点共线。
- 对于线段，也可以分为两组，每一组是一些平行的线段。
- 分别计算最短距离，取最小的即可。
- https://noip.ac/show_problem/3220

Problem 3

- 给一个N个点的简单多边形，它有一条边AB平行于x轴，且其余所有点都在AB的一侧。求AB上有多少的整点能够看到所有的点。
- $N \leq 1000$，坐标范围10^6。



Problem 3

- 设AB在x轴上且其余所有点都在x轴上方，对所有边按逆时针定向。
- 如果有水平向右的向量，则无解。
- 其余向量可**延长**或**反向延长**与AB求交点，分别更新答案区间的左右端点。
- 其实就是要在那条向量表示的半平面内部。

Problem 4

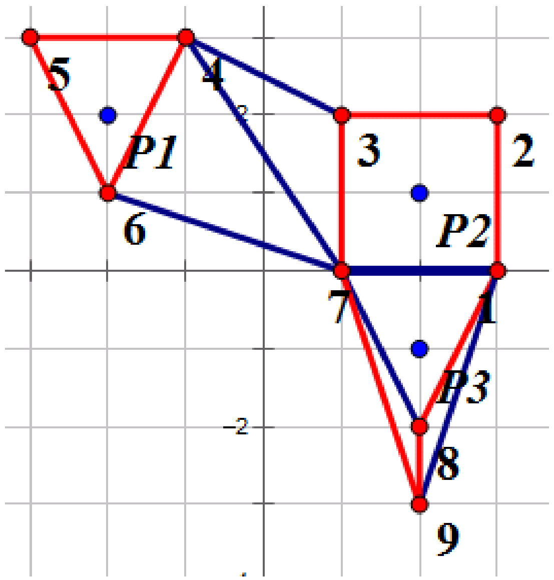
- 一枚炸弹的轰炸区域是一个简单多边形。扔了两枚炸弹，求一共炸掉了多大面积的区域。
- 多边形的点数不超过500。

Problem 4

- 答案等于两个多边形的面积和减去交的面积，问题转化为求这两个多边形的交的面积。
- 对两个多边形都进行**有向面积**式的三角剖分，枚举每一对三角形，计算它们交集的面积以及对答案的贡献。
- 计算三角形的交的面积时，仿照凸多边形求交的办法。
- 贡献需要同时考虑两个三角形的符号，**负负得正**。

Problem 5

- 平面上有P个古迹需要保护，要修一些篱笆把古迹围起来。能作为篱笆端点的点有N个，有M对端点间可以修篱笆，保证这些能修的篱笆最多只在顶点相交。对每个篱笆，都有一个不同的花费。要求计算至少围住1个、2个、…、P个古迹的最小花费。
- $N \leq 100, P \leq 10$



Problem 5

- 考虑计算出从一个点出发的、能恰好包围住一个集合的古迹的最小花费。
- 状态为(v,S)，从$(u,\emptyset)$出发进行广搜。
- 用**射线法**判断一个古迹是否被围住。即在广搜的过程中，S中的古迹应满足从其往当前所走的**轮廓**作射线（不妨为水平向右），交点的个数是奇数个。
- 最后进行一次状态压缩动态规划即可。
- https://noip.ac/show_problem/3224

Problem 6

- 考虑一条长为L的电缆，两端各有N个和M个数据包，每个数据包有一个发出时间t_i和在电缆上的最大运动速度$maxv_i$和最小运动速度 $minv_i$ 。我们可以在一个时刻从电缆的一端（不妨设为左端）发送一个恒定速度V的探测器，这个探测器的效率定义为这个探测器的运动时间中可能与所有数据包重合的时间占的比例。求在$[S,T]$内发出的探测器的平均效率。
- 数据包不超过5000个。

Problem 6

- 以**时间**和**位移**（相对一个端点）为维度建立坐标轴。那么每个数据包的运动可以用一条直线来表示，由于数据包的速度是在一个区间里面的，所以每个数据包**可能**的运动是一族直线，即**两条平行直线对应半平面的交**。
- 对于探测器，速度固定，但是出发时间是一个区间，这个仍然可以用两条平行直线对应半平面的交来表示其可能的运动。
- 考虑在矩形框$[S,T]\times[0,L]$内，所有半平面的交即表示探测到的时间和位移的**所有可能**。
- 半平面交的面积与$(T-S)\times L$的比值即为答案。

Problem 7

- 给定平面上N个互不相交的多边形
- 可能不凸
- M次询问某个点在几个多边形内部
- 10^5
- 1、离线
- 2、在线

Problem 7

- 可持久化平衡树
- +
- 扫描线

Problem 8

- $F(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i$
- 其中$0 \le \mu_i \le 1$且和为1
- 已知$F(x) = c$
- 给定x, y, c
- 求$F(y)$的最大值和最小值

Problem 8

- 求凸包即可
- https://noip.ac/show_problem/3223