第8章 图

8.1 图的基本概念

8.2 图的存储结构

8.3 图的遍历

8.4 最小生成树

8.5 一点到其他点最短路径问题

8.6 拓扑排序

8.1图的基本概念

- 图定义 图是由顶点集合(vertex)及顶点间的关系集合组成的一种数据结构：

  $Graph = (V, E)$

其中 $V = \{ x \mid x \in$ 某个数据对象$\}$

是顶点的有穷非空集合；

$E = \{(x, y) \mid x, y \in V\}$

或 $E = \{<x, y> \mid x, y \in V \&\& Path(x, y)\}$

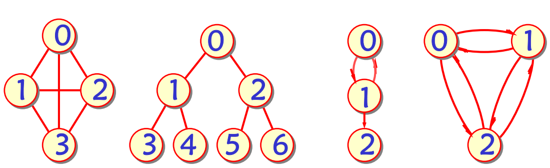
- 有向图与无向图

  $<x, y>$ 是有序的。

  边$<x, y>$就称为**弧**，x为**弧尾**，y为**弧头**。

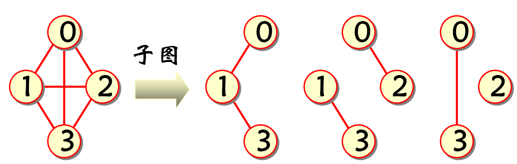
  (x, y)是无序的。

- 完全图

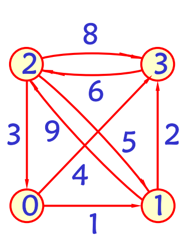


- 邻接顶点

- 子图 设有两个图 G = (V, E) 和 G’ = (V’, E’)。若 V’⊆V 且 E’⊆E, 则称 图G’ 是 图G 的子图。



- 权
- 带权图也叫做**网络**。



- 稠密图和稀疏图 e<nlogn

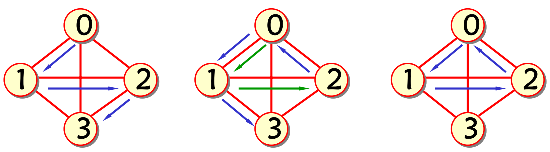
- 顶点的度

- 入度

- 出度

- 路径

- **路径长度**
- **简单路径** 若路径上各顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ 均不互相重复，则称这样的路径为简单路径。
- **回路** 若路径上第一个顶点 v_1 与最后一个顶点 v_m 重合，则称这样的路径为回路或环。



- **连通图与连通分量**
- **强连通图与强连通分量**
- **生成树** 一个连通图的生成树是其极小连通子图.

操作的归纳

图的抽象数据类型

```
class Graph {
//对象：由一个顶点的非空集合和一个边集合构成
//每条边由一个顶点对来表示。
public:
   Graph();                    //建立一个空的图
   void insertVertex (const T& vertex);
     //插入一个顶点vertex, 该顶点暂时没有入边
   void insertEdge (int v1, int v2, int weight);
     //在图中插入一条边(v1, v2, w)
   void removeVertex (int v);
     //在图中删除顶点v和所有关联到它的边
```

```
   void removeEdge (int v1, int v2);
     //在图中删去边(v1,v2)
   bool IsEmpty();
     //若图中没有顶点, 则返回true, 否则返回false
   T getWeight (int v1, int v2);
     //函数返回边 (v1,v2) 的权值
   int getFirstNeighbor (int v);
     //给出顶点 v 第一个邻接顶点的位置
   int getNextNeighbor (int v, int w);
     //给出顶点 v 的某邻接顶点 w 的下一个邻接顶点
};
```

图的模板基类

```
const int maxWeight = ……;           //无穷大的值(=∞)
const int DefaultVertices = 30;     //最大顶点数(=n)
template <class T, class E>
class Graph {                       //图的类定义
protected:
    int maxVertices;                //图中最大顶点数
    int numEdges;                   //当前边数
    int numVertices;                //当前顶点数
    int getVertexPos (T vertex);
      //给出顶点vertex在图中位置
public:
```

```
Graph (int sz = DefaultVertices);   //构造函数
~Graph();                           //析构函数
bool GraphEmpty () const            //判图空否
   { return numEdges == 0; }
int NumberOfVertices () { return numVertices; }
  //返回当前顶点数
int NumberOfEdges () { return numEdges; }
  //返回当前边数
virtual T getValue (int i);         //取顶点 i 的值
virtual E getWeight (int v1, int v2);  //取边上权值
virtual int getFirstNeighbor (int v);
  //取顶点 v 的第一个邻接顶点
```

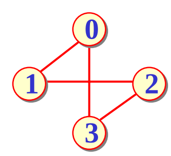
```
  virtual int getNextNeighbor (int v, int w);
   //取邻接顶点 w 的下一邻接顶点
  virtual bool insertVertex (const T vertex);
   //插入一个顶点vertex
  virtual bool insertEdge (int v1, int v2, E cost);
   //插入边(v1,v2), 权为cost
  virtual bool removeVertex (int v);
   //删去顶点 v 和所有与相关联边
  virtual bool removeEdge (int v1, int v2);
   //在图中删去边(v1,v2)
};
```

8.2 图的存储表示

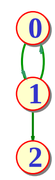
一、邻接矩阵（相邻矩阵）

- 图(n 个顶点)的邻接矩阵是一个**二维数组** edge[n][n]，
- **定义：**

$$A.Edge[i][j]=\begin{cases}1, & 如果<i,j>\in E \text{ 或者 } (i,j)\in E\\ 0, & 否则\end{cases}$$



$$\mathbf{A.edge} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

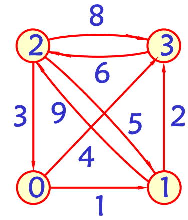


$$\mathbf{A.edge} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **邻接矩阵的特征：**
- 无向图的邻接矩阵是对称的；
- 有向图的邻接矩阵可能是不对称的。
- 在有向图中，统计第 i 行 1 的个数可得顶点 i 的**出度**，统计第 j 行 1 的个数可得顶点 j 的**入度**。
- 在无向图中，统计第 i 行 (列) 1 的个数可得顶点 i 的**度**。

网络(带权图)的邻接矩阵

$$\mathbf{A.edge}[i][j]=\begin{cases}\mathbf{W}(i,j), & 若 i \neq j 且 <i,j>\in \mathbf{E} 或 (i,j)\in \mathbf{E}\\ \infty, & 若 i \neq j 且 <i,j>\notin \mathbf{E} 或 (i,j)\notin \mathbf{E}\\ 0, & 若 i == j\end{cases}$$



$$\mathbf{A.edge} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵存储图的类定义

```
template <class T, class E>
class Graphmtx : public Graph<T, E> {
friend istream& operator >> ( istream& in,
   Graphmtx<T, E>& G);                //输入
friend ostream& operator << (ostream& out,
   Graphmtx<T, E>& G);          //输出
```

```
private:
   T *VerticesList;                    //顶点表
   E **Edge;                           //邻接矩阵
   int getVertexPos (T vertex) {
    //给出顶点vertex在图中的位置
      for (int i = 0; i < numVertices; i++)
         if (VerticesList[i] == Vertex) return i;
      return -1;
   };
public:
```

```
   Graphmtx (int sz = DefaultVertices);   //构造函数
   ~Graphmtx ()                           //析构函数
      { delete [ ]VerticesList;  delete [ ]Edge; }
   T getValue (int i) {
    //取顶点 i 的值, i 不合理返回0
      return i >= 0 && i <= numVertices ?
               VerticesList[i] : NULL;
   }
   E getWeight (int v1, int v2) {  //取边(v1,v2)上权值
      return v1 != -1 && v2 != -1 ? Edge[v1][v2] : 0;
   }
   int getFirstNeighbor (int v);
    //取顶点 v 的第一个邻接顶点
```

```
   int getNextNeighbor (int v, int w);
    //取 v 的邻接顶点 w 的下一邻接顶点
   bool insertVertex (const T vertex);
    //插入顶点vertex
   bool insertEdge (int v1, int v2, E cost);
    //插入边(v1, v2),权值为cost
   bool removeVertex (int v);
    //删去顶点 v 和所有与它相关联的边
   bool removeEdge (int v1, int v2);
    //在图中删去边(v1,v2)
};
```

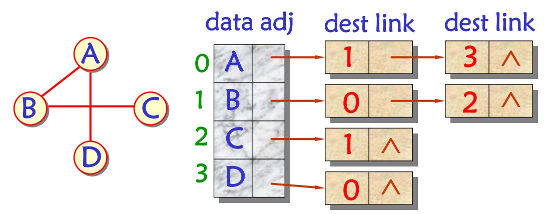
```
template <class T, class E>
Graphmtx<T, E>::Graphmtx (int sz) {     //构造函数
   maxVertices = sz;
   numVertices = 0;  numEdges = 0;
   int i, j;
   VerticesList = new T[maxVertices];  //创建顶点表
   Edge = (int **) new int *[maxVertices];
   for (i = 0; i < maxVertices; i++)
      Edge[i] = new int[maxVertices];   //邻接矩阵
   for (i = 0; i < maxVertices; i++)    //矩阵初始化
      for (j = 0; j < maxVertices; j++)
         Edge[i][j] = (i == j)  ?  0 : maxWeight;
};
```

```
template <class T, class E>
int Graphmtx<T, E>::getFirstNeighbor (int v) {
//给出顶点位置为v的第一个邻接顶点的位置,
//如果找不到, 则函数返回-1
   if (v != -1) {
      for (int col = 0; col < numVertices; col++)
         if (Edge[v][col] && Edge[v][col] < maxWeight)
            return col;
   }
   return -1;
};
```

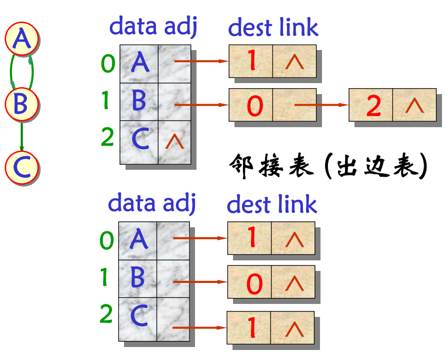
```
template <class T, class E>
int Graphmtx<T, E>::getNextNeighbor (int v, int w) {
//给出顶点 v 的某邻接顶点 w 的下一个邻接顶点
   if (v != -1 && w != -1) {
      for (int col = w+1; col < numVertices; col++)
         if (Edge[v][col] && Edge[v][col] < maxWeight)
            return col;
   }
   return -1;
};
```

二、邻接表

- 1.无向图的邻接表
- 将与同一顶点相邻接的顶点链接成一个单链表.

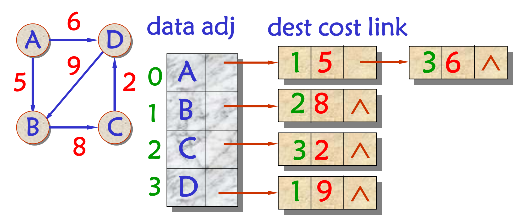


- 2.有向图的邻接表和逆邻接表



逆邻接表（入边表）

- 3.网络（带权图）的邻接表



（顶点表）（出边表）

- 邻接表的特征：
- 在邻接表的边链表中，各个边结点的链入顺序任意，视边结点输入次序而定。
- 求某个顶点的度（入度或出度）比较方便；
- 设图中有 n 个顶点，e 条边，则用邻接表表示无向图时，需要 n 个顶点结点，$2e$ 个边结点；用邻接表表示有向图时，若不考虑逆邻接表，只需 n 个顶点结点，e 个边结点。

邻接表存储图的类定义

链表的结点结构类

```
template <class T, class E>
struct Edge {                              //边结点的定义
   int dest;                               //边的另一顶点位置
   E cost;                                 //边上的权值
   Edge<T, E> *link;                       //下一条边链指针
   Edge () {}                              //构造函数
   Edge (int num, E cost)                  //构造函数
      : dest (num), weight (cost), link (NULL) { }
   bool operator != (Edge<T, E>& R) const
      { return dest != R.dest; }           //判边等否
};
```

顺序表结点结构类

```
template <class T, class E>
struct Vertex {                    //顶点的定义
    T data;                        //顶点的名字
    Edge<T, E> *adj;               //边链表的头指针
};
```

邻接表类

```
template <class T, class E>
class Graphlnk : public Graph<T, E> {   //图的类定义
friend istream& operator >> (istream& in,
        Graphlnk<T, E>& G);             //输入
friend ostream& operator << (ostream& out,
        Graphlnk<T, E>& G);             //输出
```

```
private:
    Vertex<T, E> *NodeTable;
        //顶点表 (各边链表的头结点)
    int getVertexPos (const T vertx) {
        //给出顶点vertex在图中的位置
        for (int i = 0; i < numVertices; i++)
            if (NodeTable[i].data == vertx) return i;
        return -1;
    }
public:
    Graphlnk (int sz = DefaultVertices);  //构造函数
    ~Graphlnk();                          //析构函数
```

```
    T getValue (int i) {                 //取顶点 i 的值
        return (i >= 0 && i < NumVertices) ?
            NodeTable[i].data : 0;
    }
    E getWeight (int v1, int v2);        //取边(v1,v2)权值
    bool insertVertex (const T& vertex);
    bool removeVertex (int v);
    bool insertEdge (int v1, int v2, E cost);
    bool removeEdge (int v1, int v2);
    int getFirstNeighbor (int v);
    int getNextNeighbor (int v, int w);
    void CreateNodeTable(void);  // 建立邻接表结构
};
```

```
template <class T, class E>
Graphlnk<T, E>::Graphlnk (int sz) {
//构造函数：建立一个空的邻接表
    maxVertices = sz;
    numVertices = 0;  numEdges = 0;
    NodeTable = new Vertex<T, E>[maxVertices];
        //创建顶点表数组
    if (NodeTable == NULL)
        { cerr << "存储分配错！ " << endl;  exit(1); }
    for (int i = 0; i < maxVertices; i++)
        NodeTable[i].adj = NULL;
};
```

```
template <class T, class E>
Graphlnk<T, E>::~Graphlnk() {
//析构函数：删除一个邻接表
    for (int i = 0; i < numVertices; i++ ) {
        Edge<T, E> *p = NodeTable[i].adj;
        while (p != NULL) {
            NodeTable[i].adj = p->link;
            delete p;  p = NodeTable[i].adj;
        }
    }
    delete [ ]NodeTable;             //删除顶点表数组
};
```

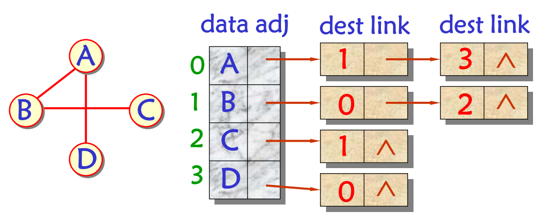
```
template <class T, class E>
int Graphlnk<T, E>::getFirstNeighbor (int v) {
//给出顶点位置为 v 的第一个邻接顶点的位置,
//如果找不到, 则函数返回 -1
    if (v != -1) {                   //顶点v存在
    Edge<T, E> *p = NodeTable[v].adj;
        //对应边链表第一个边结点
    if (p != NULL) return p->dest;
        //存在, 返回第一个邻接顶点
    }
    return -1;               //第一个邻接顶点不存在
};
```

```
template <class T, class E>
int Graphlnk<T, E>::getNextNeighbor (int v, int w) {
//给出顶点v的邻接顶点w的下一个邻接顶点的位置,
//若没有下一个邻接顶点, 则函数返回 -1
   if (v != -1) {                    //顶点v存在
      Edge<T, E> *p = NodeTable[v].adj;
      while (p != NULL && p->dest != w)
         p = p->link;
      if (p != NULL && p->link != NULL)
         return p->link->dest;   //返回下一个邻接顶点
   }
   return −1;                   //下一邻接顶点不存在
};
```

邻接表建立方法

邻接表建立算法

- 邻接表结构的分析
- 输入的组织



邻接表存储结构的实现算法

- 在输入数据前，顶点表NodeTable[ ]全部初始化,即将第i个结点的数据存入NodeTable[i].data中;
- 接着,把所有第i个结点的邻接点链接成一个单链表,方法是:在输入数据时，每输入一条边<i, k>, 就需要建立一个边结点，并将它链入相应边链表中。

```
Edge<T, E> * p = new  Edge<T, E>;
p->dest=k;       //建立边结点，dest域赋为 k
p->cost=?
p->link = NodeTable[i].adj;
NodeTable[i].adj = p;    //头插入建链
```

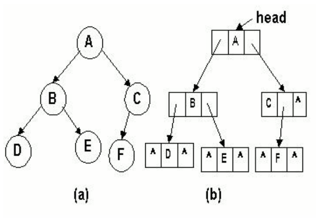
邻接表的建立算法

```
template <class T, class E>
void Graphlnk<T, E>::CreateNodeTable(void); //  建立邻接表结构
{   int n,i,j,m;     Edge<T, E> *p;
    cin>>n; //结点个数
    for(i=1;i<=n;i++)
    {
          NodeTable[i].adj=0;
          cin>>NodeTable[i].data; //输入结点值
          cin>>m;   //每个结点的邻接点个数
          for(j=0;j<m;j++)
          {    p = new  Edge<T, E>;
               cin>>p->dest;      //建立边结点，输入结点值到dest域
               //带权图则多加一个权值的输入 cin>>p->cost;
              p->link = NodeTable[i].adj;
              NodeTable[i].adj = p;     //头插入建链
          }
    }
}
```

8.3 图的遍历

- 定义
- 图的遍历方法:
  - 深度优先 DFS
  - 广度优先 BFS

二叉树前序遍历算法的回顾



存储结构

```
struct treenode
{
    int data;
     struct treenode *child[2];
};
```

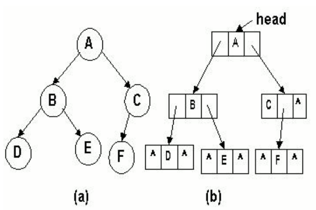
前序遍历算法

```
void DFS(struct treenode *root)
{
 int i;

 if (root!=0 )
 {
    cout<<root->data<<"   ";
     for (i=0;i<2;i++)
            DFS(root->child[i]);

     //DFS(root->child[0]);
     //DFS(root->child[1]);

 }

}
```

深度优先遍历算法

```
void DFS(struct node *root)
{  int i;

   if (root!=0 )
   {  cout<<root->data<<"   ";
       i=0;
       while ( i<2)
       {
           DFS( root->child[i] );
           i++;
        }
      //DFS(root->child[0]);
      //DFS(root->child[1]);
   }
}
```

层次遍历算法



层次遍历算法

```
void BFS(struct treenode *root)
{
      queue<struct treenode *> qu;
      struct treenode *temp;

     qu.push(root);
      while(!qu.empty())
      {
              temp=qu.front();
              qu.pop();
              cout<<temp->data<<"   ";

              if (temp->child[0]!=0)
                        qu.push(temp->child[0]);

              if (temp->child[1]!=0)
                        qu.push(temp->child[1]);

            // 可以改写为 for 循环
      }
}
```

层次遍历算法

```
void BFS(struct treenode *root)
{
    queue<struct treenode *> qu;
    struct treenode *temp;

    qu.push(root);
    while(!qu.empty())
    {
        temp=qu.front();
        qu.pop();
        cout<<temp->data<<"  ";

        for(i=0;i<2;i++)
            if (temp->child[i]!=0)
                qu.push(temp->child[i]);
    }
}
```

广度优先遍历算法

```
void BFS(struct node *root)
{   queue<struct node *> qu;
    struct node *temp;

    qu.push(root);
    while(!qu.empty())
    {     temp=qu.front();
          qu.pop();
          cout<<temp->data<<"  ";
          i=0;
          while ( i<2 )
          {    if (temp->child[i]!=0)
                     qu.push(temp->child[ i ] );
               i++;
          }
    }
}
```

四叉特征树

存储结构

```
struct treenode
{
    int data;
    struct treenode *child[4];
};
```

前序遍历算法

```
void DFS(struct treenode *root)
{
 int i;

 if (root!=0 )
 {
   cout<<root->data<<"  ";

    for (i=0;i<4;i++)
         DFS(root->child[i]);   ///////////

 }

}
```

深度优先遍历算法

```
void DFS(struct node *root)
{ int i;

  if (root!=0 )
  {  cout<<root->data<<"  ";
     i=0;
     while ( i<4)
     {
          DFS( root->child[ i ] );
         i++;
      }

  }
}
```

层次遍历算法

```
void BFS(struct treenode *root)
{
    int i;
    queue<struct treenode *> qu;
    struct treenode *temp;

   qu.push(root);
    while(!qu.empty())
    {
          temp=qu.front();
          qu.pop();
          cout<<temp->data<<"  ";

          for (i=0;i<4;i++)
            if (temp->child[i]!=0)
                    qu.push(temp->child[i]);
    }
}
```

广度优先遍历算法

```
void BFS(struct node *root)
{   queue<struct node *> qu;
    struct node *temp;
    qu.push(root);
    while(!qu.empty())
    {    temp=qu.front();
         qu.pop();
         cout<<temp->data<<"  ";
          i=0;
          while ( i<4 )
          {     if (temp->child[i]!=0)
                   qu.push(temp->child[ i ] );
                i++;
          }
    }
}
```

八叉特征树

存储结构

```
struct treenode
{
   int data;
   struct treenode *child[8];
};
```

八叉特征树的遍历方法

- 前序遍历方法
- 层次遍历方法

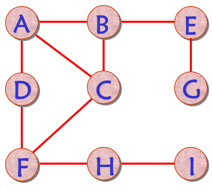
图的遍历

- 深度优先
- 广度优先

深度优先 DFS

- 在访问图中某一起始顶点 v 后，由 v 出发，访问它的任一邻接顶点 w_1；再从 w_1 出发，访问与 w_1 邻接但还没有访问过的顶点 w_2；然后再从 w_2 出发，进行类似的访问，… 如此进行下去，直至到达所有的邻接顶点都被访问过的顶点 u 为止。
- 接着，退回一步，退到前一次刚访问过的顶点，看是否还有其它没有被访问的邻接顶点。如果有，则访问此顶点，之后再从此顶点出发，进行与前述类似的访问；如果没有，就再退回一步进行搜索。
- 重复上述过程，直到连通图中所有顶点都被访问过为止。

深度优先遍历的示例

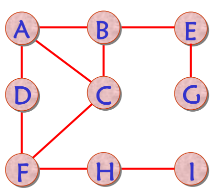


深度优先遍历过程

- ## 广度优先 BFS

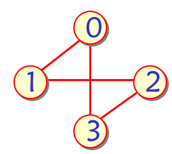
- 在访问了起始顶点 v 之后，由 v 出发，依次访问 v 的各个未被访问过的邻接顶点 $w_1, w_2, \ldots, w_t$，然后再顺序访问 $w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的所有还未被访问过的邻接顶点。再从这些访问过的顶点出发，再访问它们的所有还未被访问过的邻接顶点，… 如此做下去，直到图中所有顶点都被访问到为止。
- 广度优先遍历是一种分层的搜索过程，每向前走一步可能访问一批顶点，不像深度优先遍历那样有往回退的情况。
- 因此，广度优先遍历不是一个递归的过程。

- ## 广度优先遍历的示例



广度优先遍历过程

图遍历的问题分析



图的遍历方法的问题发现

1.各结点的叉数不统一

- 存储结构的问题

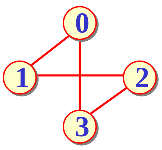
```
struct treenode
{
    int data;
    struct treenode *child[8]; ///问题所在
};
```

- 找孩子——→改变为找邻接点

如何找结点i的邻接点

- 存储结构

邻接矩阵存储结构

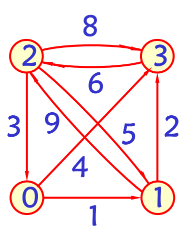


$$\mathbf{A.edge} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

找出结点i的所有邻接点

```
for (int col = 0; col < numVertices; col++)
{
    if ( Edge[i][col]==1  )
    {
         ……
    }
}
```

带权图

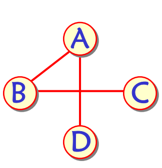


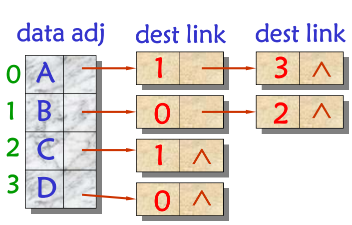
$$\mathbf{A.edge} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

找出结点i的所有邻接点

```
for (int col = 0; col < numVertices; col++)
{
    if ( ( Edge[i][col] )  && Edge[i][col]<maxweihgt )
    {
         ……
    }
}
```

邻接表结构

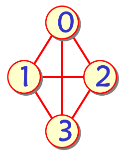




找出结点i的所有邻接点

```
Edge<T, E> *p = NodeTable[i].adj;
while (p != NULL)
{
      ……
      p = p->link;
}
}
```

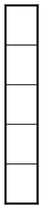
图的遍历方法的问题发现



2.如何解决重复访问?

图遍历的问题分析

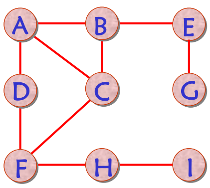
- 如何解决重复访问?
- 可设置一个标志顶点是否被访问过的辅助数组 visited[ ]。



深度优先 DFS

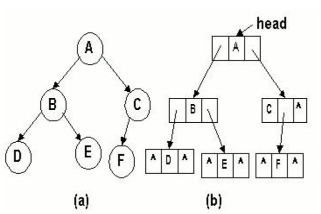
- 在访问图中某一起始顶点 v 后，由 v 出发，访问它的任一邻接顶点 w_1; 再从 w_1 出发,访问与 w_1 邻 接但还没有访问过的顶点 w_2; 然后再从 w_2 出发，进行类似的访问，… 如此进行下去，直至到达所有的邻接顶点都被访问过的顶点 u 为止。
- 接着，退回一步，退到前一次刚访问过的顶点，看是否还有其它没有被访问的邻接顶点。如果有，则访问此顶点，之后再从此顶点出发，进行与前述类似的访问；如果没有，就再退回一步进行搜索。
- 重复上述过程，直到连通图中所有顶点都被访问过为止。

深度优先遍历的示例



深度优先遍历过程

二叉树前序遍历算法的回顾



二叉树前序遍历算法

```
void DFS(struct treenode *root)
{
  int i;

  if (root!=0 )
  {
     cout<<root->data<<"  ";
     for (i=0;i<2;i++)              // 找出孩子逐个进行递归调用
          DFS(root->child[i]);

     //DFS(root->child[0]);
     //DFS(root->child[1]);

  }

}
```

图的深度优先遍历抽象算法:

```
void DFS(Graph G, int v)
{   // 从顶点v出发，深度优先遍历遍历连通图 G
  visited[v] = TRUE;  访问v结点;
  for(w=FirstAdjVex(G, v); w!=0; w=NextAdjVex(G,v,w) )
     if (!visited[w])  DFS(G, w);
         // 对v的尚未访问的邻接顶点w
         // 递归调用DFS
} // DFS
```

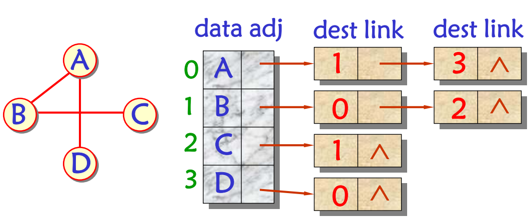
图的深度优先遍历算法

```
template<class T, class E>
void DFS (Graph<T, E>& G, const T& v) {
//从顶点v出发对图G进行深度优先遍历的主过程
   int i, loc, n = G.NumberOfVertices();   //顶点个数
   bool *visited = new bool[n];         //创建辅助数组
   for (i = 0; i < n; i++) visited [i] = false;
     //辅助数组visited初始化
   loc = G.getVertexPos(v);
   DFS (G, loc, visited); //从顶点0开始深度优先遍历
   delete [] visited;                  //释放visited
};
```

```
template<class T, class E>
void DFS (Graph<T, E>& G, int v, bool visited[])
{
   cout << G.getValue(v) << ' ';       //访问顶点v
   visited[v] = true;                  //作访问标记
   int w = G.getFirstNeighbor (v);     //第一个邻接顶点
   while (w != -1) {        //若邻接顶点w存在
      if ( !visited[w] )DFS(G, w, visited);
                        //若w未访问过, 递归访问顶点w
      w = G.getNextNeighbor (v, w); //下一个邻接顶点
   }
};
```

简化函数的调用关系

邻接表结构



深度优先遍历 公有函数

```
bool *visited;  // 成员属性   辅助数组
int n ;  // 成员属性  表示结点个数

visited = new bool[n];   // 加入到Graphlnk构造函数中
cin>>n;   //加入到Graphlnk构造函数中

void Graphlnk<T, E>:: dfs( )
{  int i ,v0;

   for (i=0;i<n;i++ )visited[i]=false;

   cin>>v0; //输入深度优先遍历的出发点

   dfs(v0);  //调用深度优先的递归函数

}
```

在邻接表存储结构下的实现算法:

```
void Graphlnk<T, E>:: DFS( int v)     // 私有函数
{   // 从顶点v出发，深度优先遍历遍历连通图 G
   visited[v] = true;
   cout<<NodeTable[v].data;//访问v结点
   p=NodeTable[v].adj;
   while(p!=NULL)   // 找出邻接点逐个进行递归调用
   {  // 对v的尚未访问的邻接顶点递归调用DFS
     if (!visited[p->dest])  DFS( p->dest);
     p=p->link;
   }
} // DFS
```

四叉树的深度优先遍历算法

```
void DFS(struct node *root)
{ int i;

  if (root!=0 )
  {  cout<<root->data<<"  ";
     i=0;
     while ( i<4)
     {
         DFS( root->child[ i ] );
         i++;
     }

  }
}
```

程序的组织

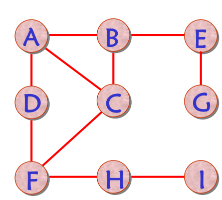
```
void main()
{
   邻接表的建立;
   访问标志的初始化;
   深度优先遍历的出发点设定;
   调用深度优先遍历函数
}
```

邻接矩阵存储的深度优先遍历

- int g[maxm][maxm];
- 邻接矩阵的输入
- 调用深度优先算法

- 广度优先 BFS
- 在访问了起始顶点 v 之后, 由 v 出发, 依次访问 v 的各个未被访问过的邻接顶点 $w_1, w_2, \ldots, w_t$, 然后再顺序访问 $w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的所有还未被访问过的邻接顶点。再从这些访问过的顶点出发，再访问它们的所有还未被访问过的邻接顶点，... 如此做下去，直到图中所有顶点都被访问到为止。
- 广度优先遍历是一种分层的搜索过程, 每向前走一步可能访问一批顶点, 不像深度优先遍历那样有往回退的情况。
- 因此, 广度优先遍历不是一个递归的过程。

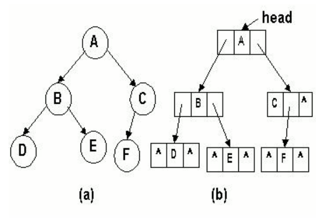
- 广度优先遍历的示例



广度优先遍历过程

- 算法的实现
- 从上面广度优先遍历的实施过程,我们可以发现:该过程与二叉树的层次遍历非常相似.
- 为了实现逐层访问，算法中使用了一个队列，以记忆正在访问的这一层和下一层的顶点，以便于向下一层访问。

二叉树层次遍历算法的回顾



二叉树层次遍历算法

```
void BFS(struct treenode *root)
{
    queue<struct treenode *> qu;
    struct treenode *temp;

    qu.push(root);
    while(!qu.empty())
    {
        temp=qu.front();
        qu.pop();
        cout<<temp->data<<"  ";

        for(i=0;i<2;i++)  // 找出孩子逐个进行入列操作
            if (temp->child[i]!=0)
                qu.push(temp->child[i]);
    }
}
```

图广度优先遍历抽象算法:

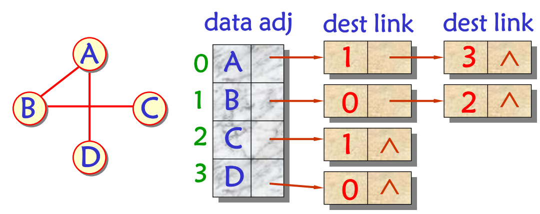
```
void BFS(Graph G, int v)
{ // 从顶点v出发，广度优先遍历遍历连通图 G
   V结点入列;
   当队列非空，则反复执行如下操作
   出列到v
   if (!visited[w])
     {
       visited[v] = true;   访问v结点;
       for(w=FirstAdjVex(G, v); w!=0; w=NextAdjVex(G,v,w) )
           if (!visited[w])    w入列
         //依次将v结点的邻接点入列,以依次实施层次遍历
     }
} // BFS
```

```
template <class T, class E>    //图的广度优先遍历算法
void BFS (Graph<T, E>& G, const T& v)
{  int i, w, n = G.NumberOfVertices();  //图中顶点个数
   bool *visited = new bool[n];
   for (i = 0; i < n; i++) visited[i] = false;
   int loc = G.getVertexPos (v);            //取顶点号
   cout << G.getValue (loc) << ' '; //访问顶点v
   visited[loc] = true;               //做已访问标记
   Queue<int> Q;
   Q.EnQueue (loc);   //顶点进队列, 实现分层访问
   while (!Q.IsEmpty() )
   {  //循环, 访问所有结点
      Q.DeQueue (loc);
      w = G.getFirstNeighbor (loc); //第一个邻接顶点
```

```
      while (w != -1)
      {              //若邻接顶点w存在
          if (!visited[w])
          {     //若未访问过
              cout << G.getValue (w) << ' '; //访问
              visited[w] = true;
              Q.EnQueue (w); //顶点w进队列
          }
          w = G.getNextNeighbor (loc, w);
              //找顶点loc的下一个邻接顶点
      }
   }             //外层循环，判队列空否
   delete [] visited;
};
```

简化函数的调用关系

邻接表结构



在邻接表存储结构下的实现算法：// STL queue

```
void Graphlnk<T, E>:: BFS( ) // 从顶点v出发，广度优先遍历遍历连通图 G
{  int  v;
   queue<int> qu; //定义一个队列qu
   for (int i=0;i<n;i++ ) visited[i]=false;  //设置未被访问标志
   cin>>v;  //输入广度优先遍历的出发点
   qu.push(v);  // v入列
   while (!qu.empty( ))
   {    v=qu.front( );  qu.pop( );  //出列
        if (!visited[v])
        { visited[v] = true;   cout<<NodeTable[v].data;  //访问v结点
           p=NodeTable[v].adj;   //p指向v结点对应邻接单链表的链头
          while (p!=NULL)
           {  //依次将v结点的邻接点入列,以依次实施层次遍历
              if (!visited[p->dest])    qu.push(p->dest);
              p=p->link;
          } //while
      } //if
   } //while
} // BFS
```

四叉树的广度优先遍历算法

```
void BFS(struct node *root)
{    queue<struct node *> qu;
     struct node *temp;
     qu.push(root);
     while(!qu.empty())
     {    temp=qu.front();
          qu.pop();
          cout<<temp->data<<"  ";
           i=0;
           while ( i<4 )
           {     if (temp->child[i]!=0)
                      qu.push(temp->child[ i ] );
                  i++;
           }
     }
}
```

程序的组织

void main()

{

邻接表的建立；

访问标志的初始化；

广度优先遍历的出发点设定；

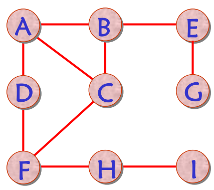
调用广度优先遍历函数

}

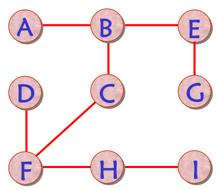
邻接矩阵存储的广度优先遍历

- int G[maxm][maxm];
- 邻接矩阵的输入
- 调用广度优先算法

▪ 深度优先遍历的示例

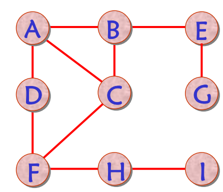


深度优先遍历过程

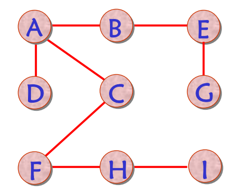


深度优先生成树

▪ 广度优先遍历的示例



广度优先遍历过程

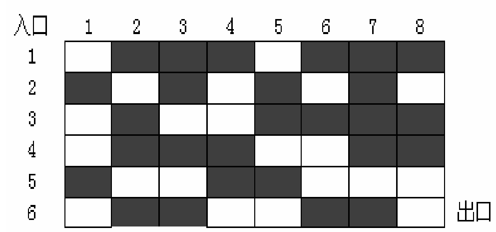


广度优先生成树

图遍历算法的应用

- 符合状态转变的问题

迷宫问题



迷宫图中阴影部分是不通的路径，处于迷宫中的每个位置都可以向8个方向探索着按可行路径前进。假设出口位置在最右下角（6，8），入口在最左上角（1，1），要求设计寻找从入口到出口的算法。

解决思路

- (1)构建状态空间(树形)
- (2)以遍历方法对状态空间进行搜索,直到搜索到目标位置为止.

问题一：迷宫的存储结构

- 用一个二维数组来存储迷宫，数组中的每个元素的值只取0或1，其中0表示此路可通，1表示此路不通。对于上例的迷宫可存储如图。

→Y
↓
X

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	1	1	1	0	0	1	1
5	1	0	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0	1	1	0

图 3-15

探索路径的选择可描述为:

(x-1, y-1)		(x-1, y)		(x-1, y+1)
	↖	↑	↗	
(x, y-1)	←	(x, y)	→	(x, y+1)
	↙	↓	↘	
(x+1, y+1)		(x+1, y)		(x+1, y+1)

但这样会导致迷宫中的每个位置可探索的情况就不一致，可分为：

（1）只有三个探索方向的位置：

如（1，1），探索的方向只有（1，2），（2，2），（2，1）；

（2）有五个探索方向的位置：

如（3，1），探索的方向有（3，2），（4，2），（4，1），（2，1），（2，2）；

（3）有八个探索方向的位置：

如（3，2），探索的方向有（3，3），（4，3），（4，2），（4，1），（3，1），（2，1），（2，2），（2，3）；

- 问题二：为了简化算法，有必要统一这些考虑情况。
- 思考方向：方向就只有边界位置才会有变化，除此之外都是8个方向。

由于从当前位置（x,y）向上述八个方向探索，则可得到八个新位置，这八个新位置与当前位置的变化关系可用数组来存储：

	Δx	Δy	说明
0	0	1	向→方向探索
1	1	1	向↘方向探索
2	1	0	向↓方向探索
3	1	-1	向↙方向探索
4	0	-1	向←方向探索
5	-1	-1	向↖方向探索
6	-1	0	向↑方向探索
7	-1	1	向↗方向探索

```
for ( loop=0 ; loop<8 ; loop++ )
  //探索当前位置的8个相邻位置
  {
    x=x+move[loop].x;
    y=y+move[loop].y;
  }
```

深度优先遍历迷宫

```
int maze[m+2][n+2];
int  MazePath( int x, int y )
{    int loop;
     Maze[x][y]=-1; //标志入口位置已到达过
     for ( loop=0 ; loop<8 ; loop++ ) //探索当前位置的8个相邻位置
     {
        x=x+move[loop].x; //计算出新位置x位置值
        y=y+move[loop].y; //计算出新位置x位置值
        if ((x==m)&&(y==n))  //成功到达出口
            {    PrintPath( ); //输出路径   该函数请自行完成
                 Restore(Maze); //恢复迷宫   该函数请自行完成
                 return ( 1 ) ; //表示成功找到路径
            }
        if ( Maze[x][y]= = 0 ) //新位置是否可到达
            {    .......   //保存该点坐标,以便以后输出路径
                 MazePath(x,y );
            }
     }
   }
   return(0); //表示查找失败，即迷宫无路径
 } // MazePath
```

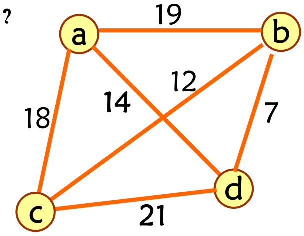
广度优先遍历迷宫

```
int maze[m+2][n+2];
int  MazePath( )
{  queue<int> q;  //定义一个容量为m*n的队列
   DataType  Temp1,Temp2;      int x, y,loop;
   Temp1.x=1; Temp1.y=1; Temp1.pre=-1; Maze[1][1]=-1;  //标志入口位置已到达过
   q.push( Temp1 ) ; //将入口位置入列
   while ( !q.empty( ) ) //队列非空，则反复探索
   {  Temp2=q.front( ); q.pop( );  //队头元素出列
      for ( loop=0 ; loop<8 ; loop++ ) //探索当前位置的8个相邻位置
      {  x=Temp2.x+move[loop].x;  //计算出新位置x位置值
         y=Temp2.y+move[loop].y; //计算出新位置x位置值
         if ( Maze[x][y]= = 0 ) //新位置是否可到达
         {     Temp1.x=x;  Temp1.y=y;
               //Temp1.pre=q.front;//设置到达新位置的前趋位置
               Maze[x][y]=-1;  //标志该位置已到达过
               q.push(Temp1);// 新位置入列
         }
         if ((i==m)&&(j==n))  //成功到达出口
         {     PrintPath( q ); //输出路径   该函数请自行完成
               Restore(Maze);  //恢复迷宫   该函数请自行完成
               return ( 1 ) ; //表示成功找到路径
         }
      }
   }
   return(0);  //表示查找失败，即迷宫无路径
 } // MazePath
```

8.4 最小生成树

问题描述：

假设要在 *n* 个城市之间建立通讯联络网，则连通 *n* 个城市只需要修建 *n-1*条线路，如何在最节省经费的前提下建立这个通讯网？



该问题等价于：

构造网的一棵最小生成树，即：　在 e 条带权的边中选取 n-1 条边（不构成回路），使“权值之和”为最小，即最小生成树。

算法一：普里姆算法(prim)

算法二：克鲁斯卡尔算法(Kruskal)

克鲁斯卡尔算法的基本思想：

从边入手找顶点

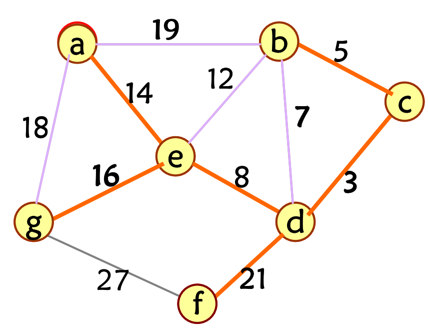
具体做法：[贪心法]

1.先构造一个只含 n 个顶点的子图 SG;

2.然后从权值最小的边开始，若它的添加不使SG 中产生回路，则在 SG 上加上这条边，

3.反复执行第2步，直至加上 n-1 条边为止。

例如：



算法描述：

```
构造非连通图 ST=( V,{ } );
 k = i = 0;   // k 计选中的边数
 while (k<n-1)
{
  ++i;
 检查边集 E 中第 i 条权值最小的边(u,v);
 若(u,v)加入ST后不使ST中产生回路，
 则  输出边(u,v)；且  k++;
}
```

普里姆算法的基本思想：

从顶点入手找边

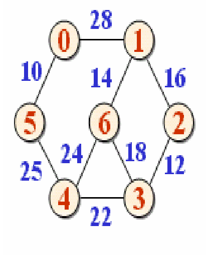
实施步骤：[贪心法]

1.分组，出发点为第一组，其余结点为第二组。

2.在一端属于第一组和另一端属于第二组的边中选择一条权值最小的一条。

3.把原属于第二组的结点放入第一组中。

4.反复2，3两步，直到第二组为空为止。



$$\begin{pmatrix} 0 & 28 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 28 & 0 & 16 & \infty & \infty & \infty & 14 \\ \infty & 16 & 0 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 12 & 0 & 22 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & 22 & 0 & 25 & 24 \\ 10 & \infty & \infty & \infty & 25 & 0 & \infty \\ \infty & 14 & \infty & 18 & 24 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

```
#include<iostream.h>
#define M 20

int G[M][M];int n;

void Prim();

void main()
{   cout<<"please input the
    data of graph:"<<endl;
     Input();      Prim();
}

void Input()
{
    cin>>n;
    for(i=0;i<n;i++)
          for (j=0;j<n;j++)

    cin>>G[i][j];
}
```

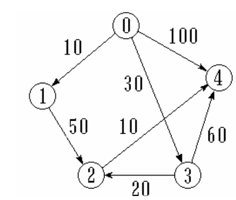
```
void Prim()
{   int temp[M]; //存放已经加入的结点
    int size;   // 已加入的结点个数
    int i,j,k;   int curnode,pos1,pos2;
    int min;

    temp[0]=0;  size=1;
    G[0][0]=1;
    for( i=0;i<n-1;i++)
    {
      min=32767; // 极大值
      for ( j=0;j<size;j++)
      {
       curnode=temp[j];
       for( k=0;k<n;k++)
       if ( G[curnode][k]<min && G[k][k]==0)
         { min=G[curnode][k]; pos1=curnode;
     pos2=k; }
      }
      cout<<"edge "<<size<<" ( "<<pos1<<" ----->
    "<<pos2<<" ):" <<G[pos1][pos2]<<endl;
      G[pos2][pos2]=1;
      temp[size]=pos2; size++;
     }
}
```

比较两种算法

算法名	普里姆算法	克鲁斯卡尔算法
时间复杂度	$O(n^2)$	$O(eloge)$
适应范围	稠密图	稀疏图

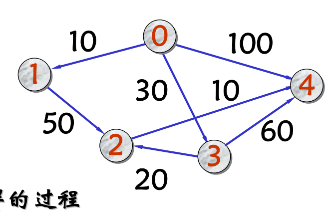
8.5 求从源点到其余各点的最短路径

- **问题的提出**：给定一个带权有向图*D*与源点 *v*，求从 *v* 到*D*中其它顶点的最短路径。限定各边上的权值大于或等于0。



8.5 求从源点到其余各点的最短路径

- 问题求解方法（Dijkstra 方法）：
- 按路径长度的递增次序,逐步产生最短路径的算法。首先求出长度最短的一条最短路径，再参照它求出长度次短的一条最短路径，依次类推，直到从顶点v到其它各顶点的最短路径全部求出为止。



Dijkstra逐步求解的过程

源点	终点	最短路径	路径长度
v_0	v_1	(v_0,v_1)	10
	v_2	(v_0,v_1,v_2) (v_0,v_3,v_2)	∞,60,50
	v_3	(v_0,v_3)	30
	v_4	(v_0,v_4) (v_0,v_3,v_4) (v_0,v_3,v_2,v_4)	100,90,60

辅助存储结构

为了方便比较距离值，我们需要有空间保存这些以前得到的距离值

设置一个距离值表

辅助数组的存储结构

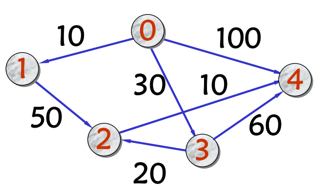
设置辅助数组Dist，其中每个分量Dist[k] 表示当前所求得的从源点到其余各顶点 k 的最短路径。

一般情况下，

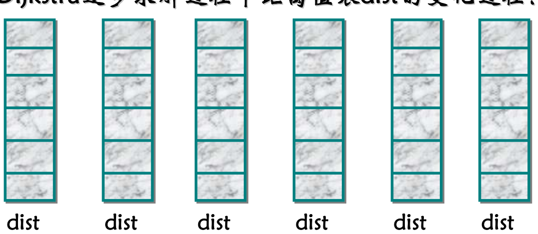
Dist[k] = <源点到顶点 k 的弧上的权值>

或者 = <源点到其它顶点的路径长度>

+ <其它顶点到顶点 k 的弧上的权值>



Dijkstra逐步求解过程中距离值表dist的变化过程：



1）在所有从源点出发的弧中选取一条权值最小的弧，即为第一条最短路径。

$$Dist[k] = \begin{cases} G.Weight[v0][k] & \text{V0和k之间存在弧} \\ INFINITY & \text{V0和k之间不存在弧} \end{cases}$$

其中的最小值即为最短路径的长度。

2）修改其它各顶点的$Dist[k]$值。

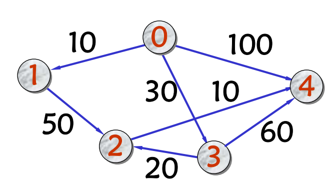
假设求得最短路径的顶点为u，

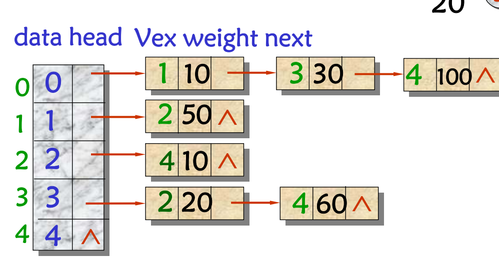
若 $Dist[u]+G.Weight[u][k]<Dist[k]$

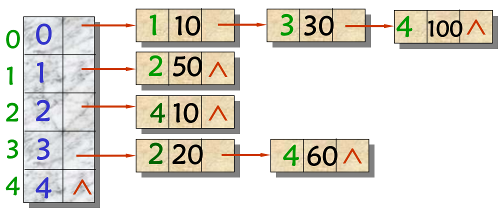
则将 $Dist[k]$ 改为 $Dist[u]+G.Weight[u][k]$

图的存储结构

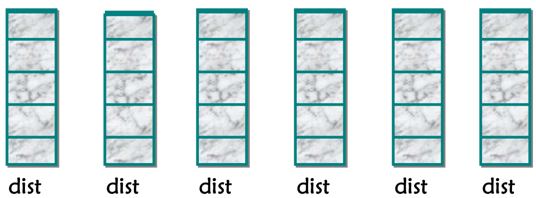
- 邻接表
- 邻接矩阵





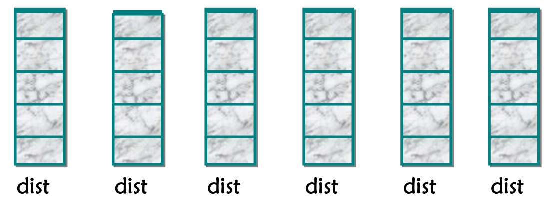


Dijkstra逐步求解过程中距离值表dist的变化过程：



$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Dijkstra逐步求解过程中距离值表dist的变化过程：



实现算法

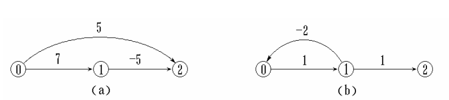
```
for (i=0;i<n;i++)
     dist[i]=G[v0][i];    //初始化dist数组
G[v0][v0]=1;  // 加入v0，置出发点访问标志
 for (i=0;i<n-1;i++) //共完成n-1次
 {   // 找最小值
    min=32767;
    for (k=0;k<n;k++)
    {  if ((dist[k]<min)&&(G[k][k]!=1))
            {    pos=k; min=dist[k];  }
    }
   G[pos][pos]=1;
   for (j=0;j<n;j++)
   {  if ((G[j][j]!=1)&&(G[pos][j]+min<dist[j]))
         dist[j]=G[pos][j]+min;
   }
}
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

程序清单

- Short.cpp
- Short2.cpp 带路径输出

Dijkstra算法的困境



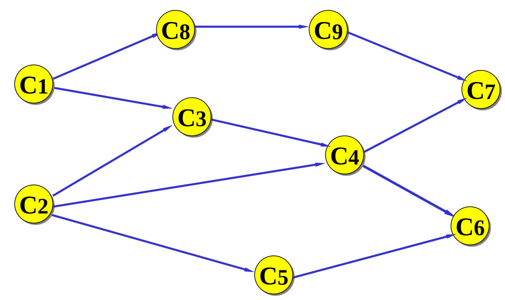
8.6 拓扑排序

用顶点表示活动的网络 (AOV网络)

计划、施工过程、生产流程、程序流程等都是“工程”。除了很小的工程外，一般都把工程分为若干个叫做“活动”的子工程。完成了这些活动，这个工程就可以完成了。

例如，计算机专业学生的学习就是一个工程，每一门课程的学习就是整个工程的一些活动。其中有些课程要求先修课程，有些则不要求。这样在有的课程之间有领先关系，有的课程可以并行地学习。

课程编号	课程名称	先决条件
C_1	高等数学	
C_2	程序设计基础	
C_3	离散数学	C_1，C_2
C_4	数据结构	C_3，C_2
C_5	高级语言程序设计	C_2
C_6	编译方法	C_5，C_4
C_7	操作系统	C_4，C_9
C_8	普通物理	C_1
C_9	计算机原理	C_8



学生课程学习工程图

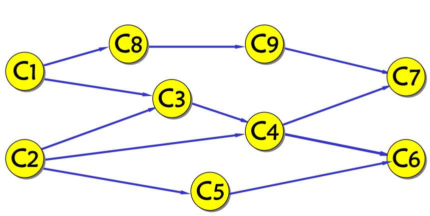
- 可以用有向图表示一个工程。在这种有向图中，用顶点表示活动，用有向边$<V_i, V_j>$表示活动V_i必须先于活动V_j进行。这种有向图叫做顶点表示活动的AOV网络。
- 在AOV网络中不能出现有向回路，即有向环。如果出现了有向环，则意味着某项活动应以自己作为先决条件。
- 因此，对给定的AOV网络，必须先判断它是否存在有向环。

- 检测有向环的一种方法是对AOV网络构造它的拓扑有序序列。即将各个顶点 (代表各个活动)排列成一个线性有序的序列，使得AOV网络中所有应存在的前驱和后继关系都能得到满足。
- 这种构造AOV网络全部顶点的拓扑有序序列的运算就叫做拓扑排序。
- 如果通过拓扑排序能将AOV网络的所有顶点都排入一个拓扑有序的序列中，则该网络中必定不会出现有向环。

- 如果AOV网络中存在有向环，此AOV网络所代表的工程是不可行的。
- 例如，对学生选课工程图进行拓扑排序，得到的拓扑有序序列为

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_8, C_9, C_7$

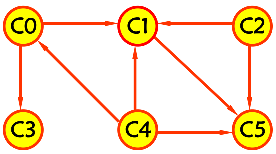
或 $C_1, C_8, C_9, C_2, C_5, C_3, C_4, C_7, C_6$



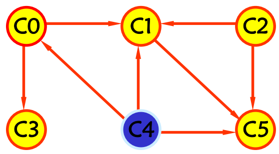
进行拓扑排序的步骤：

① 输入AOV网络。令 n 为顶点个数。
② 在AOV网络中选一个入度为0的结点，并输出之；
③ 从图中删去该顶点，同时删去所有它发出的有向边；
④ 重复以上 ②、③步，直到下面的情况之一出现：
(1)全部顶点均已输出，拓扑有序序列形成，拓扑排序完成；
(2)图中还有未输出的顶点，但已没有入度为0的结点(说明网络中必存在有向环)。

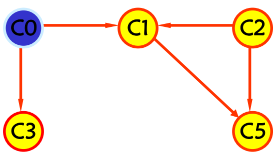
拓扑排序的过程



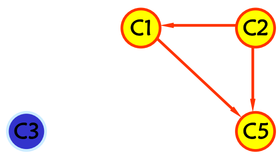
(a) 有向无环图



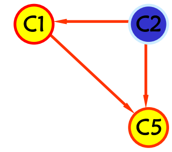
(b) 输出顶点C4



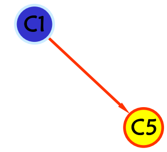
(c) 输出顶点C0



(d) 输出顶点C3



(e) 输出顶点C2



(f) 输出顶点C1

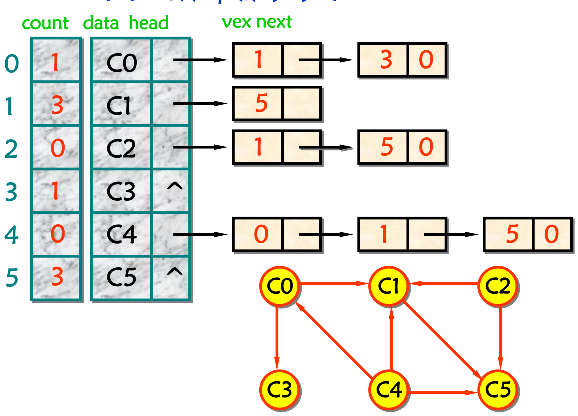
(g) 输出顶点C5

(h) 拓扑排序完成

最后得到的拓扑有序序列为 $C_4, C_0, C_3, C_2, C_1, C_5$。

它满足图中给出的所有前驱和后继关系，对于本来没有这种关系的顶点，如C_4和C_2，也排出了先后次序关系。

AOV网络及其邻接表表示



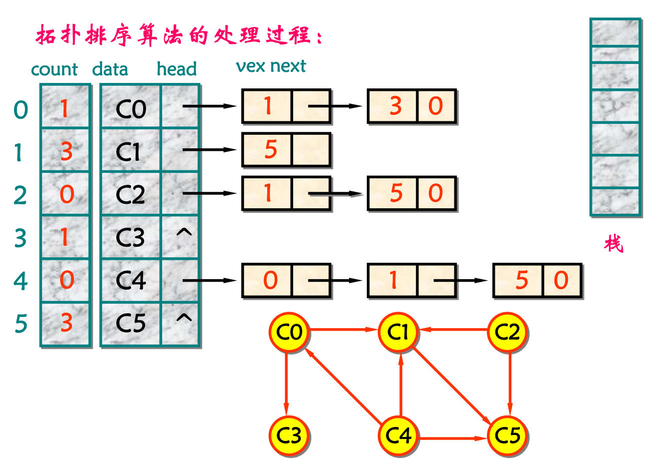
- 在邻接表中增设一个数组count[ ]，记录各顶点入度。入度为零的顶点即无前驱顶点。
- 在输入数据前，顶点表Adj[ ]和入度数组count[ ]全部初始化。在输入数据时，每输入一条边<i, k>，就需要建立一个边结点，并将它链入相应边链表中。

```
LinkNode * p = new LinkNode;
p->vex=k;    //建立边结点，vex 域赋为 k
p->next = Adj[i].head;
Adj[i].head = p;    //头插入建链
count[k]++;    //顶点 k 入度加一
```

拓扑排序算法的描述：

```
取入度为零的顶点v;
while (v<>0) {
   printf(v);  ++m;
   p=Adj[v].head;  //取第一个邻接点
   while (P!=NULL) {
     count[p->vex]--;
     p=p->next;  //取下一个邻接点
   }
   取下一个入度为零的顶点v;
}
if (m<n)   cout<<"图中有回路";
```

拓扑排序算法的处理过程：



为避免每次都要搜索入度为零的顶点，在算法中设置一个“栈”，以保存“入度为零”的顶点。

拓扑排序算法可描述如下：

1.建立入度为零的顶点栈；

2.当入度为零的顶点栈不空时，重复执行

(1)从顶点栈中退出一个顶点，并输出之；

(2)从AOV网络中删去这个顶点和它发出的边，边的终顶点入度减一；

(3)如果边的终顶点入度减至0，则该顶点进入度为零的顶点栈；

3. 如果输出顶点个数少于AOV网络的顶点个数，则报告网络中存在有向环。

于是，修改后的拓扑排序算法描述如下：

```
1.在count数组中找出入度为零的顶点，并分别入栈；
2.while (栈非空)
 {
   出栈到v；
   cout<<Adj[v].data; ++m;
   p=Adj[v].head;
    while (P!=NULL)
    {
      count[p->vex]--;
      如果count[p->vex]==0则结点p->vex入栈
      p=p->next;
    }
 }
3.if(m<n)  cout<<“图中有回路”;
```

拓扑排序算法的处理过程：