6.1 내적

▣ **정의 1**

- 실벡터공간 V 상의 **내적(inner product)**은 V에 속하는 벡터 u와 v의 각 쌍에 실수 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$를 대응시키는 함수로써 V의 모든 벡터 u, v, w와 모든 스칼라 k에 대해 다음 공리들을 만족해야한다.

1. $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle$: 대칭공리
2. $\langle \mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle$: 합의 공리
3. $\langle k\mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = k\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$: 동질성 공리
4. $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \geq 0$ 이고, $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = \mathbf{0}$: 양의 공리

- 내적을 갖는 실벡터공간을 **내적공간(inner product space)**이라 한다.

[Note] Ex R^n에서 두 벡터 u와 v에 대해 내적을 다음과 같이 정의하면 내적의 공리들을 만족한다.

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \quad (= \mathrm{u} \cdot \mathrm{v})$$

- 이 내적을 **유클리드 내적** 또는 **표준 내적**이라 하고 이때 R^n을 **유클리드 n-공간**이라 부른다.

▣ **정의 2**

V는 내적공간이고 u와 v는 V의 벡터이다.

- v의 **놈(norm)** 또는 **길이(length)** : $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle}$
- u와 v 사이의 **거리(distance)** : $d(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\| = \sqrt{\langle \mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}-\mathrm{v} \rangle}$
- **단위벡터(unit vector)** : 놈(norm)이 1인 벡터

□ **정리 6.1.1**

V는 내적공간이고 u와 v는 V의 벡터, k는 스칼라이다.

(a) $\|\mathrm{v}\| \geq 0$. 단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\mathrm{v} = \mathbf{0}$

(b) $\|k\mathrm{v}\| = |k|\,\|\mathrm{v}\|$

(c) $d(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{d}(\mathrm{v}, \mathrm{u})$

(d) $d(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \geq 0$. 단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\mathrm{u} = \mathrm{v}$

[Note]

- $w_1, w_2, \ldots, w_n$은 양의 실수이다. R^n에서 두 벡터 u와 v에 대해 내적을 다음과 같이 정의하자.

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

- 이 내적을 **가중치 $w_1, w_2, \ldots, w_n$을 갖는 가중내적**

(weighted Euclidean inner product with weight $w_1, w_2, \ldots, w_n$)이라 한다.

예제 1/2 R^2의 벡터 $\mathrm{u} = (u_1, u_2)$와 $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$에 대해 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$라 하자

(1) 이 공식은 내적임을 보여라.

(2) $\mathrm{u} = (1, 0)$의 놈(norm)을 구하여라.

(3) u와 $\mathrm{v} = (0, 1)$사이의 거리를 구하여라.

[풀이]

■ **정의**

- V는 내적공간이다. 다음 집합을 V의 **단위구(unit sphere)** 또는 **단위원(unit circle)**이라 한다.

$$\{ \mathrm{u} \in V : \| \mathrm{u} \| = 1 \}$$

예제 3 각자!!!

[Note] A는 $n \times n$ 가역행렬이고 u와 v는 R^n의 열벡터 형태로 표현된 벡터이다.

$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = A\mathrm{u} \cdot A\mathrm{v}$ 라 하면 내적공리를 만족함을 보여라.

이 내적은 **행렬내적**이고, **A에 의해 생성되는 R^n 상의 내적**이라 한다.

[풀이]

[Note]

- 위 Note의 내적에서 벡터 u와 v가 열벡터 형태이면

$$\Rightarrow \quad \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = A\mathrm{u} \cdot A\mathrm{v} = (A\mathrm{v})^T(A\mathrm{u}) = \mathrm{v}^T A^T A\mathrm{u}$$

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = A\mathrm{u} \cdot A\mathrm{v} = (A\mathrm{u})^T(A\mathrm{v}) = \mathrm{u}^T A^T A\mathrm{v}$$

[Note] $\boxed{\text{예제 4}}$ 유클리드 표준내적과 유클리드 가중내적은 행렬내적의 예이다.

① $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v}$

② $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n = \mathbf{u}^TA^TA\mathbf{v}$ 일 때 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ex}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$이고, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 R^2의 열벡터 형태이다. 정의 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^TA\mathbf{v}$가 R^2에서 내적인가?

[풀이]

$\boxed{\text{Ex}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$이고, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 R^2의 열벡터 형태이다. 정의 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^TA\mathbf{v}$가 R^2에서 내적인가?

[풀이]

[Note] $\boxed{\text{예제 7}}$ P_n의 다항식 $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$에 대해 다음과 같이 정의된 내적을 이 공간의 **표준내적**이라 부른다.

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

◆ 이 내적에 대한 $\mathbf{p}$의 놈은 $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2}$

$\boxed{\text{예제 10}}$ $C[a, b] = \{ f(x) \mid f(x)$는 $[a, b]$에서 연속인 함수$\}$

$\mathbf{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x)$가 $C[a, b]$일 때 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$라 하자.

(1) 이 공식은 내적임을 보여라. (2) $\mathbf{f} = f(x) = x + 3$의 놈을 구하여라.

[풀이]

□ **정리 6.1.2**

u, v, w $\in V$: 실내적공간, k : 스칼라

(a) $\langle \mathbf{0}, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

(b) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}+\mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle + \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle$

(c) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}-\mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle - \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle$

(d) $\langle \mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle - \langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle$

(e) $k\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{u}, k\mathrm{v} \rangle$

6.2 내적공간에서 각도와 직교성

□ **정리 6.2.1 [코시-슈바르츠 부등식]**

▪ u, v $\in V$: 실내적공간

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle| \le \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|}$$

[증명] $\mathrm{u} = \mathbf{0}$ 일때는 양변 모두 0으로 성립. $\mathrm{u} \ne \mathbf{0}$ 이라 하자.

t를 임의의 실수라 하자.

$$0 \le \langle t\mathrm{u}+\mathrm{v}, t\mathrm{u}+\mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle t + \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = at^2+bt+c$$

$$\uparrow$$

$$a = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle,\ b = 2\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle,\ c = \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle$$

이차식이 양수가 될 조건은 $b^2-4ac \le 0$ 이다. 즉, $4\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle^2 - 4\langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \le 0$

따라서 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle^2 \le \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \Rightarrow |\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle| \le \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|$

[Note]

$$\boxed{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle^2 \le \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle}$$

$$\boxed{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle^2 = |\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle|^2 \le \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2}$$

▣ **정의**

u, v $\in V$: 실내적공간.

▪ **u와 v 사이의 각** θ를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|}\right)} \quad \boxed{\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|},\ 0 \le \theta \le \pi}$$

□ **정리 6.2.2**

u, v, w $\in V$: 실내적공간

(a) $\boxed{\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| \le \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|}$: 벡터의 삼각형부등식

(b) $\boxed{d(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \le d(\mathrm{u}, \mathrm{w}) + d(\mathrm{w}, \mathrm{v})}$: 거리의 삼각형부등식

▣ **정의 1**

u, v $\in V$: 실내적공간.

■ $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 0$을 만족할 때 u와 v는 **직교(orthogonal)**한다고 한다.

[Note]

■ 직교성은 내적에 의존한다.

예제 2 u $=(1, 1)$와 v $=(1, -1)$라 하자.

(1) u와 v는 유클리드 내적에 대해 직교하는가?

(2) u와 v는 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ 내적에 대해 직교하는가?

[풀이]

예제 4 $P_2 = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in R\right\}$이고 내적 $\langle \mathrm{p}, \mathrm{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$을 갖는다.

(1) p $= x$와 q $= x^2$의 놈을 구하여라.

(2) p와 q는 직교하는가?

[풀이]

□ **정리 6.2.3 [일반화된 피타고라스 정리]**

■ 실내적공간의 두 벡터 u와 v가 직교한다. $\Rightarrow$ $\|\mathrm{u} + \mathrm{v}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2$

▣ **정의 2**

V : 실내적공간, W : V의 부분공간

■ W의 **직교여공간(orthogonal complement)**, $W^{\perp}$은

W의 모든 벡터와 직교하는 V 안의 모든 벡터들의 집합이다.

□ **정리 6.2.4**
V : 실내적공간, W : V의 부분공간
(a) $W^{\perp}$는 V의 부분공간이다.
(b) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

[증명]

□ **정리 6.2.5**
- V : 유한차원 실내적공간, W : V의 부분공간 $\Rightarrow$ $(W^{\perp})^{\perp} = W$

[Note]
- V와 $\{\mathbf{0}\}$은 서로 직교여공간이다.

[복습]
- R^n 상의 유클리드 내적에 대해 행렬의 행공간과 영공간은 서로의 직교여공간이다.

예제 6 $W = \text{span}\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, \mathrm{w}_4\}$이다.
W의 직교여공간의 기저를 구하여라.(유클리드 내적에 대한)

$\mathrm{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0)$, $\mathrm{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3)$

$\mathrm{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15)$, $\mathrm{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$

[풀이] $W = \text{span}\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, \mathrm{w}_4\}$는 행렬 A의 행공간과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

행공간의 직교여공간은 영공간이므로, 영공간의 기저를 찾는다.

6.3 그람-슈미트 과정: QR-분해

▣ **정의 1**

S : 두 개 이상의 원소를 갖는 실내적공간 V의 부분집합

- S의 모든 벡터들이 서로 직교 : S는 **직교집합(orthogonal set)**
- S의 모든 벡터들의 놈이 1인 직교집합 : S는 **정규직교집합(orthonormal set)**

[Note]

- 직교집합의 벡터들은 놈이 1인 벡터로 만들 수 있다. 이 과정을 **정규화(normalizing)**라 한다.
- 영이 아닌 벡터들로 이루어진 직교집합은 정규화함으로써 정규직교집합으로 변환될 수 있다.

예제 1/2 $\mathrm{u}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathrm{u}_3 = (1, 0\ -1)$이고 R^3는 유클리드 내적을 갖는다.

(1) $S = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3\}$는 직교집합임을 보여라.

(2) S를 정규화하고 정규직교집합을 구하여라.

[풀이]

□ **정리 6.3.1**

- 내적공간의 영이 아닌 벡터로 이루어진 직교집합 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$은 선형독립이다.

[증명]

▣ **정의**

- **정규직교기저(orthonormal basis)** : 내적공간에서 정규직교벡터로 이루어진 기저
- **직교기저(orthogonal basis)** : 직교벡터로 이루어진 기저

예제 4 $\mathrm{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathrm{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow\ S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$: R^3의 정규직교기저

□ **정리 6.3.2**

▪ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 직교기저.

$$\mathrm{u}\in V \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathrm{u} = \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle}{\|\mathrm{v}_n\|^2}\mathrm{v}_n}$$

▪ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 정규직교기저.

$$\mathrm{u}\in V \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathrm{u} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle\mathrm{v}_1 + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle\mathrm{v}_2 + \cdots + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle\mathrm{v}_n}$$

[증명]

$\mathrm{u}\in V$는 $\mathrm{u} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_\mathrm{n}$로 표현된다. ($\because$ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$가 기저)

모든 $i=1,\ 2,\ \ldots,n$에 대해

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i\rangle = \langle\, c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n, \mathrm{v}_i\rangle$$

[Note]

◆ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 직교기저.

$\mathrm{u}\in V \quad\Rightarrow\quad$ u의 좌표벡터 : $\boxed{(\mathrm{u})_S = \left(\frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}, \cdots, \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle}{\|\mathrm{v}_n\|^2}\right)}$

◆ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$: 내적공간 V의 정규직교기저.

$\mathrm{u}\in V \quad\Rightarrow\quad$ u의 좌표벡터 : $\boxed{(\mathrm{u})_S = (\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1\rangle, \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2\rangle, \cdots, \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_n\rangle)}$

예제 6 $\mathrm{w}_1=(0, 2, 0)$, $\mathrm{w}_2=(3, 0, 3)$, $\mathrm{w}_3=(-4, 0, 4)$

(1) 위 벡터들이 유클리드 내적으로 R^3의 직교기저임을 보여라.

(2) 정규화로 정규직교기저 S를 찾아라.

(3) $\mathrm{u}=(1, 2, 4)$를 S의 정규직교기저벡터들의 선형결합으로 표현하여라.

(4) $\mathrm{u}=(1, 2, 4)$의 좌표벡터 $(\mathrm{u})_S$를 구하여라.

[풀이]

□ **정리 6.3.3 [사영정리(projection theorem)]**

- W : 내적공간 V의 유한차원 부분공간

 $\Rightarrow$ $\mathrm{u} \in V$는 오직 한 가지 방법으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{u} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2, \qquad \mathrm{w}_1 \in \mathrm{W}, \quad \mathrm{w}_2 \in \mathrm{W}^{\perp}$$

[증명] W의 직교기저를 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$이라 하자.

$\mathrm{w}_1 = \dfrac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 + \dfrac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2 \rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 + \cdots + \dfrac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_r \rangle}{\|\mathrm{v}_r\|^2}\mathrm{v}_r$ 이라 하면, $\mathrm{w}_1 \in W$

$\mathrm{w}_2 = \mathrm{u} - \mathrm{w}_1$ 이라 하면, 모든 $i = 1, 2, \ldots, r$ 에 대해

$$\langle \mathrm{w}_2, \mathrm{v}_i \rangle = \left\langle \mathrm{u} - \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2 \rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_r \rangle}{\|\mathrm{v}_r\|^2}\mathrm{v}_r, \mathrm{v}_i \right\rangle$$

$$= \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle - \left\langle \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle}{\|\mathrm{v}_i\|^2}\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i \right\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle = 0$$

 따라서 $\mathrm{w}_2 \in W^{\perp}$

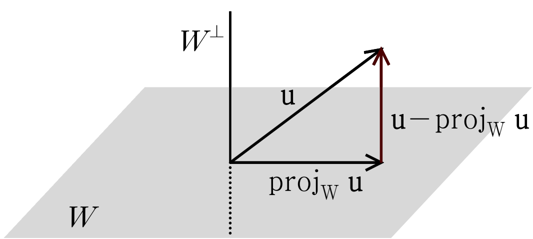
유일 :

[Note]

 정리 6.3.3의 w_1, w_2는 다음과 같이 불리고, 표기된다.

- $\mathrm{w}_1 = \mathrm{proj}_W \mathrm{u}$: **W로의 u의 정사영**
- $\mathrm{w}_2 = \mathrm{proj}_{W^{\perp}} \mathrm{u}$: **$W^{\perp}$로의 u의 정사영**(또는 **W에 직교하는 u의 성분**)

 $\therefore$ $\mathrm{u} = \mathrm{proj}_W \mathrm{u} + \mathrm{proj}_{W^{\perp}} \mathrm{u}$ ($\therefore$ $\mathrm{proj}_{W^{\perp}} \mathrm{u} = \mathrm{u} - \mathrm{proj}_W \mathrm{u}$)



□ **정리 6.3.4**

 W : 내적공간 V의 유한차원 부분공간

(a) $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$: W의 직교기저

$$\mathrm{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{proj}_W \mathrm{u} = \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2 \rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_r \rangle}{\|\mathrm{v}_r\|^2}\mathrm{v}_r$$

(b) $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$: W의 정규직교기저

$$\mathrm{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{proj}_W \mathrm{u} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 \rangle \mathrm{v}_1 + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2 \rangle \mathrm{v}_2 + \cdots + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_r \rangle \mathrm{v}_r$$

예제 7 R^3가 유클리드 내적을 갖고, $\mathrm{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$가 생성하는 부분공간을 W라 하자. $\mathrm{u} = (1, 1, 1)$일 때 $\mathrm{proj}_W \mathrm{u}$와 $\mathrm{proj}_{W^\perp} \mathrm{u}$를 구하여라.

[풀이] $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$는 W의 정규직교기저이다.

□ **정리 6.3.5 [그람-슈미트 과정(Gram-Schmidt process)]**

- 영이 아닌 모든 유한차원의 내적공간은 정규직교기저를 갖는다.

[증명] W : 영이 아닌 임의의 유한차원인 내적공간, $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, ..., \mathrm{u}_r\}$: W의 임의의 기저

($\Rightarrow$ W가 직교기저 가짐을 보이자. $\Rightarrow$ 정규화)

단계 1 $\mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_1$ 이라 하자.

단계 2 $W_1 = \mathrm{span}\{\mathrm{v}_1\}$라 하면, 정리 6.3.3의 Note에서 $\mathrm{u}_2 = \mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{u}_2 + \mathrm{v}_2$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_2 = \mathrm{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{u}_2 = \mathrm{u}_2 - \frac{\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 \qquad : \quad \text{정리 6.3.4}$$

(여기서 v_2는 v_1과 직교한다. $\therefore \mathrm{v}_2$는 u_1과 직교)

단계 3 $W_2 = \mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$라 하면, $\mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\} = \mathrm{span}\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$ ($\because$ v_2는 u_1, u_2의 결합)

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_3 = \mathrm{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathrm{u}_3 = \mathrm{u}_3 - \frac{\langle \mathrm{u}_3, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle \mathrm{u}_3, \mathrm{v}_2 \rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2$$

(여기서 v_3는 v_1, v_2와 직교한다. $\therefore$ v_3는 u_1, u_2와도 직교)

단계 4 $W_3 = \mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$라 하면, $\mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\} = \mathrm{span}\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3\}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_4 = \mathrm{u}_4 - \mathrm{proj}_{W_3}\mathrm{u}_4 = \mathrm{u}_4 - \frac{\langle \mathrm{u}_4, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle \mathrm{u}_4, \mathrm{v}_2 \rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{u}_4, \mathrm{v}_3 \rangle}{\|\mathrm{v}_3\|^2}\mathrm{v}_3$$

(여기서 v_4는 v_1, v_2, v_3와 직교한다. $\therefore$ v_4는 u_1, u_2, u_3와도 직교)

$\vdots$

$\Rightarrow$ r번 반복해서 선형독립인 직교집합 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_r\}$을 얻을 수 있다.

이 집합이 W의 <u>직교기저</u>가 된다.

$\Rightarrow$ 이 집합을 정규화하면 <u>정규직교기저</u>가 된다.

예제 8 유클리드 내적을 갖는 R^3에 대해 $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$는 기저를 이룬다. 그람-슈미트 과정으로 R^3의 정규직교기저를 구하여라.

[풀이]

❒ QR-분해

A : 선형독립인 열벡터를 갖는 $m\times n$ 행렬

Q : A의 열벡터에 그람-슈미트 방법으로 얻어진 정규직교 열벡터를 갖는 행렬

$\Rightarrow$ A와 Q의 관계는?

$u_1, u_2, \ldots, u_n$: A의 선형독립인 열벡터 $\Rightarrow$ $A = (u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$: Q의 정규직교 열벡터 $\Rightarrow$ $Q = (q_1\ q_2\ \ldots\ q_n)$

$\Rightarrow$ 정리 6.3.2 (b) 에 의해

$$\begin{aligned}
u_1 &= \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_1, q_n\rangle q_n \\
u_2 &= \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_2, q_n\rangle q_n \\
&\vdots \\
u_n &= \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_n, q_n\rangle q_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ A = (u_1\ u_2\ \ldots\ u_n) = (q_1\ q_2\ \ldots\ q_n)\begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \cdots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$= QR$$

이때 행렬 R의 원소는 $j \geq 2$ 때 q_j가 $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}$과 직교하므로,

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

- 주대각선 아래의 원소가 모두 0
- 주대각선의 원소는 모두 0이 아니다.

즉, $A = QR$: Q는 정규직교 열벡터를 갖는 행렬이고, $Q^TQ = I$

R은 가역인 상삼각행렬

■ 이것을 A의 QR-**분해**(QR-**decomposition**)라 한다.

□ **정리 6.3.7 [QR 분해]**

- A : 선형독립인 열벡터를 갖는 $m\times n$ 행렬

  Q : 정규직교 열벡터를 갖는 $m\times n$행렬

  R : 가역인 상삼각행렬

$\Rightarrow$ A는 $A = QR$로 인수분해 될 수 있다.

예제 10 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$의 QR-분해를 구하여라.

[풀이]

[Note]

- $A = QR$ 로 분해가 되면, $R = Q^T A$로 구할 수 있다.

[Note]

- 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 에서 $A = QR$ 이면, $Q^T A\mathrm{x} = Q^T\mathrm{b}$ $\Rightarrow$ $R\mathrm{x} = Q^T\mathrm{b}$