▣ **정의**

- R^n 상의 벡터 u와 v 의 사잇각 θ는 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|},\ 0 \le \theta \le \pi$$

- **회전**연산자(rotation operator)

  ☐1 2차원에서

  R^2 상의 점을 원점을 중심으로 시계반대방향으로 θ 만큼 회전시킨다.

시계 방향 : $-\theta$

$$\Rightarrow \quad T(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix},\ T(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \boxed{\therefore\ A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}$$

▣ **정의 1**

- A의 **랭크(rank,** 계수, 유효차수) : $\mathrm{rank}(A)$ = A의 행공간과 열공간의 공통차원
- A의 **무효차수(nullity)** : $\mathrm{nullity}(A)$ = A의 영공간의 차원 ; 자유 변수개수

☐ **정리 4.9.3**

A 가 $m\times n$ 행렬이다.

(a) $\mathrm{rank}(A)$: $A\mathrm{x} = 0$의 일반해에 있는 선도변수의 개수

(b) $\mathrm{nullity}(A)$: $A\mathrm{x} = 0$의 일반해에 있는 매개변수의 개수

☐ **정리 4.9.7**

A는 $m\times n$ 행렬

(a) $(A$의 영공간$)^\perp$ = $(A$의 행공간$)$ (: R^n의 부분공간) (⇔ A의 영공간 = (A의 행공간)$^\perp$)

(b) $(A^T$의 영공간$)^\perp$ = $(A$의 열공간$)$ (: R^m의 부분공간) (⇔ A^T의 영공간 = (A의 열공간)$^\perp$)

☐ **정리 6.3.2**

- $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 직교기저.

$$\mathrm{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{u} = \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle}{\|\mathrm{v}_n\|^2}\mathrm{v}_n}$$

- $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 정규직교기저.

$$\mathrm{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{u} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle \mathrm{v}_1 + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle \mathrm{v}_2 + \cdots + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle \mathrm{v}_n}$$

☐ **정리**

- A가 $n\times n$ 행렬이고, k는 임의의 스칼라 $\Rightarrow$ $\det(kA) = k^n\det(A)$

☐ **정리 2.3.5**

- A : 가역행렬 $\Rightarrow$ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

□ **정리 2.2.3**

A가 $n \times n$ 행렬이다.

(a) B : A의 한 행 또는 한 열에 스칼라 k를 곱해서 얻은 행렬 $\Rightarrow$ $\det(B) = k\det(A)$

(b) B : A의 두 행을 교환 또는 두 열을 교환해서 얻은 행렬 $\Rightarrow$ $\det(B) = -\det(A)$

(c) B : A의 한 행(또는 열)에 상수배를 해서 다른 행(또는 열)에 더해서 얻은 행렬

$\Rightarrow$ $\det(B) = \det(A)$

□ **정리 6.3.5 [그람-슈미트 과정(Gram-Schmidt process)]**

- 영이 아닌 모든 유한차원의 내적공간은 정규직교기저를 갖는다.

[증명] W : 영이 아닌 임의의 유한차원인 내적공간, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$: W의 임의의 기저

($\Rightarrow$ W가 직교기저 가짐을 보이자. $\Rightarrow$ 정규화)

단계 1 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ 이라 하자.

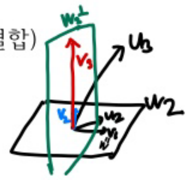
$\text{proj}_{W_1^\perp} u_2$

단계 2 $W_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$라 하면, 정리 6.3.3의 Note에서 $\mathbf{u}_2 = \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \quad : \quad \text{정리 6.3.4}$$

(여기서 $\mathbf{v}_2$는 $\mathbf{v}_1$과 직교한다. $\therefore$ $\mathbf{v}_2$는 $\mathbf{u}_1$과 직교)

단계 3 $W_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$라 하면, $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ($\because$ $\mathbf{v}_2$는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$의 결합)



$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

(여기서 $\mathbf{v}_3$는 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$와 직교한다. $\therefore$ $\mathbf{v}_3$는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$와도 직교)

단계 4 $W_3 = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$라 하면, $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \text{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$$

(여기서 $\mathbf{v}_4$는 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$와 직교한다. $\therefore$ $\mathbf{v}_4$는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$와도 직교)

$\vdots$

$\Rightarrow$ r번 반복해서 선형독립인 직교집합 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$을 얻을 수 있다.

이 집합이 W의 <u>직교기저</u>가 된다.

$\Rightarrow$ 이 집합을 정규화하면 <u>정규직교기저</u>가 된다.

$$R = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{u}_1, \mathrm{q}_1 \rangle & \langle \mathrm{u}_2, \mathrm{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathrm{u}_n, \mathrm{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathrm{u}_2, \mathrm{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathrm{u}_n, \mathrm{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathrm{u}_n, \mathrm{q}_n \rangle \end{pmatrix}$$

- 주대각선 아래의 원소가 모두 0
- 주대각선의 원소는 모두 0이 아니다.