선형대수학 과제

▣ 과제

▷ 개별 과제는 마감 기한 내에 제출해야 함.(늦게 내는 숙제는 받지 않음)

▷ 과제는 풀이과정을 다 쓰는 서술식(계산과정도 풀이과정에 포함: 계산기 쓰지 않기)

▷ 과제의 전체, 또는 일부를 베껴서 제출하는 경우, 원본과 베낀 숙제를 모두 0점 처리함

▷ **과제 제출 형식 – 형식을 지키지 않을 경우 감점 함.**

- 과제는 A4 용지 크기 정도의 직사각형 모양의 바탕이 흰 종이에 풀어서 제출.
  (줄 있는 종이/없는 종이 상관 없음)
  (노트에 풀지 않음/바탕에 그림 있는 종이 안됨/격자 무늬 종이 안됨)
- 과제는 파일에서 풀라고 하는 문제들을 순서대로 세로로 풀어서 제출.
  (순서대로 세로로 풀기/또는 종이를 세로로 반으로 접어서 세로로 순서대로 풀기
- 과제 표지 : 학과, 학번, 이름을 표지의 오른쪽 위에 기록할 것
- 과제는 왼쪽 위에 스테이플을 해서 표지와 과제 내용을 묶을 것

* **pdf 파일**로 제출하는 경우

- 종이로 제출하는 것처럼 각 페이지가 A4 용지 크기 정도의 바탕이 흰 색(격자 무늬 안됨)에 세로로 풀어서 제출 – 파일 크기 그대로 세로로 풀기.
  또는 세로로 반을 접은 상태에서 세로로 순서대로 풀기
- 글씨 크기는 10 포인트 이상.(손으로 쓴 글씨가 파일을 열었을 때 10 포인트 이상의 크기)
- 페이지 분리되는 곳에 필기된 것은 알아볼 수 없을 경우 풀이가 불완전한 것으로 봄.
- 클래스룸에 pdf 파일로 제출 - 제출 마감 시간은 종이로 직접 제출하는 시간보다 빠름.
  (제출 마감 시간은 제출하는 날 0:00)
  제출 시간이 지난 경우 받을 수가 없음.
  (이 경우 종이로 제출하는 시간에 종이로 제출할 것)
  ✶ 파일 이름 : 504_학번.pdf

==

✶ 배운 내용에 대한 교과서 연습문제는 최대한 많이 풀어보기를 권장함.

==

1. 벡터 $\mathrm{u} = \left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$를 세 벡터 $\mathrm{v}_1 = (1,3,2)$, $\mathrm{v}_2 = (6,0,-12)$, $\mathrm{v}_3 = (1,-1,2)$의 선형(일차)결합으로 나타내어라.

2. 벡터 $\mathrm{u} = (-2,4,-1,3)$의 놈(norm)을 구하고, u와 반대방향의 크기가 3인 벡터를 구하여라.

3. 두 벡터 $\vec{u} = (2,-3,-1)$ 와 $\vec{v} = (1,2,-1)$ 의 사잇각 θ를 구하여라.

4. $\vec{u} = (6, 2, -3)$ 위로 $\vec{v} = (4, -1, 5)$의 정사영 벡터는 무엇인가?

5. $\vec{u} = (3, -2, 1)$ 위로 $\vec{v} = (-1, 3, 2)$의 정사영 벡터 $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$와 $\vec{v}$의 $\vec{u}$에 직교하는 벡터성분을 구하여라.

6. 두 점 $P(3, -1, -2)$, $Q(-1, 3, 4)$을 지나는 직선에 대한 설명으로 맞는 것을 모두 골라라.(단 $t \in R$)

(a) 직선식은 $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+2}{6}$ 이다.

(b) 점 $(1, 1, 4)$를 지난다.

(c) 직선식은 $x = 2t-1$, $y = -2t+3$, $z = -3t+4$ 이다.

(d) 평면 $x-5y+4z+10 = 0$과 수직으로 만난다.

(e) 두 점 $A(1, 2, 3)$과 $B(-1, 4, 0)$을 지나는 직선과 평행이다.

7. $P(2, 3, -1)$ 와 $Q(1, 5, -3)$를 지나는 직선의

① 벡터 방정식을 구하여라. ② 매개변수 방정식을 구하여라.

③ 대칭 방정식을 구하여라.

8. 점 $P(3, 2, 1)$을 지나고, 직선 $x = 5t-3$, $y = -t-2$, $z = 3t-2$와 수직인 평면의 스칼라방정식을 구하라.

9. 점 $P(2, -3, -2)$를 지나고 두 벡터 $\vec{u} = (1, -2, 4)$와 $\vec{v} = (-1, 5, 1)$에 평행인 평면의 매개변수방정식과 스칼라방정식을 구하라.

※ 10-12 가우스 소거법 또는 가우스-요르단 소거법을 이용하여 다음 세 평면이 만나는 해집합을 찾고, 그것이 무엇을 나타내는지(점, 직선, 평면: 직선과 평면은 어떤 직선, 어떤 평면인지) 판정하라.

10. $\begin{cases} 4x+2y+9z = -10 \\ x+2y+3z = 2 \\ 3x+4y+8z = 0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ -3x - 2y + 2z = 1 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ x + 2y - 4z = -1 \\ 3x - y - 5z = 1 \end{cases}$

※ 13-14 행렬 A, B, C에 대해 다음을 구하여라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

13. $(AC)A$ 14. $C(BA)$

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$이고, $p(x) = x^3 + 10x - 5$일 때 $p(A)$를 구하라.

16. (p57, 33(a)) 정방 행렬 A가 $A^2 + 2A + I = 0$을 만족하면 A가 가역임을 보이고, 그 역행렬을 찾아라.

※ 17-18 주어진 행렬의 역행렬을 기본 행연산을 이용하여 구하여라.

17. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ 18. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$의 행렬식을 구하라.

20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) A의 딸림행렬(수반행렬) adj(A)를 구하여라.

(2) (1)을 이용하여 A의 역행렬을 구하라.

21. (참고: p159, 34, 35) 4×4 행렬 A에 대하여 $\det(A) = -3$일 때 다음을 구하라.

(1) $\det(-A)$ (2) $\det(2A)$ (3) $\det(A^2A^T)$ (4) $\det((-3A)^{-1})$ (5)$\det(\mathrm{adj}A)$

22. 두 벡터 $\vec{u} = (3, -4, 1)$ 와 $\vec{v} = (5, -2, 1)$에 대해 외적 $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \times (2u - 3\vec{v})$를 구하라.

23. 주어진 꼭짓점을 갖는 삼각형의 넓이를 구하라. $P(2, 1, -3)$, $Q(4, 2, -5)$, $R(-2, 5, -1)$.

24. $\vec{u} = (4, 1, -3)$, $\vec{v} = (3, -1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 2, 4)$로 이루어지는 평행육면체의 부피를 구하라.

25. $\vec{u} = (5, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, $\vec{w} = (1, 3, 2)$로 이루어지는 사면체의 부피는 무엇인가?

26. (p223, 25, 26 참고) $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = 5$일 때 다음을 구하라.

(1) $\mathrm{w} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{u})$ (2) $\mathrm{v} \cdot (\mathrm{w} \times \mathrm{u})$ (3) $(\mathrm{w} \times \mathrm{u}) \cdot \mathrm{v}$

(4) $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{v})$ (5) $(\mathrm{w} \times \mathrm{u}) \cdot \mathrm{w}$

27. 세 점 $P(1, 0, 1)$, $Q(6, 2, 4)$, $R(-1, 2, -3)$을 포함하는 평면식 $x + by + cz = d$를 구하라.

28. 세 점 $A(2, -1, -1)$, $B(3, 2, -1)$, $C(0, -3, 1)$을 지나는 평면의 방정식 $ax + by + cz = 1$를 구하라.

29. 다음 각 집합이 벡터공간 R^3의 부분공간인지 아닌지 밝혀라. 이유를 쓸 것.

(a) $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(b) $\{(x, y, z) : x + 2y - 2z + 1 = 0\}$

(c) $\{\vec{r}(t) = (2t, 3t, -4t) : t \in R\}$

(d) $\{(x, y, z) : x - 3z = 0\}$

(e) $\{(x, y, z) : x + 2y = 0\} \cup \{(x, ,y, z) : x - z = 0\}$

30. 다음 각 집합이 벡터공간 R^3의 부분공간인지 아닌지 밝혀라. 이유를 쓸 것.

(a) $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(b) $\{(x, y, z) : 3x - 2y + 5z = 0\}$

(c) $\{\vec{r}(t) = (3t - 1, -2t + 2, -t - 3) : t \in R\}$

(d) $\{\vec{r}(s,t) = (s + 2t, -3s - 3t, s + 4t) : s, t \in R\}$

(e) $\{\vec{r}(t) = (t - 1, t, 2t + 1) : t \in R\} \cup \{(0, 0, 0)\}$

31. $\mathrm{v}_1 = (2, 2, 3)$, $\mathrm{v}_2 = (4, 3, -2)$, $\mathrm{v}_3 = (-2, 1, 1)$가 벡터공간 R^3을 생성하는가?

32. $B = \{\overrightarrow{\mathrm{v}_1} = (2, -1),\ \overrightarrow{\mathrm{v}_2} = (1, 3),\ \overrightarrow{\mathrm{v}_3} = (-3, -1)\}$ 는 R^2를 생성하는가?

※ 33-35 주어진 벡터들이 벡터공간 V에서 선형독립인지 선형종속인지 판정하라.

33. $V = R^3$, $\{(3, 0, 5), (5, -1, 2), (-2, 1, 3)\}$

34. $V = P_2$, $p(x) = 2 + 2x + 3x^2$, $q(x) = 4 + 3x + 2x^2$, $r(x) = -2 - x + x^2$

35. $V = P_2$, $p(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $q(x) = 5x^2 - x - 1$, $r(x) = x^2 - 2x - 1$

※ 36-38 주어진 벡터들이 벡터공간 V의 기저인지 판정하라.

36. $V = R^3$, $\{(3, 1, -4), (2, -2, 5), (4, -1, -3)\}$

37. $V = P_2$, $\{1 - 3x + 2x^2,\ 1 - 2x^2,\ 2 - 3x\}$

38. $V = M_{22}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

39. 집합 $B = \{\vec{u} = (1, -2),\ \vec{v} = (1, -3),\ \vec{w} = (-2, 4)\}$ 에 대한 설명이 맞는지 틀리는지 밝혀라.

ⓐ B는 R^2를 생성하지 않는다.

ⓑ B는 R^2를 생성한다.

ⓒ B는 R^2의 기저이다.

ⓓ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 는 선형독립이다.

ⓔ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 는 선형종속이다.

40. 기저 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$에 대한 $\mathrm{v} = (24, -12, 1)$의 좌표벡터를 구하여라.

$$\mathrm{v}_1 = (1, -2, 3),\ \mathrm{v}_2 = (-4, -5, 6),\ \mathrm{v}_3 = (3, 5, -2)$$

41. 기저 $S = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\}$에 대한 $\mathrm{p} = 6 + 16x + x^2$의 좌표벡터를 구하여라.

$$\mathrm{p}_1 = 1 + 2 - x^2,\ \mathrm{p}_2 = 2 + 5x^2,\ \mathrm{p}_3 = 3 + 3x + 4x^2$$

42. 기저 $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$에 대한 $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$의 좌표벡터를 구하여라.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

※ 43-44 다음 동차 연립방정식의 해공간의 기저와 차원을 구하라.

43. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ -4x + 2y + 4z = 0 \\ 8x - 4y - 8z = 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{cases}$

45. $B_1 = \{\overrightarrow{u_1} = (1, -3), \overrightarrow{u_2} = (0, 2)\}$, $B_2 = \{\overrightarrow{v_1} = (1, -1), \overrightarrow{v_2} = (2, 1)\}$는 벡터공간 R^2의 두 기저이다.

(1) 기저 B_1에서 기저 B_2로의 전이행렬 $P_{B_1 \to B_2}$을 구하라.

(2) 기저 B_1에서 좌표벡터 $[\vec{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대한 기저 B_2에서의 좌표벡터 $[\vec{w}]_{B_2}$을 구하라.

46. $B_1 = \left\{ \overrightarrow{u_1} = (6, -1), \overrightarrow{u_2} = (1, 2) \right\}$, $B_2 = \left\{ \overrightarrow{v_1} = (2, 1), \overrightarrow{v_2} = (-1, 1) \right\}$는 벡터공간 R^2의 두 기저이다.

(1) 기저 B_1을 기저 B_2로 바꾸는 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B_1 \to B_2}$을 구하라.

(2) 기저 B_1에서 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$에 대응하는 기저 B_2의 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_2}$를 구하라.

47. $B_1 = \{ \mathtt{p}_1 = 2 + 5x, \mathtt{p}_2 = 6 + 7x \}$, $B_2 = \{ \mathtt{q}_1 = 3, \mathtt{q}_2 = 1 + 5x \}$는 벡터공간 P_1의 기저이다.

(1) 기저 B_1에서 기저 B_2로의 전이행렬 $P_{B_1 \to B_2}$을 구하라.

(2) 기저 B_2에서 기저 B_1로의 전이행렬 $P_{B_2 \to B_1}$을 구하라.

(3) $\mathtt{p}$의 기저 B_1에 대한 좌표벡터가 $[\mathtt{p}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$일 때 $[\mathtt{p}]_{\mathrm{B}_2}$를 구하여라.

48. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 행렬의 특성방정식을 구하여라.

(2) 행렬의 고유값을 구하여라.

(3) 행렬의 고유공간의 기저를 구하여라.

49. 문제 48번의 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 행렬 A^{2023}의 고유값을 구하여라.

(2) 행렬 A^{2023}의 고유공간의 기저를 구하여라.

50. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 행렬 A를 $A = PDP^{-1}$로 분해하라.(각 행렬 P, P^{-1}, D를 써서 곱으로 나타낼 것)

(2) 행렬지수 e^A 를 구하라.

(3) A^{2023}을 구하라.

51. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 행렬 A를 $A = PDP^{-1}$로 분해하라.(각 행렬 P, P^{-1}, D를 써서 곱으로 나타낼 것)

(2) 행렬지수 e^A 를 구하라.

(3) A^{2023}을 구하라.

52. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & -8 & 0 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 영공간의 기저를 구하여라.

(2) 열공간의 기저를 구하여라.

(3) A 의 영공간의 직교여공간에 속하는 벡터가 아닌 것은 무엇인가?

① $(1, 2, -1, 0, 2)$ ② $(0, 1, 3, 5, 0)$ ③ $(0, 1, 3, 4, 1)$ ④ $(0, 0, 0, 1, 0)$ ⑤ $(0, 0, 0, 2, -2)$

53. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 행공간의 기저를 구하라. (2) 행공간의 기저를 구하라. (3) nullity(A)를 구하라.

(4) 영공간의 직교여공간에 속하는 벡터가 아닌 것은 무엇인가?

① $(3,1,-1,-8,3)$ ② $(2,5,8,-1,2)$ ③ $(0,1,2,1,0)$ ④ $(1,3,5,0,1)$ ⑤ $(0,2,6,-1,0)$

54.

(1) A가 4×7 행렬일 때 A의 기약행사다리꼴에서 가능한 선도 1의 최대개수는 몇 개인가? 이유는?

(2) A가 4×7 행렬일 때 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 일반해에서 가능한 매개변수의 최대개수는 몇 개인가? 이유는?

(3) A가 7×4 행렬일 때 A의 기약행사다리꼴에서 가능한 선도 1의 최대개수는 몇 개인가? 이유는?

(2) A가 7×4 행렬일 때 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 일반해에서 가능한 매개변수의 최대개수는 몇 개인가? 이유는?

※ 55-58 R^2에서 다음 합성변환을 <u>표준행렬들의 곱으로 나타내고</u> 합성변환의 <u>표준행렬</u>을 구하여라.

55. 직선 $y=x$에 대해 대칭시킨 후 시계 방향으로 60° 회전

56. x축 상으로 정사영시킨 다음, 반시계방향으로 120° 회전 후, 인자 $k=\dfrac{1}{3}$ 만큼 축소

57. 시계 방향으로 135° 회전시킨 다음, y축 상으로 정사영 시킨 후, 직선 $y=x$에 대해 대칭

58. x 축에 대해 대칭시킨 다음, 반시계 방향으로 30° 회전시킨 후, 인자 $k=2$만큼 확대.

59. R^2에서 $\vec{v}=(2,4)$을 반시계방향으로 150^o 회전한 후 $y=x$에 대칭 이동시킨 벡터를 찾아라.

60. R^2에서 세점 A(1, 1), B(1, 0), C(0, -1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 반시계방향으로 45^o 회전시킨 후, y축 대칭이동 시켜서 얻은 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 구하라.

61. 행렬연산자 $T: R^3\to R^3$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1-2x_2-3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 \qquad\quad + x_3 \\ w_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

(1) 일대일인지 판별하여라.

(2) 만약 그렇다면 역 연산자에 대한 표준행렬을 구하고 $T^{-1}(w_1,w_2,x_3)$를 구하여라.

62. 다음 정의 중 내적인 것을 고르고 내적이 아닌 경우 어느 공리를 만족하지 않는지 말하라.

(1) 함수 $f(x),g(x)$가 $[-\pi,\pi]$ 에서 연속일 때, $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$

(2) $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in R^2$ 에 대하여, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=3u_1v_1+4u_2v_2$

(3) $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in R^2$ 에 대하여, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=2u_1v_1-3u_2v_2$

(4) $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in R^2$ 에 대하여, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=3u_1v_1+u_2v_1+u_1v_2+2u_2v_2$

(5) $u=(u_1,u_2),v=(v_1,v_2)\in R^2$ 에 대하여, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=u_1v_1+3u_2v_1+2u_1v_2+4u_2v_2$

63. 다음 정의 중 내적인 것을 고르고 내적이 아닌 경우 어느 공리를 만족하지 않는지 말하라.

(a) $p(x),\ q(x)\ \in P_1$에 대해 $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

(b) $p(x) = a_0 + a_1 x,\ q(x) = b_0 + b_1 x\ \in P_1$에 대해 $\langle p(x), q(x)\rangle = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1$

(c) $\vec{u} = (u_1, u_2),\ \vec{v} = (v_1, v_2)\ \in R^2$ 에 대해 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 5u_1 v_1 + 3u_2 v_2$

(d) $\vec{u} = (u_1, u_2),\ \vec{v} = (v_1, v_2)\ \in R^2$ 에 대해 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 3u_2 v_2$

64. P_2의 표준내적(6.1절 예제7)에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $\langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle$, $\mathrm{p} = 5 - x + x^2$, $\mathrm{q} = -2 + 3x^2$

(2) $\|\mathrm{p}\|$, $\mathrm{p} = 3 - 2x - x^2$

(3) $d(\mathrm{p}, \mathrm{q})$, $\mathrm{p} = 5 - x + x^2$, $\mathrm{q} = 2 + x - 4x^2$

(4) p, q 사이의 코사인 값을 구하여라. $\mathrm{p} = x - 2x^2$, $\mathrm{q} = 5 - 3x + x^2$

65. 다음에 주어진 내적을 사용하여 R^2에서 단위원을 그려라.

(1) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}u_1 v_1 + \frac{1}{8}u_2 v_2$

(2) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = 7u_1 v_1 + 2u_2 v_2$

66. $\vec{u} = (u_1, u_2),\ \vec{v} = (v_1, v_2)$에 대하여 내적을 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 3u_1 v_1 + 5u_2 v_2$로 정의할 때, $\|(1, -2)\|$는 무엇인가?

67. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$에 대하여 내적을 $<\vec{u}, \vec{v}> = \overrightarrow{u^T} A\vec{v}$로 정의할 때, $\|(1, -3)\|$를 구하라.

68. 열벡터 $\vec{u}, \vec{v}$에 대하여 내적을 $<\vec{u}, \vec{v}> = \overrightarrow{u^T} A\vec{v}$로 정의하고, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때, 벡터 $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$와 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$를 구하라.

69. P_2에서 내적을 $\langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$로 정의할 때 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{p} = 2 - 3x$에 대하여 $\|\mathrm{p}\|$을 구하여라.

(2) $\mathrm{p} = -2$, $\mathrm{q} = 4 - 3x$일 때 사잇각을 구하라.

70. 유클리드 내적에 대해서

(1) W가 R^3에서 평면 $3x - 4y - 5z = 0$일 때 $W^\perp$의 식을 구하여라.

(2) W가 R^3에서 직선 $x = 2t,\ y = -4t,\ z = 3t$일 때 $W^\perp$의 식을 구하여라.

(3) W가 R^3에서 두 평면 $x + 2y - 3z = 0$과 $2x - y + 4z = 0$의 교선일 때 $W^\perp$의 식을 구하여라.

71. $\vec{v} = (2, -1, 1)$을 $B = \left\{\vec{u_1} = (1, 1, -1), \vec{u_2} = (1, 0, 1), \vec{u_3} = (-1, 2, 1)\right\}$를 직교기저로 갖는 좌표(벡터)로 표현하여라.

72. $U=\left\{\overrightarrow{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3},}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \overrightarrow{u_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overrightarrow{u_3}\right\}$가 R^3의 정규직교기저일 때, $\vec{v}=(2,2,-3)$을 U에서의 좌표로 나타내어라.

73. 벡터의 집합 $\{(1,0), (0,1)\}$은 R^2 상의 내적 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 3u_1v_1+5u_2v_2$에 대해 직교함을 보이고 정규직교 집합으로 변환하라.

74. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=QR$로 분해하라. 여기서 $Q^TQ=I$ 이고 R은 상삼각행렬이다

75. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=QR$로 분해하라. 여기서 $Q^TQ=I$ 이고 R은 상삼각행렬이다.(10점)

76. A를 직교대각화 하는 행렬 P를 구하고 $P^{-1}AP$를 구하여라. $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

77. 다음 이차형식을 대칭행렬 A를 이용하여 행렬표기법 $\mathrm{x}^TA\mathrm{x}$으로 표현하라.

(1) $3x_1^2+4x_1x_2$ (2) $x_1^2+4x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+5x_2x_3$

78. 다음 이차형식 Q에서 혼합할을 제가하기 위한 직교변수변환을 구하고 새로운 변수로 Q를 표현하여라.

$Q=\ 2x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

※ 79-80 다음 방정식의 원뿔곡선을 표준위치에 오도록 직교변수변환을 구하여 표현하고, 원뿔곡선이 어떤 곡선인지 설명하라.

79. $3x^2-4xy+3y^2-6=0$

80. $x^2-5y^2+8xy=10$

81. 이차형식 $q(x_1, x_2)=-6x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$의 혼합항을 제거하는 변수변환과 새로운 변수의 항으로 표현된 2차형식을 바르게 표현한 것을 구하라.

① $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ -7y_1^2-2y_2^2$

② $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ -7y_1^2-2y_2^2$

③ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ 7y_1^2+2y_2^2$

④ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ 7y_1^2+2y_2^2$

⑤ 답 없음

82. 이차형식 $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$의 혼합항을 제거하는 변수변환과 새로운 변수의 항으로 표현된 2차형식을 바르게 표현한 것을 구하라.

① $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ 8y_1^2 - 2y_2^2$　　② $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ 8y_1^2 - 2y_2^2$

③ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ -8y_1^2 + 2y_2^2$　　④ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ -8y_1^2 + 2y_2^2$

⑤ 답 없음

※ 83-84 이차형식을 양한정(양의 정부호), 음한정(음의 정부호), 반양한정(준 양의 정부호), 반음한정(준 음의 정부호), 부정으로 분류하라.

83. (1) $3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$　　(2) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$

84. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

85. $\{\mathrm{v}_1 = (1,2,1), \mathrm{v}_2 = (2-1,0), \mathrm{v}_3 = (-3,-1,1)\}$는 R^3의 기저이고 $T: R^3 \to R^2$은 다음을 만족하는 다음을 만족하는 선형변환이다. $T(\mathrm{v}_1) = (0,-1)$, $T(\mathrm{v}_2) = (1,1)$, $T(\mathrm{v}_3) = (1,0)$.

(1) $T(x_1, x_2, x_3)$의 공식을 구하고, $T(10,5,7)$를 구하라.

(2) T의 치역과 치역의 기저를 구하라.

(3) T의 핵과 핵의 기저를 구하라.

86. R^2에서 R^2로의 선형변환이 $L(x,y) = (4x-2y, -6x+3y)$ 로 정의될 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $Ker(L)$과 $Ker(L)$의 기저를 구하고, L이 단사인지 밝혀라.

(2) $Im(L)$과 $Im(L)$의 기저를 구하고, L이 전사인지 밝혀라.

87. $T: R^3 \to R^2$로 정의된 선형변환 $T(x,y,z) = (x-y+z, -2x+y-3z)$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) $Ker(L)$과 $Ker(L)$의 기저를 구하고, T가 단사인지 밝혀라.

(2) $Im(L)$과 $Im(L)$의 기저를 구하고, T가 전사인지 밝혀라.

88. $T: R^2 \to R^3$는 $T(x,y) = (2x-3y, 3x+y, -6x+9y)$ 이다.

(1) $Ker(T)$를 구하고, $Ker(T)$의 기저를 구하라. 또 T가 단사인지 밝혀라.

(2) $Im(T)$를 구하고, $Im(T)$의 기저를 구하라. 또 T가 전사인지 밝혀라.

89. $T: R^2 \to R^3$는 $T(x,y) = (-6x+3y, 2x-y, 4x-2y)$ 이다.

(1) $Ker(T)$를 구하고, $Ker(T)$의 기저를 구하라. 또 T가 단사인지 밝혀라.

(2) $Im(T)$를 구하고, $Im(T)$의 기저를 구하라. 또 T가 전사인지 밝혀라.

90. $T: R^3 \to R^3$는 $T(x,y,z) = (x+3z, 3x+y+4z, -2x+2y+4z)$으로 정의된 선형변환이다.

(1) $\ker(T)$와 $\ker(T)$의 기저를 구하고 T가 단사인지 밝혀라.

(2) $\mathrm{Im}(T) = R(T)$와 $\mathrm{Im}(T) = R(T)$의 기저를 구하고 T가 전사인지 밝혀라.

91. R^2에서 선형변환 $T(x,y) = (2x-3y,\ -4x+y)$가 정의되고, 두 기저가 $E = \{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\}$, $B = \{\vec{b}_1 = (2,\ -1),\ \vec{b}_2 = (-3,1)\}$일 때 다음 물음에 답하라.

(1) 표준기저 E에 대한 T의 행렬 $[T]_E$와 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B\to E}$를 구하라.

(2) $[T]_E$와 $P_{B\to E}$를 이용하여 기저 B에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 구하라.

(3) $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$은 $[T]_B$에 따라 기저 B에서 어떤 점으로 변환되는가?

92. R^2에서 선형변환 $T(x,y) = (2x-y, 4x+3y)$가 정의되고, 두 기저가 $E = \{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\}$, $B = \{\vec{b}_1 = (2,\ -1),\ \vec{b}_2 = (1,1)\}$일 때 다음 물음에 답하라.

(1) 표준기저 E에 대한 T의 행렬 $[T]_E$와 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B\to E}$를 구하라.(3점)

(2) $[T]_E$와 $P_{B\to E}$를 이용하여 기저 B에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 구하라.(4점)

(3) $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$은 $[T]_B$에 따라 기저 B에서 어떤 점으로 변환되는가?(2점)

93. $T: P_1 \to P_1$가 $T(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1(x+1)$으로 정의되고 P_1의 기저는 다음과 같다.

$B = \{\ \mathrm{p}_1 = 1-2x,\ \mathrm{p}_2 = -x\ \}$, $B' = \{\ \mathrm{q}_1 = 3,\ \mathrm{q}_2 = 1-x\ \}$

(1) $[T]_B$ 와 $P_{B'\to B}$를 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $[T]_{B'}$를 구하여라.

94. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$의 특이값 분해(SVD)를 다음에 따라 구하라.

(1) A^TA의 고유값 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$와 정규직교 고유벡터 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$를 구하라.

(2) 축소된 특이값 전개를 구하여라.

95. 98. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$를 특이값 분해(SVD)를 다음에 따라 구하라.

(1) A^TA의 고유값 $\lambda_1 \geq \lambda_2$와 정규직교 고유벡터 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$를 구하라.

(2) $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$와 $\overrightarrow{u_1} = A\overrightarrow{v_1}/\sigma_1$, $\overrightarrow{u_2} = A\overrightarrow{v_2}/\sigma_2$를 이용하여 $A = \sigma_1\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{v_1}^T + \sigma_2\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{v_2}^T$로 표현하고 계산하여 결과를 확인하라.

96. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$의 축소된 특이값 전개를 다음 과정에 따라 구하라.

(1) A^TA의 고유값 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 와 각 고유값에 대한 정규직교 고유벡터 $\vec{v}_1$과 $\vec{v}_2$를 구하라.(3점)

(2) $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$와 $\overrightarrow{u_1} = A\overrightarrow{v_1}/\sigma_1$, $\overrightarrow{u_2} = A\overrightarrow{v_2}/\sigma_2$를 이용하여 $A = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T$로 표현하고 계산하여 결과를 확인하라.