학과: 게임학부
학번: C077044
이름: 황태훈

29. (a) $\vec{A}=(0,0,0)$ $\vec{B}=(1,0,0)$ $\vec{C}=(0,1,0)$ $\vec{D}=(0,0,1)$ 라고 하고 $V=\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 라고 하면 $\vec{B}+\vec{C}=(1,1,0)\notin V$ 이므로 R^3의 부분공간이 아니다.

(b) $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{u}=(x_2,y_2,z_2)$, $W=\{(x,y,z)\,;\,x+2y-2z+1=0\}$라고 가정하면 $\vec{v}\in W$, $\vec{u}\in W$를 만족하면 $x_1+2y_1-2z_1=-1$ 이고 $x_2+2y_2-2z_2=-1$이 된다.
$\vec{v}+\vec{u}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$이면 $x_1+x_2+2(y_1+y_2)-2(z_1+z_2)+1=0$ 이며 정리하면 $x_1+2y_1-2z_1+x_2+2y_2-2z_2+1=0$ 이 된다.
또 정리하면 $x_1+2y_1-2z_1$을 -1로 $x_2+2y_2-2z_2$를 -1로 치환하면 $-1=0$ 이라는 모순이 나와 R^3의 부분공간이 아니다.

(c) $W=\{\vec{r}(t)=(2t,3t,-4t)\}$, $\vec{r_1}=(2t_1,3t_1,-4t_1)\in W$, $\vec{r_2}=(2t_2,3t_2,-4t_2)\in W$ 이라고 가정하면 $\vec{r_1}+\vec{r_2}=(2(t_1+t_2),3(t_1+t_2),-4(t_1+t_2))$ 가 되므로 덧셈에 대한 닫힘성을 만족한다. $k\vec{r_1}=(2kt_1,3kt_1,-4kt_1)=(k(2t_1),k(3t_1),k(-4t_1))$으로 정리되며 스칼라곱에 대한 닫힘성은 만족한다. 두조건에 만족해서 R^3의 부분공간이다.

(d) $W=\{(x,y,z)\,!\,x-3z=0\}$ 이면 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)\in W$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\in W$ 라고 가정하면 $x_1-3z_1=0$, $x_2-3z_2=0$ 이며 $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$는 $x_1+x_2-3z_1-3z_2=0 \rightarrow x_1-3z_1+x_2-3z_2=0$ 이 된다. 여기서 $x_1-3z_1=0$과 $x_2-3z_2=0$을 대입하면 $0=0$ 이므로 $\vec{u}+\vec{v}\in W$을 만족한다. $k\vec{u}=(kx_1,ky_1,kz_1)$ 이면 $kx_1-3kz_1=k(\underbrace{x_1-3z_1}_{0})=0$ 이므로 $k\vec{u}\in W$을 만족한다. $\vec{u}+\vec{v}$와 $k\vec{u}$를 둘다 만족하므로 R_3의 부분공간이다.

(e) 이 문제는 반례로 증명하면 $\vec{u}=(2,-1,-2)$은 벡터공간 $\{(x,y,z)\,!\,x+2y=0\}$을 만족하지만 벡터공간 $\{(x,y,z)\,!\,x-z=0\}$은 만족하지 않는다. 그러므로 R_3의 부분공간이 아니다.

30. (a) $\vec{A}=(0,0,0)$ $\vec{B}=(1,0,0)$ $\vec{C}=(0,1,0)$ $\vec{D}=(0,0,1)$ 라고 하고

$V=\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 라고 하면

$\vec{B}+\vec{C}=(1,1,0)\notin V$ 이므로 R^3의 부분공간이 아니다.

(b) $W=\{(x,y,z);3x-2y+5z=0\}$, $\vec{V}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{U}=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{V}\in W$, $\vec{U}\in W$ 일 때 $3x_1-2y_1+5z_1=0$, $3x_2-2y_2+5z_2=0$ 이다.

$\vec{V}+\vec{U}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ 일 때 $3(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+5(z_1+z_2)=0$

을 정리하면 $\underbrace{3x_1-2y_1+5z_1}_{0}+\underbrace{3x_2-2y_2+5z_2}_{0}=0$ 을 만족하므로 $\vec{V}+\vec{U}\in W$

$k\vec{V}=(kx_1,ky_1,kz_1)$ 일 때 $3kx_1-2ky_1+5kz_1=0$

$k(\underbrace{3x_1-2y_1+5z_1}_{0})=\underbrace{k\cdot 0}_{0}=0$을 만족하므로 $k\vec{V}\in W$ 만족하여 R^3의 부분공간이다.

(c) 벡터공간 $W=\{\vec{r}(t)=(3t-1,-2t+2,-t-3)\}$, $\vec{r}(a)=(3a-1,-2a+2,-a-3)$

$\vec{r}(b)=(3b-1,-2b+2,-b-3)$ 이라고 가정하면

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}(a+b)&=(3a+3b-1,-2a-2b+2,-a-b-3)\\ \vec{r}(a)+\vec{r}(b)&=(3a+3b-2,-2a-2b+4,-a-b-6)\end{aligned}\right)\ \vec{r}(a+b)\neq\vec{r}(a)+\vec{r}(b)$$

그러므로 R^3의 부분공간이 아니다.

(d) 벡터공간 $W=\{\vec{r}(s,t)=(s+2t,-3s-3t,s+4t);s,t\in R\}$ 일 때

$\vec{r}(s_1,t_1)=(s_1+2t_1,-3s_1-3t_1,s_1+4t_1)$, $\vec{r}(s_2,t_2)=(s_2+2t_2,-3s_2-3t_2,s_2+4t_2)$ 이라고

가정하면 $\vec{r}(s_1+s_2,t_1+t_2)=(s_1+s_2+2t_1+2t_2,-3s_1-3s_2-3t_1-3t_2,s_1+s_2+4t_1+4t_2)$ 일 때

$\vec{r}(s_1,t_1)+\vec{r}(s_2+t_2)=(s_1+s_2+2t_1+2t_2,-3s_1-3s_2-3t_1-3t_2,s_1+s_2+4t_1+4t_2)$ 이므로

$\vec{r}(s_1+s_2,t_1+t_2)\in W$ 를 만족한다. $\vec{r}(ks_1,kt_1)=(ks_1+2kt_1,-3ks_1-3kt_1,ks_1+4kt_1)$ 일 때

$k(\vec{r}(s_1,t_1))=(ks_1+2kt_1,-3ks_1-3kt_1,ks_1+4kt_1)$ 이므로 $\vec{r}(ks_1,kt_1)\in W$ 을 만족한다.

그러므로 R_3의 부분공간이다.

(e) 벡터공간 $\{\vec{r}(t)=(t-1,t,2t+1);t\in R\}$ 이므로 벡터$(1,1,2)$와 평행하고 $(-1,0,1)$를 지나는

직선이므로 R_3의 부분공간이 아니므로 $\{\vec{r}(t)=(t-1,t,2t+1);t\in R\}\cup\{(0,0,0)\}$은

R_3의 부분공간이 아니다.

31. 임의의 벡터 $b=(b_1,b_2,b_3)\in R^3$

$(b_1,b_2,b_3)=k_1(2,2,3)+k_2(4,3,-2)+k_3(-2,1,1)$

$$\begin{cases}2k_1+4k_2-2k_3=b_1\\2k_1+3k_2+k_3=b_2\\3k_1-2k_2+k_3=b_3\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&-2&b_1\\2&3&1&b_2\\3&-2&1&b_3\end{array}\right)$$

A

임의b가 $Ax=b$가 해가 존재할려면 A는 가역이다.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&4&-2\\2&3&1\\3&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&10&0\\2&3&1\\1&-5&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}8&10\\1&-5\end{vmatrix}=-(-40-10)=50\neq0$$

$\therefore$ 생성가능 하다.

정답: $\boxed{R^3\text{을 생성가능}}$

32. 임의의 벡터 $C=(C_1,C_2)\in R^2$, $(C_1,C_2)=k_1(2,-1)+k_2(1,3)+k_3(-3,-1)$

$$(C_1,C_2)=(2k_1+k_2-3k_3,-k_1+3k_2-k_3)\Rightarrow\begin{Bmatrix}2&1&-3&C_1\\-1&3&-1&C_2\end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&C_1\\-1&3&-1&C_2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&-1&C_2\\2&1&-3&C_1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&-C_2\\0&7&-5&C_1+2C_2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&-C_2\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{C_1+2C_2}{7}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{8}{7}&\frac{3C_1-C_2}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{C_1+2C_2}{7}\end{array}\right)$$

선도변수: k_1,k_2

자유변수: $k_3=t$

$$\begin{pmatrix}k_1=\frac{8}{7}t+\frac{3C_1-C_2}{7}\\k_2=\frac{5}{7}t+\frac{C_1+2C_2}{7}\\k_3=t\end{pmatrix}$$

$\therefore$ R^2를 생성가능하다.

정답: $\boxed{R^2\text{을 생성가능}}$

33. $k_1(3,0,5)+k_2(5,-1,2)+k_3(-2,1,3)=(0,0,0)$

$(3k_1+5k_2-2k_3,-k_2+k_3,5k_1+2k_2+3k_3)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}3k_1+5k_2-2k_3=0\\-k_2+k_3=0\\5k_1+2k_2+3k_3=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&-2&0\\0&-1&1&0\\5&2&3&0\end{array}\right)$$

A

$Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ A는 가역 $\Leftrightarrow\det(A)\neq0\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3&5&-2\\0&-1&1\\5&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&3\\0&-1&1\\5&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0$$

$\det(A)=0$ 이므로 선형종속이다.

정답: $\boxed{\text{벡터공간 V에서 선형 종속이다.}}$

34. $k_1(2+2x+3x^2)+k_2(4+3x+2x^2)+k_3(-2-x+x^2)=0$

$$\begin{cases}2k_1+4k_2-2k_3=0\\ 2k_1+3k_2-k_3=0\\ 3k_1+2k_2+k_3=0\end{cases} \Rightarrow \left(\overset{A}{\boxed{\begin{matrix}2&4&-2\\2&3&-1\\3&2&1\end{matrix}}}\;\middle|\;\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)$$

A는 가역 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&4&-2\\2&3&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&8&0\\5&5&0\\3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\3&2&1\end{vmatrix}=0$$

$\det(A)=0$ 이므로 선형 종속이다.

정답! $\boxed{\text{벡터공간 V에서 선형 종속이다.}}$

35. $k_1(3x^2-2x-1)+k_2(5x^2-x-1)+k_3(x^2-2x-1)=0$

$$\begin{cases}3k_1+5k_2+k_3=0\\ -2k_1-k_2-2k_3=0\\ -k_1-k_1-k_3=0\end{cases} \Rightarrow \left(\overset{A}{\boxed{\begin{matrix}3&5&1\\-2&-1&-2\\-1&-1&-1\end{matrix}}}\;\middle|\;\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)$$

A는 가역 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3&5&1\\-2&-1&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&-4\\-1&0&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}-2&-4\\-1&-1\end{vmatrix}=-2$$

$\det(A)\neq -2$ 이므로 선형독립이다.

정답! $\boxed{\text{벡터공간 V에서 선형 독립이다.}}$

36. 벡터공간 V의 기저는 선형독립과 생성을 가지는 확인해야 한다.

① 선형독립 확인

$k_1(3,1,-4)+k_2(2,-2,5)+k_3(4,-1,-3)=(0,0,0)$

$(3k_1+2k_2+4k_3,\ k_1-2k_2-k_3,\ -4k_1+5k_2-3k_3)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} 3k_1+2k_2+4k_3=0 \\ k_1-2k_2-k_3=0 \\ -4k_1+5k_2-3k_3=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \end{matrix}}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

A는 가역 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -(-56+21)=35$$

$\det(A)=35\neq 0$ ∴ 선형독립이다.

② 생성 확인

임의의 벡터 $b=(b_1,b_2,b_3)$

$k_1(3,1,-4)+k_2(2,-2,5)+k_3(4,-1,-3)=(b_1,b_2,b_3)$

$$\begin{cases} 3k_1+2k_2+4k_3=b_1 \\ k_1-2k_2-k_3=b_2 \\ -4k_1+5k_2-3k_3=b_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \end{matrix}}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right)$$

임의의 b, $Ax=b$의 해가 존재하면 A는 가역이다.

$\det(A)=35\neq 0$ ∴ R^3의 생성이다.

정답! $\boxed{\text{V의 기저이다.}}$

37. 벡터공간 V의 기저는 선형독립과 생성을 가지는 확인해야 한다.

① 선형독립 확인

$$k_1(1-3x+2x^2)+k_2(1-2x^2)+k_3(2-3x)=0$$

$$\begin{cases} k_1+k_2+2k_3=0 \\ -3k_1-3k_3=0 \\ 2k_1-2k_2=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

A는 가역 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\det(A)=0$ 이므로 선형종속이다.

선형독립이 아니므로 V의 기저가 아니다.

정답! $\boxed{\text{V의 기저가 아니다.}}$

38. 벡터공간 V의 기저는 선형독립과 생성을 가지는 확인해야 한다.

① 선형독립 확인

$$k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+k_3 & k_2-k_3-k_4 \\ k_1-k_2+k_3+k_4 & k_1+k_2-k_3-k_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

A는 가역 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$이 자명해만 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 선형독립

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$\det(A)=0$ 이므로 선형종속이다.

선형독립이 아니므로 V의 기저가 아니다.

정답! $\boxed{\text{V의 기저가 아니다.}}$

39. 생성확인

임의의 벡터 $b=(b_1, b_2)$, $k_1(1,-2)+k_2(1,-3)+k_3(-2,4)=(b_1,b_2)$

$\begin{cases} k_1+k_2-2k_3=b_1 \\ -2k_1-3k_2+4k_3=b_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b_1 \\ -2 & -3 & 4 & b_2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2b_1+b_2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3b_1+b_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2b_1-b_2 \end{array}\right)$ 선도변수: k_1, k_2 자유변수: $k_3=t$

$k_1=2t+3b_1+b_2$, $k_2=-2b_1-b_2$, $k_3=t$ $\Rightarrow$ R^2를 생성 한다.

선형독립 확인

$k_1(1,-2)+k_2(1,-3)+k_3(-2,4)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2-2k_3=0 \\ -2k_1-3k_2+4k_3=0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow k_2=0,\ k_1=2k_3 \Rightarrow$ 자명해가 아니므로 선형종속

정답: $\boxed{\text{ⓑ, ⓔ}}$