선형대수학 2023년 1학기 기말고사 : B 유형

학과: 학번: 이름: 분반:

유의사항:

부정행위가 발견될 경우, 0점 처리함.

유형 B (OMR 카드에 표시) **시험시간: 80분**

이름을 적지 않으면, 10점 감점함

객관식: 1-9 (4점), 10-17 (3점) **주관식: 18-21 (각 10점). 상세한 풀이과정 필요.**

주관식 답안지, 객관식 OMR 답안지 제출함.

1. 표준내적을 갖는 두 벡터 $\vec{u}=(2,1,-3)$과 $\vec{v}=(4,3,5)$에 대해 $\vec{u}$ 위로 $\vec{v}$의 정사영 벡터는 무엇인가?

① $\left(-\frac{8}{\sqrt{7},}\ -\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{12}{\sqrt{7}}\right)$

② $\left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$

③ $\left(-\frac{16}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{20}{7}\right)$

④ $\left(-\frac{8}{49}, -\frac{4}{49}, \frac{12}{49}\right)$

⑤ $\left(-\frac{16}{49}, -\frac{12}{49}, -\frac{20}{49}\right)$

2. 세 평면 $x+y+2z=2$, $x+z=4$, $3x+2y+5z=8$의 교집합 W에 대한 설명으로 맞는 것은 어느 것인가?

① $W=\varnothing$

② $W=\{(4,-2,0)\}$

③ W는 벡터 $\vec{v}=(1,1,1)$에 평행인 직선이다.

④ W는 평면 $x+2y+3z=0$에 수직인 직선이다.

⑤ W는 평면 $3x+y+4z=10$에 포함되는 직선이다.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=4$일 때 $\begin{vmatrix} a-2 & b-4 & c-6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x+1 & y+2 & z+3 \end{vmatrix}$은 무엇인가?

① -8 ② -4 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

4. R^2의 점을 시계방향으로 120° 회전시킨 후 $y=x$에 대칭 시킨 행렬변환의 표준행렬은 어느 것인가?

① $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. 다음 정의 중 내적이 되는 것을 모두 골라라.

(a) $p(x),\ q(x)\ \in P_1$에 대해 $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

(b) $p(x)=a_0+a_1x,\ q(x)=b_0+b_1x\ \in P_1$에 대해 $\langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1$

(c) $\vec{u}=(u_1,u_2),\ \vec{v}=(v_1,v_2)\ \in R^2$ 에 대해 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 5u_1v_1+3u_2v_2$

(d) $\vec{u}=(u_1,u_2),\ \vec{v}=(v_1,v_2)\ \in R^2$ 에 대해 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+3u_2v_2$

① (a), (b), (c)

② (a), (c)

③ (b), (c), (d)

④ (c), (d)

⑤ (a), (b), (c), (d)

6. R^2의 벡터 $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ 와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 내적을 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \vec{u}^T A \vec{v}$로 정의할 때 $\vec{u}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$의 사잇각 θ에 대한 $\cos\theta$의 값은 무엇인가?

① $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ② $\frac{2}{\sqrt{10}}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{2}{49}$

7. R^3의 유클리드 내적에 대한 직교기저가 $B=\left\{\vec{u}_1=(1,1,-1), \vec{u}_2=(1,0,1), \vec{u}_3=(-1,2,1)\right\}$ 일 때, $\vec{v}=(2,-1,1)$의 기저 B에 대한 좌표벡터 $(\vec{v})_B$는 무엇인가?

① $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

② $\left(0, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

③ $\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $(0, 3, -3)$

⑤ $\left(0, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}\right)$

8. $T : R^3 \to R^2$ 는 선형변환이고, $T(1, 1, 0) = (1, 0)$, $T(1, 0, -1) = (0, -2)$, $T(0, 2, 1) = (5, 5)$일 때, $T(1, 2, 3)$의 값은 무엇인가?

① $(0, -10)$
② $(1, 1)$
③ $(5, -10)$
④ $(6, 3)$
⑤ $(-4, 0)$

9. 행렬 A가 3×3 직교행렬일 때 다음 중 참, 거짓을 순서대로 바르게 표시한 것은 어느 것인가?

(a) A 의 기약행사다리꼴은 I(단위행렬)이다.
(b) 행렬 A의 열벡터 집합은 R^3의 정규직교기저이다.
(c) $\vec{x} = (2, 1, -2)$일 때 $\|A\vec{x}\| = 3$이다.
(d) $\det(A) = 1$이다.

① 참, 참, 참, 거짓
② 참, 참, 거짓, 거짓
③ 참, 거짓, 참, 참
④ 거짓, 참, 참, 거짓
⑤ 거짓, 거짓, 참, 참

*10~11. 이차형식 $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$에 대해 답하라.

10. 이차형식 $q(x_1, x_2)$의 혼합항을 제거하는 변수변환과 새로운 변수의 항으로 표현된 2차형식을 바르게 표현한 것을 구하라.

① $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $8y_1^2 - 2y_2^2$

② $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $8y_1^2 - 2y_2^2$

③ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $-8y_1^2 + 2y_2^2$

④ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $-8y_1^2 + 2y_2^2$

⑤ 답 없음

11. $q(x_1, x_2) = 2$ 인 곡선은 무엇인가?

① 주축의 길이가 1인 쌍곡선
② 주축의 길이가 2인 쌍곡선
③ 주축의 길이가 4인 쌍곡선
④ 장축의 길이가 2인 타원
⑤ 장축의 길이가 4인 타원

*12~14 행렬 $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

12. A의 열공간의 기저는 무엇인가?

① $\{(1,0,0), (2,1,0)\}$
② $\{(1,0,0), (2,1,0), (-1,1,0)\}$
③ $\{(-3,1,2), (-1,2,5)\}$
④ $\{(-3,1,2), (-1,2,5), (8,-1,-1)\}$
⑤ $\{(-3,1,2), (-1,2,5), (1,3,8), (8,-1,-1)\}$

13. A의 영공간의 직교여공간에 속하는 벡터가 아닌 것은 무엇인가?

① $(3, 1, -1, -8, 3)$
② $(2, 5, 8, -1, 2)$
③ $(0, 1, 2, 1, 0)$
④ $(1, 3, 5, 0, 1)$
⑤ $(0, 2, 6, -1, 0)$

14. $\text{nullity}(A)$는 무엇인가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

* 15~17. 참 거짓을 판정하라.

15. 행렬 A가 4×4 인 대칭행렬이고 양한정(양의 정부호)이면 $-A$는 음한정(음의 정부호)이다.

① 참
② 거짓

16. 유클리드 내적에 대해 $W = \{(t, -2t, 3t) : t\in R\}$의 직교여공간은 $W^{\perp} = \{(7t, -t, -3t) : t\in R\}$이다.

① 참
② 거짓

17. 3×3 행렬 A가 가역이고, T_A가 행렬 A에 대한 행렬변환이면, $\ker(T_A)$는 1 차원이다.

① 참
② 거짓

선형대수학 2023년 1학기 기말고사 주관식 답안지		
학번:	이름:	분반:

주관식 문제: 18번~21번(각 10점) : 각 문제는 상세한 풀이 과정이 있는 경우만 점수가 인정됨.

18. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = QR$로 분해하라. 여기서 $Q^TQ = I$ 이고 R은 상삼각행렬이다.(10점)

19. R^2에서 선형변환 $T(x,y) = (2x-y,\, 4x+3y)$가 정의되고, 두 기저가 $E = \left\{\vec{e}_1 = (1,0),\, \vec{e}_2 = (0,1)\right\}$, $B = \left\{\vec{b}_1 = (2,-1),\, \vec{b}_2 = (1,1)\right\}$일 때 다음 물음에 답하라.

(1) 표준기저 E에 대한 T의 행렬 $[T]_E$와 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B\to E}$를 구하라.(3점)

(2) $[T]_E$와 $P_{B\to E}$를 이용하여 기저 B에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 구하라.(4점)

(3) $T(\vec{b}_1)$과 $T(\vec{b}_2)$를 $\vec{b}_1$과 $\vec{b}_2$의 선형결합으로 나타내어라.(1점)

(4) $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$은 $[T]_B$에 따라 기저 B에서 어떤 점으로 변환되는가?(2점)

20. $T: R^3 \to R^2$, $T(x,y,z) = (x-y+z,\ -2x+y-3z)$ 로 정의된 선형변환에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $\ker(T)$와 $\ker(T)$의 기저를 구하고 T가 단사인지 밝혀라.(5점)

(2) $R(T) = Im(T)$와 $R(T) = Im(T)$의 기저를 구하고 T가 전사인지 밝혀라.(5점)

21. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$의 축소된 특이값 전개를 다음 과정에 따라 구하라.

(1) A^TA의 고유값 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 와 각 고유값에 대한 정규직교 고유벡터 $\vec{v}_1$과 $\vec{v}_2$를 구하라.(3점)

(2) $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$와 $\vec{u}_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$를 구하라.(4점)

(3) $A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T$로 표현하라.(3점)

객관식 답

1~9: 4점씩,   10~17: 3점씩

2, 5, 4, 1
2, 4, 3, 5
1, 2, 1, 3
5, 3, 1, 2
2

주관식 문제: 18번~21번(각 10점)

18. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{21} & -\frac{6}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$

19.

(1) $[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $P_{B \to E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $[T]_B = P_{E \to B}[T]_E P_{B \to E} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $T(\overrightarrow{b_1}) = 0\vec{b}_1 + 5\overrightarrow{b_2}$, $T(\overrightarrow{b_2}) = -2\overrightarrow{b_1} + 5\overrightarrow{b_2}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$

20.

(1) $\ker(T) = \{t(-2, -1, 1) : t \in R\}$

$\ker(T)$의 기저 : $\{(-2, -1, 1)\}$.

T는 단사가 아니다.

(2) $Im(T) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = R^2$

$Im(T)$ 기저는 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

T는 전사이다.

(1) $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = 15$ => $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ => $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

(2) $\sigma_1 = \sqrt{15}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{11}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{7}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$

(3) $A = \sqrt{15} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{11}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{7}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$+ \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$