4.1 실벡터공간

▣ **정의 1**

V는 덧셈과 스칼라 곱 두 연산을 가지는 개체들의 집합이다.

- 덧셈(addition) : V의 임의의 한 쌍의 개체 u와 v에 대해 합 $\mathrm{u}+\mathrm{v}$를 연관시키는 규칙
- 스칼라곱 : V의 임의의 개체 u와 임의의 스칼라 k에 대해 스칼라곱 $k\mathrm{u}$를 연관시키는 규칙

다음 모든 공리가 V의 모든 개체 u, v, w와 모든 스칼라 k, m에 대해 만족 될 때 V를 **벡터공간**(vector space)이라 하고 V의 개체를 **벡터**(vector)라 부른다.

1. $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$이면 $\mathrm{u}+\mathrm{v} \in V$: **덧셈에 대한 닫힘성**
2. $\mathrm{u}+\mathrm{v} = \mathrm{v}+\mathrm{u}$
3. $(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w} = \mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})$
4. V의 모든 개체 u에 대해 $\mathrm{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathrm{u} = \mathrm{u}$를 만족하는 개체 $\mathbf{0}$이 V에 존재한다.
   이 $\mathbf{0}$을 V의 **영벡터**(zero vector)라 한다.
5. V의 모든 개체 u에 대해 $\mathrm{u}+(-\mathrm{u}) = (-\mathrm{u})+\mathrm{u} = \mathbf{0}$를 만족하는 개체 $-\mathrm{u}$이 V에 존재한다.
   이 $-\mathrm{u}$를 u의 **음**(negative of u)라 한다.
6. k가 임의의 스칼라이고 u가 V의 개체이면 $k\mathrm{u} \in V$: **스칼라곱에 대한 닫힘성**
7. $k(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$
8. $(k+m)\mathrm{u} = k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$
9. $k(m\mathrm{u}) = (km)\mathrm{u}$
10. $1\mathrm{u} = \mathrm{u}$

예제 1 $V=\{\mathbf{0}\}$일 때 모든 스칼라 k에 대해 $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$로 정의한다.

$\Rightarrow$ V는 벡터공간이다 [$V=\{\mathbf{0}\}$: **영벡터공간**(zero vector space)]

예제 2 R^n의 원소 $\mathrm{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathrm{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$와 스칼라 k에 대해

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{u}+\mathrm{v} &= (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \cdots\ u_n+v_n) \\ k\mathrm{u} &= (ku_1,\ ku_2,\ \cdots,\ ku_n) \end{aligned}\right\}$$ 로 정의한다.

$\Rightarrow$ R^n는 벡터공간이다.

이때 영벡터 : $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$,

u의 음 : $-\mathrm{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

예제 4 V는 모든 2×2 행렬의 집합이고, $\mathrm{u}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$와 스칼라 k에 대해

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix},\qquad k\mathrm{u}=\begin{pmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{pmatrix}$$ 로 정의한다.

$\Rightarrow$ V는 벡터공간 [V를 M_{22}로 나타낸다.]

[풀이]

예제 5 V : 모든 $m\times n$ 행렬들의 집합

$\Rightarrow$ 행렬의 덧셈과 스칼라 곱셈의 행렬연산에 대해 V는 벡터공간

이 벡터공간을 M_{mn}으로 나타낸다.

예제 6 $V = F(-\infty, \infty) = \{f : (-\infty, \infty) \to R\ ;\ f$ 는 함수$\}$

$\mathrm{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x)$가 V의 원소이고 k가 임의의 스칼라 일 때 $\mathrm{f}+\mathbf{g}$와 $k\mathrm{f}$를

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{f}+\mathbf{g})(x) &= f(x)+g(x)\\ (k\mathrm{f})(x) &= kf(x)\end{aligned}\right\}\text{로 정의한다.}$$

$\Rightarrow$ V는 벡터공간이다.

[풀이]

예제 7 $V = R^2$이고, $\mathrm{u} = (u_1, u_2)$, $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$와 스칼라 k에 대해

$\mathrm{u}+\mathrm{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2)$, $k\mathrm{u} = (ku_1, 0)$로 정의하자.

$\Rightarrow$ V는 벡터공간이 아니다.

[풀이]

예제 8 $V = (0, \infty)$: 양의 실수 집합

u, $v \in V$와 스칼라 k에 대해 $u+v = uv$, $ku = u^k$로 정의하자.

$\Rightarrow$ V는 벡터공간이다.

[풀이]

□ **정리 4.1.1**

V는 벡터공간이고 $\mathrm{u}\in V$, k는 스칼라.

(a) $0\mathrm{u} = \mathbf{0}$

(b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $(-1)\mathrm{u} = -\mathrm{u}$

(d) $k\mathrm{u} = \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $k = 0$ 또는 $\mathrm{u} = \mathbf{0}$

4.2 부분공간

▣ **정의 1**

V : 벡터공간, $W \subset V$.

■ W가 V 상에서 정의된 덧셈과 스칼라 곱셈에 대하여 그 자체로 벡터공간이 될 때 W는 V의 **부분공간(subspace)**이라 한다.

[Note]

◆ V는 벡터공간이고 $W \subset V$

$\Rightarrow$ 공리 1, 4, 5, 6을 제외한 모든 공리는 당연히 성립한다.

□ **정리 4.2.1**

V : 벡터공간, $W \subset V$, ($W \neq \varnothing$)

■ W는 V의 부분공간 $\Leftrightarrow$ (a) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$이면 $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$

(b) k가 임의의 스칼라이고 $\mathbf{u} \in W$이면 $k\mathbf{u} \in W$

예제 1 V는 임의의 벡터공간이고 $W = \{\mathbf{0}\}$

$\Rightarrow$ V는 V의 부분공간이다

W는 V의 부분공간이다

예제 2 (1) 원점을 지나는 직선은 R^2의 부분공간이다.

(2) 원점을 지나는 직선은 R^3의 부분공간이다.

[풀이]

예제 3 원점을 지나는 평면은 R^3의 부분공간이다.

[풀이]

예제 4 R^2의 부분집합 $W = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$은 R^2의 부분공간이 아니다.

[풀이]

예제 5 M_{nn}의 부분공간의 예

$n \times n$ 대칭행렬의 집합, $n \times n$ 대각행렬의 집합

$n \times n$ 상삼각행렬의 집합 $n \times n$ 하삼각행렬의 집합

예제 7 $C(-\infty, \infty)$: 구간 $(-\infty, \infty)$에서 x에 대해 정의된 연속함수의 집합

$\Rightarrow$ 4.1절의 $F(-\infty, \infty)$의 부분공간

예제 9/10

- P_∞ : 다항식의 집합 $\Rightarrow$ $F(-\infty, \infty)$의 부분공간
- P_n : 최고차가 n차 이하인 다항식의 집합 $\Rightarrow$ $F(-\infty, \infty)$의 부분공간

☐ **정리 4.2.2**

▪ $W_1,\ W_2, \ldots, W_r$: 벡터공간 V의 부분공간들 $\Rightarrow$ $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$: V의 부분공간

[증명]

☐ **정리 4.2.3**

▪ n 개의 변수를 갖는 동차 연립방정식 $A\mathrm{x} = 0$의 해집합은 R^n의 부분공간이다.

[증명]

▣ **정의**

▪ $A\mathrm{x} = 0$의 **해공간** : 동차 연립방정식 $A\mathrm{x} = 0$의 해집합

예제 16 해집합을 찾고 부분공간임을 확인하여라. 또 부분공간은 무엇을 나타내는가?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[풀이]

4.3 생성집합

▣ **정의 1**

$v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ 이고, $k_1, k_2, \ldots, k_r$: 스칼라

w $\in V$가 다음과 같이 표현될 때 : $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$

- w를 벡터 $v_1, v_2, \ldots, v_r$의 **선형결합(일차결합/linear combination)**이라 한다.
- 스칼라 $k_1, k_2, \ldots, k_r$을 선형결합의 **계수(coefficient)**라 부른다.

□ **정리 4.3.1**

- $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$: 벡터공간 V의 부분집합.

(a) W : S 안의 벡터들의 모든 선형결합(일차결합)의 집합 ⇒ W는 V의 부분공간

(b) (a)의 집합 W는 S의 모든 원소를 포함하는 V의 가장 작은 부분공간이다.

[증명]

▣ **정의**

S : 공집합이 아닌 V의 부분집합

- S 안의 벡터들의 모든 선형결합으로 이루어진 V의 부분공간을 S의 **생성(span of S)**이라 한다.

$S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$이면 S의 생성은 $\text{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ 또는 $\text{span}(S)$로 표시한다.

$$\text{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_r\} = \{ k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_r w_r \mid k_1, k_2, \cdots k_r \in R \}$$

예제 1 R^n의 표준단위벡터(표준기저벡터)

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$은 R^n을 생성한다.

∵ 임의의 벡터 $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in R^n$는 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$ 로 표현된다.

따라서, $\text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = R^n$

예제 2

- R^2에서 $v \neq 0$는 시점이 원점인 벡터 ⇒ $\text{span}\{v\}$는 원점을 지나는 직선
- R^3에서 $v \neq 0$는 시점이 원점인 벡터 ⇒ $\text{span}\{v\}$는 원점을 지나는 직선
- R^3에서 $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$는 서로 평행이 아닌 시점이 원점인 벡터 ⇒ $\text{span}\{v_1, v_2\}$는 원점을 지나는 평면

예제 3

- $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, ..., x^n\}$

  $\because$ p $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n \in P_n$은 $1, x, x^2, ... x^n$의 선형결합으로 표현된다.

▶ Q. 1. R^n의 부분집합 S와 벡터 v $\in R^n$에 대해, v 는 S의 원소들의 선형결합인가?

2. R^n의 부분집합 S가 R^n을 생성하는가?

예제 4 (1) w = (9, 2, 7)은 u = (1, 2, −1), v = (6, 4, 2)의 선형결합인가?

(2) w′ = (4, −1, 8)은 u = (1, 2, −1), v = (6, 4, 2)의 선형결합인가?

[풀이]

예제 5 $\mathrm{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathrm{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathrm{v}_3 = (2, 1, 3)$이 벡터공간 R^3을 생성하는가?

[풀이]

예제 6 각자!!!

□ **정리 4.3.2**

$S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_r\}$와 $S' = \{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, ..., \mathrm{w}_r\}$: 벡터공간 V의 부분집합

- $\text{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_r\} = \text{span}\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, ..., \mathrm{w}_r\}$ 이기 위한 필요충분조건은

  S의 각 벡터가 S'의 벡터들의 선형결합이고, S'의 각 벡터가 S의 벡터들의 선형결합이 되는 것

4.4 선형독립(일차독립)

▣ 정의 1/정리 4.4.1

$S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_{2,}\ ..., \mathrm{v}_r\}$: 벡터공간 V의 부분집합

벡터방정식 $k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_r\mathrm{v}_r = \mathbf{0}$ 은

적어도 하나의 해 $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ ...,\ k_r = 0$ 을 갖는다.

- 이것을 **자명해(trivial solution)**이라 한다.
- 만약 이것이 단 하나의 해이면, S는 **선형독립(일차독립)집합(linearly independent set)**이라 한다.
- 만약 자명해 이외의 다른 해가 있다면 S는 **선형(일차)종속집합(linearly dependent set)**이라 한다.

[Note] 예제 1 $\mathrm{e}_1 = (1,0,0,\ ...,0),\ \mathrm{e}_2 = (0,1,0,\ ...,0),\ ...,\ \mathrm{e}_n = (0,0,0,\ ...,1)$은 R^n 내에서 선형독립이다.

[풀이]

예제 2 $\mathrm{v}_1 = (1,\ -2,\ 3),\ \mathrm{v}_2 = (5,\ 6,\ -1),\ \mathrm{v}_3 = (3,\ 2,\ 1)$는 선형독립인가 선형종속인가?

[풀이]

[Note] 예제 4 $1,\ x,\ x^2, ...\ x^n$은 P_n 내에서 선형독립집합임을 보여라.

[풀이]

예제 5 $\mathrm{p}_1 = 1-x,\ \mathrm{p}_2 = 5+3x-2x^2,\ \mathrm{p}_3 = 1+3x-x^2$이 P_2 내에서 선형독립인가 선형종속인가?

[풀이]

□ **정리**

(a) S : 선형종속 $\Leftrightarrow$ S 안의 벡터 중 적어도 하나를
S 안의 다른 벡터들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

(b) S : 선형독립 $\Leftrightarrow$ S 안의 어떠한 벡터도 S 안의 다른 벡터들의 선형결합으로 표시할 수 없다.

Ex (1) R^3에서 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$는 선형독립이다. 따라서 $\mathbf{k}$는 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$의 선형결합으로 나타낼 수 없다.

(2) 예제 2 에서 $\mathrm{v}_1 = (1,\ -2,\ 3)$, $\mathrm{v}_2 = (5,\ 6,\ -1)$, $\mathrm{v}_3 = (3,\ 2,\ 1)$는 선형종속

따라서 적어도 하나의 벡터는 다른 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

□ **정리 4.4.2**

(a) 영벡터를 포함하는 유한집합은 선형종속이다.

(b) $\{\mathrm{v}\}$가 선형독립 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{v} \neq \mathbf{0}$

(c) $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$가 선형독립 $\Leftrightarrow$ 이들 벡터 중의 어느 벡터도 다른 벡터의 스칼라배로 되지 않는다.

[증명]

Ex (1) R^3 에서 $\mathrm{v}_1 = (2,\ 0,\ -1)$과 $\mathrm{v}_2 = (-4,\ 0,\ 2)$ 는 선형(독립, 종속)이다.

(2) P_2 에서 $\mathrm{p}_1 = 3 - x^2$과 $\mathrm{p}_2 = 2 - x^2$ 은 선형(독립, 종속)이다.

[Note] R^2, R^3에서 선형독립

- R^2, R^3에서 두 벡터가 선형독립 $\Leftrightarrow$ 두 벡터가 동일 직선 상에 있지 않다.
- R^3에서 세 벡터가 선형독립 $\Leftrightarrow$ 세 벡터가 동일 평면 상에 있지 않다.

□ **정리 4.4.3**

- $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$가 R^n 상의 벡터의 집합이고 $r > n$ $\Rightarrow$ S는 선형종속이다.

4.5 좌표와 기저

▣ **정의 1**

$S = \{v_1, v_{2,} \ldots, v_n\}$: 벡터공간 V의 부분집합

- S가 다음 두 조건을 만족하면 S를 V**의 기저(basis)**라 한다.

(a) S는 선형독립이다.
(b) S는 V를 생성한다. 즉 $V = \text{span}(S)$

[Note] 예제 1

- R^n (상)의 **표준기저(standard basis for** R^n**)**

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

[Note] 예제 2

- P_n (상)의 **표준기저(standard basis for** P_n**)**

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = x^2, \quad \ldots, \quad p_n = x^n$$

예제 3 $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$, $v_3 = (3, 3, 4)$가 R^3의 기저임을 보여라.

[풀이]

예제 4 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 벡터공간 M_{22}의 기저임을 보여라.

: 이 기저는 M_{22}의 **표준기저**이다.

[풀이]

[Note]

- 영벡터 공간은 기저가 없는 공간이다.(영벡터 공간의 기저는 $\varnothing$로 정의한다.)

▣ **정의**

- 유한개의 벡터집합으로 생성될 수 있는 벡터공간을 **유한차원(finite-dimensional) 공간**이라 한다.
- 유한개의 벡터집합으로 생성될 수 없는 벡터공간을 **무한차원(infinite-dimensional) 공간**이라 한다.

□ **정리 4.5.1 [기저표현의 유일성]**

- $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 벡터공간 V의 순서기저

 ⇒ V의 모든 벡터 v는 단 한 가지 방법으로 다음과 같은 형식으로 표현할 수 있다.

$$\mathrm{v} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n$$

[증명]

▣ **정의 2**

$S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 벡터공간 V의 순서기저

$\mathrm{v} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n$ 은 기저를 이용한 v의 표현이다.

- 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_n$: **기저 S에 대한 v의 좌표(coordinates of v relative to S)**
- 벡터 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$: **기저 S에 대한 v의 좌표벡터(coordinate vector of v relative to S)** :

 $(\mathrm{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$로 표기한다. (또는 $[\mathrm{v}]_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$)

[Note]

- 좌표벡터는 기저 S에 의존하고, 기저벡터의 순서에도 의존한다.
- 좌표벡터는 다음과 같이 열행렬(열벡터)로 나타내기도 한다.

$$[\mathrm{v}]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$: **좌표행렬(coordinate matrix)(/좌표벡터)**

- $\mathrm{v} \in V$ 와 $(\mathrm{v})_S \in R^n$ 은 일대일 대응관계이다.

예제 7 R^n 상의 표준기저를 E라 하자. ⇒ $(\mathrm{v})_E = \mathrm{v}$

예제 8 (a) P_n의 표준기저에 대해 $\mathrm{p}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$의 좌표벡터를 구하라.

(b) M_{22}의 표준기저에 대해 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 좌표벡터를 구하라.

[풀이]

예제 9 예제 3에서 $\mathrm{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathrm{v}_2 = (2, 9, 0)$, $\mathrm{v}_3 = (3, 3, 4)$은 R^3의 기저이다.

(a) 기저에 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$에 대한 $\mathrm{v} = (5, -1, 9)$의 좌표벡터를 구하여라.

(b) S에 대한 좌표벡터가 $(\mathrm{v})_S = (-1, 3, 2)$인 R^3의 벡터를 구하여라.

[풀이]

4.6 차원

☐ **정리 4.6.1**

- 유한차원 벡터공간의 모든 기저는 같은 개수의 벡터를 갖는다.

☐ **정리 4.6.2**

V는 유한차원의 벡터공간이고 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$이 임의의 기저이다.

(a) n개 보다 많은 벡터를 갖는 집합은 선형종속이다.

(b) n개 보다 적은 벡터를 갖는 집합은 V를 생성하지 못한다.

▣ **정의 1**

- 유한차원의 벡터공간 V의 **차원(dimension)**은 V의 기저 안의 벡터들의 개수로 정의하고 $\dim(V)$로 표기한다.
- 영벡터공간은 0차원을 갖는 것으로 정의한다.

[Note] 예제 1

- $\dim(R^n) = n$
- $\dim(P_n) = n+1$
- $\dim(M_{mn}) = mn$

예제 3 연립방정식 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ \qquad\qquad 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$ 의 해공간의 기저와 차원을 구하여라.

[풀이]

□ **정리 4.6.3 [더하기/빼기 정리]**

S : 벡터공간 V의 부분집합

(a) S가 선형독립이고 $\mathrm{v} \notin \mathrm{span(S)}$ $\Rightarrow$ $S \cup \{\mathrm{v}\}$: 선형독립

(b) $\mathrm{v} \in \mathrm{S}$ 이고 v는 S의 나머지 벡터들의 선형결합으로 표시된다. $\Rightarrow$ $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S - \{\mathrm{v}\})$

예제 4 $\mathrm{p}_1 = 1 - x^2$, $\mathrm{p}_2 = 2 - x^2$, $\mathrm{p}_3 = x^3$은 선형독립임을 보여라.

[풀이]

□ **정리 4.6.4**

V : n 차원 벡터공간, S : n개의 벡터를 갖는 V의 부분집합

■ S가 V의 기저 $\Leftrightarrow$ S가 V를 생성하거나, S가 선형독립

예제 5 (a) 계산 없이 $\mathrm{v}_1 = (-3, 7)$, $\mathrm{v}_2 = (5, 5)$가 R^2의 기저를 이루는지 설명하라.

(b) 계산 없이 $\mathrm{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathrm{v}_2 = (4, 0, 7)$, $\mathrm{v}_3 = (-1, 1, 4)$가 R^3의 기저를 이루는지 설명하라.

4.7 기저의 변경

▣ **정의**

$S = \{v_1, v_{2,}\ ..., v_n\}$: 유한차원 벡터공간 V의 기저

$(v)_S = (c_1, c_2, \ ... \ , c_n)$: S에 대한 v 의 좌표벡터

$\Rightarrow$ 사상 : $V \rightarrow R^n$

$v \rightarrow (v)_S$: V에서 R^n으로 **좌표사상(coordinate map)**

[Note]

- 앞으로 편의상 좌표벡터를 $[v]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$로 표현한다.

❒ 기저의 변경문제

V : 유한차원 벡터공간

$\Rightarrow$ 벡터공간 V의 기저를 B에서 B'으로 변경할 때

$v \in V$의 좌표벡터 $[v]_B$와 $[v]_{B'}$은 어떤 관계를 갖는가?

[Note]

B를 "원래 기저" B'을 "새로운 기저"라고 부른다.

[Note] [2차원 공간에서 기저의 변경 문제]

V : 2차원 벡터공간

$B = \{u_1, u_2\}$, $B' = \{u'_1, u'_2\}$: V의 기저

- u'_1과 u'_2의 B에 대한 좌표벡터를 구하자 :

$$[u'_1]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad [u'_2]_B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \qquad \text{즉,} \quad \begin{aligned} u'_1 &= au_1 + bu_2 \\ u'_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned} \qquad \text{--- } (*)$$

- $v \in V$의 B'에 대한 좌표 벡터 : $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$라 하자. 즉 $v = k_1 u'_1 + k_2 u'_2$ ---$(**)$

- v 의 원래 좌표 구하기 :

$(*)$를 $(**)$에 대입 $\Rightarrow$ $v = k_1(au_1 + bu_2) + k_2(cu_1 + du_2)$

$$= (k_1 a + k_2 c)u_1 + (k_1 b + k_2 d)u_2$$

$$\therefore \quad [v]_B = \begin{pmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} [v]_{B'}$$

$\therefore \quad P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$라 하면 $[v]_B = P[v]_{B'}$ (이때 $P = P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ([u'_1]_B \ \ [u'_2]_B)$)

□ **정리 [기저의 변경 문제의 해]**

- 벡터공간 V의 기저를 원래 기저 $B = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, ..., \mathrm{u}_n\}$에서 새로운 기저 $B' = \{\mathrm{u}'_1, \mathrm{u}'_2, ..., \mathrm{u}'_n\}$으로 변경할 때 $\mathrm{v} \in V$에 대해 다음 관계가 성립한다.

$$[\mathrm{v}]_B = P[\mathrm{v}]_{B'} = P_{B' \to B}[\mathrm{v}]_{B'}$$

- 이때 P는 $[\mathrm{u}'_1]_B$, $[\mathrm{u}'_2]_B$, ..., $[\mathrm{u}'_n]_B$을 열벡터로 갖는 행렬이다.

즉, $$P = P_{B' \to B} = ([\mathrm{u}'_1]_B \ [\mathrm{u}'_2]_B \cdots [\mathrm{u}'_n]_B)$$

- P를 B'에서 B로의 **전이행렬(transition matrix/기저변환행렬)**이라 하고 $P_{B' \to B}$로 표기한다.

[Note]

- $P_{B' \to B} = ([\mathrm{u}'_1]_B \ [\mathrm{u}'_2]_B \cdots [\mathrm{u}'_n]_B)$: B'에서 B로의 전이행렬(기저변환행렬)
- $P_{B \to B'} = ([\mathrm{u}_1]_{B'} \ [\mathrm{u}_2]_{B'} \cdots [\mathrm{u}_n]_{B'})$: B에서 B'으로의 전이행렬(기저변환행렬)

[Note]

- 원래 기저에서 새로운 기저로의 전이행렬(기저변환행렬)의 열은 새로운 기저에 대한 원래 기저의 좌표벡터이다.

  - $[\mathrm{v}]_B = P_{B' \to B}[\mathrm{v}]_{B'}$
  - $[\mathrm{v}]_{B'} = P_{B \to B'}[\mathrm{v}]_B$

예제 1 R^2의 기저 $B = \{\mathrm{u}_1 = (1,0), \mathrm{u}_2 = (0,1)\}$, $B' = \{\mathrm{u}'_1 = (1,1), \mathrm{u}'_2 = (2,1)\}$를 생각하자.

(a) B'에서 B로의 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B' \to B}$를 구하여라.

(b) B에서 B'으로의 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B \to B'}$를 구하여라.

[풀이]

$\boxed{\text{예제 2}}$ B와 B'이 예제 1의 기저일 때 $[\mathrm{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$이다. $[\mathrm{v}]_{B'}$를 구하라.

[풀이]

□ **정리 4.7.1**

- P가 유한차원 벡터공간 V에 대해 기저 B'에서 기저 B로의 전이행렬

  $\Rightarrow$ P는 가역이고 P^{-1}은 B에서 B'으로의 전이행렬(기저변환행렬)이다.

[증명] $P_{B' \to B}\ P_{B \to B'} [\mathrm{v}]_B = P_{B' \to B} [\mathrm{v}]_{B'} = [\mathrm{v}]_B = I[\mathrm{v}]_B \quad \therefore\ P_{B' \to B}\ P_{B \to B'} = I$

$\therefore\ P_{B \to B'} = P_{B' \to B}^{-1}$

[Note] [$P_{B \to B'}$ 를 구하기]

$\boxed{\text{단계1}}$ 행렬 $(B' \mid B)$를 만든다. 즉 (새로운 기저 | 원래 기저) (: 기저벡터들을 열벡터로 나열)

$\boxed{\text{단계2}}$ 기본 행연산으로 왼쪽을 단위행렬로 만드는 연산을 한다. $\Rightarrow$ $(I \mid P_{B \to B'})$

$\boxed{\text{예제 3}}$ 예제 1의 문제를 다시 풀기

R^2의 기저 $B = \{\mathrm{u}_1 = (1,0), \mathrm{u}_2 = (0,1)\}$, $B' = \{\mathrm{u}'_1 = (1,1), \mathrm{u}'_2 = (2,1)\}$를 생각하자.

(a) B'에서 B로의 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B' \to B}$를 구하여라.

(b) B에서 B'으로의 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B \to B'}$를 구하여라.

[풀이]

(a) $(B \mid B') = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(b) $(B' \mid B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

또는 $P_{B \to B'} = P_{B' \to B}^{-1}$

□ **정리 4.7.2**

- 벡터공간 R^n의 임의의 기저를 $B' = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n\}$라 하고

  R^n의 표준기저를 $E = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \cdots \mathrm{e}_n\}$라 하자. 이 기저들이 열벡터 형태로 쓰여졌다.

$\Rightarrow$ $P_{B' \to E} = (\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \ldots\ \mathrm{u}_n)$.
