## 7.1 직교행렬

▣ **정의 1**

■ 정방행렬 $A$의 전치행렬이 역행렬과 같을 때 $A$를 **직교행렬(orthogonal matrix)**이라 한다.

즉, $\boxed{A^{-1} = A^T} \Leftrightarrow \boxed{AA^T = A^TA = I}$

Ex $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$가 직교행렬임을 보여라.

[풀이]

예제 2 회전행렬과 대칭(반사)행렬은 직교행렬이다.

[풀이]

$R^2$에서 반시계방향으로 $\theta$ 만큼 회전시키는 회전행렬은 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

□ **정리 7.1.1**

$A$가 $n \times n$ 행렬일 때 다음 명제들은 동등하다.

(a) $A$가 직교행렬이다.

(b) $A$의 행벡터가 유클리드 내적을 갖는 $R^n$에서 정규직교집합을 구성한다.

(c) $A$의 열벡터가 유클리드 내적을 갖는 $R^n$에서 정규직교집합을 구성한다.

[증명] (a) $\Leftrightarrow$ (b)

$A$의 행벡터를 $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_n$라 하자.

$$\Rightarrow \quad AA^T = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{r}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1^T & \mathrm{r}_2^T & \cdots & \mathrm{r}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_1 & \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_2 & \cdots & \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_n \\ \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_1 & \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_2 & \cdots & \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathrm{r}_n \cdot \mathrm{r}_1 & \mathrm{r}_n \cdot \mathrm{r}_2 & \cdots & \mathrm{r}_n \cdot \mathrm{r}_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad AA^T = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_2 = \cdots = \mathrm{r}_n \cdot \mathrm{r}_n = 1 \\ i \neq j \text{ 일 때 } \mathrm{r}_i \cdot \mathrm{r}_j = 0 \end{array}$$

□ **정리 7.1.2**

(a) $A$ : 직교행렬 ⇒ $A^{-1}$ : 직교행렬

(b) $A$, $B$ : 직교행렬 ⇒ $AB$ : 직교행렬

(c) $A$ : 직교행렬 ⇒ $\det(A) = 1$ 또는 $\det(A) = -1$

[증명]

▣ **정의 1**

▪ $A$가 직교행렬이고 $T_A : R^n \to R^n$이 $A$의 행렬변환일 때

$T_A$를 $R^n$ 상의 **직교연산자(orthogonal operator)**라 한다.

□ **정리 7.1.3**

$A$가 $n \times n$ 행렬일 때 다음 명제들은 동등하다.

(a) $A$가 직교행렬이다.

(b) $R^n$의 모든 $\mathbf{x}$에 대해 $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

(c) $R^n$의 모든 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$에 대해 $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

[증명]

**[Note]**

◆ 직교연산자는 $\begin{cases} \text{벡터의 길이를 변화시키지 않는다.} \\ \text{벡터 사이의 사잇각을 변화시키지 않는다.} \\ \text{벡터 사이의 거리를 변화시키지 않는다.} \end{cases}$

[예] 예제 2의 회전행렬, 대칭(반사) 행렬

□ **정리 7.1.4**

■ $V$ : $n$차원 내적공간, $S$ : $V$의 정규직교기저,

$(\mathrm{u})_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(\mathrm{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

(a) $\|\mathrm{u}\| = \|\mathrm{u}\|_V = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

(b) $d(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = d(\mathrm{u}, \mathrm{v})_V = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

(c) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

□ **정리 7.1.5**

■ $V$ : 유한차원 내적공간,

$P$ : $V$의 정규직교기저에서 $V$의 다른 정규직교지저로의 전이행렬(기저변환행렬).

$\Rightarrow$ $P$는 직교행렬.

[증명] $V$를 $n$ 차원 벡터공간이고 $V$의 정규직교기저를 $B$, $B'$이라 하고, $P = P_{B' \to B}$라 하자.

$\Rightarrow$ 일반적으로 $\|\mathrm{u}\|_V$ ($V$에서 놈) $= \|[\mathrm{u}]_{B'}\| = \|[\mathrm{u}]_B\| = \|P_{B' \to B}[\mathrm{u}]_{B'}\|$

임의의 $\mathrm{x} \in R^n$에 대해 $[\mathrm{u}]_{B'} = \mathrm{x}$인 $\mathrm{u}$가 존재한다.

$\therefore$ $\|\mathrm{x}\| = \|[\mathrm{u}]_{B'}\| = \|[\mathrm{u}]_B\| = \|P_{B' \to B}[\mathrm{u}]_{B'}\| = \|P\mathrm{x}\|$

$\Rightarrow$ 정리 7.1.3 $P$는 직교행렬.

## 7.2 직교대각화

▣ **정의 1**

- $A$와 $B$가 정방행렬이라 하자. 다음 관계를 만족하는 직교행렬 $P$가 존재하면

  $A$와 $B$는 **직교닮음(orthogonally similar)**이라고 한다.

$$P^{-1}AP = B \qquad \Leftrightarrow \qquad P^TAP = B$$

  $A$가 어떤 대각행렬 $D$와 직교닮음일 때 즉, $P^TAP = D$( 또는 $P^{-1}AP = D$)이면

- $A$는 **직교대각화 가능(orthoganally diagonalizable)**하다고 하고,
- $P$는 $A$를 **직교대각화한다(orthogonally diagonalize)**고 한다.

[Note]

◆ $A$ : 직교대각화 가능 $\quad\Rightarrow\quad$ $A$ : 대칭행렬.

$\because\quad P^TAP = D \quad$ : $P$는 직교행렬, $D$는 대각행렬

$\Rightarrow\quad A = PDP^T$

$\therefore\quad A^T =$

□ **정리 7.2.1**

$A$가 $n \times n$ 행렬일 때 다음 명제들은 동등하다.

(a) $A$가 직교대각화 가능하다.

(b) $A$가 $n$개의 고유벡터인 정규직교집합을 갖는다.(즉, 만들 수 있다.)

(c) $A$가 대칭행렬이다.

[증명]

| |
|---|
| □ **정리 7.2.2**<br>$A$ : 대칭행렬<br>(a) $A$의 고유값은 모두 실수이다.<br>(b) 서로 다른 고유공간의 고유벡터는 직교한다. |

[증명] (b)

❒ $n \times n$ **대칭행렬** $A$**의 직교대각화 하기.**

$\boxed{\text{단계 1}}$ $A$의 고유공간의 기저를 구한다.

$\boxed{\text{단계 2}}$ 고유공간의 각 기저에 그람-슈미트 과정을 이용하여 각 고유공간의 정규직교기저를 구한다.

$\boxed{\text{단계 3}}$ 행렬 $P$를 단계2에서 만든 벡터를 열로 하는 행렬이라 한다. 이 행렬이 $A$를 직교대각화한다. 이때 대각행렬 $D = P^TAP$의 대각선에 위치한 고유값의 순서는 $P$에서 대응하는 고유벡터의 순서와 같다.

$\boxed{\text{예제 1}}$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$를 직교대각화하는 행렬 $P$를 구하라. 또 $A = PDP^T$ 로 표현하라.

[풀이]

## 7.3 이차형식

▣ **정의**

$R^n$에서 $x_1, x_2, \ldots, x_n$은 변수이고 $a_1, a_2, \ldots, a_n$은 상수일 때

- $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ : $R^n$에서 **일차형식(linear form)**
- $a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+(x_i \neq x_j$인 모든 형태의 $a_kx_ix_j$ 항) : $R^n$에서 **이차형식(quadratic form)**

여기서 $a_kx_ix_j$ 형태의 항 : **혼합항**

따라서 $R^2$ 상의 이차형식 : $a_1x_1^2+a_2x_2^2+2a_3x_1x_2$ --(*)

$R^3$ 상의 이차형식 : $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+2a_4x_1x_2+2a_5x_1x_3+2a_6x_2x_3$ --(**)

(*) $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ 일 때 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{x}^TA\mathrm{x}$

(**) $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ 일 때 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{x}^TA\mathrm{x}$

- 일반적으로 $A$가 $n\times n$ 대칭행렬, $\mathrm{x}$가 $n\times 1$ 변수 열벡터 일 때 $R^n$에서 이차형식 :

$Q_A(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^TA\mathrm{x}$ $\quad ( = \mathrm{x}\cdot A\mathrm{x} = A\mathrm{x}\cdot\mathrm{x} )$ : $A$에 연관된 이차형식

**[Note]**

◆ $A$ : 대각행렬

$$\Rightarrow \quad \mathrm{x}^TA\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$$

: 혼합항이 없다.

예제 1 <이차 형식을 행렬표기법으로 표현하기>

다음 이차형식을 행렬표기법 $\mathrm{x}^TA\mathrm{x}$으로 나타내어라. 여기서 $A$는 대칭행렬이다.

(a) $2x^2+6xy-5y^2$ (b) $x_1^2+7x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$

[풀이]

❒ 이차형식과 관련된 문제

문제 1. $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 $R^2$ 또는 $R^3$ 상의 이차형식일 때 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = k$는 어떤 곡선 또는 곡면을 표현하는가?

문제 2. $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 $R^n$ 상의 이차형식일 때, 모든 $\mathrm{x} \neq \mathbf{0}$에 대해 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 양의 값을 갖는 $A$의 조건은?

문제 3. $\mathrm{x}$가 $\|\mathrm{x}\| = 1$인 조건일 때 $R^n$ 상의 이차형식 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$의 최댓값과 최솟값은 무엇인가?

■ $R^n$에서 변수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$를 새로운 변수 $y_1, y_2, \ldots, y_n$로 표현하자.

행렬 $P$에 대해 $\mathrm{x} = P\mathrm{y}$를

- $P$가 가역행렬이면, $\mathrm{x} = P\mathrm{y}$ : **변수변환(change of variables)** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{y} = P^{-1}\mathrm{x}$
- $P$가 직교행렬이면, $\mathrm{x} = P\mathrm{y}$ : 직**교변수변환(orthogonal change of variables)** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{y} = P^T\mathrm{x}$

직교변수변환 $\mathrm{x} = P\mathrm{y}$를 이용 $\Rightarrow$ $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = (P\mathrm{y})^T A(P\mathrm{y}) = \mathrm{y}^T(P^T AP)\mathrm{y}$

$B = P^T AP$라 하면 $\Rightarrow$ $B$ : 대칭행렬

$\therefore$ 새로운 이차형식 $(\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = )\mathrm{y}^T B\mathrm{y}$를 얻는다.

◆ $A$가 대칭행렬 $\Rightarrow$ 직교대각화하도록 $P$를 선택

$\Rightarrow$ $P^T AP = D$ : 대각행렬

직교변수변환 $\mathrm{x} = P\mathrm{y}$를 이용

$$\Rightarrow \quad \mathrm{x}^T A\mathrm{x} = \mathrm{y}^T D\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

□ **정리 7.3.1 [주축정리(principal axes theorem)]**

◆ $A$ : $n \times n$ 대칭행렬

$\Rightarrow$ 이차형식 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$를 혼합항이 없는 이차형식 $\mathrm{y}^T D\mathrm{y}$로 변환할 수 있는 직교변수변환이 존재한다.

즉, $P^T AP = D$ 일 때

$\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = \mathrm{y}^T D\mathrm{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 이고,

이때 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ : $P$의 연속적인 열을 구성하는 고유벡터에 대응하는 $A$의 고유값.

예제 2 이차형식 $Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$의 혼합항을 제거하는 직교변수변환을 구하고, $Q$를 새로운 변수에 관하여 표현하라.

[풀이]

**[Note] 원뿔곡선**

$R^2$에서 $a$, $b$, $c$가 모두 0은 아니다.

■ $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ : **원뿔곡선** (원, 타원, 쌍곡선, 포물선)

- $d=e=0 \quad \Rightarrow \quad ax^2+2bxy+cy^2+f=0$ : **중앙원뿔곡선** --(1)
- $b=0 \quad \Rightarrow \quad ax^2+cy^2+f=0$ : **표준위치에 있는 중앙원뿔곡선** --(2)

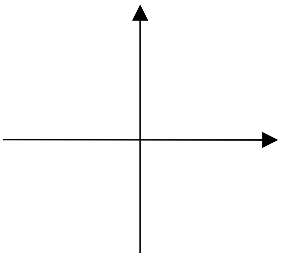
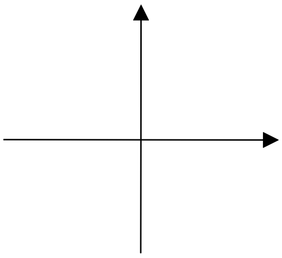
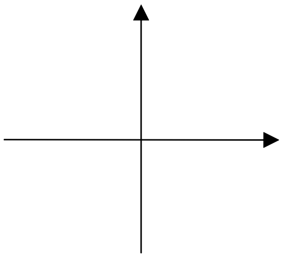
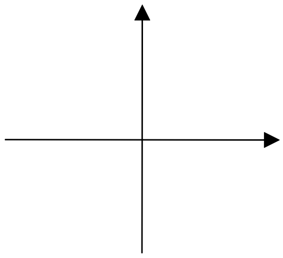
◆ (1), (2)에서 $k=-f$라 하면

(1) : $ax^2+2bxy+cy^2=k \quad \Leftrightarrow \quad (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k$ --(*)

(2) : $ax^2+cy^2=k \quad \Leftrightarrow \quad (x \quad y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k$ --(**)

**[Note]** 표준위치에 있는 중앙원뿔곡선 ( $a \neq 0$ , $c \neq 0$ 일 때 ) $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$

① $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ② $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=-1$

$\alpha \geq \beta$ $\alpha \leq \beta$

장축의 길이 : 장축의 길이 : 주축의 길이 : 주축의 길이 :

단축의 길이 : 단축의 길이 :

**[Note] 이차곡면**

$R^3$에서 $a$, $b$, $c$가 모두 0은 아니다.

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \quad : \quad \text{이차곡면}$$

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \quad : \quad \text{표준위치에 있는 중앙이차곡면}$$

**[Note]**

- $R^2$에서 원뿔곡선 (*)와 (**) 식은 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$로 표현된다.
- $ax^2+2bxy+cy^2=k$ 에서 $b=0$이면 표준위치에 있는 중앙원뿔곡선
  $b \neq 0$이면 곡선은 회전된 위치에 있다. $\Rightarrow$ 혼합항을 제거할 수 있다.

예제 3 원뿔곡선의 방정식이 $5x^2-4xy+8y^2-36=0$일 때 혼합항을 제거하는 변환식을 찾고, 표준위치에 있는 원뿔곡선이 어떤 곡선인지 판별하여라.

[풀이]

▣ **정의 1**

이차형식 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$는

- $\mathrm{x} \neq 0$인 모든 벡터에 대하여 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} > 0$ 이면 **양한정(양의 정부호 positive definite)**
- $\mathrm{x} \neq 0$인 모든 벡터에 대하여 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} < 0$ 이면 **음한정(음의 정부호 negative definite)**
- $\mathrm{x} \neq 0$에 대하여 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} > 0$ 이기도 하고 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} < 0$ 이기도 하면 **부정(indefinite)**

- $\mathrm{x} \neq 0$인 모든 벡터에 대하여 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} \geq 0$ 이면 **반양한정(준 양의 정부호 positive semidefinite)**
- $\mathrm{x} \neq 0$인 모든 벡터에 대하여 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} \leq 0$ 이면 **반음한정(준 음의 정부호 negative semidefinite)**

[Note]

위의 정의는 행렬 $A$에 대한 용어로도 쓰인다.

◆ 즉 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$의 부호에 따라 $A$는 양한정(양의 정부호), 음한정(음의 정부호), 부정이다.

□ **정리 7.3.2**

$A$ : 대칭행렬

(a) $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 양한정(양의정부호)[반양한정(준양의정부호)] $\Leftrightarrow$ $A$의 모든 고유값이 양수(양수 또는 0)

(b) $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 음한정(음의정부호)[반음한정(준음의정부호)] $\Leftrightarrow$ $A$의 모든 고유값이 음수(음수 또는 0)

(c) $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$가 부정 $\Leftrightarrow$ $A$의 고유값 중 적어도 하나는 양수, 적어도 하나는 음수

[증명] $A$ : 대칭행렬 $\Rightarrow$ 직교대각화 가능. 즉 $A = PDP^T$

$\mathrm{x} = P\mathrm{y}$라 하면

$$\Rightarrow \quad \mathrm{x}^T A\mathrm{x} = \mathrm{y}^T D\mathrm{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

예제 4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$일 때 양한정(양의 정부호), 반양한정(준양의 정부호), 음한정(음의 정부호), 반음한정(준양의 정부호), 부정인지 판별하라.

[풀이]

□ **정리 7.3.3**

$A$는 $2\times2$ 대칭행렬이다.

(a) $A$가 양한정(양의 정부호) $\Rightarrow$ $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = 1$ : 타원

(b) $A$가 음한정(음의 정부호) $\Rightarrow$ $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = 1$ : 그래프를 갖지 않는다.

(c) $A$가 부정 $\Rightarrow$ $\mathrm{x}^T A\mathrm{x} = 1$ : 쌍곡선

[증명]