3.5 외적

▣ **정의 1**

■ u $=(u_1, u_2, u_3)$, v $=(v_1, v_2, v_3)$: 3-공간의 벡터

u와 v의 외적(벡터곱/vector product/cross product) :

$$\mathrm{u}\times\mathrm{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

또는 $$\mathrm{u}\times\mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

예제 1 (a) u $=(1, 2, -2)$, v $=(3, 0, 1)$ $\Rightarrow$ u $\times$ v 를 구하여라.

(b) u $=(2, -7, 1)$, v $=(1, 3, -2)$ $\Rightarrow$ u $\times$ v 를 구하여라.

예제 3 i $\times$ j 를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 3.5.1 [외적과 점곱(표준내적)이 포함된 관계]**

u, v, w : 3-공간의 벡터

(a) $\mathrm{u}\cdot(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = 0$ ($\Rightarrow$ $\mathrm{u} \perp \mathrm{u}\times\mathrm{v}$)

(b) $\mathrm{v}\cdot(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = 0$ ($\Rightarrow$ $\mathrm{v} \perp \mathrm{u}\times\mathrm{v}$)

(c) $\|\mathrm{u}\times\mathrm{v}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2 - (\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})^2$ (: 라그랑주의 항등식)

(d) $\mathrm{u}\times(\mathrm{v}\times\mathrm{w}) = (\mathrm{u}\cdot\mathrm{w})\mathrm{v} - (\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})\mathrm{w}$

(e) $(\mathrm{u}\times\mathrm{v})\times\mathrm{w} = (\mathrm{u}\cdot\mathrm{w})\mathrm{v} - (\mathrm{v}\cdot\mathrm{w})\mathrm{u}$

[증명]

(a) $\mathrm{u}\cdot(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = (u_1, u_2, u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

예제 2 **각자!!!**

□ **정리 3.5.2 [외적의 성질]**

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: 3-공간의 벡터, k : 스칼라

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

(d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times k(\mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

[Note]

(1) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

(2) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

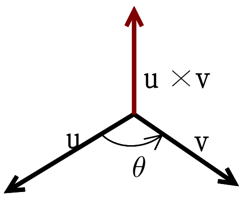
(3) $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ $\quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ $\quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

[Note]

- 외적의 교환법칙 :

- 외적의 결합법칙 :

[Note]



□ **정리**

■ θ : $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 사이의 각 $\Rightarrow$ $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$

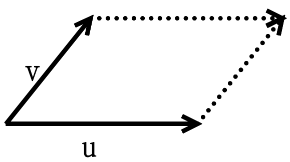
[증명] 정리 3.5.1의 (c)

$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$

□ **정리 3.5.3 [평생사변형의 넓이]**

■ $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$로 이루어지는 평행사변형의 넓이 : $A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$

[증명]



예제 4 세 점 $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$, $P_3(0, 4, 3)$이 만드는 삼각형의 넓이를 구하여라.
[풀이]

Ex 세 점 $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$, $R(5, 2, 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.
[풀이]

Ex 두 평면 $x+y+z=1$과 $x-2y+3z=1$의 교선의 방정식을 구하여라.
[풀이]

▣ **정의 2**

u, v, w : 3-공간의 벡터.

■ **u, v, w 의 스칼라 삼중곱(scalar triple product)** : $\boxed{\mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}\times\mathrm{w})}$

[Note]

$$\boxed{\mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}\times\mathrm{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

$$\because\quad \mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}\times\mathrm{w}) = (u_1, u_2, u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{예제5}$ $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 의 스칼라 삼중곱을 구하여라.

[풀이]

[Note]

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

□ **정리 3.5.4 [행렬식의 기하학적 의미]**

(a) $\left| \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$: 2-공간에서의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$와 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$가 만드는 평행사변형의 넓이

(b) $\left| \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$: 3-공간에서 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$가 만드는 평행육면체의 부피

[증명]

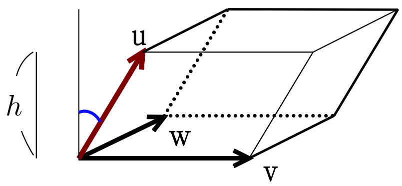
(a) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$를 3-공간의 벡터로 생각하자. 즉 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$.

두 벡터로 만드는 평행사변형의 넓이 : $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left| \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \|\mathbf{k}\| = \left| \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$$

(b) 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 로 결정되는 평행육면체의 부피는

$V =$ 밑넓이 $\times$ 높이



밑넓이 $=$

높이 $= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}\, \mathbf{u}\| =$

따라서 $V =$

□ **정리 [평행육면체의 부피]**
▪ u, v, w 로 결정되는 평행육면체의 부피 : $V = \lvert \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rvert$

□ **정리 3.5.5**
▪ u, v, w가 동일 평면에 있다. $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$

$\boxed{\text{Ex}}$ 세 벡터 $\mathbf{u} = (6, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (4, -2, 5)$가 만드는 <u>평행육면체</u>의 부피를 구하여라./ <u>사면체</u>의 부피를 구하여라.

[풀이]

$\boxed{\text{Ex}}$ 점 $A(2, 1, 2)$, $B(3, 6, 0)$, $C(-1, 2, 2)$, $D(7, 10, -2)$가 같은 평면 위에 놓여 있음을 보여라.

[풀이]