5.1 고유값과 고유벡터

▣ **정의 1**

A가 $n\times n$ 행렬이고, R^n의 $n\times 1$ 열벡터 $\mathrm{x}\neq 0$에 대해 어떤 스칼라 λ에 대해 다음 식이 성립

$$\boxed{A\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}}$$

- λ : A**의 고유값**(eigenvalue)
- x : λ**에 대응하는 고유벡터**(eigenvector coresponging to λ)

[Note]

- $A\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$ $\Rightarrow$ $A\mathrm{x}=\lambda I\mathrm{x}$ $\Rightarrow$ $(\lambda I-A)\mathrm{x}=0$ (또는 $(A-\lambda I)\mathrm{x}=0$)

☐ **정리 5.1.1**

A : $n\times n$ 행렬

- λ가 A의 고유값 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det(\lambda I-A)=0}$ 또는 $\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$
- 위 식을 A**의 특성방정식**(characteristic equation)이라 한다.

[Note]

$\boxed{p(\lambda)=\det(\lambda I-A)}$: A**의 특성다항식**(characteristic polynomial)

$$=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

예제 2 $A=\begin{pmatrix}3&0\\8&-1\end{pmatrix}$의 고유값을 구하여라.

[풀이]

예제 3 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-17&8\end{pmatrix}$의 고유값을 구하여라.

[풀이]

예제 4 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$의 고유값을 구하여라.

[풀이]

□ **정리 5.1.2**

■ A가 $n\times n$ 삼각행렬(상삼각, 하삼각 또는 대각행렬) $\Rightarrow$ A의 고유값은 A의 주대각선상의 원소

□ **정리 5.1.3**

A가 $n\times n$ 행렬이면 다음은 동등하다.

(a) λ가 A의 고유값이다.

(b) 연립방정식 $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$이 비자명해를 갖는다.

(c) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$를 만족하는 영이 아닌 벡터 $\mathbf{x}$가 존재한다.

(d) λ가 특성방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$의 해이다.

[Note]

◆ 행렬 A의 고유값 λ에 대응하는 고유벡터는 $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$을 만족하는 영이 아닌 벡터 $\mathbf{x}$이다.

◆ 따라서 $\mathbf{x} \neq 0$가 고유벡터이면 모든 실수 $c \neq 0$에 대해 $c\mathbf{x}$도 고유벡터이다.

$\because$

▣ **정의**

$\mathbf{x} \neq 0$가 행렬 A의 고유값 λ에 대응하는 고유벡터일 때

■ $\{c\mathbf{x} \mid c \in R\} = \{0\} \cup \{\lambda$에 대응하는 고유벡터$\}$: λ에 대응하는 A**의 고유공간(eigenspace)**

□ **정리**

■ λ에 대응하는 A**의 고유공간** $\Leftrightarrow$ 동차방정식 $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$의 해공간

예제 6 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$의 고유공간과 고유공간의 기저를 구하여라.

[풀이]

$\boxed{\text{예제 7}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$의 고유공간과 고유공간의 기저를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 5.2.3**

■ λ가 A의 고유값이고 $\mathbf{x}$가 λ에 대응하는 고유벡터이다.

$\Rightarrow$ 모든 양의 정수 k에 대해 λ^k는 A^k의 고유값이고 $\mathbf{x}$는 λ^k에 대응하는 A^k의 고유벡터이다.

[증명] $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 이므로,

$$A^k\mathbf{x} = A^{k-1}(A\mathbf{x}) =$$

$\boxed{\text{Ex}}$ 예제 7의 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대해서 A^7의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 5.1.4**

■ 정방행렬 A가 가역 $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$이 A의 고유값이 아니다.

[증명] $\det(\lambda I - A) = 0$ 의 해가 $\lambda = 0$이면,

5.2 대각화

▣ **정의 1**
- A, B : 정방행렬. 다음을 만족하는 가역행렬 P가 존재하면 **B는 A와 닮았다**(similar)라고 한다.

$$B = P^{-1}AP$$

[Note]

B가 A와 닮았다. 즉, $B = P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad Q = P^{-1}$에 대해 $A = Q^{-1}BQ$. 따라서 A는 B와 닮았다.

▣ **정의**
- A와 B 어느 한쪽이 다른 것에 닮음이면 **A와 B는 닮음행렬**(similar matrix)이라 한다.

□ **정리 [닮음 불변: 닮음 행렬에 대하여 공유되는 성질]**

(a) $B = P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \det(B)$

(b) A가 가역 $\quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}AP$가 가역

(c) A와 $P^{-1}AP$의 특성다항식이 같다.

(d) A와 $P^{-1}AP$의 고유값이 같다.

(e) λ가 A의 고유값이면 $P^{-1}AP$의 고유값이고,
λ에 대응하는 A의 고유공간과 $P^{-1}AP$의 고유공간은 같은 차원을 갖는다.

[증명]

(a) $B = P^{-1}AP$

$$\Rightarrow \quad \det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

(c) $\lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P$

▣ **정의 2**

정방행렬 A가 어떤 대각행렬과 닮았다.

즉, $P^{-1}AP = D$(대각행렬)이 되는 가역행렬 P가 존재하면,
- A는 **대각화가능**(diagonalizable)하다고 한다.

이때 행렬 P는 A를 **대각화한다**(diagonalize)라고 한다.

□ **정리 5.2.1**

A가 $n \times n$ 행렬이면 다음은 동등하다.

(a) A는 대각화 가능하다.

(b) A는 n개의 선형독립인 고유벡터를 갖는다.

[Note] [행렬의 대각화]

A의 고유값을 λ_1, λ_2, ..., λ_n이라 하자. 열벡터 p_j를 λ_j에 대응하는 고유벡터라 하자.

$\Rightarrow \quad A\mathrm{p}_j = \lambda_j \mathrm{p}_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$

$$P = (\mathrm{p}_1 \; \mathrm{p}_2 \cdots \mathrm{p}_n), \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 라 하자.}$$

$\Rightarrow \quad AP = A(\mathrm{p}_1 \; \mathrm{p}_2 \cdots \mathrm{p}_n) = (A\mathrm{p}_1 \; A\mathrm{p}_2 \cdots A\mathrm{p}_n) = (\lambda_1 \mathrm{p}_1 \; \lambda_2 \mathrm{p}_2 \cdots \lambda_n \mathrm{p}_n) = PD$

$\therefore \quad P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$

□ **정리**

■ 행렬 A가 대각화 가능 $\quad \Rightarrow \quad \det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

□ **정리 5.2.2**

(a) $\mathrm{v}_1 \; \mathrm{v}_2 \cdots \mathrm{v}_k$가 서로 다른 고유값에 대응하는 행렬 A의 고유벡터 $\Rightarrow$ $\{\mathrm{v}_1 \; \mathrm{v}_2 \cdots \mathrm{v}_k\}$은 선형독립

(b) $n \times n$ 행렬 A가 n개의 서로 다른 고유값을 갖는다. $\Rightarrow$ A는 대각화가능하다.

예제 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$을 대각화하는 행렬 P를 구하여라. 또 $A = PDP^{-1}$ 로 표현하라.

[풀이] 5.1절의 예제 7에서

고유값 $\lambda = 2$에 대한 고유벡터 $\mathrm{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 고유값 $\lambda = 1$에 대한 고유벡터 $\mathrm{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

이때 $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

또한 $A = PDP^{-1} =$

$\boxed{\text{예제 2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$을 대각화하는 행렬 P를 구하여라.

[풀이]

$\boxed{\text{예제 3}}$ $\boxed{\text{예제 4}}$ 각자!!!

[Note] [행렬의 거듭제곱]

A : 대각화 가능한 $n \times n$ 행렬, k : 양의 정수

$$\text{즉, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D \qquad \Rightarrow \qquad (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} = D^k$$

식의 좌변 : $(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP\cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP$

$$\therefore \quad P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

$\boxed{\text{예제 6}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$일 때 A^{13}을 구하여라.

[풀이]

[Note] [e^x의 맥클로린 급수]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

▣ **정의 [행렬 지수(matrix exponential)]**

■ A가 $n\times n$ 행렬일 때 **행렬지수** e^A는 다음과 같이 정의한다.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n = I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{4!}A^4+\cdots$$

[Note]

$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k\end{pmatrix}$ 일 때 e^D는?

$$\Rightarrow\ e^D = I+D+\frac{1}{2!}D^2+\frac{1}{3!}D^3+\frac{1}{4!}D^4+\cdots = \begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^n}{n!} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^n}{n!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_k}\end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP = D$ 이면 $e^{P^{-1}AP} = e^D$.

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}AP} &= I+P^{-1}AP+\frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2+\frac{1}{3!}(P^{-1}AP)^3+\cdots\\ &= I+P^{-1}AP+\frac{1}{2!}P^{-1}A^2P+\frac{1}{3!}P^{-1}A^3P+\cdots\\ &= P^{-1}(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots)P\\ &= P^{-1}e^AP\end{aligned}$$

$$\therefore\ P^{-1}e^AP = e^D \qquad \Rightarrow \qquad e^A = Pe^DP^{-1}$$

$$\therefore\ e^A = P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_k}\end{pmatrix}P^{-1}\quad (= Pe^DP^{-1})$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$일 때 e^A를 구하여라.

[풀이]