8.1 일반선형변환

▣ **정의 1**

V, W : 벡터공간, $T: V \rightarrow W$: 사상(함수 map)

V 안의 모든 벡터 v, u와 모든 스칼라 k에 대해 다음 두 성질을 만족하면

▪ **T는 V에서 W로의 선형변환(linear transformations)**이라 한다.

① $T(k\mathrm{u}) = kT(\mathrm{u})$: 동질성

② $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$: 합의 성질

▪ 특히 $V = W$일 때 T는 벡터공간 **V에서의 선형연산자(linear operator)**라 한다.

[Note]

$T: V \rightarrow W$가 선형변환이면 V 안의 벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r$와 스칼라 $k_1, k_2, \ldots, k_r$에 대해

$$T(k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_r\mathrm{v}_r) = k_1T(\mathrm{v}_1) + k_2T(\mathrm{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathrm{v}_r)$$

□ **정리 8.1.1**

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

(a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(b) V 안의 모든 벡터 u, v에 대해 $T(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) - T(\mathrm{v})$

(c) V 안의 모든 벡터 u에 대해 $T(-\mathrm{v}) = -T(\mathrm{v})$

예제 1 (: 1.8절 행렬변환)

V : R^n의 열벡터인 벡터공간, W : R^m의 열벡터인 벡터공간

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 일 때, } \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \text{에 대해}$$

◆ $T: V \rightarrow W$를 $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$로 정의하면 T는 선형변환이다.

[풀이]

① $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$, k는 스칼라이다. $\Rightarrow$ $T(k\mathrm{x}) = A(k\mathrm{x}) = k(A\mathrm{x}) = kT(\mathrm{x})$

② $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{V}$ $\Rightarrow$ $T(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) = A(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) = A\mathrm{x}_1 + A\mathrm{x}_2 = T(\mathrm{x}_1) + T(\mathrm{x}_2)$

예제 2 V, W : 벡터공간, 사상 $T: V \rightarrow W$는 $T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}$를 만족한다.

$\Rightarrow$ T는 선형변환

[풀이]

$\boxed{\text{예제 3}}$ V : 벡터공간, 사상 $I:\ V \to V$는 $I(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$를 만족한다. $\Rightarrow$ I는 선형연산자

[풀이]

[Note]

- 예제 2의 선형변환 : **영변환(zero transformation)**
- 예제 3의 선형변환 : **항등연산자(identity operator)**

$\boxed{\text{예제 5}}$ P_n : n차 다항식들의 집합

$T:\ P_n \to P_{n+1}$를 $\mathrm{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$에 대해

$T(\mathrm{p}) = T(p(x)) = xp(x)$로 정의하자. $\Rightarrow$ T는 선형변환

[풀이]

$\boxed{\text{예제 6}}$ V : 내적공간, v_0는 V의 임의의 고정된 벡터이다.

사상 $T:\ V \to R$는 $T(\mathrm{x}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_0 \rangle$로 정의하자. $\Rightarrow$ T는 선형변환

[풀이]

$\boxed{\text{예제 7}}$ M_{nn}에서 다음 변환이 선형변환인지 결정하라.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

[풀이]

□ **정리 8.1.2**

V : 유한차원 벡터공간, $T:\ V \to W$ 는 선형변환. $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: V의 기저.

$\Rightarrow$ V의 임의의 벡터 v의 상은 다음과 같이 표현된다.

$$T(\mathrm{v}) = c_1 T(\mathrm{v}_1) + c_2 T(\mathrm{v}_2) + \cdots + c_n T(\mathrm{v}_n)$$

이때 $c_1, c_2, \ldots, c_n$은 v를 S의 선형결합으로 표현하는데 사용된 계수이다.

(즉, $\mathrm{v} = c_1 \mathrm{v}_1 + c_2 \mathrm{v}_2 + \cdots + c_n \mathrm{v}_n$)

예제 10 R^3의 기저는 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$, $\mathrm{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathrm{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathrm{v}_3 = (1, 0, 0)$ 이고,
$T: R^3 \to R^2$는 선형변환으로 다음 사상관계를 갖는다.

$T(\mathrm{v}_1) = (1, 0)$, $T(\mathrm{v}_2) = (2, -1)$, $T(\mathrm{v}_3) = (4, 3)$

$T(x_1, x_2, x_3)$의 공식을 구하고 $T(2, -3, 5)$를 구하여라.

[풀이]

▣ **정의 2**

$T: V \to W$: 선형변환

- T의 **핵(kernel)** : $\ker(T) = \{ \mathrm{v} \in V \mid T(\mathrm{v}) = \mathbf{0} \}$ (또는 $\mathrm{Ker}(T)$)
- T의 **치역(range)** : $R(T) = \{ T(\mathrm{v}) \mid \mathrm{v} \in V \}$ (또는 $\mathrm{Im}(T)$: image of T)

예제 13 A는 $m \times n$ 행렬이고, $T_A : R^n \to R^m$, $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$이다.
$\ker(T_A)$와 $R(T_A)$를 구하여라.

[풀이]

[Note]

$T_A : R^n \to R^m$: 행렬변환

- $\ker(T_A)$ = "$A\mathrm{x} = \mathbf{0}$"의 해공간 = A의 영공간 = $\mathrm{null}(A)$
- $R(T_A)$ = A의 열공간 = $\mathrm{col}(A)$

예제 14 $T: V \to W$는 영변환이다. $\ker(T)$와 $R(T)$를 구하여라.

[풀이]

예제 15 항등연산자 $I: V \to V$의 $\ker(I)$와 $R(I)$를 구하여라.
[풀이]

□ **정리 8.1.3**
$T: V \to W$: 선형변환
(a) $\ker(T)$: V의 부분공간
(b) $\mathrm{Im}(T)$: W의 부분공간

[증명]

▣ **정의 3**
$T: V \to W$: 선형변환
- $\mathrm{Im}(T)$이 유한차원이면, 그 차원을 T의 **랭크(rank)**라 하고 $\mathrm{rank}(T)$로 표기한다.
- $\ker(T)$가 유한차원이면, 그 차원을 T의 **무효차수(nullity)**라 하고 $\mathrm{nullity}(T)$로 표기한다.

□ **정리 8.1.4**
- $T: V \to W$: n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T) = n$$

[Note]

A는 $m \times n$ 행렬이고, $T_A : R^n \to R^m$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$이다.

$\Rightarrow$ $\ker(T_A) = A$의 영공간

$\mathrm{Im}(T_A) = A$의 열공간

$\therefore$ $\mathrm{rank}(T_A) + \mathrm{nullity}(T_A) = n$ (정리 4.8.2 참고)

8.2 합성과 역변환

▣ **정의 1/ 정의 2**

$T: V \to W$; 선형변환

- T가 V의 서로 다른 벡터를 W의 서로 다른 벡터로 사상하면,

  T를 **일대일(one-to-one)** 또는 **단사(injective)**라 한다.
- W 내의 모든 벡터가 V 내의 최소한 한 개의 벡터의 상이면,

  T를 **전사(onto/surjective)** 또는 W **위로의 변환(onto** W**)**라 한다.

[Note]

$T: V \to W$; 선형변환

- T가 단사 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{u} \neq \mathrm{v} \Rightarrow T(\mathrm{u}) \neq T(\mathrm{v})$

  $\Leftrightarrow$ $T(\mathrm{u}) = T(\mathrm{v}) \Rightarrow \mathrm{u} = \mathrm{v}$

- T가 전사 $\Leftrightarrow$ $R(T) = W$

  $\Leftrightarrow$ 임의의 $\mathrm{w} \in W$ 에 대해 $T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}$인 $\mathrm{v} \in V$ 가 존재한다.

□ **정리 8.2.1**

$T: V \to W$; 선형변환. 다음 명제는 동등하다.

(a) T는 단사이다.

(b) $\ker(T) = \{0\}$

[증명]

□ **정리 8.2.2**

V : 유한차원의 벡터공간, $T: V \to V$; 선형연산자. 다음 명제는 동등하다.

(a) T는 단사이다.

(b) $\ker(T) = \{0\}$

(c) T가 전사이다. 즉 $\mathrm{Im}(T) = V$

Ex $L : R^2 \to R^2$는 $L(x, y) = (3x - y,\ x + 4y)$로 정의된 선형변환이다.

$\ker(L)$와 $\mathrm{Im}(L)$를 구하고 L이 단사인지, 전사인지 판정하여라.

[풀이]

예제 4 $T: P_n \to P_{n+1}$를 $\mathrm{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$에 대해 $T(\mathrm{p}) = T(p(x)) = xp(x)$로 정의하자. T가 단사인지, 전사인지 판정하여라.

[풀이]

□ **정리**

$T_A : R^n \to R^n$의 표준행렬 A가 $n \times n$ 행렬이면, 다음 명제들은 동등하다.

(a) A가 가역이다.

(b) T_A는 단사이다.

(c) T_A는 전사이다.

[증명]

□ **정리 8.2.3**

$T_A : R^n \to R^m$: 행렬변환

(a) T_A는 단사이다. $\Leftrightarrow$ A의 열들이 선형독립

(b) T_A는 전사이다. $\Leftrightarrow$ A의 열들이 R^m을 생성한다.

[증명]

▣ **정의**

$T: V \to W$; 단사인 선형변환

- T의 **역(inverse/역변환(inverse transform))**, $T^{-1} : R(T) \to V$은 다음과 같다.

$$T^{-1}(\mathrm{w}) = \mathrm{v} \qquad (\mathrm{w} \in R(T)\text{이고, v와 w의 관계가 } T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}\text{일 때})$$

▣ **정의**

$T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$; 선형변환

- T_1과 T_2의 **합성(composition)**, $T_2 \circ T_1 : U \to W$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$(T_2 \circ T_1)(\mathrm{u}) = T_2(T_1(\mathrm{u})) \ , \quad \mathrm{u} \in U$$

[Note]

$T: V \to W$; 단사인 선형변환, $T^{-1} : R(T) \to V$

- $T^{-1}(\mathrm{w}) = \mathrm{v}$ $\Leftrightarrow$ $T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}$
- $T^{-1}(T(\mathrm{v})) = \mathrm{v}$, 즉, $T^{-1} \circ T = I$
- $T(T^{-1}(\mathrm{w})) = \mathrm{w}$, 즉, $T \circ T^{-1} = I$

□ **정리 8.2.5**

$T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$; 선형변환

$\Rightarrow$ $T_2 \circ T_1 : U \to W$: 선형변환

[증명] 각자!!

$\boxed{\text{예제 10}}$ 각자!!

[Note] $\boxed{\text{예제 11}}$

- $T: V \to W$; 선형변환, $I : V \to V$: 항등연산자. $\Rightarrow$ $T \circ I = T$
- $T: V \to W$; 선형변환, $I : W \to W$: 항등연산자. $\Rightarrow$ $I \circ T = T$

□ **정리 8.2.6**

$T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$; 단사인 선형변환

- $T_2 \circ T_1$: 단사
- $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$

[증명]

□ **정리 8.2.4**

A가 $n\times n$행렬일 때 다음 명제들은 동등하다.

(a) A는 가역이다.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명해만을 갖는다.

(c) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.

(d) A는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 일치한다.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 유일한 해를 갖는다.

(g) $\det(A) \neq 0$

(h) A의 열벡터들이 선형독립이다.

(i) A의 행벡터들이 선형독립이다.

(j) A의 열벡터들이 R^n을 생성한다.

(k) A의 행벡터들이 R^n을 생성한다.

(l) A의 열벡터들이 R^n의 기저를 이룬다.

(m) A의 행벡터들이 R^n의 기저를 이룬다.

(n) A의 랭크가 n이다.

(o) A의 무효차수가 0이다.

(p) A의 영공간의 직교여공간이 R^n이다.

(q) A의 행공간의 직교여공간이 $\{\mathbf{0}\}$이다.

(r) $\lambda = 0$이 A의 고유값이 아니다.

(s) A^TA가 가역이다.

(t) T_A의 핵(kernel)이 $\{\mathbf{0}\}$이다.

(u) T_A의 치역이 R^n이다. (즉, T_A는 전사이다.)

(v) T_A가 단사이다.

8.3 동형사상

▣ **정의 1**

선형변환 $T: V \to W$가 단사이고, 전사이면

- T를 **동형사상(isomorphism/전단사)**이라 하고
- V 와 W는 **동형(isomorphic)**이라 한다.
- 기호 : $V \cong W$

□ **정리 8.3.1**

- 모든 n차원 실벡터공간은 R^n과 동형이다.

[증명]

V : n차원 실벡터공간, $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$를 V의 임의의 (순서)기저라 하자.

$\Rightarrow$ 임의의 $\mathrm{u} \in V$는 $\mathrm{u} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_n\mathrm{v}_n$ 인 표현을 유일하게 갖는다.

$T: V \to R^n$을 $T(\mathrm{u}) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$으로 정의하자. 즉, $T(\mathrm{u}) = (\mathrm{u})_S$

$\Rightarrow$ T는 선형변환이고, 단사이고 전사이다.

[Note]

- V는 n차원 실벡터공간 $\Rightarrow$ $V \cong R^n$
- $P_{n-1} \cong R^n$

8.4 일반선형변환의 행렬

■ V : n차원 벡터공간, W : m차원 벡터공간, $T: V \to W$; 선형변환

$\Rightarrow$ $V \cong R^n$, $W \cong R^m$

이때 T를 행렬변환으로 나타낼 수 있다.

$B = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n\}$: V의 기저

$B' = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m\}$: W의 기저

$\mathrm{x} \in V$ 와 $T(\mathrm{x})$의 좌표행렬을 각각 $[\mathrm{x}]_B$, $[T(\mathrm{x})]_{B'}$라 하자.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{x} & \xrightarrow{T} & T(\mathrm{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathrm{x}]_B & \xrightarrow[A]{} & [T(\mathrm{x})]_{B'} \end{array}$$

$\Leftarrow$ 여기서 행렬 A를 찾기!!!

◆ 위 식을 만족하는 $m \times n$ 행렬 A는 $A[\mathrm{x}]_B = [T(\mathrm{x})]_{\mathrm{B}'}$를 만족한다.

$\therefore$ V의 기저벡터들에 대해 $A[\mathrm{u}_1]_B = [T(\mathrm{u}_1)]_{B'}$, $A[\mathrm{u}_2]_B = [T(\mathrm{u}_2)]_{B'}$, $\cdots$, $A[\mathrm{u}_n]_B = [T(\mathrm{u}_n)]_{B'}$

V의 기저벡터들의 좌표행렬 : $[\mathrm{u}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\mathrm{u}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$ $[\mathrm{u}_n]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 라 하면 $A[\mathrm{u}_1]_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A[\mathrm{u}_2]_B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, $\cdots$ $A[\mathrm{u}_n]_B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

$\therefore$ $A = ([T(\mathrm{u}_1)]_{B'} \ \ [T(\mathrm{u}_2)]_{B'} \ \ \cdots \ \ [T(\mathrm{u}_n)]_{B'})$

■ 이 행렬을 **기저 B와 B'에 관한 T의 행렬**이라 하고 기호로 $[T]_{B',B}$로 표기한다.

즉, $[T]_{B',B} = ([T(\mathrm{u}_1)]_{B'} \ \ [T(\mathrm{u}_2)]_{B'} \ \ \cdots \ \ [T(\mathrm{u}_n)]_{B'})$

$[T]_{B',B}[\mathrm{x}]_B = [T(\mathrm{x})]_{B'}$

[Note]

◆ $T_A\,:\,R^n \to R^m$ 는 행렬변환이고, R^n과 R^m의 표준기저를 각각 B, B'이라 하자.

$$\Rightarrow \qquad [T_A]_{B',\,B} = A \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{x} & \xrightarrow{T_A} & T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} \\ \| & & \| \\ [\mathrm{x}]_B & \xrightarrow[{[T_A]_{B',B}}]{} & [T_A(\mathrm{x})]_{B'} \end{array}$$

$\boxed{\text{예제 1}}$ $T:\,P_1 \to P_2$를 $T(\mathrm{p}) = T(p(x)) = xp(x)$인 선형변환이라 하자.
표준기저 $B = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$, $B' = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$에 대한 행렬을 찾아라.

[풀이]

$\boxed{\text{예제 2}}$ T를 예제 1의 선형변환이라 하자. $T(a+bx)$를 예제 1에서 구한 행렬을 이용하여 구하여라.

[풀이]

$\boxed{\text{예제 3}}$ $T:\,R^2 \to R^3$을 $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$라 정의하자.

R^2의 기저 $B = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$와 R^3의 기저 $B' = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ 에 관한 T의 행렬을 찾아라.

$$\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[풀이]

[Note] 예제 3에서 R^2와 R^3의 표준기저 E와 E'에 관한 T의 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix} = [T]_{E',E}$이다.

[Note]

- $W = V$일 때 선형연산자 $T: V \to V$의 행렬을 구성할 때 보통 $B = B'$로 선택하는 것이 일반적 이때 $[T]_{B,B}$를 $[T]_B$로 표기하고, $[T]_B$ 를 **기저 B에 대한 T의 행렬**이라 한다.

예제 5 $T: P_2 \to P_2$를 $T(p(x)) = p(3x-5)$라 하자.

(a) 기저 $B = \{1, x, x^2\}$에 대한 $[T]_B$를 구하여라.

(b) 간접과정을 사용하여 $T(1+2x+3x^2)$를 계산하라.

(c) $T(1+2x+3x^2)$을 직접 계산하여 (b)의 결과를 확인하라.

[풀이]

예제 3 각자!!!

□ **정리 8.4.1**

- $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$; 선형변환

B : U의 기저, B'' : V의 기저, B' : W의 기저

$\Rightarrow$ $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}[T_1]_{B'',B}$

□ **정리 8.4.2**

$T: V \to V$는 선형연산자이고, B가 V의 기저일 때 다음은 동등하다.

(a) T는 단사이다.

(b) $[T]_B$는 가역이다.

또한 이 동등조건이 성립하면 $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$

8.5 닮음

Ex $T: R^2 \to R^2$: 선형연산자

R^2의 표준기저를 $B = \{e_1, e_2\}$라 할 때 $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$이다.

R^2의 기저 $B' = \{u_1', u_2'\}$에 관한 T의 행렬, $[T]_{B'}$ 을 찾아라. $u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

[풀이]

[Note]

- 위 예제에서 하나의 연산자 T를 표현한 행렬이 기저에 따라 다른 행렬로 표현된다.
- 한 기저에 대해서 T를 표현한 행렬이 다른 기저에 대해서 T를 표현한 행렬보다 단순한 행렬이 될 수 있다.

[복습] 전이행렬(기저변환행렬)

- $P_{B' \to B} = ([u'_1]_B \ [u'_2]_B \cdots [u'_n]_B)$: B'에서 B로의 전이행렬(기저변환행렬)
- $P_{B \to B'} = ([u_1]_{B'} \ [u_2]_{B'} \cdots [u_n]_{B'})$: B에서 B'으로의 전이행렬(기저변환행렬)
- $P_{B \to B'}[v]_B = [v]_{B'}$, • $P_{B' \to B}[v]_{B'} = [v]_B$
- $P_{B \to B'}^{-1} = P_{B' \to B}$,

□ **정리 8.5.1**

B와 B'은 유한차원 벡터공간 V의 기저이고, $I: V \to V$는 항등연산자이다

$\Rightarrow$ $P_{B \to B'} = [I]_{B', B}$ 이고 $P_{B' \to B} = [I]_{B, B'}$

[증명] $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$: V의 기저라 하자.

- B와 B'은 유한차원 벡터공간 V의 기저이고, $T: V \to V$는 선형연산자이다.

  $\Rightarrow$ 두 행렬 $[T]_B$와 $[T]_{B'}$의 관계는 무엇인가?

□ **정리 8.5.2**

▪ $T: V \to V$: 유한차원 벡터공간 V 상의 선형연산자.
$B,\ B'$: V의 기저

$\Rightarrow$ $\boxed{[T]_{B'} = P_{B \to B'}[T]_B P_{B' \to B}}$ $\boxed{= P^{-1}[T]_B P}$

[증명]

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{I} & V & \xrightarrow{T} & V & \xrightarrow{I} & V \\ B' & & B & & B & & B' \end{array}$$ 이고, $T = I \circ T \circ I$

$$\Rightarrow [T]_{B',B'} = [I \circ T \circ I]_{B',B'} = [I]_{B',B}[T]_{B,B}[I]_{B,B'} = P_{B \to B'}[T]_B P_{B' \to B}$$

[Note]

◆ 정리 8.5.2에서 $P_{B' \to B} = P$라 하면 $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ 이다.

◆ 즉 두 행렬 $[T]_B$와 $[T]_{B'}$은 닮은 행렬이다.

□ **정리 8.5.3**

▪ 두 행렬 A와 B가 닮은 행렬 $\Leftrightarrow$ 두 행렬이 동일한 선형연산자를 표현한다.
특히, $B = P^{-1}AP$라면

P는 행렬 B를 표현하는 기저에서부터 행렬 A를 표현하는 기저로의 전이행렬이다.

(즉, $B = [T]_{B_2}$ 이고, $A = [T]_{B_1}$ 이면 $P = P_{B_2 \to B_1}$)

▣ **정의**

▪ 선형변환 T의 **행렬식**은 $\det(T) = \det([T]_B)$로 정의한다. 이때 B는 임의의 기저이다.

예제 1/2 $T: R^2 \to R^2$: 선형연산자. 표준기저 B에 관한 행렬이 $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$이다.

(1) $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ 를 만족하는 행렬 P를 찾아라.

(2) 기저 $B' = \left\{\mathrm{u}_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{u}_2{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$에 관한 T의 행렬, $[T]_{B'}$을 구하여라.

(3) $\det(T)$를 구하여라.

[풀이]