

# 德州一中2021级29班测试题目汇总

Hyannor

2026 年 1 月 11 日

## 目录

2022年德州疫情网课高一数学检测	2
德州一中2021级29班第一次联考	8
德州一中2021级29班第二次联考	11
德州一中2021级29班第三次联考	14
德州一中2021级29班第四次联考	16

## 2022年德州疫情网课高一数学检测

考试时间：2022年4月 满分：200 分

·报名要求:一中老校区高一生(2021级)[新校区可以看电子版]

·注意事项(答题前请务必认真读完):

1. 答卷请答到本试卷配套的答题卡上,写在草稿纸和本试卷上无效.

2. 本试卷分为第I卷与第II卷,各100分,满分200分.

为激励大家踊跃作答,下说明奖励规则:设你的分数为 $x$ 分,若 $150 < x < 180$ ,奖励1元;若 $180 \leq x \leq 195$ ,奖励5元;若 $x > 195$ ,奖励10元.

3. 考试时间:2022.4.16(周六) - 2022.4.21(周四) 约五天时间

交卷时间不晚于 2022.4.21 22:00 特别地,允许提前交卷.

交卷方式:将答题卡送至命题人手中或拍照发至命题人QQ上(推荐前者)

答案与解析会在2022.4.22(周五)公布.

4. 因笔者水平有限,里面存在搬运的试题,在答案解析中笔者会将搬运的原创题目注明来历,同步高考卷类似的公开试题就不注明了(想起来的时候也会注明,但原创一定会注明!)

5. 作答平面几何(33题)请将图画到答题卡相应位置,否则扣2分.

6. 请勿外传试题,因为笔者能力太低,只是为了娱乐才组的题目.

7. 题目类型及分值:

·第I卷含第1题至第25题(1-15为不定项选择,每道题有一个或多个选项符合题意,每小题4分,选对但是不全得2分,错选得0分;16-25为填空题,每小题4分);

·第II卷含第26题至第33题(解答题,26题10分,27,29,30,31,32题每题12分,28题14分,33题16分)

8. 至于为什么我没有用 $\text{\LaTeX}$ ,那是因为WPS有一些题copy会比较方便.(现在补充上了哈哈)

9. 请诚信考试!主要是想帮助大家提高能力,查的话就没什么意义了.

10. 祝君好运!加油!

## 第 I 卷

题目1.(本小题4分) 已知集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x|\ln x \geq 1\}$ ,则 $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.A.  $[e, +\infty)$ B.  $(3, +\infty)$ C.  $(-1, e]$ D.  $[e, 3]$ 题目2.(本小题4分)高斯(Gauss)被称为“数学王子”,他在大学时就完成了正十七边形可作的证明.他的一项成就就是“代数基本定理”,代数基本定理是说一元 $n$ 次多项式在 $\mathbb{C}$ 上有 $n$ 个根.设 $x^3 = 1$ 的非实根 $x = \omega$ ,则下列说法中正确的有\_\_\_\_\_.(设虚数单位为 $i$ )A.  $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B.  $\omega^2 = \bar{\omega}$ C.  $\omega = -1 \pm \sqrt{3}i$ D.  $1 + \omega + \omega^2 \neq 0$ 题目3.(本小题4分) $\frac{2 \tan 15^\circ}{2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \tan^2 15^\circ} =$ \_\_\_\_\_.A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.  $\frac{1}{2}$ C.  $\sqrt{3}$ 

D. 1

题目4.(本小题4分)方程 $y^2 = 6x - x^2$ 表示的曲线为\_\_\_\_\_.

A. 椭圆

B. 双曲线

C. 抛物线

D. 圆

**题目5.(本小题4分)**已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,若 $a_4 + a_7 = 31$ ,并且 $a_1 + a_2 + a_5 = 21$ ,则下列说法中正确的有\_\_\_\_\_.

- A. 数列首项 $a_1 = 3$  B. 数列公差 $d = 3$  C. 数列前十项和 $S_{10} = 137$  D. 数列通项公式为 $a_{n+1} - a_n = 3$

**题目6.(本小题4分)**已知正多面体顶点数 $V$ ,面数 $F$ ,棱数为 $E$ 之间关系满足 $V + F - E = 2$ ,那么这样的正多面体可以是\_\_\_\_\_.

- A. 正八面体 B. 正十二面体 C. 正十六面体 D. 正二十面体

**题目7.(本小题4分)**三角形有很多性质,我们研究的一个方面可以从五心入手.下面提到的四心中,到三角形三个顶点的距离的平方和最小的为\_\_\_\_\_.

- A. 垂心 B. 内心 C. 重心 D. 外心

**题目8.(本小题4分)**语言在我看来是很优美的存在,下面给出几个例子,可以试着体味里面蕴含的思想或尝试进一步意译. “Sometimes ever,sometimes never” 意为“相聚有时,后会无期”; “And leaves the world to darkness and to me” 意为“仅余我与暮色平分此世界”; “Let life be beautiful like summer flowers and death like autumn leaves” 意为“生如夏花之绚烂,死如秋叶之静美”.林语堂曾将 “So dim, so dark. So dense, so dull. So damp, so dank,so dead” 翻译为李清照的诗词“寻寻觅觅,冷冷清清,凄凄惨惨戚戚”.我最喜欢的是下面:

I love three things in the world 浮世万千,吾爱有三

The sun, the moon, and you 日,月与卿

The sun for the day,the moon for the night 日为朝,月为暮

And you for ever 而卿为朝朝暮暮

数学语言也是很美丽的,挺典型的是欧式几何的几何语言和高等数学的代数语言.我们可以尝试对于坐标系数学语言进行“翻译(translation)”.

我们约定以直角坐标系中的原点为极点, $x$ 轴的非负半轴为极轴,得到一个极坐标系.下列说法中正确的有\_\_\_\_\_.

- A. 假设非极点的点 $P$ 的直角坐标和极坐标分别是 $(x, y)$ 和 $(\rho, \theta)$ , 那么一定有 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ .  
 B. 如果我们约定在极坐标系下对于 $\theta \in [0, \pi), (\rho, \theta)$ 和 $(-\rho, \pi + \theta)$ 表示同一个点,过原点(极点)的倾斜角(为了好理解,仍使用直角坐标系下的名称)为 $\theta_0$ 那么过原点的直线的方程一定写作 $\theta = \theta_0$ .  
 C. 圆在直角坐标系下的标准方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ,在极坐标下的一般方程为 $\rho^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$ .其中 $r$ 为圆的半径, $(a, b)$ 为圆在直角坐标系下的圆心坐标,圆心坐标在极坐标系下表示为 $(\rho_0, \theta_0)$ .  
 D. 我们约定:在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中, $z$ 为非原点的任意点,设 $r = |OP|$ , $\theta$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 与 $z$ 轴正方向的夹角(称天顶角),设 $P$ 在平面 $xOy$ 内的投影为 $\overrightarrow{OQ}$ ,  $\varphi$ 表示从 $x$ 轴逆时针旋转到 $OQ$ 上的角(称方位角),这样用数组 $(r, \varphi, \theta)$ 表示的坐标称为点 $P$ 的球坐标.根据此约定,我们有 $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta$ .

**题目9.(本小题4分)**函数(function),最早由中国清朝数学家李善兰(1811-1882)翻译,出于其著作《代数学》.之所以这么翻译,他给出的原因是“凡此变数中函彼变数者,则此为彼之函数”,也即函数指一个量随着另一个量的变化而变化,或者说一个量中包含另一个量.下面关于函数 $f(x) = x^x$ 的说法中不正确的有\_\_\_\_\_.

- A. 函数定义域为 $(0, +\infty)$  B. 函数在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上是增函数  
 C. 函数在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上是增函数 D.  $0 < a < 1$ 时,函数 $g(x) = f(x) - a$ 有两个零点

题目10.(本小题4分)立体几何可以培养我们空间想象的能力,提高几何素养.下列关于立体几何中的命题,假命题有\_\_\_\_\_.

- A. 若平面 $\alpha, \beta$ 相交,在两个平面中各取两点,这四点都不在交线上,那么这四点可以确定1或4个平面;  
 B. 在空间四边形 $ABCD$ 的各边 $AB, BC, CD, DA$ 上依次取点 $E, F, G, H$ .若 $EF, GH$ 所在直线相交于点 $P$ ,则点 $P$ 必定在直线 $AC$ 上;  
 C. 直线 $a, b$ 为异面直线,过直线 $a$ 与直线 $b$ 平行的平面有且只有一个或不存在;  
 D. 空间中三个平面能把空间分成6或4部分.

题目11.(本小题4分)已知 $3m^2 \leq 2k^2 + 1$ ,则下列说法中正确的有\_\_\_\_\_.

- A.  $\frac{m^2}{k^2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$  B.  $\frac{|m|\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 C. 若 $m > 0$ ,则 $\frac{6m^2+1}{m\sqrt{m^2+1}} \geq 2\sqrt{5}$  D.  $\frac{|m|\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

题目12.(本小题4分)下列叙述中不正确的有\_\_\_\_\_.

- A. 如果两个角的正弦值相等,那么这两个角相等或互补;  
 B. 如果 $x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = \sin x$ ,记 $f'(x)$ 为导数 $g(x)$ ,则恒有 $g(f(x)) > f(g(x))$ 成立;  
 C. 如果平面向量 $\mathbf{a} = (1, x)$ 与向量 $\mathbf{b} = (3, -1)$ 的夹角为钝角,那么 $x > 3$ ;  
 D. 函数 $y = \tan x$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时函数值不存在,函数 $y = \cot x$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时函数值为0. ( $k \in \mathbb{Z}$ )

题目13.(本小题4分)已知 $0 < x < y < \pi$ ,且 $e^x \sin x = e^y \sin y$ ,其中 $e$ 为自然对数的底数,则下列选项中一定成立的是\_\_\_\_\_.

- A.  $\sin x < \sin y$  B.  $\sin x + \cos y > 0$   
 C.  $\sin x > \cos y$  D.  $\cos x > \sin y$

题目14.(本小题4分)已知 $A, B, C \in (0, \pi)$ ,  $A + B + C = 2\pi$ ,  $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$ , 则一定有\_\_\_\_\_.

- A.  $A > B$  B.  $A = B$   
 C.  $A < B$  D. 无法比较 $A, B$ 大小

题目15.(本小题4分)已知 $a = \sin 0.01$ ,  $b = 2^{0.02} - 1$ ,  $c = \frac{0.03}{\pi}$ ,则 $a, b, c$ 大小关系为\_\_\_\_\_.

- A.  $c < b < a$  B.  $c < a < b$   
 C.  $b < a < c$  D.  $b < c < a$

题目16.(本小题4分)规定向量 $\mathbf{m}$ 在向量 $\mathbf{n}$ 上的投影为 $\text{Prj}_{\mathbf{n}}\mathbf{m}$ .已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 0)$ ,则 $\text{Prj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} =$ \_\_\_\_\_.

题目17.(本小题4分)函数 $y = \frac{\sqrt{(1-2\sin x)^0}}{x^2 \tan x} \ln(3x+1)$ 的定义域为\_\_\_\_\_.

题目18.(本小题4分)已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 $F$ , 准线为 $l$ ,点 $P$ 在抛物线 $C$ 上, $PQ$ 垂直 $l$ 于点 $Q$ ,  $QF$ 与 $y$ 轴交于点 $T$ ,  $O$ 为坐标原点,且 $|OT| = \sqrt{3}$ ,则 $|PF| =$ \_\_\_\_\_.

题目19.(本小题4分) $\frac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ} + \frac{1 + \tan^2 120^\circ}{1 - \tan^2 120^\circ} =$ \_\_\_\_\_.

题目20.(本小题4分)已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$ ,  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{17}$ , 则 $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) =$ \_\_\_\_\_.

题目21.(本小题4分)请写出一个定义域为 $(e, +\infty)$ 并且值域为 $\mathbb{R}$ 的函数: \_\_\_\_\_.

题目22.(本小题4分)在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 点 $P$ 为该三角形三条垂直平分线的交点, 设 $|\overrightarrow{AP}| = m$ , 并且满足 $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ ,  $4a \cos A + 3b \cos B = 4m$ , 则 $A =$ \_\_\_\_\_.

题目23.(本小题4分)已知 $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x+1 = y+z$ ,  $xy+z^2+14-7z = 0$ , 则 $x^2+y^2$ 的取值范围为\_\_\_\_\_.

题目24.(本小题4分)我们从必修一第一章就学习了集合.集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性.集合论的基础是由德国数学家康托尔(G.Cantor 1845-1918)在19世纪70年代奠定的,经过一大批卓越的科学家半个世纪的努力,到20世纪20年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位,可以说,现代数学各个分支的几乎所有成果都构筑在严格的集合理论上.现在我们定义 $\text{card}(S)$ 为集合 $S$ 的元素个数,若集合 $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,并且满足如下条件:

(i)  $A \cup B \cup C = A \cup B = A \cup C = B \cup C \neq A \cap B$ ;

(ii)  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ , 而且 $\text{card}(A \cup B \cup C) = 3$ ,

则称有序 $(A, B, C)$ 为“super9”集合组,则“super9”集合组有\_\_\_\_\_个.

题目25.(本小题4分)已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 和单位向量 $\mathbf{e}$ 满足 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$ , 并且满足条件 $|\mathbf{b} - \mathbf{e}| = 1$ ,  $|\mathbf{a} + \mathbf{c}| + |\mathbf{a} - \mathbf{c}| = 4|\mathbf{a}|$ , 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| + 2|\mathbf{b} - \mathbf{c}| + 4|\mathbf{c} - \mathbf{a}|$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

## 第 II 卷

题目26.(本小题10分)[计分说明:请完成下面两道题目, 题目A满分5分, 题目B满分5分]

题目A.我们都知道伟大数学家高斯(Gauss 1777-1855)小时候就已经算出 $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$ , 由此也可以证明诸如此类首项为1, 公差为1的等差数列的求和公式: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

事实上, 我们还有如下公式:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \\ \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, \\ \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}, \\ \sum_{k=1}^n k^6 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}, \\ \sum_{k=1}^n k^7 &= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}, \\ \sum_{k=1}^n k^8 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}, \\ \sum_{k=1}^n k^9 &= \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20}, \\ \sum_{k=1}^n k^{10} &= \frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)}{66}. \end{aligned}$$

请证明第一个公式:  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

(注明:  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n$ )

**题目B.** 证明:  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$  ( $n$  为正整数).

**题目27.** (本小题12分) 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$ .

(1) 求该函数的周期  $T$  和单调性;

(2) 将函数  $f(x)$  的图像向上平移  $\frac{3}{2}$  个单位长度得到函数  $g(x)$  的图像, 函数  $h(x)$  的图像与函数  $g(x)$  的图像关于  $x$  轴对称, 试讨论在  $[0, \pi]$  上函数  $p(x) = h(x) - a$  零点的情况.

**题目28.** (本小题14分) 如图所示, 在三角形  $ABC$  中,  $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$ .  $O$  是三角形  $ABC$  的外心.  $OE \perp BC$ , 垂足为  $E$ ,  $AF \perp BC$ , 垂足为  $F$ .

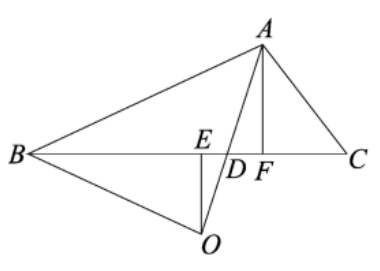


图 1: 题目28图

(1) 求  $\cos \angle AOB$  的值;

(2) 设  $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ , 求  $\lambda + \mu$  的值;

(3) 设点  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心 (在图中未画出), 过点  $G$  作直线分别交线段  $AB, AC$  于点  $N, M$  ( $M, N$  不与  $\triangle ABC$  的顶点重合), 求  $\frac{S_{\triangle ANE}}{S_{\triangle CMC}}$  的最小值.

**题目29.** (本小题12分) 复数 (Complex number) 在历史上曾一度被当时的大数学家不承认其存在. 然而复数对于在解决某些问题有它独特的优势 (在以下各小题中, 解答没有本质用到复数的, 小题分数归零).

(1) 试用复数的相关知识, 求  $\cos 72^\circ$  的值;

(2) [计分说明: 请在下面两道题目中任选一道, 如果同时选择两道题目, 则按第一道计分]

**题目a.** 设复数  $z$  满足  $\left| \arg \left( \frac{z+1}{z+2} \right) \right| = \frac{\pi}{6}$ , 求  $\arg z$  的取值范围.

**题目b.** 利用复数有关知识, 证明:

$$\frac{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}{\sin x + \sin 3x + \sin 5x} = \cot x.$$

**题目30.** (本小题12分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 并且过点  $\left( \sqrt{3}, -\frac{1}{2} \right)$ .

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知椭圆的右顶点和上顶点分别为  $A$  和  $B$ , 设直线  $l: y = kx + m$  ( $m \neq 0$ ) 交椭圆于  $P, Q$  两点,  $PQ$  的中点为  $M$ , 是否存在直线  $l$  使得  $\vec{OM} \parallel \vec{AB}$ ? 若存在, 求出直线  $l$  的斜率; 若不存在, 请说明理由.

**题目31.** (本小题12分) 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 记  $g(x) = f(x) - m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , 设  $g(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 证明:  $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$ .

题目32.(本小题12分)给定正整数 $n \geq 2$ ,证明:存在正整数 $a, b$ ,使得

$$n^2 + n + 1 = \frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1}.$$

题目33.(本小题16分)[计分说明:请完成下面两道题目,题目A满分6分,题目B满分10分]

题目A.三角形 $ABC$ 中有三点 $X, Y, Z$ ,其中 $X$ 为该三角形三条中线的交点, $Y$ 满足为三角形三条垂线的交点, $Z$ 为三角形外心.证明: $X, Y, Z$ 三点共线且 $ZX : XY = 1 : 2$ .

题目B.在锐角三角形 $ABC$ 中,以 $AB$ 为直径的圆 $\Gamma_1$ 与 $AC$ 交于点 $E$ ,以 $AC$ 为直径的圆 $\Gamma_2$ 与 $AB$ 交于一点 $F$ ,且 $H$ 为三角形 $ABC$ 的垂心, $O$ 为三角形 $AEF$ 的外心.证明: $A, O, H$ 三点共线.

## 德州一中2021级29班第一次联考

考试时间：2023年1月 满分：150 分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若  $\bar{z} - 2z = \frac{2(1+2i)}{1-i}$ , 则  $|z| =$

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{10}$

2. 若集合  $A = \{x \mid \ln x > -1\}$ ,  $B = \{x \mid e^x \geq ex\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $(0, e^{-1})$                       C.  $(e^{-1}, +\infty)$                       D.  $[1, +\infty)$

3. “向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ” 是 “ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  为钝角” 的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

4. 现代医疗检测技术的整体准确率可以非常的高,但在特定情况下,即使你个人检出阳性,你真正得病的概率也可以非常的低,即是说再准确的检测也未必预测得准.医学上在患病的情况下检出阳性的概率称为检测的“灵敏度”,在未患病的情况下检出阴性的概率称为检测的“特异度”.新冠疫情期间1名普通无基础病的成年人检测出阳性,在那期间新冠发病率约为1%,检测的灵敏度约为90%,特异度约为91%,则该成年人患新冠的概率约为

- A.  $\frac{9}{10}$                       B.  $\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{1}{10}$                       D.  $\frac{1}{100}$

5. 若正三角形  $ABC$  的重心为  $O$ , 记  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ , 则  $\overrightarrow{AC} =$

- A.  $-2\mathbf{a} - \mathbf{b}$                       B.  $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$                       C.  $-3\mathbf{a} - \mathbf{b}$                       D.  $-3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

6. 若首项为1的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = a_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}$ , 则当  $n > 2$  时,  $a_n =$

- A.  $2^n - n$                       B.  $5 \cdot 2^{n-2} - n - 1$                       C.  $2n - 1$                       D.  $3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$

7. 已知  $a = \sin 0.01$ ,  $b = e^{0.01} - 1$ ,  $c = \frac{0.03}{\pi}$ , 则  $a, b, c$  大小关系为

- A.  $a < c < b$                       B.  $a < b < c$                       C.  $c < b < a$                       D.  $c < a < b$

8. 若抛物线  $y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ , 过点  $F$  作一直线  $l$  交抛物线于  $A, B$  两点, 则  $\frac{|AF|^2 \cdot |BF|^2}{4|BF|^2 + |AF|^2}$  的最大值为

- A.  $\frac{5}{16}$                       B.  $\frac{1}{5}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{7}{16}$

二、选择题: 本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 一个盒子中有10个样式形状都相同只有颜色不同的小球,其中3个是黄球,剩余的球是红球,一次性抽取4个小球,设取到红球的个数为  $X$ , 则下列说法正确的有

- A.  $X \sim B(4, 0.7)$                       B.  $X \sim H(10, 4, 7)$   
C.  $E(X) = 2.8$                       D.  $P(X < 4) = \sum_{i=1}^3 P(X = i)$

10. 已知平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ ,则

A.  $AA' \perp$ 面 $ABCD$

B.  $AB = CD$

C. 面 $ABB'$ 与面 $DCC'$ 平行

D.  $ABCD$ 可以为等腰梯形

11. 对于函数 $f(x) = x^x, x > 0$ , Gauss取整函数 $g(x) = [x]$ , 则

A.  $f(x)$ 有一个极值点

B.  $g(x)$ 是奇函数

C.  $g(f(x)_{\min}) = 0$

D.  $\exists x_0 > 0$ , 使得 $g(\ln f(x_0) + x_0) < -1$

12. 三角函数作为初等函数之一,它的地位非常重要.在求解圆周率 $\pi$ 的一些公式也可以看到三角函数的影子.已知 $\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots$ ,  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = +\infty$ ,  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ , 则

A. 圆内接正 $n$ 边形面积 $S_n = \frac{n}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$  ( $R$ 为圆的半径)

B.  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

C.  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = +\infty$

D. 圆内接正 $n$ 边形面积 $S_n = n \sin \left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$  ( $R$ 为圆的半径)

三、填空题：本题共4小题,每小题5分,共20分.

13.  $(x^2 - 1)(1 - 2x)^4$ 的展开式中 $x^3$ 的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).

14. 已知函数 $f(x) = x \sin x^2 \cdot (2^x - 3a \cdot 2^{-x})$ 是偶函数,则 $a =$ \_\_\_\_\_.

15. 概率统计中的马尔可夫(Markov 1856-1922)不等式是说,对于非负的随机变量 $X$ 和任意的正数 $a$ ,都有 $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ .那么超过人均收入5倍的人数最多占总人数的\_\_\_\_\_.

16. 若四面体 $V - ABC$ 的四个面面积都相等且体积为 $4\sqrt{3}$ ,其内切球的半径 $r = 2$ ,则该四面体的每个面的面积都为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)为了研究学生成绩与普通高中假期提早开学之间是否有关系,一个调查机构经过随机对150名来自不同学校学生的调查得到了如下调查数据.

	不提早开学	提早开学	总计
成绩优秀	54	18	72
成绩非优秀	36	42	78
总计	90	60	150

(1)能否有99%的把握认为学生成绩是否优秀与是否提早开学之间有关?

(2)若在这群人中随机选取一名同学,记事件 $A$ 表示“该学生所在学校提早开学”,事件 $B$ 表示“该学生成绩优秀”.

(i) 利用该调查数据,求出 $P(A|B)$ 的估计值;

(ii) 根据分层抽样的原则抽取15人参加主题为“没有学生拥护的教育将毫无意义”讨论活动,为了节约时间,只准备在15人中随机抽取3名同学一起上台演讲,记抽取的学生中满足事件 $\bar{A}B$ 的个数为 $X$ ,求出 $X$ 的分布列和数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

18.(12分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 已知

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B \cos C - \sin C(1 - \cos B)} = \frac{a+c}{b}.$$

(1) 求 $A$ ;

(2) 若 $a+b+c=2\sqrt{3}$ , 求 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $R$ 的取值范围.

19.(12分) 如图在梯形 $ABCD$ 中,  $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $CD = 2$ ,  $AD = AB = 1$ ,  $BDEF$ 为正方形,  $AC \cap BD = O$ , 面 $EDB \perp$ 面 $ABC$ .

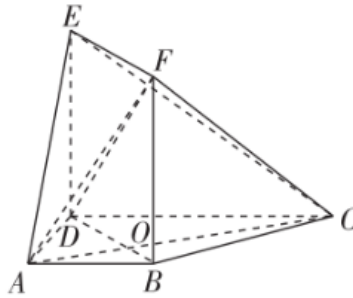


图 2: 题19图

(1) 证明: 在棱 $AE$ 上存在一点 $G$ , 使得平面 $OBG \parallel$ 平面 $EFC$ ;

(2) 求二面角 $B-EF-C$ 的正弦值.

20.(12分) 已知实数 $a_0$ 满足 $a_0 - a_0 \ln a_0 = 1 + \ln a_0$ , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3a_0$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = S_n - 2^{n+2} + e^n$ , 求 $b_n$ 的最小值.

(参考数据:  $e = 2.71 \dots$ ,  $\ln 2 \approx 0.693$ ,  $\ln 3 \approx 1.097$ )

21.(12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 并且过点 $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ .

(1) 求椭圆 $C$ 的标准方程;

(2) 记椭圆的右焦点为 $F$ , 右顶点为 $P$ , 过 $F$ 的直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于 $M, N$ 两点(该两点都不与 $P$ 重合), 证明:  $\tan \angle OPM \cdot \tan \angle OPN$ 为一定值.

22.(12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 1$ 且存在 $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ , 证明:  $2x_1^2 + x_2^2 > \frac{4}{3}$ .

## 德州一中2021级29班第二次联考

考试时间：2023年6月 满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.

如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.
4. 穿越逆境,抵达繁星.

一、单项选择题：本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \mid 2^x > -1\}$ ,  $B = \{x \mid x \subseteq A\}$ , 则  $A \cap B =$

A.  $\mathbb{R}$                                       B.  $(0, +\infty)$                                       C.  $\{\mathbb{R}\}$                                       D.  $\emptyset$

2. 已知  $\bar{z} = 3 - i$ , 则  $z + 2i$  的虚部为

A.  $3i$                                       B.  $i$                                       C.  $3$                                       D.  $1$

3. 已知  $A, B$  为椭圆  $C$  的两个焦点,  $M$  是椭圆的一个顶点,  $\angle AMB = \frac{2\pi}{3}$ ,  $C$  的离心率为

A.  $\frac{1}{2}$                                       B.  $\frac{2}{3}$                                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 若圆上有9个不同点, 记不同点连线的第  $k$  个在圆内的交点为  $M_k$ , 则  $k$  的最大值为

A. 126                                      B. 210                                      C. 42                                      D. 84

5. 三棱锥  $A - BCD$  中,  $AC \perp$  面  $BCD$ ,  $BD \perp CD$ , 若  $AB = 3$ ,  $BD = 1$ , 则当该三棱锥的体积最大时,  $BC =$

A. 2                                      B.  $\sqrt{5}$                                       C.  $\sqrt{2}$                                       D.  $\sqrt{7}$

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = n \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^6 \binom{6}{n} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n$ , 则该数列前六项和  $S_6 =$

A.  $\frac{9}{5}$                                       B.  $\frac{10}{7}$                                       C. 1                                      D. 以上都不对

7.  $33^{22}$  除以5的余数是

A. 4                                      B. 3                                      C. 2                                      D. 1

8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 > 0$ ,  $a_n \neq 1$ , 且  $a_{n+1} = |a_n \ln a_n|$ . 若实数对  $(\beta, \gamma)$  满足当  $a_1 = \beta$  时, 数列  $\{a_n\}$  为摆动数列并且当  $n$  充分大时该数列会趋向一个定值  $\gamma$ , 则实数  $\beta$  与  $\gamma$  可能满足的是

A.  $\frac{\beta}{\gamma} = 1$                                       B.  $\frac{\beta}{\gamma} = 2$                                       C.  $\frac{\beta}{\gamma} = e^2$                                       D.  $\frac{\beta}{\gamma} = e^3$

二、多项选择题：本题共4小题,每小题5分,共20分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $n$ 个互异实数, 已知集合 $A = \{x \mid x = x_i, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ , 且对于任意 $\alpha \in A$ 都有 $\sin \alpha = \beta \in B$ . 设 $M_{(j)}$ 满足 $M_{(j)} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_j\} = M$ ,  $a_k \in M, a_k \notin M_{(j)}, 1 \leq k \leq j, k \in \mathbb{N}$ , 则下列说法不正确的有

- A. 集合 $B = \{y \mid y = \sin x_i, x_i \in A\}$
- B. 集合 $B$ 中元素极差不大于2
- C. 集合 $B$ 中元素个数小于等于集合 $A$ 中元素个数
- D. 集合 $A_{(\lambda)}$  ( $1 \leq \lambda \leq n, \lambda \in \mathbb{N}$ ) 中元素标准差可能等于集合 $B$ 中元素标准差

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且 $f(x-2)$ 与 $f(x+2)$ 都是奇函数, 则下面不一定正确的有

- A.  $f(x)$ 是奇函数
- B.  $f(x)$ 是偶函数
- C.  $f(x+4) = f(x)$
- D.  $f(x+6)$ 是奇函数

11. 已知点 $(x, y)$ 在曲线 $C: (x^3 - 5x + y)^{2023} + x^{2023} = -x^3 + 4x - y$ 上, 记 $f(x) = y$ , 则有

- A.  $f(x)$ 为奇函数
- B.  $f(x)$ 值域为 $(0, +\infty)$
- C.  $g(x) = f(x) + 4$ 有且仅有1个零点
- D. 若正方形的四个顶点都在该曲线上, 则满足条件的正方形有且仅有2个

12. 已知正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中被挖去以底面内切圆为底, 高与正方体边长相同的圆锥,  $AB = 2$ , 则下列说法中正确的有

- A. 该立体图形体积为 $8 - \frac{2\pi}{3}$
- B. 若将一小球放入圆锥空隙中, 球心恰与正方体体心重合, 则小球半径为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- C. 若将一半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的小球放入圆锥, 则球心与正方体体心的距离为 $\frac{5}{2}$
- D. 若将两个相同的此立体模型从面 $ABCD$ 相接形成新的模型一; 将原立体图形沿面 $DB'B$ 切开再将其中一半沿面 $DB'B$ 绕正方体体心旋转 $180^\circ$ 拼接成模型二, 则模型一所能容纳的最大小球体积为模型二所能容纳的8倍(不考虑放入时的限制)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在正八边形 $ABCDEFGH$ 中记 $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AE} = \mathbf{b}$ , 则 $\overrightarrow{HD} = \underline{\hspace{2cm}}$ . (用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示)

14. 过点 $M(2, 4)$ 作曲线 $y^2 = 4 - x^2$ 的切线方程是\_\_\_\_\_.

15. 《三体》中讲述了初始形成的宇宙其实是十一维的, 在他们的世界中除了我们三维空间的长宽高还有其他八个方向. 对于一个广义的体积定义, 在 $n$ 维空间 ( $n > 2$  且  $n$  为正整数) 中半径为 $R$ 的球的体积 $V_n$ 可以写成下面的形式:  $V_n = \frac{2\pi R^n}{n} \cdot T_{n-2}$ , 已知其中 $T_n$ 为通项公式为 $a_n = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积, 则十一维空间中单位球的体积为\_\_\_\_\_; 当空间的维度趋向于正无穷大的时候, 单位球的体积为\_\_\_\_\_. (Hint:  $(n+1)! = n!(n+1)$ )

16. 某个城市有10条东西向的公路和10条南北向的公路, 共交于100个路口. 小明从某个路口驾车出发, 经过每个路口恰一次, 最后回到出发点. 在经过每个路口时, 向右转不需要等待, 直行需要等待1分钟, 向左

转需要等待2分钟,则小明在路口等待总时间的可能值为\_\_\_\_\_分钟.(不忽略起点终点处的转弯时间)

四、解答题: 本题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10分) 已知中空正四面体 $A-BCD$ ,高为 $h$ ,考虑向该容器注入水.(不考虑水的变化)

(1) 若面 $BCD$ 放置于地,求装水至 $\frac{1}{2}h$ 处所需水的体积;

(2) 若保持(1)中水的体积不变,将 $A$ 放置于地,面 $BCD$ 与地面平行,求此时水的高度.

18.(12分) 已知锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, $a, b, c$ 分别为 $A, B, C$ 的对边,记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S$ ,且

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos B}{\sin C - \cos C}.$$

(1) 证明: $a^2 < bc$ ;

(2) 若 $AD$ 为 $BC$ 边上的高, $E$ 是线段 $AB$ 上一点(不与 $A, B$ 重合), $\sin C = \frac{12}{13}$ ,记 $DE = l$ ,求 $\frac{l}{\sqrt{S}}$ 的取值范围.

19.(12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\cos x - x}{x^2}, x > 0$ .

(1) 求函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 若正数 $a$ 使得 $af(x) + \frac{8\pi}{9} \geq 0$ 恒成立,求 $a$ 的取值范围.

20.(12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足首项为1,且有 $a_{n+1} - a_n = 2$ ,数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n b_n = (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$ .

(1) 设 $S_n = \sum_{i=1}^n b_i$ ,判断是否存在实数 $\lambda$ 使得 $b_n \leq \lambda S_n$ 恒成立,若存在,求出 $\lambda$ 的取值范围;若不存在,说明理由;

(2) 试求使得 $c_n = (a_n + 2)^{2023}$ 展开式中 $n^m$ 的系数最大的正整数 $m$ .

21.(12分) 在直角坐标系 $xOy$ 中,若点 $P$ 到 $y$ 轴的距离等于点 $P$ 到点 $(2, 0)$ 的距离,记动点 $P$ 的轨迹为 $W$ .

(1) 求 $W$ 的方程;

(2) 若 $W$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4-a^2} = 1 (1 < a < 2)$ 相交于 $A, B$ 两点, $F$ 是 $C$ 的右焦点,直线 $AF$ 分别与 $W, C$ 交于点 $M, N$  (不同于 $A, B$ ),直线 $BM, BN$ 分别交 $x$ 轴于 $P, Q$ 两点. 试求 $\left| \frac{FQ}{FP} \right|$ 的取值范围.

22.(12分)  $A$ 与 $B$ 两人进行“抽Ghost牌”游戏. 游戏开始时, $A$ 手中有 $n$ 张两两不同的牌,其中 $n \in \mathbb{N}_+$ .  $B$ 手上有 $n+1$ 张牌,其中有 $n$ 张牌与 $A$ 手中的牌相同,另一张牌为Ghost牌,与其他所有牌都不同. 假设每一次抽牌从对方手上抽到任一张牌的概率都相同. 游戏规则为:

i) 双方交替从对方手中抽取一张牌, $A$ 先从 $B$ 手中抽取;

ii) 若某位玩家抽到对方的牌与自己手中的某一张一致,则将两张牌丢弃;

iii) 最后剩一张牌时,持有这一张牌的玩家为输家.

(1) 假设初始时 $A$ 手上有1张牌,求 $A$ 获胜的概率;

(2) 设初始 $A$ 手上有 $n$ 张牌时 $A$ 的胜率为 $a_n$ .

①试证明: 当 $n > 2$ 时, $(n+2)a_n = na_{n-2} + 1$ ;

②求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,并说明这个游戏是否公平.

## 德州一中2021级29班第三次联考

考试时间：2023年8月 满分：180 分

注意事项：

1. 答卷请答到本试卷配套的答题卡上，写在草稿纸和本试卷上无效.
2. 本试卷分为第一试与第二试，各90分，满分180分.
3. 考试时间：2023.8.20 第一试8:30-11:20；第二试13:30-16:20.
4. 请勿外传试题.
5. 请诚信考试，祝君好运！

## 第 一 试

题目1.(本小题30分)已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分别是角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的对边， $\frac{a^2}{b} = b + c$ .  
求 $\frac{\sqrt{2}a + c}{2b}$ 的取值范围.

题目2.(本小题30分)赌徒永远不明白，与自己对赌的不是运气，也不是庄家，他们是在与狄利克雷、伯努利、高斯、纳什、凯利这样的大数学家对决数学。下面我们来模拟一个情形：假设龙宝宝进入赌场参与一个赌博游戏，我们为了简化模型，姑且假设他去的是正规的理想赌场，即每一局龙宝宝赌赢的概率为50%，且赌输就要输掉1元，赌赢就会赢得1元，龙宝宝会一直玩下去，直到遇到如下两种情况龙宝宝会结束赌博：一种是手中赌金为0元，即他输光了；一种是龙宝宝赌到预期的 $B$ 元，他也遵循“及时”收手的原则停止赌博.根据以上理想化的假设.

证明：久赌无赢家.

题目3.(本小题30分)若 $n$ 个正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足 $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{9}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq 6.$$

## 第 二 试

题目4.(本小题30分)考虑序列

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{n^2}, a_1 = \frac{2}{5}.$$

证明：对所有正整数 $n$ 都有 $a_n < 1$ .

题目5.(本小题30分)“我在时间的荒野里想起你”. 柒柒与苏苏远隔千里而彼此思念. 假使苏苏与柒柒要进行信息交谈, 为防止被人窃取, 他们打算要进行信息加密. 柒柒要传给苏苏一个明文 $m$ , 柒柒按如下方式进行加密: 取相当大的互异质数 $p$ 与 $q$ , 令 $N = pq > m$ , 规定 $r = \varphi(N)$  (这里 $\varphi(N)$ 表示小于等于 $N$ 的正整数中与 $N$ 互质数的个数), 之后再取一正整数 $e$ 使得 $e < r$ 且 $(e, r) = 1$ 与一正整数 $d$ , 使得 $ed \equiv 1 \pmod{r}$ . 此后两人约定公钥为 $(N, e)$ , 加密后的密文 $c \equiv m^e \pmod{N}$ . 苏苏手中有私钥 $(N, d)$ , 可以对密文 $c$ 进行解密得到明文 $m$ , 这里苏苏和柒柒知道 $m \equiv c^d \pmod{N}$ . 试说明这种加密算法可行性与安全性.

[Hint:对于整数 $a, b, n$ ,  $a \equiv b \pmod{n}$ , 若 $a$ 与 $b$ 除以 $n$ 的余数相同.]

题目6.(本小题30分)已知一平面图形中 $AB, AC$ 为一定圆的切线,  $A$ 为 $l_1$ 上的定点, 定圆与 $l_2$ 相切且 $l_1 \perp l_2$ . 线段 $AB$ 与线段 $AC$ 分别交直线 $l_2$ 与 $D, E$ 两点, 点 $F$ 为不与 $D$ 重合且在 $D$ 的右侧的一动点, 总是满足 $DF = GE$ .

证明: 线段 $FG$ 必然与定圆相交.

## 德州一中2021级29班第四次联考

考试时间：2024年1月 满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.

如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.
4. 穿越逆境,抵达繁星.

一、单项选择题：本题共6小题，每小题5分，共30分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \mid \ln x > 0\}$ ,  $B = \{x \mid y^{\frac{x}{\ln y}} \leq e, y > 0\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$

A.  $(-\infty, e]$                       B.  $(-\infty, 1]$                       C.  $(0, 1]$                       D.  $(0, e]$

2. 设两个正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ( $\sigma_1 > 0$ ) 和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  ( $\sigma_2 > 0$ ) 的密度函数图像如下图所示, 则下列说法正确的是

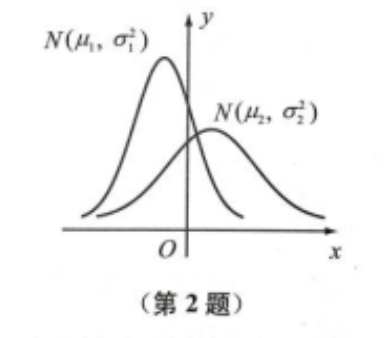


图 3: 题2图

- A.  $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$
- B.  $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$
- C.  $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$
- D.  $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$

3. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ ,  $a_1 > 0$ , 其公比  $q > 1$ , 若  $T_{2023} < 1, T_{2024} > 1$ , 则小于1的最大项是

A.  $a_{2023}$                       B.  $a_{2024}$                       C.  $a_{1012}$                       D. 以上都不对

4. 已知四面体  $S-ABC$  中  $SC \perp$  面  $ABC$ ,  $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ , 以  $SC$  为边长的正方形面积为三角形  $ABC$  面积的  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  倍, 该四面体外接球的半径长为  $\frac{3}{2}SC$ , 则  $\triangle ABC$  中  $AC$  与  $BC$  的较长边与较短边之比为

A.  $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$                       B.  $\frac{13+\sqrt{165}}{2}$                       C.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$                       D. 以上都不对

5. 若  $\triangle ABC$  的外接圆直径长等于  $AC$  与  $AB$  长度之和, 则角  $A$  的最大值为

A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\frac{2\pi}{3}$                       C.  $2 \arccos \frac{1}{4}$                       D. 以上都不对

6. 从18个相同的小球中分出4堆放入编号为1,2,3,4的四个箱子中, 要求每个箱子中的小球个数多于自身编号数, 则有\_\_\_\_\_种分法.

A. 165

B. 70

C. 35

D. 以上都不对

二、多项选择题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

7. 若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $n$ 个互异实数, 已知集合 $A = \{x \mid x = x_i, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ , 且对于任意 $\alpha \in A$ 都有 $\sin \alpha = \beta \in B$ . 设 $M_{(j)}$ 满足 $M_{(j)} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_j\} = M$ ,  $a_k \in M$ ,  $a_k \notin M_{(j)}$ ,  $1 \leq k \leq j$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$ . 集合 $Q$ 的元素个数称为该集合的势, 记作 $|Q|$ , 若两个无限集合中的元素存在一一对应关系, 则称两个集合势相同. 据以上材料, 下列说法正确的有

A. “存在 $m \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p, q \leq n$ 使得 $x_p = x_q + 2m\pi$ ”是“ $|B| \leq n$ ”的充分不必要条件

B. “存在 $\gamma \in B, \gamma \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ”是“ $|B| > n$ ”的既不充分也不必要条件

C. 若 $0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, |A|, |B| > 100$ , 则 $1 \leq \lambda \leq 100$ 时, 有 $|A_{(\lambda)}| = |B_{(\lambda)}|$

D. 若 $D = \{\zeta \mid \zeta = \frac{r}{2}, r \in \mathbb{N}\}$ , 则 $1 \leq \mu \leq 100$ , 有 $|D_{(\mu)}| = |\mathbb{N}_{(\mu)}|$

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F$ , 点 $F$ 关于 $y$ 轴的对称点为点 $E$ . 过 $F$ 作一直线 $l$ 交 $C$ 于 $A, B$ 两点, 点 $A$ 在 $F$ 的上侧且在 $B$ 右侧, 且 $l$ 交 $y$ 轴于点 $M$ . 若 $\sin \angle AFE = \frac{3}{5}$ , 则下列说法正确的有

A. 直线 $AE$ 的斜率小于 $\frac{3}{5}$

B.  $|AE| = \sqrt{34}p$

C.  $|BM| < \frac{2}{5}|BF|$

D.  $\sin \angle AEB > \frac{5}{6}$

9. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (\sin \alpha, \cos \alpha), \overrightarrow{OB} = (\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta))$ , 记 $\overrightarrow{AB} = (m, n)$ , 其中满足 $\alpha + \frac{\beta}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 下面正确的是

A.  $\frac{n}{m} = -\tan\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$

B.  $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的投影数量为 $\cos \beta$

C. “ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ ”是“ $\beta - \alpha = \pi$ ”的必要不充分条件

D.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \cos \frac{\beta}{2}, 2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2}\right)$

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分.

10. 已知 $M = \{x \mid x^3 = 8, x \in \mathbb{C}\}, N = \{|x| \mid x \in M\}$ , 则 $\sum_{x \in N} x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 在 $\triangle ABC$ 中,  $AC = 2$ ,  $AC$ 边上的高为1, 则 $\angle B$ 的最大值是\_\_\_\_\_.

12. 数学可以刻画样本之间的“距离”, 闵式距离就是常用的一种刻画距离的方式, 两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 的闵式距离为 $D_p(A, B) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ , 其中 $p$ 为非零常数. 已知点 $P$ 到两点 $F_1(-c, 0)$ 与 $F_2(c, 0)$ 的闵式距离 $D_p(P, F_1) + D_p(P, F_2) = 2m > 2c$ , 若 $m = 2$ , 则 $P$ 点纵坐标的取值范围为\_\_\_\_\_;  $P$ 点到直线 $x - 2y + 4 = 0$ 的最小距离为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共6小题, 共90分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. (15分) 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A = \sin B \sin C$ .

(1) 试求角 $A$ 的最大值;

(2) 若锐角 $\triangle ABC$ 中 $b = 1$ , 求 $\sin C$ 的取值范围.

14. (15分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ,  $AB = BC = B_1C_1 = 1$ , 侧面 $ABB_1A_1$ 是矩形,  $\angle BB_1C_1 = \frac{\pi}{4}$ . 点 $M$ 在 $BB_1$ 上满足 $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 点 $N$ 为 $CC_1$ 的中点, 且 $\overrightarrow{BP_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC_1}$ .

(1) 证明: 在 $A_1B_1$ 上存在一点 $Q$ , 使得面 $QMN \parallel$ 面 $A_1BC_1$ ;

(2) 求二面角 $P_1 - AN - M$ 的正弦值.

15. (15分) 足球是一项有趣的运动, 它有益于我们的身心健康. 在面对足球时有时也会抒发人生的感悟, 正如足球解说员贺炜所言: “人生当中成功只是一时的, 失败却是主旋律. 但是如何面对失败, 却把人分成了不同的样子. 有的人会被失败击垮, 有的人能够不断地爬起来继续向前……我想真正的成熟并不是追求完美, 而是直面自己的缺憾, 这才是生活的本质.” 苏苏参加足球训练, 每次训练都随机, 他选择传球与射门的概率均为0.5, 每次训练时成功概率是 $p$ :

①传球时 $p = \frac{2}{3}$ , 成功记1分, 否则记0分;

②射门时 $p = \frac{1}{3}$ , 成功记2分, 否则记0分.

已知苏苏连续测试 $n$ 次, 他的总得分记为 $X$ 分, 记其数学期望为 $E(X)$ , 方差为 $D(X)$ . 设测试达到 $n$ 次时结束.

(1) 证明:  $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ ;

(2) 若 $n = 2$ , 求 $X$ 的分布列、数学期望和方差;

(3) 记苏苏每一次测试都成功结束测试的概率为 $f(n)$ , 试求出 $f(n)$ 的通项公式.

16. (15分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 且过点 $M\left(1, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$ , 过点 $M$ 作 $MP$ 平行于 $y$ 轴. 点 $P$ 在抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 点 $P$ 到 $E$ 的焦点距离为2.

(1) 求椭圆 $C$ 与抛物线 $E$ 的方程;

(2) 若一直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于 $A, B$ 两点, 交抛物线 $E$ 于 $T, H$ 两点, 记 $TH$ 的中点为 $Q$ ,  $|QT|^2 - |OQ|^2 = 2p$ .

①证明:  $TH$ 过一定点;

②记 $TH$ 过定点为 $G$ , 问: 是否存在一点 $K$ , 使得 $\frac{|KA|}{|GA|} = \frac{|KB|}{|GB|}$ ? 若存在, 求出点 $K$ 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

17. (15分) 已知函数 $f(x) = \ln x - (x - a)^2$ ,  $g(x) = axe^{-x}$ .

(1) 若 $f(x)$ 存在两个零点 $x_1, x_2$ , 求证:  $x_1 + x_2 > 2a$ ;

(2) 若 $h(x) = f(x + 1) + g(x)$ 的图像与 $y = -(x + 1 - a)^2$ 的图像有两个交点, 并且交点横坐标分别位于区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 上, 求实数 $a$ 的取值范围.

18. (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_n^2$ ,  $a_1 = \frac{2}{5}$ .

(1) 若 $\lambda = 0$ ,  $\mu = 2$ , 求该数列前 $n$ 项积 $T_n$ ;

(2) 若 $\lambda = 1$ 时:

①  $\mu = 2$ 时, 记 $c_n = \frac{2}{2a_n + 1}$ , 证明:  $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{5}{2}$ ;

②  $\mu = \frac{1}{n^2}$ 时, 证明:  $a_n < \frac{6}{5}$ .