선형대수학 2023년 1학기 중간고사 객관식 : A 유형

학과: 학번: 이름: 분반:

유의사항:

부정행위가 발견될 경우, 0점 처리함.

유형 A (OMR 카드에 표시) **시험시간: 80분**

이름을 적지 않으면, 10점 감점함

객관식: 1-9 (5점), 10-14 (3점) **주관식: 15-18 (각 10점). 상세한 풀이과정 필요.**

주관식 답안지, 객관식 OMR 답안지 제출함.

1. 벡터 $\vec{u} = (3, -2, 1)$ 위로 $\vec{v} = (-1, 3, 2)$의 정사영 벡터 $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$은 무엇인가?

① $\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

② $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

③ $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

④ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right)$

⑤ $\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

2. 두 점 $P(4, -6, 1)$, $Q(2, -2, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 $x = at + b$, $y = -2t - 2$, $z = -t + 3$ 이라 할 때 $a + b$의 값은 무엇인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 0

3. 세 점 $P(1, 0, 1)$, $Q(6, 2, 4)$, $R(-1, 2, -3)$을 지나는 평면에 대한 설명으로 맞는 것을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) 평면식은 $x - y - z = 0$ 이다.

(b) 평면식은 $x = 5s - 2t + 6$, $y = 2s + 2t + 2$, $z = 3s - 4t + 4$ 이다.

(c) 두 점 $A(5, 2, 4)$과 $B(6, 1, 3)$를 지나는 직선과 평행이다.

(d) 점 $(3, 0, 3)$은 평면 위의 점이다.

① (a), (d)

② (a), (b), (d)

③ (a), (b), (c), (d)

④ (b), (c), (d)

⑤ (c), (d)

4. 세 점 $P(2, 1, -3)$, $Q(4, 2, -5)$, $R(-2, 5, -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 무엇인가?

① 6 ② 12 ③ $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ ④ $\sqrt{65}$ ⑤ $2\sqrt{65}$

5. 행렬식 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$은 무엇인가?

① -45 ② 45 ③ -69 ④ 69 ⑤ -90

6. 점 $A(t, 1, -t)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, -1, 1)$, $D(1, 2, 3)$에 대해 세 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$가 선형종속일 때 t의 값은 무엇인가?

① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ -3

7. 다음 중 R^3의 부분공간을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) $\{(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

(b) $\{(x,y,z): 3x-2y+5z=0\}$

(c) $\{\vec{r}(t) = (3t-1,\ -2t+2,\ -t-3): t\in R\}$

(d) $\{\vec{r}(s,t) = (s+2t,\ -3s-3t,\ s+4t): s,\ t\in R\}$

(e) $\{\vec{r}(t) = (t-1,\ t,\ 2t+1): t\in R\}\cup\{(0,0,0)\}$

① (a), (b), (d)
② (a), (d), (e)
③ (a), (b), (d), (e)
④ (b), (d)
⑤ (b), (d), (e)

8. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) $S=\{(1,\ -1),\ (3,\ 0),\ (1,\ 1)\}$은 R^2를 생성한다.

(b) $\{1-x+x^2,\ 1+2x^2,\ x+x^2\}$은 P_2의 선형독립인 집합이다.

(c) $\text{span}\{(2,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 2,\ 5)\} = R^3$ 이다.

(d) $\text{span}\{1+2x,\ -2+x,\ -1+3x\}$는 3차원이다.

① (a), (b)
② (a), (b), (c), (d)
③ (a), (c)
④ (b), (c), (d)
⑤ (c), (d)

9. 벡터공간 R^3의 기저를 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) $\{(2,\ 1,\ -1),\ (1,\ 0,\ -1),\ ((-1,\ -1,\ 0)\}$

(b) $\{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1,\ 1),\ (0,\ 1,\ -2)\}$

(c) $\{(1,\ 2,\ 0),\ (1,\ 0,\ -2),\ ((0,\ 1,\ 1)\}$

(d) $\{(3,\ 1,\ 0),\ (2,\ -1,\ 0),\ ((1,\ 4,\ 5)\}$

(e) $\{(1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0),\ ((0,\ 1,\ -1),\ (0,0,-1)\}$

① (a), (b), (c)
② (a), (b), (d)
③ (b), (d)
④ (b), (d), (e)
⑤ (b), (c), (d), (e)

10. 4×4 행렬 A에 대해 $\det(A) = -3$ 일 때 $\det((-2A)^{-1})$는 무엇인가?

① $-\dfrac{16}{3}$ ② $\dfrac{16}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $-\dfrac{1}{48}$

11. 3차원 벡터 $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$에 대해, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 4$일 때 $\vec{w}\cdot(2\vec{v}\times\vec{u})$ 는 무엇인가?

① -4 ② 4 ③ -8 ④ 8 ⑤ -32

12. R^3의 기저 $B=\{(3,\ 1,\ -1),\ (1,\ 0,\ -2),\ (-1,\ 1,\ 1)\}$에 대해 벡터 $\vec{u}$의 기저 B에 대한 좌표벡터가 $[\vec{u}]_B = (1,\ -5,\ -3)$ 일 때 $\vec{u}$는 R^3의 어느 벡터인가?

① $(6,\ -30,\ -15)$
② $(3,\ 2,\ -2)$
③ $(4,\ -3,\ -5)$
④ $(1,\ -2,\ 6)$
⑤ $(1,\ 7,\ -9)$

13. 5×5 행렬 A와 B에 대해, $\det(AB) = -2$ 이면 B는 가역행렬이다.

① 참 ② 거짓 ③ 알 수 없다.

14. 3×3 행렬 A의 고유값이 $2,\ -2,\ \dfrac{1}{2}$이면 $\det(A^3)$은 무엇인가?

① $\dfrac{1}{2}$ ② -2 ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ 8 ⑤ -8

선형대수학 2023년 1학기 중간고사 주관식 답안지

학번: **이름:** **분반:**

주관식 문제: 15번~18번(각 10점) : 각 문제는 상세한 풀이 과정이 있는 경우만 점수가 인정됨.

15. 연립일차방정식 $\begin{cases} 4x+2y+9z = -10 \\ x+2y+3z = 2 \\ 3x+4y+8z = 0 \end{cases}$ 에 대해 다음 물음에 답하여라.

(1) 열첨가행렬의 행사다리꼴 또는 기약행사다리꼴 행렬을 구하라.(5점)

(2) (1)의 행사다리꼴 또는 기약행사다리꼴 행렬을 이용하여 해집합을 구하라(3점)

(3) (2)에서 구한 해집합이 점인지, 직선인지, 평면인지 판정하고 구체적으로 설명하라.(2점)

16. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) A의 행렬식을 구하라.(2점)

(2) 수반행렬 $\mathrm{adj}(A)$를 구하라.(5점)

(3) (1), (2) 의 결과를 이용하여 역행렬 A^{-1}을 구하라.(2점)

(4) $A^{-1}A = I$ 를 계산하여 결과를 확인하라.(1점)

17. 벡터공간 R^2의 두 기저 $B_1 = \{\overrightarrow{u_1} = (6,\ -1), \overrightarrow{u_2} = (1,\ 2)\}$,

$B_2 = \{\overrightarrow{v_1} = (2, 1), \overrightarrow{v_2} = (-1,\ 1)\}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 기저 B_1을 기저 B_2로 바꾸는 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B_1 \to B_2}$을 구하라.(5점)

(2) (1)의 결과를 이용하여 $\overrightarrow{u_1}$과 $\overrightarrow{u_2}$를 각각 $\overrightarrow{v_1}$과 $\overrightarrow{v_2}$의 일차결합으로 표현하라.(2점)

(3) (1)의 결과를 이용하여 기저 B_1에서 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$에 대응하는 기저 B_2의 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_2}$를 구하라.(3점)

18. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 행렬 A의 고유값($\lambda_1 > \lambda_2$) 과 해당하는 고유벡터 $\overrightarrow{x}_{(1)}$, $\overrightarrow{x}_{(2)}$를 각각 구하라.(3점)

(2) A를 PDP^{-1}로 분해한 식을 써라. 반드시 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$를 사용하라.(3점)

(3) $e^A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때 $a+b+c+d$ 를 구하라.(4점)

객관식 답

5, 2, 2, 4
1, 1, 4, 3
3, 5, 3, 4
1, 5

[주관식]
15.
(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 9 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right)$ (과정 있음) -> $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(2) $\left\{\left(-2t-4,\ -\frac{1}{2}t+3,\ t\right): t\in R\right\}$

(3) 점 $(-4,3,0)$을 지나고 $\vec{u}=\left(-2,-\frac{1}{2},1\right)$에 평행한 직선

16.
(1) $\det(A)=60$

(2) $adj(A)=\begin{pmatrix} 15 & 18 & -3 \\ 5 & -14 & -1 \\ -10 & -20 & -10 \end{pmatrix}$

(3) $A^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix} 15 & 18 & -3 \\ 5 & -14 & -1 \\ -10 & -20 & -10 \end{pmatrix}$

17.
(1) $P_{B_1\to B_2}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{u}_1=\frac{5}{3}\vec{v}_1-\frac{8}{3}\vec{v}_2$, $\quad \vec{u}_2=1\vec{v}+1\vec{v}_2$

(3) $[\vec{w}]_{B_2}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

18.
(1) 고유값 : $\lambda=5,\ 1$

$\lambda=5$일 때 $\vec{x}_{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\lambda=1$일 때 $\vec{x}_{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(2) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(3) $e^A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{e^5+3e}{4} & \frac{e^5-e}{4} \\ \frac{3e^5-3e}{4} & \frac{3e^5+e}{4} \end{pmatrix}$

따라서 $a+b+c+d=2e^5$