2.1 여인수 전개에 의한 행렬식

▣ **정의**

- 1×1 **행렬** $A=(a)$**의 행렬식(determinant)** : $\det(A)=a$
- 2×2 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 **행렬식(determinant)** :

$$\det(A)=ad-bc \quad \text{또는} \quad |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

▣ **정의 1**

$A=(a_{ij})$: 정방행렬

- 원소 a_{ij}의 **소행렬식(minor)** : M_{ij} = 행렬 A의 i번째 행과 j번째 열을 제외한 부분행렬의 행렬식
- 원소 a_{ij}의 **여인수(cofactor)** : $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

예제 1 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$일 때 a_{11}의 소행렬식과 a_{32}의 소행렬식,

a_{11}의 여인수와 a_{32}의 여인수를 구하여라.

[풀이]

▣ **정의 2**

- $A=(a_{ij})$가 $n\times n$ 행렬일 때 A**의 행렬식(determinant)**은 다음과 같이 정의한다.

$$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}, \quad 1\le j\le n \quad : j\text{열에 의한 여인수 전개}$$
$$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}, \quad 1\le i\le n \quad : i\text{행에 의한 여인수 전개}$$

예제 3 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$의 행렬식을 구하여라.

[풀이]

예제 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때 $\det(A)$를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 2.2.1**

■ A : $n \times n$ 삼각행렬(상삼각, 하삼각, 대각행렬)

$\Rightarrow$ $\det(A)$: 주대각선 상의 원소들의 곱. 즉, $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

2.2 행축소에 의한 행렬식 계산

□ **정리**

■ I : 단위행렬 $\Rightarrow$ $\det(I) = 1$

□ **정리 2.2.1**

■ 정방행렬 A가 영 행 또는 영 열을 갖는다. $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

□ **정리**

■ 정방행렬 A의 두 행 또는 두 열이 같다. $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

□ **정리 2.2.2**

■ 정방행렬 A에 대해 $\det(A) = \det(A^T)$이다.

□ **정리 2.2.3**

A가 $n \times n$ 행렬이다.

(a) B : A의 한 행 또는 한 열에 스칼라 k를 곱해서 얻은 행렬 $\Rightarrow$ $\det(B) = k\det(A)$

(b) B : A의 두 행을 교환 또는 두 열을 교환해서 얻은 행렬 $\Rightarrow$ $\det(B) = -\det(A)$

(c) B : A의 한 행(또는 열)에 상수배를 해서 다른 행(또는 열)에 더해서 얻은 행렬

$\Rightarrow$ $\det(B) = \det(A)$

[증명] A가 3×3 행렬일 때 증명하자.

(a) $\det(B) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

(b) $\det(B) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

(c) B를 A의 2행에 k를 곱해서 1행에 더한 행렬이라 하자.

$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

□ **정리 2.2.4**

E : $n\times n$ 기본행렬

(a) E : I_n의 한 행에 영이 아닌 스칼라 k를 곱해서 얻은 기본행렬 $\Rightarrow$ $\det(E) = k$

(b) E : I_n의 두 행을 교환하여 얻은 기본행렬 $\Rightarrow$ $\det(E) = -1$

(c) E : I_n의 한 행에 상수배를 다른 행에 더하여 얻은 기본행렬 $\Rightarrow$ $\det(E) = 1$

□ **정리 2.2.5**

- A가 두 비례하는 행 또는 열을 갖는 정방행렬 $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$이다.

예제 5

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$일 때 $\det(A)$를 구하여라.

[풀이]

2.3 행렬식의 성질

☐ **정리**
▪ A가 $n\times n$ 행렬이고, k는 임의의 스칼라 $\Rightarrow$ $\det(kA) = k^n \det(A)$

[Note] A와 B가 $n\times n$ 행렬일 때 $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$

☐ **보조정리 2.3.2**
▪ B가 $n\times n$ 행렬, E가 $n\times n$ 기본행렬 $\Rightarrow$ $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

[증명]

☐ **보조정리**
▪ B가 $n\times n$ 행렬, E_1, E_2, ..., E_r이 $n\times n$ 기본행렬
$\Rightarrow$ $\det(E_1E_2\cdots E_rB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)$

☐ **정리 2.3.3**
▪ 정방행렬 A가 가역이다. $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

☐ **정리 2.3.4**
▪ A와 B가 같은 크기의 정방행렬 $\Rightarrow$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

[증명]

① A가 가역이 아닌 경우

② A가 가역인 경우

□ **정리 2.3.5**

■ A : 가역행렬 $\Rightarrow$ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

[증명] A가 가역행렬 $\Rightarrow$ $A^{-1}A = I$ $\Rightarrow$ $\det(A^{-1}A) = \det(I)$

예제 5 **각자!!!**

▣ **정의 1**

$A = (a_{ij})$가 $n \times n$ 행렬이고 C_{ij}가 a_{ij}의 여인수

(■ **A의 여인수 행렬(matrix of cofactors from A)** : (C_{ij}))

■ **A의 딸림행렬/수반행렬(adjoint of A)** : 여인수 행렬의 전치행렬, $\operatorname{adj}(A)$로 표시한다.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

예제 6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$의 딸림행렬/수반행렬 $\operatorname{adj}(A)$를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 2.3.6**

■ A : 가역행렬 $\Rightarrow$ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(\mathrm{A})}$

[증명] $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I$ 를 보이기.

$(A\operatorname{adj}(A))_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$ $\Rightarrow$ $i = j$ 일 때 $(A\operatorname{adj}(A))_{ii} = \det(A)$

$i \neq j$ 일 때 $(A\operatorname{adj}(A))_{ij} = 0$

예제 7 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$의 딸림행렬/수반행렬을 이용하여 A의 역행렬을 구하여라.

[풀이]

□ **정리 2.3.8**

A : $n\times n$행렬, 다음 명제들은 동등하다.

(a) A는 가역이다.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명해만을 갖는다.

(c) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.

(d) A는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 일치한다.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 유일한 해를 갖는다.

(e) $\det(A) \neq 0$