1.1 연립일차방정식의 소개

▣ **정의**

- n개의 **변수/미지수** $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$**의 일차(선형)방정식**(linear equation) :

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b}$$

이때 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$은 상수이고 모든 a_i가 0은 아니다.

- $b = 0$일 때 $\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0}$

: **변수** $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$**의 동차 일차방정식**(homogeneous linear equation)

▣ **정의**

- 일차방정식들의 유한집합을 **연립일차(선형)방정식**(system of linear equations) 또는 **선형계**(linear system)라 한다.

[Note] n개의 변수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$에 대한 m개의 일차방정식으로 이루어진 일반적인 연립일차방정식:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 위 연립일차방정식의 해 $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \cdots,\ x_n = s_n$을 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$로 쓴다.

▣ **정의**

- 연립방정식이 적어도 하나 이상의 해를 가지면 연립방정식이 **일치한다**(consistent)라고 하고,
- 해가 없으면 **불일치한다**(inconsistent)라고 한다.

[Note] 2개의 미지수를 갖는 연립일차방정식

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$\Rightarrow$ 두 직선식의 교점이 해이다. 따라서 해 (x, y)는 다음 세 가지 중 하나이다.

① 두 직선이 평행 : 교점이 없다 : 해가 없다.

② 두 직선이 한 점에서만 만난다 : 해가 유일

③ 두 직선이 일치한다 : 무수히 많은 교점 : 무수히 많은 해

[Note] 3개의 미지수를 갖는 연립일차방정식

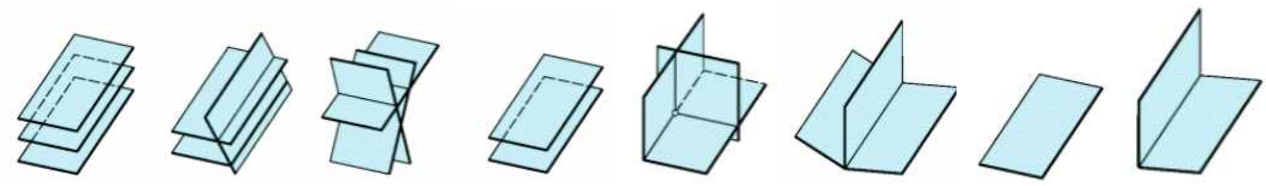
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 세 평면식의 교점이 해이다. 따라서 해 (x, y, z)는 다음 세 가지 중 하나이다.

① 해가 없다

② 세 평면이 한 점에서만 만난다 : 해가 유일

③ 무수히 많은 교점 : 무수히 많은 해



[Note]

◆ 모든 연립일차방정식의 해는 다음 세 가지 중 하나이다.

① 해가 없다 ② 해가 유일하다 ③ 무수히 많은 해를 갖는다.

$\boxed{\text{예제 2}}$ $\boxed{\text{예제 3}}$ $\boxed{\text{예제 4}}$ $\boxed{\text{예제 5}}$ **각자!!!**

▣ **정의**

■ 연립일차방정식의 숫자들의 배열인 다음 행렬을 **첨가행렬(augmented matrix)**이라 한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

▣ **정의 1(1.3절)**

■ **행렬(matrix)**은 숫자들의 직사각형 배열이다.

■ 배열 안에 있는 숫자들을 행렬의 **원소(entry)**라 한다.

■ 행렬의 수평선을 **행(row)**이라 하고, 수직선을 **열(column)**이라 한다.

▣ **정의 [기본 행연산(elementary row operation)]**

■ **기본 행연산(elementary row operation)** : 첨가행렬(일반적으로 행렬 A)에 대한 다음 연산

1. 한 행에 0이 아닌 상수 c를 곱하기

2. 두 행을 바꾸기

3. 한 행에 상수 c를 곱한 후 다른 행에 더하기

$\boxed{\text{예제 6}}$ 연립방정식의 해를 첨가행렬을 이용하여 기본행연산으로 구하자.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

⇨ 첫 번째 식에 -2를 곱헤서 두 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 두 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 첫 번째 식에 -3을 곱해서 세 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 세 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 두 번째 식에 $\dfrac{1}{2}$를 곱한다.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\dfrac{7}{2}z=-\dfrac{17}{2} \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 두 번째 식에 -3을 곱해서 세 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 세 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\dfrac{7}{2}z=-\dfrac{17}{2} \\ -\dfrac{1}{2}z=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 세 번째 식에 -2를 곱한다.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\dfrac{7}{2}z=-\dfrac{17}{2} \\ z=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 두 번째 식에 -1을 곱해서 첫 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 첫 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x+\dfrac{11}{2}z=\dfrac{35}{2} \\ y-\dfrac{7}{2}z=-\dfrac{17}{2} \\ z=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 세 번째 식에 $-\dfrac{11}{2}$을 곱해서 첫 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 첫 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x=1 \\ y-\dfrac{7}{2}z=-\dfrac{17}{2} \\ z=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

⇨ 세 번째 식에 $\dfrac{7}{2}$을 곱해서 두 번째 식에 더한다.(더한 결과의 식은 두 번째에 쓴다.)

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

1.2 가우스 소거법

▣ **정의**

■ 다음 조건을 만족하는 행렬을 **기약 행사다리꼴(RREF : reduced row echelon form)**이라 한다.

① 0이 아닌 원소를 갖는 행에서 맨 처음 나오는 0이 아닌 수는 1이어야 한다.
이것을 **선도 1(leading 1)**이라 부른다.

② 모든 원소가 0인 행은 행렬의 맨 밑으로 내려가야 한다.

③ 0이 아닌 원소를 갖는 연속된 두 행은 밑에 있는 행의 선도 1이 위에 있는 행의 선도 1보다 오른쪽에 있다.

④ 선도 1이 있는 열의 나머지 원소들은 모두 0이다.

■ 위의 조건에서 ①, ②, ③을 만족하는 행렬을 **행사다리꼴(REF: row echelon form)**이라 한다.

예제 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

예제 2 **각자!!!**

Ex 기본 행연산을 이용하여 다음 행렬을 기약 행사다리꼴로 만들어라. :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex 기본 행연산을 이용하여 다음 행렬을 기약 행사다리꼴로 만들어라. : **각자!!!**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

▶ P.15~P16(11판은 p.13~13) 소거법 설명: 기본 행연산으로 기약행사다리꼴 만드는 과정 : **각자!!!**

예제 3 **각자!!!**

예제 4 미지수 x, y, z에 대한 연립방정식의 첨가행렬에 기본 행연산으로 다음 기약 행사다리꼴을 얻었다. 연립방정식의 해를 구하여라. 또 해집합은 무엇을 나타내는지 말하라.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

[풀이] (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \quad +3z = -1 \\ \quad y-4z = \ \ 2 \end{array}$

: 이 식에서 x와 y는 첨가행렬에서 선도 1에 대응된다.
이를 **선도변수**라 한다.
나머지 변수들은 **자유변수**라 한다.

$\Rightarrow$ 자유변수를 매개변수로 취급하여 임의의 값 t로 놓고 x와 y를 구한다. : 즉, $z = t$

$\Rightarrow$ 선도변수를 자유변수로 표현하자.

$$x = -1-3z = -1-3t, \quad y = 2+4z = 2+4t$$

즉, 해는 $x = -1-3t$, $y = 2+4t$, $z = t$ (: 이 해는 t에 따라 무수히 많은 값을 가진다.)

이 해를 벡터로 표현하면 :

해집합이 나타내는 것은 :

(c) 첨가행렬에 대응하는 방정식 $\Leftrightarrow$ $x-5y+z=4$

따라서 선도변수 :

자유변수 :

▣ **정의 1**

- 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 때 매개변수로 표현된 해집합 : **일반해(general solution)**

▣ **정의**

- 기본 행연산을 이용하여 첨가행렬을 행사다리꼴로 만드는 것 : **가우스 소거법**
- 기본 행연산을 이용하여 첨가행렬을 기약 행사다리꼴로 만드는 것 : **가우스-요르단 소거법**

예제 5 가우스-요르단 소거법으로 다음을 풀어라.

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3 \qquad\quad +2x_5 \qquad\qquad = 0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6 = -1 \\ \qquad\qquad\quad 5x_3+10x_4 \qquad\quad +15x_6 = 5 \\ 2x_1+6x_2 \qquad\quad +8x_4+4x_5+18x_6 = 6 \end{cases}$$

[풀이]

▣ **정의**

- 상수 항이 모두 0인 연립일차방정식을 **동차 연립일차방정식**이라고 한다. (: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$)
- 동차 연립일차방정식은 반드시 $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0$인 해를 갖는다.
- 이 해를 **자명해(trivial solution)**라고 한다.
- 이 외의 다른 해가 있다면 이를 **비자명해(nontrivial solution)**라고 한다.

[Note] 연립방정식 $\begin{cases} a_1x+b_1y = 0 \\ a_2x+b_2y = 0 \end{cases}$ 의 해 :

☐ **정리 1.2.1**

- 동차 연립일차방정식이 n개의 미지수를 갖고,
  연립방정식의 첨가행렬의 기약 행사다리꼴이 r개의 0 아닌 행을 갖는다.(선도 1의 개수가 r개)
  $\Rightarrow$ 연립방정식은 $n-r$개의 자유변수를 갖는다.

☐ **정리 1.2.2**

- 동차연립방정식에서 방정식보다 미지수가 더 많으면 연립방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.

예제 6 예제 7 예제 8 **각자!!!**

1.3 행렬과 행렬 연산

▣ **정의 1**
- **행렬(matrix)**은 숫자들의 직사각형 배열이다.
- 배열 안에 있는 숫자들을 행렬의 **원소(entry)**라 한다.

예제 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $(2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -3)$, $\begin{pmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, (4)

▣ **정의**
- 행렬의 **크기**는 **행**(row/수평선)의 개수×**열**(column/수직선)의 개수로 표현한다.

Ex 예제 1의 행렬의 크기:

[Note]
- 일반적으로 $m\times n$ 행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{또는} \quad A = (a_{ij})$$

- A의 i행과 j열에 있는 원소는 $(A)_{ij}$로 나타내기도 한다.
  따라서 위의 표현에서 $(A)_{ij} = a_{ij}$ 이다.

▣ **정의**
- $1\times n$ 행렬은 **행벡터(row vector)**, $m\times 1$ 행렬은 **열벡터(column vector)**라 부르기도 한다.

[Note] 행벡터와 열벡터는 두 개의 첨자 표시가 필요 없으므로 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathrm{a} = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n), \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

▣ **정의**
- **정방행렬(정사각형행렬/square matrix)** : 행과 열의 개수가 같은 행렬
- **크기 n의 정방행렬(n차 정방행렬)** : $n\times n$ 행렬
- n차 정방행렬의 **주대각선(main diagonal)** : 원소 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}이 위치한 대각선

  대각원소 : 원소 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}

▣ **정의 2**

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$: $m\times n$ 행렬

■ 두 행렬이 **같다.** 즉, $A=B \quad \Leftrightarrow \quad$ 모든 $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$에 대해 $a_{ij}=b_{ij}$

예제 2 $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & x\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$이고 $A=B$일 때 $a,\ b,\ x$를 구하여라.

[풀이]

▣ **정의 3/4**

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$가 : $m\times n$ 행렬, $\quad c$: 스칼라

■ 두 행렬의 **합** : $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

■ **스칼라곱** : $cA=(ca_{ij})$

예제 4

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 7\\ -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

(1) $A+B=$

(2) $2A=$

(3) $A-3B=$

▣ **정의 5**

$A=(a_{ij})$: $m\times r$ 행렬, $\quad B=(b_{ij})$: $r\times n$ 행렬

■ 두 행렬의 **곱** AB 는 $m\times n$ 행렬이고 그 원소는 다음과 같이 정의된다.

$$(AB)ij \;=\; a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$$

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix}$$

예제 5 다음 두 행렬의 곱 AB와 BA를 구하여라.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = (1 \ \ 2 \ \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

[풀이]

▣ **정의** $m \times n$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$에 대하여

- A의 행(row)으로 만들어지는 R^n의 벡터

$$\begin{aligned} \mathrm{r}_1 &= (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}) \\ \mathrm{r}_2 &= (a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathrm{r}_m &= (a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}) \end{aligned}$$

: A의 **행벡터(row vectors)**라 하고, ($1 \times n$ 행렬/$1 \times n$ 벡터)

- A의 열(column)로 만들어지는 R^m의 벡터

$$\mathrm{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \ \mathrm{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \ \cdots \ \mathrm{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

: A의 **열벡터(column vectors)**라 한다. ($m \times 1$ 행렬/$m \times 1$ 벡터)

[Note]

◆ $m \times r$ 행렬 A의 행벡터 : $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_m$,

$r \times n$ 행렬 B의 열벡터 : $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n$

$\Rightarrow$ ◆ $AB = A(\mathrm{c}_1 \ \mathrm{c}_2 \cdots \mathrm{c}_n) = (A\mathrm{c}_1 \ A\mathrm{c}_2 \cdots A\mathrm{c}_n)$: AB는 열별로 계산

즉, AB의 j번째 열 $= A$(B의 j번째 열)

◆ $AB = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{r}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 B \\ \mathrm{r}_2 B \\ \vdots \\ \mathrm{r}_m B \end{pmatrix}$: AB는 행별로 계산

즉, AB의 i번째 행 $=$ (A의 i번째 행)B

◆ <행렬곱의 내적표현: 3.2절>

$$AB = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{r}_m \end{pmatrix} (\mathrm{c}_1 \ \ \mathrm{c}_2 \cdots \mathrm{c}_n) = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{c}_1 & \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{c}_2 & \cdots & \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{c}_n \\ \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{c}_1 & \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{c}_2 & \cdots & \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{c}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{r}_m \cdot \mathrm{c}_1 & \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{c}_2 & \cdots & \mathrm{r}_m \cdot \mathrm{c}_n \end{pmatrix}$$

▣ **정의 6**

$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_r$: 같은 크기의 행렬, $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r$: 스칼라

■ 다음을 행렬 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_r$의 **선형결합(일차결합/linear combination)**이라 한다.

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ \cdots \ + c_rA_r$$

이때 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r$을 위 선형결합의 **계수**라 한다.

☐ **정리 1.3.1**

■ A : $m \times n$ 행렬, x : $n \times 1$ 열벡터(행렬)

⇒ $A\mathrm{x}$는 계수가 x의 원소들인 A의 열벡터들의 선형결합으로 표현된다.

[증명] $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathrm{c}_1\ \mathrm{c}_2\ \cdots\ \mathrm{c}_n), \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1\mathrm{c}_1 + x_2\mathrm{c}_2 + \cdots + x_n\mathrm{c}_n$$

예제 8 $$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

오른쪽의 벡터 b를 A 행렬의 열벡터들의 선형결합으로 나타내어라.

[풀이]

[Note] 연립일차방정식의 행렬표현

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

□ **정리 3.4.3**

A : $m\times n$ 행렬

동차연립방정식 $A\mathrm{x}=\mathbf{0}$의 해집합은 A의 모든 행벡터에 직교하는 R^n의 벡터들로 구성된다.

[증명] A의 행벡터 : $\mathrm{r}_1,\ \mathrm{r}_2,\ldots,\mathrm{r}_m$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A\mathrm{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{r}_1\\ \mathrm{r}_2\\ \vdots\\ \mathrm{r}_m\end{pmatrix}\mathrm{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{r}_1\cdot\mathrm{x}\\ \mathrm{r}_2\cdot\mathrm{x}\\ \vdots\\ \mathrm{r}_m\cdot\mathrm{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

▣ **정의 7**

- $A=(a_{ij})$: $m\times n$ 행렬

  A의 전치행렬(transpose of A), A^T,은 다음과 같이 정의한다.

$$(A^T)_{ij}=a_{ji}$$

예제 11

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}^T=$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\5&6\end{pmatrix}^T=$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}^T=$

1.4 역행렬

□ **정리 1.4.1 [행렬 연산의 성질들]**

행렬들이 아래 연산들이 실행될 수 있는 크기를 갖고 있다고 가정한다.

(a) $A+B=B+A$

(b) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(c) $A(BC)=(AB)C$

(d)(f) $A(B\pm C)=AB\pm AC$

(e)(g) $(B\pm C)A=BA\pm CA$

(h)(i) $a(B\pm C)=aB\pm aC$

(j)(k) $(a\pm b)C=aC\pm bC$

(l) $a(bC)=(ab)C$

(m) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

▣ **정의**

- **영행렬(zero matrix)** : 모든 원소가 0인 행렬

  기호 : O 또는 $O_{m\times n}$으로 표시

Ex $\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad(0)$

□ **정리 1.4.2 [영행렬의 성질]**

c가 스칼라이고 행렬들은 연산을 실행할 수 있는 크기를 갖는다.

(a) $A+O = O+A = A$

(b) $A-O = A$

(c) $A-A = A+(-A) = O$

(d) $OA = O$

(e) $cA = O$ 이면 $c=0$ 또는 $A = O$이다.

예제 3 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad AB =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $AC =$

예제 4 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad AB =$

[Note]

- $AB = AC \quad \Rightarrow \quad B = C$: 참, 거짓
- $AB = O \quad \Rightarrow \quad A = O$ 또는 $B = O$: 참, 거짓

▣ **정의**

- **단위행렬(unit matrix/항등행렬(identity matrix))** : 정방행렬의 주 대각선의 원소들은 모두 1이고 나머지 원소들은 모두 0인 행렬
- 기호 : I 또는 I_n으로 표시

Ex (1), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□ **정리**

- A : $m\times n$ 행렬 $\Rightarrow$ $\boxed{AI_n = A \quad \text{이고} \quad I_m A = A}$

▣ **정의 1**

- A가 정방행렬이고 $AB = BA = I$를 만족하는 같은 크기의 행렬 B가 존재하면

  A는 **가역(invertible)**, 또는 **정칙(nonsingular)**이라고 하고,

  B를 A의 **역행렬(inverse)**이라고 한다.

- 만약 그와 같은 행렬 B가 존재하지 않으면 A는 **특이행렬(singular/singular matrix)**이라고 한다.

[Note]

- $AB = BA = I \qquad \Rightarrow \qquad A$와 B는 서로 역행렬이다.
- 한 행이나 한 열이 모두 0인 행렬은 특이행렬이다.

예제 6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$일 때 $AB = BA = I$인 행렬 B가 존재하는가?

[풀이] c_1, c_2, $\mathbf{0}$을 A의 열벡터라 하자. B가 임의의 3×3 행렬이라면

$$\Rightarrow BA = B(\mathrm{c}_1\ \mathrm{c}_2\ \mathbf{0}) = (B\mathrm{c}_1\ B\mathrm{c}_2\ \mathbf{0}) \neq \mathrm{I}$$

□ **정리 1.4.4**

- B와 C가 A의 역행렬 $\quad \Rightarrow \quad B = C$

[증명] B가 A의 역행렬이므로 $BA = I$이다. 양변의 오른쪽에 C를 곱하자.

[Note]

- A가 가역이면 A의 역행렬은 유일하다. A의 역행렬을 A^{-1}로 표시한다. 따라서,

$$AA^{-1} = I \ , \qquad A^{-1}A = I$$

□ **정리 1.4.5**

- 2×2 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 가역일 필요충분조건은 $ad - bc \neq 0$ 이고,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[증명] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$

예제 7 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} =$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} =$

□ **정리 1.4.6**

■ A, B : 같은 크기의 가역 행렬

$\Rightarrow$ AB는 가역이고, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

[증명]

예제 9 **각자!!**

▣ **정의**

■ A가 정방행렬일 때 음이 아닌 정수 n에 대한 행렬의 거듭제곱은 다음과 같이 정의한다.

$A^0 = I, \qquad A^n = AA\cdots A \qquad [n$개의 곱$]$

■ A가 가역일 때 음의 정수에 대한 거듭제곱은 다음과 같이 정의한다. n이 양의 정수 일 때

$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} \quad [n$개의 곱$]$

[Note] A가 정방행렬일 때 음이 아닌 지수에 대하여 다음 법칙들이 성립한다.

$A^rA^s = A^{r+s}, \qquad (A^r)^s = A^{rs}$

□ **정리 1.4.7**

A : 가역, n : 음이 아닌 정수

(a) A^{-1}도 가역이고 $(A^{-1})^{-1} = A$이다.

(b) A^n도 가역이고 $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$이다.

(c) 임의의 0이 아닌 스칼라 k에 대해 kA도 가역이고 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$이다.

[증명]

예제 10 **각자!!**

[Note] $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \quad \neq \quad A^2 + 2AB + B^2$

▣ **정의** <행렬 다항식>

A : $n \times n$ 정방행렬, $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$: 임의의 다항식

- **A에 대한 행렬다항식** $p(A)$를 다음과 같이 정의한다.

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \quad \Leftarrow \quad n \times n \text{ 행렬}$$

예제 12 $p(x) = x^2 - 2x - 5$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$일 때 $p(A)$를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 1.4.8**

다음 행렬들은 연산을 실행할 수 있는 크기를 갖는다.

(a) $(A^T)^T = A$

(b)(c) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(d) $(kA)^T = kA^T$

(f) $(AB)^T = B^T A^T$

□ **정리 1.4.9**

- A가 가역이면 A^T도 가역이고 $\quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

[증명]

1.5 기본행렬과 A^{-1} 구하기

[Note] 복습 <기본 행연산(elementary row operation)>

- 행렬 A에 대한 다음 연산을 **기본 행연산(elementary row operation)**이라 한다.

1. 한 행에 0이 아닌 상수 c를 곱하기
2. 두 행을 바꾸기
3. 한 행에 상수 c를 곱한 후 다른 행에 더하기

▣ **정의 1**

▪ 두 행렬 A와 B는 **행동등(row equivalent)** $\Leftrightarrow$ 서로 기본 행연산을 통하여 얻을 수 있다.

▣ **정의 2**

▪ **기본행렬(elementary matrix)** E : 단위행렬 I에 기본 행연산을 한번만 수행하여 얻은 행렬

예제 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☐ **정리 1.5.1**

▪ E : 단위행렬 I_m에 기본 행연산을 한 번 실행하여 얻은 기본행렬

▪ A : $m \times n$ 행렬

$\Rightarrow$ EA는 A에 같은 기본 행연산을 한 것과 같다. (: E는 행렬 A의 "왼쪽"에 곱한다.)

예제 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $EA =$

[Note]

◆ 기본행렬 E에 (E를 얻으려고 수행한 것과 같은 종류의) 기본행연산을 해서 I를 얻을 수 있다.

(1) E : I의 i행에 c를 곱한 행렬 $\Rightarrow$ E의 i 행에 $\dfrac{1}{c}$를 곱한다.

(2) E : I의 두 행, i행과 j행을 바꾼 행렬 $\Rightarrow$ E의 i행과 j행을 바꾼다.

(3) E : I의 i행에 c를 곱한 후 j행에 더한다. $\Rightarrow$ E의 i행에 $-c$를 곱한 후 j행에 더한다.

☐ **정리 1.5.2**

▪ 기본행렬은 가역이고, 그 역행렬도 가역이며 같은 형태의 기본행렬로 나타난다.

[증명] (1) E : I의 i행에 c를 곱한 행렬,

E_0 : I의 i행에 $\dfrac{1}{c}$를 곱한 행렬, $\Rightarrow$ $E_0E = I$ 이고, $EE_0 = I$ $\Rightarrow$ $E^{-1} = E_0$

(2) E : I의 두 행, i행과 j행을 바꾼 행렬, E_0 :

(3) E : I의 i행에 c를 곱한 후 j행에 더한다. E_0 :

□ **정리 1.5.3**
A가 $n \times n$ 행렬이면, 다음 명제들은 동등하다.
(a) A는 가역이다.
(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명해만을 갖는다.
(c) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.
(d) A는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

[증명] (a) ⇒ (b) ⇒ (c) ⇒ (d) ⇒ (a)

(a) ⇒ (b) A는 가역행렬이고, $\mathbf{x}_0$를 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해라 하자.

⇒

(b) ⇒ (c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$이 다음의 연립방정식이고, 자명해만 갖는다고 하자.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

⇒ 첨가행렬의 기약행사다리꼴 :

(c) ⇒ (d) A의 기약 행사다리꼴이 I_n이라 하자.

즉, A에 기본 행연산을 시행하여 얻은 기약 행사다리꼴이 I_n이다.

(d) ⇒ (a) 기본행렬들은 가역이므로, 기본행렬들의 곱인 A는 가역행렬이다.

[Note] <기본행연산으로 역행렬 구하기>

- A는 가역행렬 $\Rightarrow$ A^{-1}도 가역 $\therefore$ A^{-1}는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$ 이라 하자.

$\Rightarrow$ $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I$ 이고, $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}$

(A에 기본행연산 한 것) (I에 기본행연산 한 것)

- 기본 행연산으로 역행렬을 구하기.

$\boxed{\text{단계 1}}$ 행렬 A 와 I를 다음과 같이 쓴다. $(A \mid I)$

$\boxed{\text{단계 2}}$ 왼쪽의 행렬이 단위행렬이 될 때까지 기본 행연산을 한다.

즉, $(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A \mid E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I) = (I \mid A^{-1})$: 오른쪽의 행렬이 역행렬.

$\boxed{\text{예제 4}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.

[풀이]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

[Note]

기본행연산으로 역행렬을 구하는 과정에서 $(A \mid I)$에 기본 행연산을 시행하여 왼쪽이 단위행렬이 될 수 없으면 행렬 A는 가역이 아니다.

$\boxed{\text{예제 5}}$ **각자!!**

1.6 연립일차방정식과 역행렬에 관한 여러 가지 결과

□ **정리 1.6.1**

■ 연립일차방정식의 해집합은 다음 세 가지 중 하나이다.

① 해가 없다. ② 단 하나의 해를 갖는다. ③ 무수히 많은 해를 갖는다.

□ **정리 1.6.2**

■ A : $n \times n$인 가역행렬, b : $n \times 1$ 행렬

⇒ 연립일차방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는 유일해 $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$를 갖는다.

[증명]

예제 1 다음 연립일차방정식을 풀어라. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + \quad\;\; + 8x_3 = 17 \end{cases}$

[풀이]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ 일 때 방정식은 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$이다.

1.5절의 예제 4에서 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$이므로,

$\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b} =$

[Note]

◆ 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$, $\cdots$, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_k$ 가 모두 같은 계수행렬 A 를 갖는다.

⇒ 계수행렬 A에 행렬 b_1, b_2, $\cdots$, b_k를 첨가한 행렬 $(A \mid b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_k)$에 가우스-요르단 소거법을 이용하면 k개의 방정식을 한 번에 풀 수 있다.

예제 2 **각자!!! (나중에 이런 방식으로 문제 풀 것임)**

□ **정리 1.6.3**

■ A : 정방행렬

(a) 정방행렬 B가 $BA = I$ 만족 ⇒ $B = A^{-1}$ (∵A는 가역)

(b) 정방행렬 B가 $AB = I$ 만족 ⇒ $B = A^{-1}$ (∵A는 가역)

[증명] (a) x_0를 $A\mathrm{x} = 0$의 해라 하자. 즉, $A\mathrm{x}_0 = 0$

⇒

□ **정리 1.6.5**

■ A와 B는 같은 크기의 정방행렬이고, AB는 가역이다. $\Rightarrow$ A와 B는 가역

[증명] AB가 가역이면, 어떤 행렬 C에 대해, $(AB)C = I$, $C(AB) = I$

$\Rightarrow$ $A(BC) = I$ $\Rightarrow$ 정리 1.6.3에 의해 A는 가역이다.

$(CA)B = I$ $\Rightarrow$ 정리 1.6.3에 의해 B는 가역이다.

□ **정리 1.6.4**

■ A : $n \times n$행렬, 다음 명제들은 동등하다.

(a) A는 가역이다.

(b) $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$은 자명해만을 갖는다.

(c) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.

(d) A는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(e) $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는 모든 $n \times 1$ 행렬 b에 대해 일치한다.

(f) $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는 모든 $n \times 1$ 행렬 b에 대해 유일한 해를 갖는다.

[증명] 정리 1.5.3에서 (a) (b) (c) (d)는 동등하다. 따라서 (a) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a)를 증명하자.

(a) $\Rightarrow$ (f) 정리1.6.2

(f) $\Rightarrow$ (e) 성립

(e) $\Rightarrow$ (a) (e)를 가정하면, $\mathrm{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$ $\mathrm{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 때도 성립.

1.7 대각행렬, 삼각행렬, 대칭행렬

▣ **정의**

■ **대각행렬(diagonal matrix)** : 주 대각선 이외의 모든 원소가 0인 정방행렬

[Note]

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

[Note] ■ $AD = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n)D = (\lambda_1 \mathrm{c}_1, \lambda_2 \mathrm{c}_2, \ldots, \lambda_n \mathrm{c}_n)$ ■ $DA = D\begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{r}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{r}_1 \\ \lambda_2 \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \mathrm{r}_n \end{pmatrix}$

▣ 정의

- **상삼각행렬(upper triangular matrix)** : 주 대각선 아래쪽의 모든 원소가 0인 정방행렬
- **하삼각행렬(lower triangular matrix)** : 주 대각선 위쪽의 모든 원소가 0인 정방행렬

Ex

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

□ 정리 1.7.1 : 각자 확인!!!

▣ 정의 1

- **대칭행렬(symmetric matrix)** : 정방행렬 A가 $A^T = A$를 만족하는 행렬
- **반대칭행렬(skew-symmetric matrix)** : 정방행렬 A가 $A^T = -A$를 만족하는 행렬

[Note]

- A가 대칭행렬 $\Rightarrow$ $(A)_{ij} = (A)_{ji}$
- 대칭행렬은 주대각선을 중심으로 대칭인 원소들이 같다.
- 반대칭행렬은 주대각 원소가 모두 0이고,
  주대각선을 중심으로 대칭인 원소들은 같은 절대값을 갖고, 서로 반대부호를 갖는다.

□ 정리 1.7.2/1.7.3/1.7.4/1.7.5

- A와 B는 크기가 같은 대칭행렬이고 k는 임의의 스칼라이다.
  $\Rightarrow$ A^T, $A \pm B$, kA는 모두 대칭행렬이다.
- A와 B는 크기가 같은 대칭행렬이고, $AB = BA$ $\Rightarrow$ AB는 대칭행렬
- A는 가역인 대칭행렬 $\Rightarrow$ A^{-1}도 대칭행렬
- A는 가역행렬 $\Rightarrow$ AA^T와 A^TA도 가역행렬

[Note]

A : $m \times n$ 행렬 $\Rightarrow$ A^TA : $n \times n$ 행렬이고 대칭행렬

AA^T : $m \times m$ 행렬이고 대칭행렬