# 1.8 선형변환의 소개 ($R^n$에서 $R^m$으로 행렬변환 ) + 8.6 행렬연산자의 기하학

▣ **정의 1**

$V$, $W$ : 벡터공간

- 함수 $T: V \to W$를 **변환**(transformation) 또는 **사상(함수** map)이라 한다.
- $V = W$ 일 때 $T$는 $V$**상의 연산자**(operator)라 한다.

[Note]

- $A$가 $m \times n$ 행렬이고, $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$, 때 변환 $T_A : R^n \to R^m$을 $\boxed{T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}}$ 로 정의
  - $T_A$를 $R^n$에서 $R^m$으로 **행렬변환**이라 부른다.
  - $n = m$일 때는 $T_A$를 **행렬연산자**라 부른다.

- 즉, $\mathrm{w} = A\mathrm{x}$ 이면, $\mathrm{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}$

- 따라서, $\mathrm{w} = T_A(\mathrm{x})$이고, $\mathrm{w} \in R^m$이다. 이때 '$T_A$는 $\mathrm{x}$를 $\mathrm{w}$로 사상한다'라고 한다.

- 이 행렬변환 $T_A$를 $A$**에 의한 행렬곱**이라 하고, 행렬 $A$를 변환에 대한 **표준행렬**이라 한다.

예제 1 $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$, $\mathrm{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in R^3$에 대해 $\begin{array}{l} w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 = 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{array}$ 라 하자.

어떤 행렬변환인가?

[풀이]

예제 2 $O$가 $m \times n$ 행렬이면 $T_O : R^n \to R^m$를 $T_O(\mathrm{x}) = O(\mathrm{x}) = \mathbf{0}$이다.

$\Rightarrow$ $T_O$는 $R^n$에서 $R^m$으로의 **영변환**(zero transformation)이라 한다.

예제 3 $I$가 $n\times n$ 단위행렬이면 $T_I: R^n \to R^n$를 $T_I(\mathrm{x}) = I(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$이다.

$\Rightarrow$ $T_I$는 $R^n$에서 **항등연산자(identity operator/단위연산자)**라 한다.

[Note]

- 행렬변환에서 표준행렬을 표기하지 않을 때 즉, $T: R^n \to R^m$ 가 행렬변환일 때

  $\Rightarrow$ $T$의 표준행렬을 $[T]$로 표기한다. 따라서 $T(\mathrm{x}) = [T]\mathrm{x}$

□ **정리 1.8.1**

$T_A : R^n \to R^m$는 행렬변환이고, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in R^n$, $k$는 스칼라 일 때 다음 성질을 갖는다.

(a) $T_A(0) = 0$

(b) $T_A(k\mathrm{u}) = kT_A(\mathrm{u})$ [동질성]

(c) $T_A(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T_A(\mathrm{u})+T_A(\mathrm{v})$ [합의 성질]

(d) $T_A(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = T_A(\mathrm{u})-T_A(\mathrm{v})$

[증명]

[Note]

- $T_A : R^n \to R^m$는 행렬변환이면 $R^n$ 안의 벡터 $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_r$와 스칼라 $k_1, k_2, \ldots, k_r$에 대해

$$T_A(k_1\mathrm{u}_1 + k_2\mathrm{u}_2 + \cdots + k_r\mathrm{u}_r) = k_1T_A(\mathrm{u}_1) + k_2T_A(\mathrm{u}_2) + \cdots + k_rT_A(\mathrm{u}_r)$$

[Note]

- $T_A$는 선형변환이다.(8장)

□ **정리 1.8.4**

- $T_A : R^n \to R^m$ 와 $T_B : R^n \to R^m$가 행렬변환이고,

  $R^n$에 있는 모든 벡터 $\mathrm{x}$에 대해 $T_A(\mathrm{x}) = T_B(\mathrm{x})$ 이다. $\Rightarrow$ $A = B$

[증명] $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 일 때 $A\mathrm{x} = B\mathrm{x}$ 이므로, $\Rightarrow$ $A$의 1열 $=$ $B$의 1열

$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 일 때 $A\mathrm{x} = B\mathrm{x}$ 이므로, $\Rightarrow$ $A$의 2열 $=$ $B$의 2열

**[Note] [$R^n$에서 $R^m$으로의 행렬변환에 대한 표준행렬 $A$를 구하기]**

$\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2,\ \ldots,\ \mathrm{e}_n$ : $R^n$의 표준기저벡터(표준단위벡터)를 열벡터로 표시한 것

$$\Rightarrow\quad T_A(\mathrm{e}_1) = A\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ T_A(\mathrm{e}_2) = A\mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ T_A(\mathrm{e}_n) = A\mathrm{e}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore\ A = (T_A(\mathrm{e}_1)\ \ T_A(\mathrm{e}_2)\ \ \cdots\ \ T_A(\mathrm{e}_n))}$$ : 표준행렬

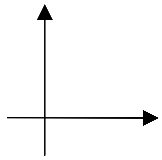
## ❒ 여러 가지 행렬변환들

- **반사**연산자(reflection operator/**대칭**연산자)

1. 2차원에서

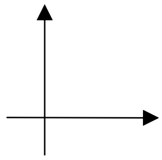
① $x$축에 대한 대칭이동(반사) : $(x, y) \to (x, -y)$

$$\Rightarrow\quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$



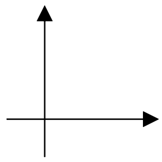
② $y$축에 대한 대칭이동(반사) : $(x, y) \to (-x, y)$

$$\Rightarrow\quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



③ 직선 $y = x$에 대한 대칭이동(반사) : $(x, y) \to (y, x)$

$$\Rightarrow\quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$



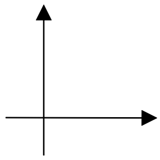
2. 3차원에서

- **정사영**연산자(orthogonal projection operator/사영연산자)

1. 2차원에서

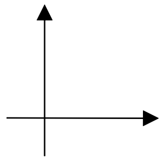
① $x$축에 대한 정사영 : $(x, y) \to (x, 0)$

$$\Rightarrow\quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$



② $y$축에 대한 정사영 : $(x, y) \to (0, y)$

$$\Rightarrow\quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



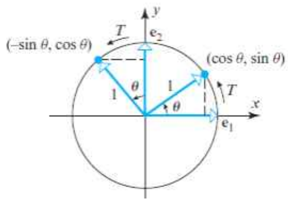
2. 3차원에서

■ **회전**연산자(rotation operator)

[1] 2차원에서

$R^2$ 상의 점을 원점을 중심으로 시계반대방향으로 $\theta$ 만큼 회전시킨다.

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



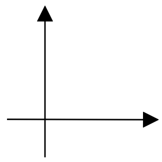

[2] 3차원에서

■ **확대**(dilations) 및 **축소**(contractions) [8.6절]

[1] 2차원에서

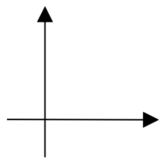
① 확대 : $(x, y) \rightarrow (kx, ky), \quad k > 1$

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad k > 1$$



② 축소 : $(x, y) \rightarrow (kx, ky), \quad 0 \le k < 1$

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad 0 \le k < 1$$



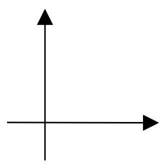
[2] 3차원에서

■ 인자 $k$에 의한 **확장(팽창)**(expansion) 및 **압축**(compression) [8.6절]

[1] 2차원에서

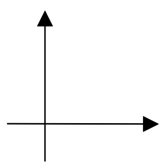
① 인자 $k$ 만큼 $x$축 방향으로 확장(팽창) : $(x, y) \rightarrow (kx, y), \quad k > 1$

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k > 1$$



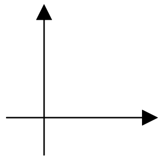
② 인자 $k$ 만큼 $x$축 방향으로 압축 : $(x, y) \rightarrow (kx, y), \quad 0 \le k < 1$

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le k < 1$$



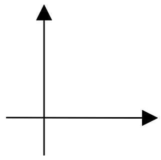
③ 인자 $k$ 만큼 $y$축 방향으로 확장(팽창) : $(x,\, y) \rightarrow (x,\, ky)$, $\quad k > 1$

$$\Rightarrow \qquad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad k > 1$$



④인자 $k$ 만큼 $y$축 방향으로 압축 : $(x,\, y) \rightarrow (x,\, ky)$, $\quad 0 \le k < 1$

$$\Rightarrow \qquad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad 0 \le k < 1$$



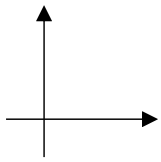
- **층밀림**(shear) [8.6절]

  1 2차원에서

  ① 인자 $k$에 의한 $x$축 방향 층밀림 : $(x,\, y) \rightarrow (x + ky,\, y)$, $\quad k \in R$

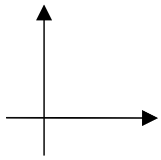
  - 점 $(x,\, y)$를 $x$축에 평행하게, $y$좌표값에 비례하여 $ky$만큼 평행이동

$$\Rightarrow \qquad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



  ② 인자 $k$에 의한 $y$축 방향 층밀림 : $(x,\, y) \rightarrow (x,\, y + kx)$, $\quad k \in R$

$$\Rightarrow \qquad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Ex 다음 행렬에 대해 대응하는 행렬 연산자가 무엇을 나타내는지 기술하라.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

[풀이]

Ex 점 $(3,\, -1)$을 시계방향으로 $60^\circ$ 회전시킨 점을 찾는 표준행렬과 변환된 점을 찾아라.

[풀이]

## 1.9 행렬변환의 합성 (행렬변환의 성질)

▣ **정의**

$T_A : R^n \to R^k$ ,  $T_B : R^k \to R^m$ : 행렬변환

- $T_A$와 $T_B$의 **합성(composition)** $T_B \circ T_A$은 다음과 같이 정의한다.

$$(T_B \circ T_A)(\mathrm{x}) = T_B(T_A(\mathrm{x}))$$

□ **정리 1.9.1**

- $T_A : R^n \to R^k$ ,  $T_B : R^k \to R^m$는 행렬변환

$\Rightarrow$ $T_B \circ T_A$도 행렬변환이고, 다음 식을 만족시킨다.

$$\therefore \quad T_B \circ T_A = T_{BA}$$

[증명] $(T_B \circ T_A)(\mathrm{x}) = T_B(T_A(\mathrm{x})) = T_B(A\mathrm{x}) = B(A\mathrm{x}) = (BA)\mathrm{x} = T_{BA}(\mathrm{x})$

**[Note]**

- $T$가 행렬변환일 때 표준행렬을 $[T]$로 나타낸다.
- 합성은 교환법칙이 성립하지 않는다.

예제 4 $T: R^2 \to R^2$가 원점에 대한 반사(대칭)를 나타내는 행렬변환일 때 표준행렬을 구하여라.

[풀이] 원점에 대한 대칭은 $x$축에 대한 대칭을 한 후, $y$축에 대해 대칭시키면 얻을 수 있다.

(또는 $y$축에 대한 대칭을 한 후, $x$축에 대해 대칭시키면 얻을 수 있다.)

$T_1$을 $x$축에 대한 대칭, $T_2$를 $y$축에 대한 대칭이라 하면, $T = T_2 \circ T_1$이다.

$$\Rightarrow \quad [T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [T_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [T_2][T_1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T]$$

□ **정리**

- $T: R^2 \to R^2$ : 원점에 대한 반사(대칭) $\Rightarrow$ $T(x, y) = (-x, -y)$

$$T(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}$$ : **원점에 대한 대칭(반사)**

Ex $T: R^2 \to R^2$는 $x$축에 대한 대칭을 한 후, 시계방향으로 $60^\circ$ 회전시키는 행렬변환이다.

이 변환의 표준행렬을 구하고, 이 변환에 의한 벡터 $\mathrm{v} = (4, -2)$의 결과는 어떤 벡터인가?

[풀이] $T_1$을 $x$축에 대한 대칭, $T_2$를 시계방향으로 $60^\circ$ 회전시키는 변환이라 하면, $T = T_2 \circ T_1$이다.

$$\Rightarrow \quad [T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [T_2] = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [T] =$$

**▣ 정의**

- $T_A : R^n \to R^m$ 가 $R^n$의 서로 다른 벡터를 $R^m$의 서로 다른 벡터로 사상시킬 때 행렬변환 $T_A$를 **일대일(one-to-one)**이라 한다.

[Note]

- $T_A$ 가 일대일 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{u} \neq \mathrm{v}$ 이면 $T_A(\mathrm{u}) \neq T_A(\mathrm{v})$

  $\Leftrightarrow$ $T_A(\mathrm{u}) = T_A(\mathrm{v})$ 이면 $\mathrm{u} = \mathrm{v}$

**□ 정리**

- $T_A : R^n \to R^n$의 표준행렬 $A$가 $n \times n$ 행렬이면, 다음 명제들은 동등하다.

(a) $A$가 가역이다.

(b) $T_A$는 일대일이다.

Ex $R^2$에서 회전 연산자는 일대일인가? $R^2$에서 사영연산자는 일대일인가?

[풀이] 회전연산자의 표준행렬 $[T] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\det([T]) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$

사영연산자의 표준행렬 $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\det([T]) = 0$

▣ 정의

$T_A : R^n \to R^n$ ; 일대일인 행렬연산자

- $T_A$의 **역연산자(inverse operator/역(inverse))**, $T_A^{-1} : R^n \to R^n$은 다음 관계를 만족시킨다.

$$T_A^{-1}(\mathrm{v}) = \mathrm{u} \quad \Leftrightarrow \quad T_A(\mathrm{u}) = \mathrm{v}$$

**□ 정리**

$T_A : R^n \to R^n$ ; 일대일인 행렬연산자

$$\Rightarrow \quad T_A^{-1} = T_{A^{-1}} \quad \text{또는} \quad [T^{-1}] = [T]^{-1}$$

예제 7

방정식 $\begin{cases} w_1 = 2x_1 + x_2 \\ w_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ 로 정의되는 연산자 $T: R^2 \to R^2$가 일대일임을 보이고 $T^{-1}$를 구하라.

[풀이]