4.8 행공간, 열공간, 영공간

▣ **정의 1**

$m \times n$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$에 대하여

- A의 행으로 만들어지는 R^n의 벡터

$$\begin{aligned} \mathrm{r}_1 &= (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}) \\ \mathrm{r}_2 &= (a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathrm{r}_m &= (a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}) \end{aligned}$$

: A의 **행벡터(row vectors)**

- A의 열로 만들어지는 R^m의 벡터

$$\mathrm{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\ \mathrm{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\ \cdots\ \mathrm{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

: A의 **열벡터(column vectors)**

예제 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$의 행벡터 :

열벡터 :

▣ **정의 2**

A : $m \times n$ 행렬

- $\mathrm{row}(A) = \mathrm{span}\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m\}$: **A의 행공간(row space)**
  : A의 행벡터 r_1, $\mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_m$에 의해 생성되는 R^n의 부분공간
- $\mathrm{col}(A) = \mathrm{span}\{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \cdots \mathrm{c}_n\}$: **A의 열공간(column space)**
  : A의 열벡터 c_1, $\mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n$에 의해 생성되는 R^m의 부분공간
- $\mathrm{null}(A)$: **A의 영공간(null space)** : R^n의 부분공간인 동차 연립방정식 $A\mathrm{x} = 0$의 해 공간

◆ 문제

① 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 해와 계수행렬 A의 행공간, 열공간, 그리고 영공간들 사이의 관계는?

② 행렬의 행공간, 열공간, 그리고 영공간들 사이의 관계는?

□ **정리 4.8.1**

■ 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$가 해를 갖는다. $\Leftrightarrow$ b가 A의 열공간$(\mathrm{col}(A))$에 속한다.

[증명]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{c}_1,\ \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n \ : \ A\text{의 열벡터}$$

$$\Rightarrow \quad A\mathrm{x} = x_1\mathrm{c}_1 + x_2\mathrm{c}_2 + \cdots + x_n\mathrm{c}_n \qquad (\text{정리}1.3.1)$$

$$\therefore \quad A\mathrm{x} = \mathrm{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1\mathrm{c}_1 + x_2\mathrm{c}_2 + \cdots + x_n\mathrm{c}_n = \mathrm{b}$$

(b가 A의 열벡터의 선형결합 : 이때 계수는 방정식의 해

즉, $\mathrm{b} \in \mathrm{span}\{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \cdots \mathrm{c}_n\} = \mathrm{col}(A)$)

예제 2 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$를 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$라 하자.

b가 A의 열공간에 있음을 보이고, b를 A의 열벡터의 선형결합으로 표현하여라.

[풀이]

□ **정리 4.8.2**

■ x_0 : 비동차 연립일차방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 한 해

$S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k\}$: A의 영공간의 기저 ($\therefore$ $A\mathrm{v}_i = \mathbf{0}$ 성립)

$\Rightarrow$ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 모든 해는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_k\mathrm{v}_k \quad \text{--}(*)$$

역으로, 스칼라 $c_1,\ c_2, \ldots, c_k$의 모든 값에 대해 $(*)$ 식의 벡터 x는 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 해이다.

[증명] 정리 3.4.4

[Note]

- $(*)$의 벡터 x : $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 **일반해(general solution)**이라 한다.
- 벡터 x_0 : $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 **특수해(particular solution)**라 한다.

즉, 비동차 연립일차방정식의 일반해 = 그 연립방정식의 특수해 + 동차 연립방정식의 일반해

□ **정리 4.8.3**
(a) 행동등 행렬의 행공간은 동일하다.
(b) 행동등 행렬의 영공간은 동일하다.

[증명] 행렬 A에 기본행연산으로 얻은 행렬을 B라 하자.

기본행연산으로 얻은 B의 행 : A 행들의 선형결합 $\Rightarrow$ B의 행공간 $\subset$ A의 행공간

역으로, 행렬 B에 기본행연산을 행해서 A를 얻을 수 있다. $\Rightarrow$ A의 행공간 $\subset$ B의 행공간

$\therefore$ A의 행공간 $=$ B의 행공간

[Note]
- 기본 행연산은 행렬의 영공간을 변경하지 않는다.
- 기본 행연산은 행렬의 행공간을 변경하지 않는다.

□ **정리 4.8.4**
■ R : 행사다리꼴 행렬
$\Rightarrow$ ◆ 선도 1을 갖는 행벡터들 : R의 행공간의 기저를 이룬다.
◆ 행벡터의 선도 1을 갖는 열벡터들 : R의 열공간의 기저를 이룬다.

예제 3 행사다리꼴인 행렬 $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$의 행공간과 열공간의 기저를 구하여라.

[풀이]

예제 4 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$의 행공간의 기저와 영공간의 기저를 구하여라.

[풀이] 기본 행연산으로 행사다리꼴을 구한다.

$$\Rightarrow \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 R의 행공간의 기저 :

$$\mathrm{r}_1 = (1\ \ -3\ \ 4\ \ -2\ \ 5\ \ 4), \quad \mathrm{r}_2 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 3\ \ -2\ \ -6), \quad \mathrm{r}_3 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 5)$$

➠ 또한 이 벡터들은 A의 행공간의 기저이다.

[Note]

- 기본 행연산은 행렬의 열공간에 영향을 준다.
- 기본 행연산은 행렬의 열벡터들의 선형독립, 선형종속 관계에 영향을 주지 않는다.

$\because$ $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, \mathrm{w}_n$: 행렬 A의 열벡터

벡터방정식 : $c_1\mathrm{w}_1 + c_2\mathrm{w}_2 + \cdots + c_n\mathrm{w}_n = 0$ ---(*)

행렬 A에 기본 행연산을 실행해서 얻은 행사다리꼴 행렬을 R이라 하자.

즉, $E_1E_2\cdots E_rA = R = (\mathrm{w}_1{}'\ \mathrm{w}_2{}' \cdots \mathrm{w}_n{}')$: 이때 $\mathrm{w}_i{}'$ 은 R의 열벡터

$$E_1E_2\cdots E_rA = E_1E_2\cdots E_r(\mathrm{w}_1\ \mathrm{w}_2 \cdots \mathrm{w}_n) = (\mathrm{w}_1{}'\ \mathrm{w}_2{}' \cdots \mathrm{w}_n{}')$$

(*) 식에 $E_1E_2\cdots E_r$을 적용 $\Rightarrow$ $E_1E_2\cdots E_r(c_1\mathrm{w}_1 + c_2\mathrm{w}_2 + \cdots + c_n\mathrm{w}_n) = 0$

$\Rightarrow$ $c_1E_1E_2\cdots E_r\mathrm{w}_1 + c_2E_1E_2\cdots E_r\mathrm{w}_2 + \cdots + c_nE_1E_2\cdots E_r\mathrm{w}_n = c_1\mathrm{w}_1{}' + c_2\mathrm{w}_2{}' + \cdots + c_n\mathrm{w}_n{}' = 0$

즉, R의 열벡터들의 벡터방정식의 계수가 (*)의 계수와 같다.

A의 열벡터들이 선형독립/선형종속 $\Leftrightarrow$ R의 열벡터들이 선형독립/선형종속

□ **정리 4.8.5**

행렬 A와 B가 행동등 행렬이다.

(a) A의 열벡터의 집합이 선형독립이다 $\Leftrightarrow$ B의 대응하는 열벡터의 집합이 선형독립이다.

(b) A의 열벡터의 집합이 A의 열공간의 기저이다.

$\Leftrightarrow$ B의 대응하는 열벡터의 집합이 B의 열공간의 기저이다.

예제 5 예제 4의 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$의 열공간의 기저를 구하여라.

[풀이] 기본 행연산으로 행사다리꼴을 구한다. $\Rightarrow$ $R = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

여기서 A와 R의 열공간은 다르므로 R의 열벡터가 직접 A의 열공간의 기저가 될 수 없다.

정리 4.7.6을 이용 $\Rightarrow$ R의 열공간의 기저 : $\mathrm{c}_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{c}_3{}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{c}_5{}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

따라서 A의 열공간의 기저 (대응하는 열벡터) : $\mathrm{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{c}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{c}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{예제 6}}$ 다음 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix}$의 행벡터로 이루어진 행공간의 기저를 구하라.

[풀이] $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$의 열공간의 기저를 구하자.

행사다리꼴을 구하면 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A^T의 열공간의 기저 :

$\therefore$ A의 행공간의 기저 :

$\boxed{\text{Ex}}$ $\mathrm{v}_1 = (1,\ -2, 0, 0, 3)$, $\mathrm{v}_2 = (2,\ -5,\ -3,\ -2, 6)$, $\mathrm{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$,

$\mathrm{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$일 때 R^5의 부분공간 $W = \operatorname{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$의 기저를 구하여라.

[풀이] 부분공간 $W = \operatorname{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$은 다음 행렬의 행공간이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 행공간의 기저를 구하자. 행사다리꼴을 구하면, $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 W의 기저 :

[Note] 예제에서 $\operatorname{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$의 기저벡터들은 처음 벡터들과 무관하게 구한 것이다.

따라서 기저를 원래 벡터로 찾기 위해서는 A^T의 열공간의 기저를 찾는다.

$\boxed{\text{예제 7}}$ $\boxed{\text{예제 8}}$ 각자!!!

4.9 랭크, 무효차수, 기본행렬공간

□ **정리 4.9.1**

■ 행렬 A의 행공간과 열공간의 차원은 같다.

[증명] 행렬 R을 A에서 얻은 행사다리꼴이라 하자.

$\Rightarrow$ $\text{row}(A)$의 차원 $=$ $\text{row}(R)$의 차원

$\text{col}(A)$의 차원 $=$ $\text{col}(R)$의 차원

$\text{row}(A)$의 차원 $=$ R에서 선도 1을 포함하는 행의 개수

$\text{col}(A)$의 차원 $=$ R에서 선도 1을 포함하는 열의 개수

▣ **정의 1**

■ **A의 랭크(rank**, 계수, 유효차수) : $\text{rank}(A) = A$의 행공간과 열공간의 공통차원

■ **A의 무효차수(nullity)** : $\text{nullity}(A) = A$의 영공간의 차원

예제 1 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$의 랭크와 무효차수를 구하여라.

[풀이] 기약 행사다리꼴 $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[Note] 예제 2

◆ $m \times n$ 행렬 A의 랭크로 가능한 최대값은? : $\text{rank}(A) \le \min(m, n)$

□ **정리 4.9.2 [행렬의 차원 정리]**

■ A가 n개의 열을 갖는 행렬 $\Rightarrow$ $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$

[증명] (영공간 : $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해공간)

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 미지수 n개의 연립방정식. $\Rightarrow$ 선도변수의 개수 $+$ 자유변수의 개수 $= n$

선도변수의 개수 $=$ $\text{rank}(A)$

자유변수의 개수 $=$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 일반해의 매개변수의 개수 $=$ $\text{nullity}(A)$

□ **정리 4.9.3**

A 가 $m \times n$ 행렬이다.

(a) $\text{rank}(A)$: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 일반해에 있는 선도변수의 개수

(b) $\text{nullity}(A)$: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 일반해에 있는 매개변수의 개수

□ **정리 4.9.5**

▪ 모든 행렬 A에 대해 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

[증명]

$$\text{rank}(A) = \dim(A\text{의 행공간}) = \dim(A^T\text{의 열공간}) = \text{rank}(A^T)$$

[Note]

◆ A가 $m \times n$ 행렬 $\Rightarrow$ $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A^T) = m$ $\Leftarrow$ $\text{rank}(A^T) + \text{nullity}(A^T) = m$

◆ $\text{rank(A)} = \text{r}$ $\Rightarrow$ ◆ $\dim(\text{Row}(A)) = r$ ◆ $\dim(\text{Col}(A)) = r$

◆ $\dim(\text{null}(A)) = n - r$ ◆ $\dim(\text{null}(A^T)) = m - r$

▣ **정의 2**

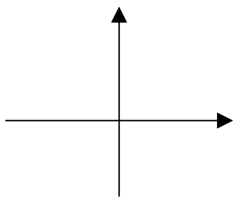
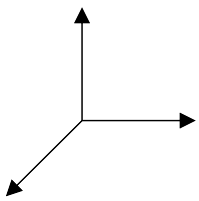
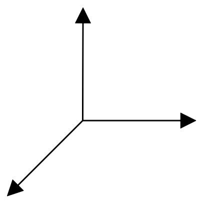
W는 R^n의 부분공간일 때 W에 있는 모든 벡터와 직교하는 R^n의 모든 벡터들의 집합을

▪ W의 **직교여공간(orthogonal complement)**이라 하고 기호 $W^\perp$로 나타낸다.

[Note]

◆ $\{0\}$의 직교여공간은 R^n이고, R^n의 직교여공간은 $\{0\}$이다.

◆

□ **정리 4.9.6**

W는 R^n의 부분공간이다.

(a) $W^\perp$는 R^n의 부분공간이다.

(b) $W \cap W^\perp = \{0\}$

(c) $(W^\perp)^\perp = W$

□ **정리 4.9.7**

A는 $m \times n$ 행렬

(a) $(A\text{의 영공간})^\perp = (A\text{의 행공간})$ (∵ R^n의 부분공간) (⇔

(b) $(A^T\text{의 영공간})^\perp = (A\text{의 열공간})$ (∵ R^m의 부분공간) (⇔

[증명](정리 3.4.3)

A의 행벡터를 $\text{r}_1, \text{r}_2, \cdots, \text{r}_m$ 라 하면, $A\text{x} = 0$의 해집합은 $\begin{cases} \text{r}_1 \cdot \text{x} = 0 \\ \text{r}_2 \cdot \text{x} = 0 \\ \vdots \\ \text{r}_m \cdot \text{x} = 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x이다.

즉, 행벡터에 수직인 벡터들이 $A\text{x} = 0$의 해집합이다.

□ **정리 4.9.8**

A가 $n\times n$행렬일 때 다음 명제들은 동등하다.

(a) A는 가역이다.

(b) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$은 자명해만을 갖는다.

(c) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.

(d) A는 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(e) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 일치한다.

(f) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 모든 $n\times 1$ 행렬 $\mathbf{b}$에 대해 유일한 해를 갖는다.

(g) $\det(A)\neq 0$

(h) A의 열벡터들이 선형독립이다.

(i) A의 행벡터들이 선형독립이다.

(j) A의 열벡터들이 R^n을 생성한다.

(k) A의 행벡터들이 R^n을 생성한다.

(l) A의 열벡터들이 R^n의 기저를 이룬다.

(m) A의 행벡터들이 R^n의 기저를 이룬다.

(n) A의 랭크가 n이다.

(o) A의 무효차수가 0이다.

(p) A의 영공간의 직교여공간이 R^n이다.

(q) A의 행공간의 직교여공간이 $\{\mathbf{0}\}$이다.

(r) $\lambda=0$이 A의 고유값이 아니다. (5장 : 정리 5.1.5)