浅谈OI中的数学问题

北京大学 罗煜翔

例题与基础知识

例题1.

- 给定n个实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$。
- 求$\sum_{1\le i<j\le n} \sin(a_i + a_j)\, a_i a_j$。
- 相对或绝对误差不超过10^{-6}。
- $1 \le n \le 10^6, 0 \le a_i < \pi$。

复数

- 形式：$z = a + ib$。定义$\mathrm{Re}z = a$，$\mathrm{Im}z = b$。
  - 几何意义：复平面上的点。
- 四则运算：根据$\mathrm{i}^2 = -1$推导。
  - 几何意义：平移，旋转，位似。
- 指数形式：$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta}$。
  - 乘方与开方。
  - 三角函数计算。
- 实现：
  - `std::complex`。
  - 手动实现。

例题1.题解

- 注意到$a_i a_j \sin(a_i + a_j) = \mathrm{Im}(a_i e^{\mathrm{i}a_i} \cdot a_j e^{\mathrm{i}a_j})$。
- 记$b_i = a_i e^{\mathrm{i}a_i}$，于是只需要计算$\sum_{1 \le i < j \le n} b_i b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} b_i\right) b_j$。
- 于是只需要求出b_i的前缀和即可。

例题2

- 给定一个正整数n，并将$0,1,\cdots,n-1$ 染上了红色或蓝色。
- 你需要求有多少个元素在$0,1,\cdots,n-1$中的序列$a_1,a_2,\cdots,a_{2021}$，使得$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}\equiv 0 \pmod n$,且序列中同时有红色和蓝色的数字。
- 有m次修改，每次改变一个数的颜色。你需要在每次修改后求出答案，对998244353取模输出。
- $1\le m,n\le 10^6$。

多项式

- 形式：$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$。定义$[x^i]f(x)=a_i$，$\deg f(x)=n$。
- 四则运算。
- 整除，同余，因式分解，最大公因式。

生成函数

- 对于一个给定的序列$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，定义其生成函数为形式幂级数$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$。
- 指数生成函数。
- 乘法及其组合意义。

例题2.题解

- 设红色的生成函数为$r(x)$，蓝色的生成函数为$b(x)$，则要求的是$[x^0]\left(\left(r(x)+b(x)\right)^{2021}-r(x)^{2021}-b(x)^{2021} \bmod x^n-1\right)$。
- 设$\left(r(x)+b(x)\right)^{2021}-r(x)^{2021}-b(x)^{2021}=Q(x)(x^n-1)+R(x)$，注意到$r(x)+b(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$，且左式有因式$r(x)+b(x)$，则$R(x)$有因式$r(x)+b(x)$，从而$R(x)=k\left(r(x)+b(x)\right)$。带入$x=1$得$k=\frac{\left(r(1)+b(1)\right)^{2021}-r(1)^{2021}-b(1)^{2021}}{r(1)+b(1)}$。
- 而k也就是$R(x)$的常数项。

例题3.

- 定义一个图是好的，如果它的边可以分解成若干个没有公共边的简单圈的并。
- 现在给定一个n个点的图，问有多少种方案把它的顶点分成两个不交的集合V_1, V_2，使得V_1, V_2的导出子图都是好的。关于998244353取模。
- $n \le 2000$。

矩阵与线性方程组

- 矩阵：$n \times m$列的数表。
- 矩阵乘法：第一个矩阵的行向量与第二个矩阵的列向量两两内积。
- 线性方程组：$Ax = B$。
  - 解的结构。
  - 高斯消元法。
  - $\mathbb{F}_2$上的压位。

例题3.题解

- 不难发现好图相当于所有点度数为偶数。
- 用01变量x_i表示第i个点是否分在V_i中。
- 则对于顶点i，有方程$\bigoplus_{(i,j)\in E}\left(x_i \oplus x_j \oplus 1\right) = 0$。
- 解这个线性方程组即可。

例题4.

- 给定n个互不相同的正整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$。
- 你需要求最小的非负整数m，使得存在n个$0\sim m$的非负整数$b_1, b_2, \cdots, b_n$，且$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) = 1$。
- 你还需要求出此时满足条件的b_i的解的总数量并求出一组解。解的总数量关于998244353取模后输出。
- $1 \le a_i \le 5\times10^5, 6 \le n \le 10^5$。

max卷积

- 形式：$f_i = \sum_{\max(j,k)=i} a_j \cdot b_k$。
- 解法：记$\hat{f}$表示f的前缀和，则$\hat{f}_i = \hat{a}_i \cdot \hat{b}_i$。
- min卷积
- 高维情形。
  - 高维前缀和与差分。
  - 常见例子：并卷积、gcd卷积。

例题4.题解

- 使用贪心的方法不难证明$m = 1$是足够的，于是考虑如何计数。
- 问题相当于求$\{a_i, a_i + 1\}$的gcd卷积的1处值，于是只需要做高维后缀和，求乘积，再求高维差分。

例题5.

- 给定n个非负整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$。
- 对每个$1 \sim n$中的i，求$\sum_{a_j \neq a_i} \frac{1}{a_i - a_j}$。对998244353取模。
- $1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq a_i < 998244353$。

形式导数

- 定义：对$f(x)=\sum_i a_i x^i$，定义$f'(x)=\sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1}$。
- 四则运算。
- 高阶形式导数：$f^{(0)}(x)=f(x), f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$。
- 形式泰勒展开：$f(x+c)=\sum_i \frac{f^{(i)}(c)}{i!} x^i$。
- 形式不定积分：对 $f(x)=\sum_i a_i x^i$，定义 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sum_i \frac{a_i x^{i+1}}{i+1}+C$ 。
    - 利用形式导数运算律得到相关公式。

例题5.题解

- 首先将a_i去重，设有k_i个a_i。
- 令$f(x)=\sum_i \frac{k_i}{x-a_i}$，则相当于对所有$a_i$计算$f(x)-\frac{k_i}{x-a_i}$带入$a_i$的值。
- 设$f(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$，注意到$F(x)-\frac{k_iG(x)}{x-a_i}=F(a_i)+F'(a_i)(x-a_i)-k_iG'(a_i)-k_i\frac{G''(a_i)}{2}(x-a_i)+(x-a_i)^2P(x)$与$G(x)=G'(a_i)(x-a_i)+(x-a_i)^2Q(x)$。则只需要计算$\frac{F'(a_i)-\frac{k_iG''(a_i)}{2}}{G'(a_i)}$即可，这可以通过多点求值解决。

例题6.

- 给定平面上n个点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$。
- 现在进行如下m次如下操作：
  1. 将区间$[l,r]$中的点关于直线$ax+by=c$反射（保证a,b不全为0）。
  2. 将区间$[l,r]$中的点绕(a,b)逆时针旋转θ。
  3. 将区间$[l,r]$中的点以向量(a,b)平移。
  4. 将区间$[l,r]$中的点关于以(a,b)为圆心，r为半径的圆反演（保证(a,b)与区间中任意点距离不小于10^{-3}）。
- 求最后每个点的坐标，相对或绝对误差不超过10^{-6}。
- $1\le n,m\le 10^5, 0\le |a|,|b|,|c|\le 10^3, 1\le r\le 10, 0\le\theta<2\pi$。

几何变换

- 几何变换群。
- 仿射变换，射影变换，莫比乌斯变换等。
  - 变换公式。
  - 不变量。
- 应用：将新问题转换为已知问题，提取出新问题中的代数特征。

例题6.题解

- 维护区间莫比乌斯变换即可。

例题7.

- 给定一个周长为L的圆和圆上n条长度分别为$c_1, c_2, \cdots, c_n$的弧。
- L, c_i均为正整数。
- 现在将这些弧随机放到圆的某一位置，问这些弧覆盖整个圆周的概率是多少。对998244353取模。
- $1 \le n \le 10, 1 \le c_i < L \le 50$。

拉格朗日插值公式

- 对于n次多项式$f(x)$和互不相同的$a_0, a_1, \cdots, a_n$，有$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$。

例题7.题解

- 考虑将圆周等分为mL份，并规定圆弧的端点只能位于等分的端点处。则当m趋于无穷时，就能得到原题的答案。
- 注意到如果考虑方案数，则答案是关于m的n次多项式。于是只需要考虑$m = 1,2,\cdots,n+1$的情况即可。
- 此时可以用状态压缩的动态规划解决。

试试看！

题1.

- 给定一棵n个点的树，每个顶点上有一个$1\sim n$的正整数。
- 每次操作可以交换树上一条边两个端点的数。
- 请你解决如下四个问题：
  1. 给定树的形态和树顶点上数的初始值和目标值，判断是否存在操作方式将初始值变为目标值。
  2. 给定树顶点上的数的初始值和目标值，求所有n^{n-2}棵带标号无根树中，可以通过操作将初始值变为目标值的树的数量。
  3. 给定树顶点上的数的初始值和$n-k$个顶点的目标值，对于剩下k个没有给定目标值的n^k种目标值的可能性，求问题2的答案之和。
  4. 给定树$n-l$个顶点的初始值和$n-k$个顶点的目标值，对于剩下l个没有给定初始值的n^l种初始值的可能性，求问题3的答案之和。
- 问题2,3,4中的答案关于998244353取模。
- $1\le n\le 500$。

题1.提示

- 不难发现操作可以任意的交换树上的权值，于是问题只需要考虑权值集合是否相同。

题2.

- 当n是奇数时，可以通过如下方法构造一个幻方：
  - 先将1写在第一行中间，之后从小到大一次填写$k(k=2,3,\cdots,n^2)$：
    - 若$k-1$在第一行但不在最后一列，则将k填在最后一行，$k-1$所在列的右一列；
    - 若$k-1$在最后一列但不在第一行，则将k填在第一列，$k-1$所在行的上一行；
    - 若$k-1$在第一行最后一列，则将k填在$k-1$的正下方；
    - 若$k-1$既不在第一行也不在最后一列，如果$k-1$的右上方未填数则将k填在$k-1$的右上方，否则填在$k-1$的正下方。
- 现在给定一个奇数n和正整数x_1,x_2,y_1,y_2，求用上述方法构造的$n\times n$幻方中，以(x_1,y_1)为左上角，(x_2,y_2)为右下角范围内幻方所填数的和。
- 共T次询问，每次n不一定相同。
- $1\le n\le 10^9, 1\le x_1\le x_2\le n, 1\le y_1\le y_2\le n, 1\le T\le n$。

题2.题解

- 首先考虑如何快速求一个点的值。
- 之后根据公式分类讨论或利用其它算法求解。

题3.

- 给定三个正整数n, a, b，求$\sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{a^i}{b} \right\rfloor$。关于998244353取模。
- $1 \le n, a \le 10^{18}, 1 \le b \le 10^{6}$。

题3.提示

- 将取整拆成取模，然后寻找取模后的循环节。

题4.

- 给定一个n个点完全图，每个点和边上都有一个非负整数权值p_i或$p_{i,j}$。这个完全图有一个特殊性质：对于图中每一个简单环，都存在相邻两条边权值相同。
- 初始时有一些点是黑的，其他点是白的。每次以p为概率分布随机选择一个点或者一条边，反转这个点或这条边连接的两个点的颜色。
- 问期望几次后可以将所有点变成黑的。
- $1 \le n \le 100, 1 \le \sum p_i + \sum p_{i,j} \le 10^4, p_i \ge 1$。

题4.提示

- 引理1.
- 引理2.
- 根据这两个引理设计动态规划解决。

题5.

- 在一个平面直角坐标系中，有若干个点。定义在 y 轴右的为红点，其余点为蓝点。
- 若一条直线经过至少两个给定点，且这条直线一侧没有红点，另一侧没有蓝点，则称这条直线是好的。
- 初始时没有点，现在依次往平面中添加n个点(x_i, y_i)，每次添加后询问当前有多少好的直线。
- $1 \le n \le 10^5, 0 \le x_i, y_i \le 10^9$，保证没有重复点。

题5.提示

- 不难发现题目的要求和凸包具有一定的相似性。
- 事实上，做适当的射影变换可以转化为凸包问题。

题6.

- 给定N,s,t,x，对所有$1 \le n,m \le N$且n,m是完全平方数，求$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{x^{i+j}}{i+j+1}\binom{n}{i}\binom{m}{j}s^i t^j$。对998244353取模。
- $1 \le N \le 10^5, 0 \le s,t,x < 998244353$。

题6.题解

- 将原问题转化为积分形式，借助分部积分公式给出固定n的递推式。

题7.

- 给定一个长度为n，元素为$1 \sim m$正整数的序列。
- 你需要找这个序列的两个不相交的长度相同的非空子序列，使得他们的元素和相同。
- $1 \leq n, m \leq 4 \times 10^5$。

题7.提示

- 分析无解时n的最大值。

题8.

- 给定一个素数p和二次函数$y = ax^2 + bx$在$1, 2, \cdots, n$处的值模p的结果排序后的结果。保证排序后的数互不相同。
- 请你求出一个满足条件的二次函数或说明无解。
- $2 \le p \le 10^{18}, 1 \le n \le 5\times10^5$。

题8.提示

- 利用原序列的和与平方和得到方程组求解。
- 注意对方程组退化的情况讨论。

题9.

- 有n个桶和$2n-1$个球，其中第i个桶可以装前$2i-1$个球，一个桶只能装一个球。
- 问有多少种方案取m个桶，再取m个球，再讲这些球分别放在一个桶里。对998244353取模。
- 共T次询问。
- $1 \le m \le n \le 10^7, 1 \le T \le 10^5$。

题9.提示

- 分析桶的选择不难得到递推式，分析小数据找规律归纳证明。

题10.

- 有一个序列$a_1, a_2, \cdots, a_n$。最初，$a_i = i^k$，其中k是一个正整数。
- 现在对这个序列进行m次操作，在第i次操作中：
  - 将这个序列分成两个序列$a_1, a_2, \cdots, a_{b_i}$和$a_{b_i+1}, \cdots, a_n$。
  - 将这两个序列等概率随机归并成一个新的序列，成为新的序列a。
- 最后有q次询问，第i次询问a_{c_i}的期望大小是多少，对998244353取模。
- $1 \leq n \leq 10^9, 1 \leq m, q \leq 10^5, 1 \leq k \leq 10, 0 \leq b_i \leq n, 1 \leq c_i \leq n$。

题10.提示

- 考虑分析第一次操作后的结果，做适当假设将和式转化为特定形式而快速求和。

谢谢大家！