□ **정리**

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$: u의 a방향의 벡터성분(u의 a로의 정사영)

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$: u의 a에 직교하는 벡터성분

3.4 선형계의 기하학

❐ R^2, R^3에서 직선의 벡터방정식과 매개변수방정식

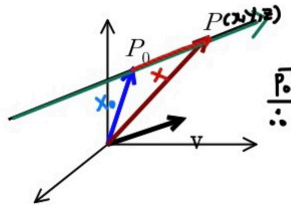
▪ R^3에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 지나고 **방향벡터** $\mathbf{v} = (a, b, c)$에 평행한 직선의 방정식

직선 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$라 하고,

$\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, $\quad \mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ 라 하자.

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \,/\!/\, \mathbf{v}$ 이므로

$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ 인 스칼라 t가 존재한다.



$\overrightarrow{P_0P} /\!/ V \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} /\!/ tV$

$\overrightarrow{P_0P} = X - X_0$

$\therefore X - X_0 = tV$

$X = X_0 + tV$

$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \quad : \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (ta, tb, tc)$

◆ $\boxed{\therefore\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}}$ 방향벡터 ⇦ 직선의 **벡터방정식**

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$

◆ $\therefore \boxed{x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct}$ ⇦ 직선의 **매개변수방정식** : 1차 방정식

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$

◆ $a, b, c \neq 0$ 때

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$ ⇦ 직선의 **대칭방정식**

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{1-z}{5}$

$V = (3, 2, -5)$

a, b, c 중 0 이 있을 때 대칭방정식 :
(예) $a = 0$ 일 때

$$\boxed{x = x_0,\quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

□ **정리 3.5.2 [외적의 성질]**

u, v, w : 3-공간의 벡터, $\quad k$: 스칼라

(a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ 방향 반대

(b) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w}$

(c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$

(d) $k(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times k(\mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 벡터

□ **정리**

▪ A가 $n\times n$ 행렬이고, k는 임의의 스칼라 $\Rightarrow$ $\det(kA) = k^n\det(A)$

□ **정리 2.3.5**

- A : 가역행렬 $\Rightarrow$ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

[Note] [2차원 공간에서 기저의 변경 문제]

V : 2차원 벡터공간

$B = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$, $B' = \{\mathrm{u}'_1, \mathrm{u}'_2\}$: V의 기저

- u'_1과 u'_2의 B에 대한 좌표벡터를 구하자 :

$$[\mathrm{u}'_1]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{u}'_2]_B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \qquad 즉, \quad \begin{aligned} \mathrm{u}'_1 &= a\mathrm{u}_1 + b\mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}'_2 &= c\mathrm{u}_1 + d\mathrm{u}_2 \end{aligned} \quad \text{--- } (*)$$

- $\mathrm{v} \in V$의 B'에 대한 좌표 벡터 : $[\mathrm{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$라 하자. 즉 $\mathrm{v} = k_1\mathrm{u}'_1 + k_2\mathrm{u}'_2$ ---$(**)$

- v 의 원래 좌표 구하기 :

  $(*)$를 $(**)$에 대입 $\Rightarrow$ $\mathrm{v} = k_1(a\mathrm{u}_1 + b\mathrm{u}_2) + k_2(c\mathrm{u}_1 + d\mathrm{u}_2)$

$$= (k_1a + k_2c)\mathrm{u}_1 + (k_1b + k_2d)\mathrm{u}_2$$

$$\therefore \quad [\mathrm{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}[\mathrm{v}]_{B'}$$

$\therefore$ $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$라 하면 $[\mathrm{v}]_B = P[\mathrm{v}]_{B'}$ (이때 $P = P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ([\mathrm{u}'_1]_B \ \ [\mathrm{u}'_2]_B)$)