선형대수학 2022년 2학기 중간고사 객관식 : A 유형

학과: 학번: 이름: 분반:

유의사항:

부정행위가 발견될 경우, 0점 처리함.

유형 A (OMR 카드에 표시) **시험시간: 80분**

이름을 적지 않으면, 10점 감점함

객관식: 1-9 (5점), 10-14 (3점) **주관식: 15-18 (각 10점). 상세한 풀이과정 필요.**

주관식 답안지, 객관식 OMR 답안지 제출함.

1. 두 벡터 $\vec{u} = (6, 2, -3)$과 $\vec{v} = (4, -1, 5)$에 대하여, $\vec{u}$ 위로 $\vec{v}$의 정사영 벡터 $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$은 무엇인가?

① $(6, 2, -3)$

② $\frac{1}{\sqrt{7}}(6, 2, -3)$

③ $\frac{1}{7}(6, 2, -3)$

④ $\frac{1}{6}(4, -1, 5)$

⑤ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}(4, -1, 5)$

2. 세 점 $A(2, -1, -1)$, $B(3, 2, -1)$, $C(0, -3, 1)$을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=1$이라 할 때 a의 값은 무엇인가?

① 6 ② 3 ③ -3 ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

3. 두 점 $P(3, -1, -2)$, $Q(-1, 3, 4)$을 지나는 직선에 대한 설명으로 맞는 것을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) 직선식은 $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{6}$ 이다.

(b) 점 $(1, 1, 4)$를 지난다.

(c) 직선식은 $x = 2t-1$, $y = -2t+3$, $z = -3t+4$ 이다.

(d) 평면 $x-5y+4z+10=0$과 수직으로 만난다.

(e) 두 점 $A(1, 2, 3)$과 $B(-1, 4, 0)$을 지나는 직선과 평행이다.

① (a), (b), (c)

② (a), (c)

③ (a), (d)

④ (c), (d), (e)

⑤ (a), (c), (e)

4. 세 벡터 $\vec{u} = (5, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, $\vec{w} = (1, 3, 2)$를 이웃하는 세 변으로 하는 평행육면체의 부피는 무엇인가?

① 10 ② 18 ③ 20 ④ 28 ⑤ 38

5. 행렬식 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$은 무엇인가?

① 10 ② 50 ③ 172 ④ -34 ⑤ -60

6. 집합 $B = \{\vec{a}, (2, 1, 5), (0, 1, 3)\}$이 R^3의 기저일 때 $\vec{a}$가 될 수 없는 것은 어느 것인가?

① $(0, 1, -3)$

② $(0, 0, -1)$

③ $(1, 0, 0)$

④ $(1, 1, 1)$

⑤ $(-1, 0, -1)$

7. 다음 중 R^3의 부분공간을 모두 고른 것은 어느 것인가?

(a) $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

(b) $\{(x,y,z) : x+2y-2z+1=0\}$

(c) $\{\vec{r}(t)=(2t,3t,-4t) : t\in R\}$

(d) $\{(x,y,z) : x-3z=0\}$

(e) $\{(x,y,z) : x+2y=0\}\cup\{(x,,y,z) : x-z=0\}$

① (a), (b), (c)
② (a), (c), (d)
③ (a), (c), (d), (e)
④ (c), (d)
⑤ (c), (d), (e)

8, R^3의 부분집합 $\{(a,1,2),(-2,0,3),(2,1,-4)\}$이 일차종속일 때 a 값은 무엇인가?

① 2 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ -1

9. 다음 집합에 대해 맞는 것을 모두 고른 것은 어느 것인가?

$B=\{(1,2,0),(0,1,1),(-1,0,3),(1,-1,1)\}$

(a) B는 선형독립이다.

(b) B는 선형종속이다.

(c) B는 R^3를 생성한다.

(d) B는 R^4를 생성한다.

(e) B는 R^3의 기저이다.

(f) B는 R^4의 기저이다.

① (a), (c), (e)
② (a), (d), (f)
③ (b), (c)
④ (b), (d)
⑤ (b), (c), (d)

10. 4×4 행렬 A에 대해 $\det(A)=-2$ 일 때 $\det(adjA)$는 무엇인가?

① -8 ② -2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 4 ⑤ 16

11. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=-5$일 때 $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$는 무엇인가?

① 5 ② -5 ③ 0 ④ 10 ⑤ -10

12. $B=\{x+1, 2x-1, x^2+x+1\}$는 P_2의 기저이다. P_2의 원소 $p(x)$에 대해 기저 B에 대한 좌표벡터가 $[p(x)]_B=(2,1,-1)$이면 $p(x)$는 무엇인가?

① $2x^2+x-1$
② x^2+x+1
③ x^2+4x+1
④ $-x^2-2x+1$
⑤ $-x^2+3x$

*13~14. 참, 거짓을 판정하라.

13. 3×3 행렬 A의 고유값이 $1,-1,2$이면 A는 가역이다.

① 참 ② 거짓 ③ 알 수 없다.

14. $n\times n$ 행렬 A가 가역이고 대각화 가능하면 A^{-1}도 대각화 가능하다.

① 참 ② 거짓 ③ 알 수 없다.

선형대수학 2022년 2학기 중간고사 주관식 답안지

학번: **이름:** **분반:**

주관식 문제: 15번~18번(각 10점) : 각 문제는 상세한 풀이 과정이 있는 경우만 점수가 인정됨.

15. 연립일차방정식 $\begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ x + 2y - 4z = -1 \\ 3x - y - 5z = 1 \end{cases}$ 에 대해 다음 물음에 답하여라.

(1) 열첨가행렬의 행사다리꼴 또는 기약행사다리꼴 행렬을 구하라.(5점)

(2) (1)의 행사다리꼴 또는 기약행사다리꼴 행렬을 이용하여 해집합을 구하라(3점)

(3) (2)에서 구한 해집합이 점인지, 직선인지, 평면인지 판정하고 구체적으로 설명하라.(2점)

16. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) A의 행렬식을 구하라.(2점)

(2) 수반행렬 $\mathrm{adj}(A)$를 구하라.(5점)

(3) (1), (2) 의 결과를 이용하여 역행렬 A^{-1}을 구하라.(2점)

(4) $A^{-1}A = I$ 를 계산하여 결과를 확인하라.(1점)

17. 벡터공간 R^2의 두 기저 $B_1 = \{\overrightarrow{u_1} = (1, -3), \overrightarrow{u_2} = (0, 2)\}$, $B_2 = \{\overrightarrow{v_1} = (1, -1), \overrightarrow{v_2} = (2, 1)\}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 기저 B_1을 기저 B_2로 바꾸는 전이행렬(기저변환행렬) $P_{B_1 \to B_2}$을 구하라.(5점)

(2) (1)의 결과를 이용하여 $\overrightarrow{u_1}$과 $\overrightarrow{u_2}$를 각각 $\overrightarrow{v_1}$과 $\overrightarrow{v_2}$의 일차결합으로 표현하라.(2점)

(3) (1)의 결과를 이용하여 기저 B_1에서 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대응하는 기저 B_2의 좌표 $[\overrightarrow{w}]_{B_2}$를 구하라.(3점)

18. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) 행렬 A의 고유값($\lambda_1 > \lambda_2$) 과 해당하는 고유벡터 $\overrightarrow{x}_{(1)}$, $\overrightarrow{x}_{(2)}$를 각각 구하라.(3점)

(2) A를 PDP^{-1}로 분해한 식을 써라. 반드시 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$를 사용하라.(3점)

(3) e^A를 구하라.(4점)

답

객관식 답:

3, 5, 2, 4, 1

5, 4, 2, 3, 1

3, 5, 1, 1

주관식 답:

15.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\left\{(2t+\frac{1}{7}, t-\frac{4}{7}, t) \;:\; t \in R\right\}$

(3) 점 $(\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, 0)$을 지나고, 벡터 $(2,1,1)$에 평행인 직선

16.

(1) $\det(A) = -7$

(2) $adjA = \begin{pmatrix} -14 & 7 & 0 \\ 5 & -4 & -2 \\ 13 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & 7 & 0 \\ 5 & -4 & -2 \\ 13 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

(4) 계산하여 결과를 확인

17.

(1) $P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{u_1} = \frac{7}{3}\overrightarrow{v_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{v_2}$,

$\overrightarrow{u_2} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{v_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v_2}$

(3) $[\overrightarrow{w}]_{B_2} = P_{B_1 \to B_2}[\overrightarrow{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

18.

(1) 고유값 : $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$

고유벡터 : $\overrightarrow{x}_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(3) $e^A = \begin{pmatrix} \frac{2e^5 + e^{-4}}{3} & \frac{2e^5 - 2e^{-4}}{3} \\ \frac{e^5 - e^{-4}}{3} & \frac{e^5 + 2e^{-4}}{3} \end{pmatrix}$