선형대수학 2022년 2학기 기말고사 : A 유형

학과: 　　　　학번: 　　　　이름: 　　　　분반:

유의사항:
부정행위가 발견될 경우, 0점 처리함.
유형 A (OMR 카드에 표시) 　　**시험시간: 80분**
이름을 적지 않으면, 10점 감점함
객관식: 1-9 (4점), 10-17 (3점) 　　**주관식: 18-21 (각 10점). 상세한 풀이과정 필요.**
주관식 답안지, 객관식 OMR 답안지 제출함.

1. 표준내적을 갖는 두 벡터 $\vec{u}=(2,5,-1)$과 $\vec{v}=(-2,3,1)$에 대해 $\vec{u}$ 위로 $\vec{v}$의 정사영 벡터는 무엇인가?

① $\left(-\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)$
② $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{2\sqrt{30}}{3},\frac{5\sqrt{30}}{3},-\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$
④ $\left(-\frac{10}{7},\frac{15}{7},\frac{5}{7}\right)$
⑤ $\left(-\frac{4\sqrt{14}}{7},\frac{6\sqrt{14}}{7},\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)$

2. 세 평면 $x+y+2z=2,\ x+z=3,\ 2x+y+3z=5$의 교집합은 무엇인가?

① $\varnothing$
② $\{(3,-1,0)\}$
③ 점 $(3,-1,0)$을 지나고 $(1,1,-1)$에 평행인 직선
④ $\{(2,-2,1)\}$
⑤ 점 $(2,-2,1)$을 지나고 $(-1,-1,-1)$에 평행인 직선

3. 행렬식 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & -2 \end{vmatrix}$은 무엇인가?

① -30 ② 30 ③ -35 ④ 35 ⑤ 40

4. R^2의 벡터 $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ 와 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 내적을 $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\vec{u}^TA\vec{v}$로 정의할 때 $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$의 사잇각 θ에 대한 $\cos\theta$의 값은 무엇인가?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ③ $-\frac{5}{\sqrt{5}}$ ④ $-\frac{5}{3\sqrt{3}}$ ⑤ $-\frac{5}{54}$

5. 세 점 $A(1,2,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(1,-1,1)$을 지나는 평면이 $ax+by+cz=1$일 때 다음 중 맞는 것을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) $a=4$이다
(b) 평면의 법선벡터는 $(2,-1,3)$이다
(c) 이 평면은 R^3의 부분공간이다.
(d) 이 평면은 두 점 $P(1,1,1)$, $Q(-1,0-2)$를 지나는 직선과 수직으로 만난다.

① (a), (b) ② (a), (c) ③ (b), (d) ④ (c), (d) ⑤ (d)

6. R^2의 점을 $y=x$에 대칭 시킨 후, 원점을 중심으로 반시계방향으로 120° 회전시킨 행렬변환의 표준행렬은 어느 것인가?

① $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

7. R^3의 유클리드 내적에 대한 직교기저가 $B=\left\{\vec{u}_1=(1,0,2),\vec{u}_2=(-2,0,1),\vec{u}_3=(0,3,0)\right\}$ 일 때, $\vec{v}=(3,-1,-2)$의 기저 B에 대한 좌표벡터 $(\vec{v})_B$는 무엇인가?

① $(-1,-8,-3)$
② $\left(-\frac{1}{5},-\frac{8}{5},-\frac{1}{3}\right)$
③ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{8}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
④ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{8}{\sqrt{5}},-1\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{8}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

8. $T : R^2 \to R^4$ 는 선형변환이고, $T(2, 1) = (3, 3, -1, -1)$, $T(2, -3) = (5, -1, 9, -7)$일 때, $T(4, -4)$의 값은 무엇인가?

① $(2, -4, 10, -6)$
② $(-6, 3, -14, 10)$
③ $(7, 4, 3, -5)$
④ $(8, 2, 8, -8)$
⑤ $(9, 0, 13, -11)$

9. 다음 중 참, 거짓을 순서대로 바르게 표시한 것은 어느 것인가?

(a) 행렬 A의 행이 열보다 많으면 행공간의 차원이 열공간의 차원보다 크다.
(b) A가 2×2 행렬이고, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 R^2의 열벡터일 때 $< \vec{u}, \vec{v} > = \vec{u}^T A \vec{v}$는 내적을 정의한다.
(c) A가 직교행렬이면 $\det(A) = 1$이다.
(d) 행렬 A에 대한 이차형식 $\vec{x}^T A \vec{x}$가 양한정(양의 정부호)이면 A는 가역행렬이다.

① 참, 참, 참, 거짓
② 참, 참, 거짓, 거짓
③ 거짓, 참, 거짓, 참
④ 거짓, 참, 참, 참
⑤ 거짓, 거짓, 거짓, 참

*10~11. 이차형식 $q(x_1, x_2) = -6x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$에 대해 답하라.

10. 이차형식 $q(x_1, x_2)$의 혼합항을 제거하는 변수변환과 새로운 변수의 항으로 표현된 2차형식을 바르게 표현한 것을 구하라.

① $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $-7y_1^2 - 2y_2^2$

② $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $-7y_1^2 - 2y_2^2$

③ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $7y_1^2 + 2y_2^2$

④ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $7y_1^2 + 2y_2^2$

⑤ 답 없음

11. $q(x_1, x_2) = 1$ 인 곡선은 무엇인가?

① 주축의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{7}}$인 쌍곡선
② 주축의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{2}}$인 쌍곡선
③ 장축의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{7}}$인 타원
④ 장축의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{2}}$인 타원
⑤ 곡선이 정의되지 않는다.

*12~14 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & -8 & 0 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

12. A의 열공간의 기저는 무엇인가?

① $\{(1,0,0,0), (2,1,0,0), (0,5,1,0)\}$
② $\{(1,0,1,1), (0,5,5,-8)\}$
③ $\{(1,0,1,1), (2,1,3,0), (-1,3,2,-7)\}$
④ $\{(1,0,1,1), (2,1,3,0), (0,5,5,-8)\}$
⑤ $\{(1,0,1,1), (2,1,3,0), (-1,3,2,-7), (0,5,5,-8)\}$

13. A의 영공간의 직교여공간에 속하는 벡터가 아닌 것은 무엇인가?

① $(1, 2, -1, 0, 2)$
② $(0, 1, 3, 5, 0)$
③ $(0, 1, 3, 4, 1)$
④ $(0, 0, 0, 1, 0)$
⑤ $(0, 0, 0, 2, -2)$

14. nullity(A)는 무엇인가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

15. A와 B 는 4×4행렬이고, $\det(A) = 2$, $\det(-AB) = 6$이다. $\det(B)$는 무엇인가?

① -3 ② 3 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

16. A는 4×4 직교행렬이고. $\vec{x}$는 R^4의 열벡터이다. $\|\vec{x}\| = 2$일 때, $\|A\vec{x}\|$는 무엇인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 알 수 없다.

17. P_2 에 대해 다음이 참인지 거짓인지 판별하라.

$\text{span}\{1, x, x^2\} = \text{span}\{2, x+1, x^2+1, x^2-1\}$ 이다.

① 참
② 거짓
③ 알 수 없다.

선형대수학 2022년 2학기 기말고사 주관식 답안지		
학번:	**이름:**	**분반:**

주관식 문제: 18번~21번(각 10점) : 각 문제는 상세한 풀이 과정이 있는 경우만 점수가 인정됨.

18. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = QR$로 분해하라. 여기서 $Q^TQ = I$ 이고 R은 상삼각행렬이다.(10점)

19. R^2에서 선형변환 $T(x, y) = (2x - 3y,\ -4x + y)$가 정의되고, 두 기저가 $E = \left\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\right\}$, $B = \left\{\vec{b}_1 = (2, -1), \vec{b}_2 = (-3, 1)\right\}$일 때 다음 물음에 답하라.

(1) 표준기저 E에 대한 T의 행렬 $[T]_E$와 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B \to E}$를 구하라.(3점)

(2) $[T]_E$와 $P_{B \to E}$를 이용하여 기저 B에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 구하라.(4점)

(3) $T(\vec{b}_1)$과 $T(\vec{b}_2)$를 $\vec{b}_1$과 $\vec{b}_2$의 선형결합으로 나타내어라.(1점)

(4) $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$은 $[T]_B$에 따라 기저 B에서 어떤 점으로 변환되는가?(2점)

20. $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (3x-2y,\ x-y,\ 2x+4y)$으로 정의된 선형변환에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $\ker(T)$와 $\ker(T)$의 기저를 구하고 T가 단사인지 밝혀라.(5점)

(2) $R(T) = Im(T)$와 $R(T) = Im(T)$의 기저를 구하고 T가 전사인지 밝혀라.(5점)

21. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$의 축소된 특이값 전개를 다음 과정에 따라 구하라.

(1) A^TA의 고유값 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 와 각 고유값에 대한 정규직교 고유벡터 $\vec{v}_1$과 $\vec{v}_2$를 구하라.(3점)

(2) $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$와 $\vec{u}_i = \dfrac{A\vec{v}_i}{\sigma_i}$ $(i = 1, 2)$를 구하라.(4점)

(3) $A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T$로 표현하라.(3점)

답

객관식 답: 2, 3, 3, 4, 5
3, 2, 5, 5, 1
5, 4, 4, 2, 2
1, 1

주관식 답:

18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

19.
(1) $[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{B\to E} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
(2) $[T]_B = P_{E\to B}[T]_E P_{B\to E} = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 11 & -17 \end{pmatrix}$
(3) $T(\overrightarrow{b_1}) = 20\overrightarrow{b_1} + 11\overrightarrow{b_2}$, $T(\overrightarrow{b_2}) = -30\overrightarrow{b_1} - 17\overrightarrow{b_2}$
(4) $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

20.
(1) $\ker(T) = \{(0,0)\}$. 기저는 없다. T는 단사
(2) $Im(T) = span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

기저는 $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

T는 전사가 아니다..

21.

(1) $\lambda_1 = 15$ => $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ => $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

(2) $\sigma_1 = \sqrt{15}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{5}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{11}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$

(3) $A = \sqrt{15} \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{5}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \\ \frac{11}{\sqrt{15}\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$+ \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$