导数27个专题

目 录

专题1：切线问题

1. 若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+2x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\ln\frac{1}{2e},+\infty\right)$　B. $(-1,+\infty)$　C. $(1,+\infty)$　D. $(-\ln2,+\infty)$

2. 已知直线 $y=2x$ 与曲线 $f(x)=\ln(ax+b)$ 相切，则 ab 的最大值为 ( )

A. $\frac{e}{4}$　B. $\frac{e}{2}$　C. e　D. 2e

3. 已知 P 是曲线 C_1：$y=e^x$ 上任意一点，点 Q 是曲线 C_2：$y=\frac{\ln x}{x}$ 上任意一点，则 $|PQ|$ 的最小值是 ( )

A. $1-\frac{\ln2}{2}$　B. $1+\frac{\ln2}{2}$　C. 2　D. $\sqrt{2}$

4. 若曲线 $y=ax+2\cos x$ 上存在两条切线相互垂直，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　B. $[-1,1]$　C. $(-\infty,1]$　D. $[-\sqrt{3},1]$

5. 已知关于 x 不等式 $ae^x\geqslant x+b$ 对任意 $x\in R$ 和正数 b 恒成立，则 $\frac{a}{b}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. $\sqrt{2}$　D. 2

6. 若存在实数 a,b，使不等式 $2e\ln x\leqslant ax+b\leqslant\frac{1}{2}x^2+e$ 对一切正数 x 都成立（其中 e 为自然对数的底数），则实数 a 的最大值是 ( )

A. $\sqrt{e}$　B. 2e　C. $2\sqrt{e}$　D. 2

7. 若对函数 $f(x)=2x-\sin x$ 的图象上任意一点处的切线 l_1，函数 $g(x)=me^x+(m-2)x$ 的图象上总存在一点处的切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{e}{2},0\right)$　B. $\left(0,\frac{e}{2}\right)$　C. $(-1,0)$　D. $(0,1)$

8. 若过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 C：$y=xe^x$ 相切，则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{5}{e^2},0\right)$　B. $\left(-\frac{5}{e^2},e\right)$　C. $(0,+\infty)$　D. $\left(-\frac{3}{e^2},-\frac{1}{e}\right)$

9. 已知 $y=kx+b$ 是函数 $f(x)=\ln x+x$ 的切线，则 $2k+b$ 的最小值为________.

10. 存在 $k>0,b>0$ 使 $kx-2k+b\geqslant\ln x$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，则 $\frac{b}{k}$ 的最小值为________.

11. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=e^x$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+2)$ 的切线，则 $k=$________.

12. 已知直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=e^x$ 的图像相切于点 $P(x_1,y_1)$，与函数 $y=\ln x$ 的图像相切于点 $Q(x_2,y_2)$，若 $x_2>1$，且 $x_2\in(n,n+1)$，$n\in Z$，，则 $n=$________.

13. 若直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=\ln x$ 的切线，又是曲线 $y=e^{x-2}$ 的切线，则 $b=$________.

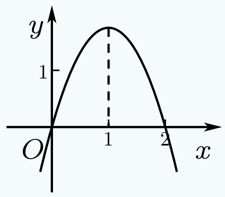
14. 已知实数 a,b,c,d，满足 $\frac{\ln a}{b}=\frac{2c}{d-1}=1$，那么 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为________.

15. 若直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$ 相切于点 P，与曲线 $y=\ln(x+1)$ 相切于点 Q，则 $k=$

________________.

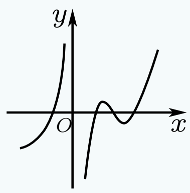
专题2：函数的图像

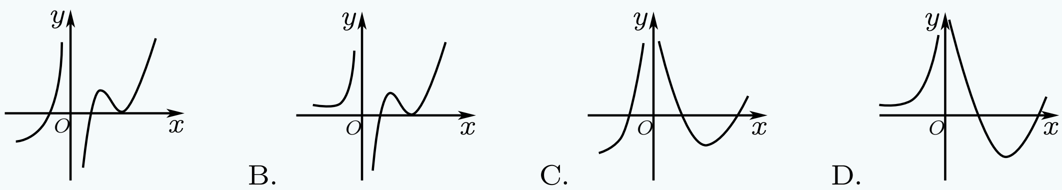
1. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+c$，其导数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的极大值是 (　　)



A. $a+b+c$　　B. $8a+4b+c$　　C. $3a+2b$　　D. c

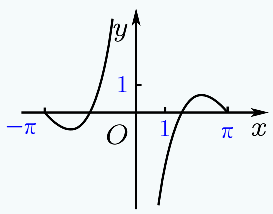
2. 设函数 $y=f(x)$ 可导，$y=f(x)$ 的图象如图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 可能为 (　　)



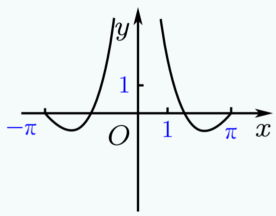


A.　　B.　　C.　　D.

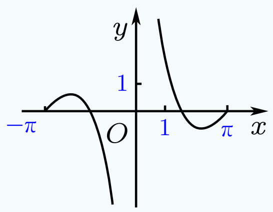
3. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为 (　　)



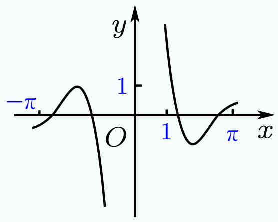
A.



B.

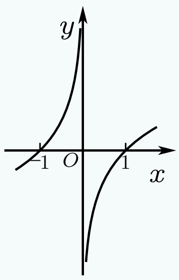


C.



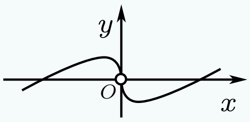
D.

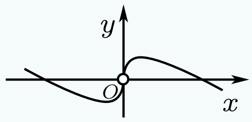
4. 若函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 (　　)

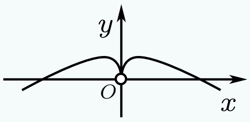


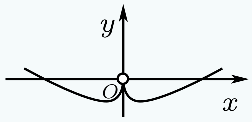
A. $f(x)=\dfrac{x}{2\ln|x|}$　　B. $f(x)=\ln|x|-x^2$　　C. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln|x|$　　D. $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{x^2+1}$ 的图象大致为　　(　　)

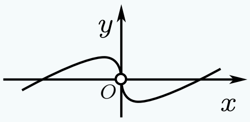
A. 

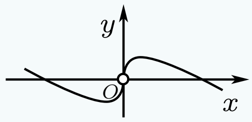
B. 

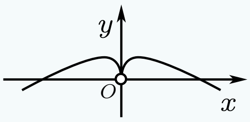
C. 

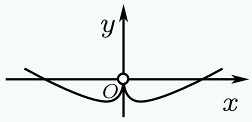
D. 

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x^2+1}, & x>0\\ \dfrac{x\ln(-x)}{x^2+1}, & x<0\end{cases}$ 的图象大致为　　(　　)

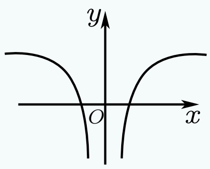
A. 

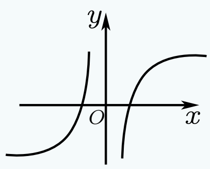
B. 

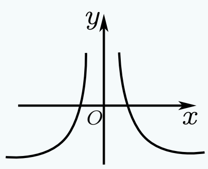
C. 

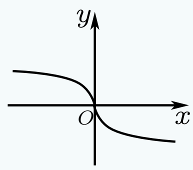
D. 

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 的大致图象是　　(　　)

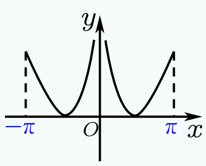
A. 

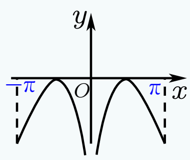
B. 

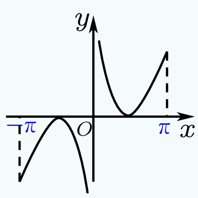
C. 

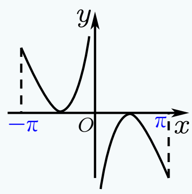
D. 

8. 函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cos x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 且 $x\neq 0)$ 的图象可能为　　(　　)

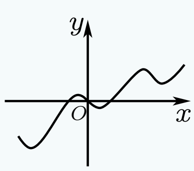
A. 

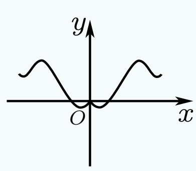
B. 

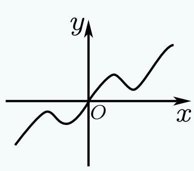
C. 

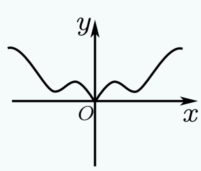
D. 

9. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(x)$ 的图象是　　(　　)

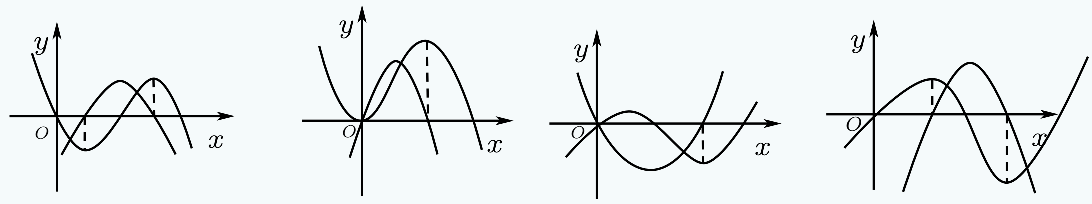
A. 

B. 

C. 

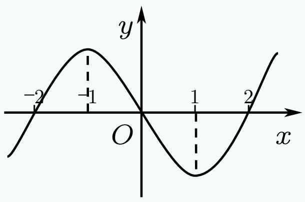
D. 

10. 下面四图都是同一坐标系中某三次函数及其导函数的图象，其中一定不正确的序号是　　(　　)



A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ①④

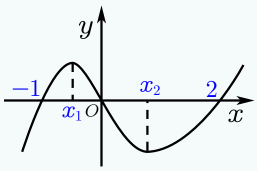
11. 已知 R 上的可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x-2)f'(x)>0$ 的解集为　　(　　)



A. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(1,2)$

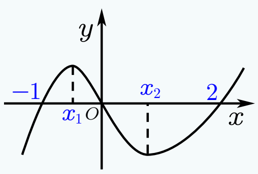
C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-1,1)\cup(2,+\infty)$

12. 函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象如图所示，则 $x_1^2+x_2^2$ 等于　　(　　)



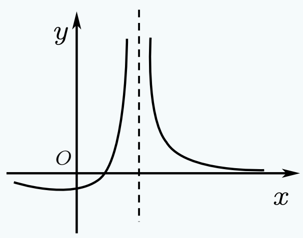
A. $\frac{8}{9}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{16}{9}$　　D. $\frac{28}{9}$

13. 如图是函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象，则 $x_1+x_2=$　　(　　)



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. $\frac{28}{9}$

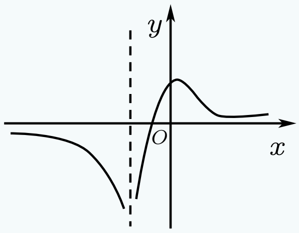
14. 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是　　(　　)



A. $a<0,b>0,c<0$　　B. $a>0,b<0,c<0$

C. $a>0,b<0,c>0$　　D. $a<0,b>0,c>0$

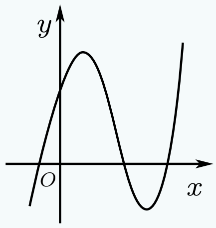
15. 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象大致如图所示，则下列结论正确的是　　(　　)



A. $a>0,b>0,c>0$　　B. $a<0,b>0,c<0$

C. $a<0,b<0,c>0$　　D. $a>0,b>0,c<0$

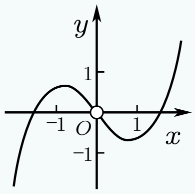
16. 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是　　(　　)



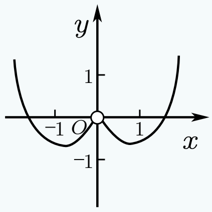
A. $a>0,b<0,c>0,d>0$　　B. $a>0,b<0,c<0,d>0$

C. $a<0,b<0,c>0,d>0$　　D. $a>0,b>0,c>0,d<0$

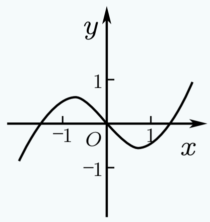
17. 函数 $y=\dfrac{x^2}{\sin x}(2x^2-e^{|x|})$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为　　(　　)



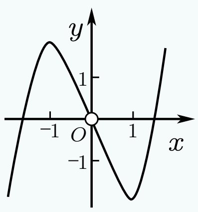
A.



B.

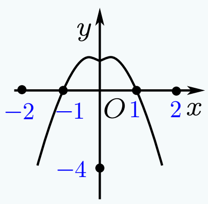


C.

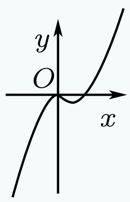


D.

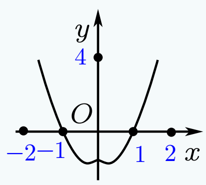
18. 函数 $y=2x^2-2^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为　　(　　)



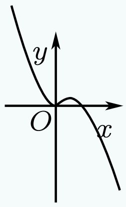
A.



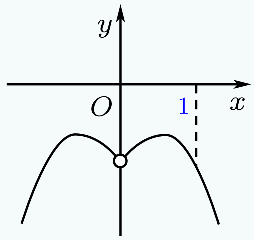
B.



C.

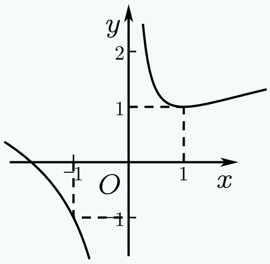
D. 

19. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ( )



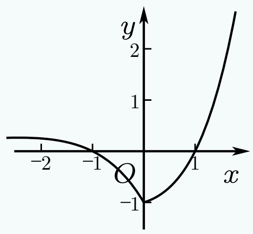
A. $f(x)=\ln|x|-x^2$　　B. $f(x)=\ln|x|-|x|$　　C. $f(x)=2\ln|x|-x^2$　　D. $f(x)=2\ln|x|-|x|$

20. 已知某函数的图象如图所示，则该函数的解析式可能是 ( )



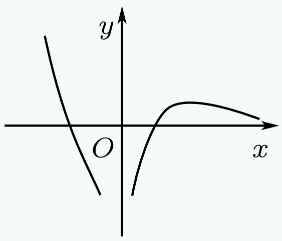
A. $f(x)=\ln|x|-\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=\ln|x|+\frac{1}{x}$　　C. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln|x|$　　D. $f(x)=\ln|x|+\frac{1}{|x|}$

21. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则它的解析式可能是 ( )



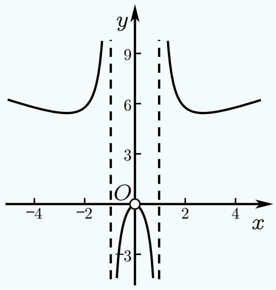
A. $f(x)=\frac{x^2-1}{2^x}$　　B. $f(x)=2^x(|x|-1)$　　C. $f(x)=|\ln|x||$　　D. $f(x)=xe^x-1$

22. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则该函数的解析式可能是 ( )



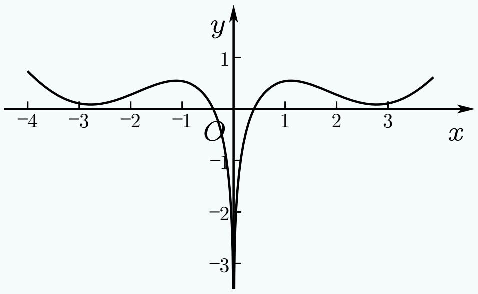
A. $f(x)=\frac{\ln|x|}{e^x}$　　B. $f(x)=e^x\ln|x|$　　C. $f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$　　D. $f(x)=(x-1)\ln|x|$

23. 已知某函数的图象如图所示,则下列解析式中与此图象最为符合的是　　(　　)



A. $f(x)=\dfrac{2x}{\ln|x|}$　　B. $f(x)=\dfrac{2|x|}{\ln|x|}$　　C. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{|x|-\dfrac{1}{|x|}}$

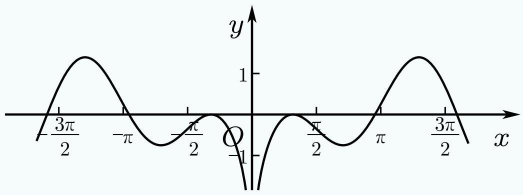
24. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的解析式可能是　　(　　)



A. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}\cdot\cos x$　　B. $f(x)=\ln|x|\cdot\cos x$　　C. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}+\cos x$

D. $f(x)=\ln|x|+\cos x$

25. 已知函数 $f(x)$ 的局部图象如图所示,则 $f(x)$ 的解析式可以是　　(　　)



A. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}x$　　B. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}x$

C. $f(x)=\ln|x|\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}x$　　D. $f(x)=\ln|x|\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}x$

专题3:单调性问题

1. 已知函数$f(x)=\ln x+\ln(a-x)$的图象关于直线$x=1$对称,则函数$f(x)$的单调递增区间为 ( )

A. $(0,2)$ B. $[0,1)$ C. $(-\infty,1]$ D. $(0,1]$

2. 若函数$f(x)$的定义域为D内的某个区间I上是增函数,且$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在I上也是增函数,则称$y=f(x)$是I上的"完美函数",已知$g(x)=e^x+x-\ln x+1$,若函数$g(x)$是区间$\left[\dfrac{m}{2},+\infty\right)$上的"完美函数",则正整数$m$的最小值为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设函数$f(x)=e^{2x}+ax$在$(0,+\infty)$上单调递增,则实数a的取值范围为 ( )

A. $[-1,+\infty)$ B. $(-1,+\infty)$ C. $[-2,+\infty)$ D. $(-2,+\infty)$

4. 若函数$f(x)=2x^2-\ln x$在其定义域内的一个子区间$[k-1,k+1]$内不是单调函数,则实数k的取值范围是 ( )

A. $[1,2)$ B. $(1,2)$ C. $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$ D. $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

5. 若函数$f(x)=\ln x+ax^2-2$在区间$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$内存在单调递增区间,则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2]$ B. $(-2,+\infty)$ C. $\left(-2,-\dfrac{1}{8}\right)$ D. $\left[-\dfrac{1}{8},+\infty\right)$

6. 若函数$f(x)=\ln x+(x-b)^2(b\in R)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上存在单调递增区间,则实数$b$的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ B. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right)$ C. $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ D. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

7. 设$1<x<2$,则$\dfrac{\ln x}{x}$、$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$、$\dfrac{\ln x^2}{x^2}$的大小关系是 ( )

A. $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln x^2}{x^2}$ B. $\dfrac{\ln x}{x}<\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2<\dfrac{\ln x^2}{x^2}$

C. $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2<\dfrac{\ln x^2}{x^2}<\dfrac{\ln x}{x}$ D. $\dfrac{\ln x^2}{x^2}<\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2<\dfrac{\ln x}{x}$

8. 已知函数$y=f(x-1)$的图象关于直线$x=1$对称,且当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)=\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|$.若$a=f\left(-\dfrac{e}{2}\right)$,$b=f(2)$,$c=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$,则$a,b,c$的大小关系是 ( )

A. $b>a>c$ B. $a>b>c$ C. $a>c>b$ D. $c>b>a$

9. 下列命题为真命题的个数是 ( )

①$e^{\frac{2}{e}}>2$;②$\ln 2>\dfrac{2}{3}$;③$\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{1}{e}$;④$\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{\ln\pi}{\pi}$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 下列命题为真命题的个数是 ( )

①$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$; ②$\ln\pi<\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$; ③$2^{\sqrt{15}}<15$; ④$3e\ln 2<4\sqrt{2}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln x-ae^x(a\in R)$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 ______ .

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}-2, & x\leqslant 0\\ 2ax-1, & x>0\end{cases}(a>0)$，对于下列命题：

(1) 函数 $f(x)$ 的最小值是 -1；

(2) 函数 $f(x)$ 在 R 上是单调函数；

(3) 若 $f(x)>0$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 $a>1$，

其中真命题的序号是 ______ .

13. 已知函数 $f(x)=\ln x+(x-a)^2(a\in R)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 ________

14. 设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{\mathrm{e}^x}(a\in R)$，$f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数，则 a 的取值范围是 __________ .

专题4：函数的极值问题

1. 若函数$f(x)=\mathrm{e}^x(x-3)-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$只有一个极值点，则$k$的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,\mathrm{e})$　B. $[0,\mathrm{e}]\cup\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right\}$　C. $(-\infty,2)$　D. $(0,2]$

2. 已知函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-k\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)$，若$x=1$是函的$f(x)$的唯一一个极值点，则实数$k$的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,\mathrm{e}]$　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{0\}$　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{0,\mathrm{e}\}$

3. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x(x^2-4x-4)+\frac{1}{2}k(x^2+4x)$，$x=-2$是$f(x)$的唯一极小值点，则实数$k$的取值范围为 ( )

A. $[-\mathrm{e}^2,+\infty)$　B. $[-\mathrm{e}^3,+\infty)$　C. $[\mathrm{e}^2,+\infty)$　D. $[\mathrm{e}^3,+\infty)$

4. 已知函数$f(x)=x^2-2x+a\ln x$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，则 ( )

A. $f(x_1)<\frac{3+2\ln2}{4}$　B. $f(x_1)<-\frac{1+2\ln2}{4}$

C. $f(x_1)>\frac{1+2\ln2}{4}$　D. $f(x_1)>-\frac{3+2\ln2}{4}$

5. 已知函数$f(x)=x^2-2x+1+a\ln x$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，则 ( )

A. $f(x_2)<-\frac{1+2\ln2}{4}$　B. $f(x_2)<\frac{1-2\ln2}{4}$

C. $f(x_2)>\frac{1+2\ln2}{4}$　D. $f(x_2)>\frac{1-2\ln2}{4}$

6. 已知t为常数，函数$f(x)=(x-1)^2+t\ln x$有两个极值点a、$b(a<b)$，则 ( )

A. $f(b)>\frac{1-2\ln2}{4}$　B. $f(b)<\frac{1-2\ln2}{4}$　C. $f(b)>\frac{1+2\ln2}{4}$　D. $f(b)<\frac{1-3\ln2}{4}$

7. 若函数$y=ae^x+3x$在R上有小于零的极值点，则实数a的取值范围是 ( )

A. $(-3,+\infty)$　B. $(-\infty,-3)$　C. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

8. 若函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-b$在R上有小于0的极值点，则实数a的取值范围是 ( )

A. $(-1,0)$　B. $(0,1)$　C. $(-\infty,-1)$　D. $(1,+\infty)$

9. 已知函数$f(x)=x\ln x-ax^2$有两个极值点，则实数a的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,0)$　B. $(0,+\infty)$　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　D. $(0,1)$

10. 已知函数$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}ax^2-x+3a^3-4a^2-a+2(a\in R)$存在两个极值点．则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $(0,+\infty)$　B. $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　C. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　D. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$

11. 若函数$f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-4ax)$存在两个极值点，则实数$a$的取值范围为 ( )

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(0,1)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(1,+\infty)$

12. 若函数 $f(x)=\frac{ax^2}{2}-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有极大值，则 a 的取值范围是　(　　)

A. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

13. 已知 $f(x)=\frac{a}{2}x^2-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $(3,4)$ 有极小值，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(4^{-1},3^{-1})$　　B. $(3,4)$　　C. $(3^{-1},4)$　　D. $(4^{-1},3)$

14. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+(4a+2)x-a(a+2)\ln x$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则 a 的取值范围是

(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(-2,0)\cup(0,1)$

C. $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　D. $(-2,1)$

15. 已知函数 $f(x)$，对 $\forall a,b,c\in R$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为一个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为"三角形函数"，已知函数 $f(x)=m\cos^2x+m\sin x+3$ 是"三角形函数"，则实数 m 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\frac{6}{7},\frac{12}{13}\right)$　　B. $\left[-2,\frac{12}{13}\right]$　　C. $\left[0,\frac{12}{13}\right]$　　D. $(-2,2)$

16. 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=(x-2a)(x^2+a^2x+2a^3)$ 的极小值点，则实数 a 的取值范围是__________.

17. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{k}{2}x^2+kx(k>0)$ 的极小值点，则实数 k 的取值范围是__________.

18. 若函数 $f(x)$ 在区间 A 上，对 $\forall a,b,c\in A$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为一个三角形的三边长，则称函数 $f(x)$ 为"三角形函数". 已知函数 $f(x)=x\ln x+m$ 在区间 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}\right]$ 上是"三角形函数"，则实数 m 的取值范围为__________.

专题5:函数的最值

1. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x-3}$,$g(x)=\frac{1}{2}+\ln\frac{x}{2}$,若$f(m)=g(n)$成立,则$n-m$的最小值为 ( )

A. $1+\ln2$　　B. $\ln2$　　C. $2\ln2$　　D. $\ln2-1$

2. 已知函数$f(x)=x+\ln(x-1)$,$g(x)=x\ln x$,若$f(x_1)=1+2\ln t$,$g(x_2)=t^2$,则$(x_1x_2-x_2)\ln t$的最小值为 ( ).

A. $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$　　B. $\frac{2}{\mathrm{e}}$　　C. $-\frac{1}{2\mathrm{e}}$　　D. $-\frac{1}{\mathrm{e}}$

3. 若对任意$x\in(0,+\infty)$,不等式$2\mathrm{e}^{2x}-a\ln a-a\ln x\geqslant 0$恒成立,则实数$a$的最大值为 ( )

A. $\sqrt{\mathrm{e}}$　　B. e　　C. $2\mathrm{e}$　　D. e^2

4. 已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$g(x)=xe^{-x}$,若存在$x_1\in(0,+\infty)$,$x_2\in R$,使得$f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$成立,则$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3\mathrm{e}^k$的最小值为 ( )

A. $-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$　　B. $-\frac{4}{\mathrm{e}^2}$　　C. $-\frac{9}{\mathrm{e}^3}$　　D. $-\frac{27}{\mathrm{e}^3}$

5. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x<0\\ \mathrm{e}^{2x}, & x\geqslant 0\end{cases}$,若关于$x$的方程$f(x)-a=0(a\in R)$恰有两个不等实根$x_1$,$x_2$,且$x_1<x_2$,则$\mathrm{e}^{x_2-x_1}$的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2}+\sqrt{\mathrm{e}}$　　C. $\sqrt{2}\mathrm{e}$　　D. $\sqrt{2\mathrm{e}}$

6. 已知函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-ax+\ln x$

(1)$a=1$时,求函数$f(x)$的极值;

(2)若$a\in\left[1,\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{2}\right]$,求$f(x)$的最小值$g(a)$的取值范围.

7. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-x+\frac{t}{2}x^2(t\in R$,e为自然对数的底数),且$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为e,函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b(a\in R,b\in R)$.

(1)求$f(x)$的单调区间和极值;

(2)若$f(x)\geqslant g(x)$,求$\frac{b(a+1)}{2}$的最大值.

8. 已知函数$f(x)=x-a\ln x+1(a\in R)$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性;

(2)当$1<a<\mathrm{e}$时,记函数$f(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$的最大值为M.最小值为m,求$M-m$的取值范围.

9. 已知函数$f(x)=x^2-ax+2\ln x(a\in R)$两个极值$x_1,x_2(x_1<x_2)$点.

(1)当$a=5$时,求$f(x_2)-f(x_1)$;

(2)当$a\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$时,求$f(x_2)-f(x_1)$的最大值.

10. 已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+a$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 对任意的 $x>0$，不等式 $f(x)\leqslant \mathrm{e}^{x}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

11. 已知函数 $f(x)=xe^{x}$(其中 e 为自然对数的底数)．

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 求证：$f(x)>\mathrm{e}^{x}+\ln x-\dfrac{1}{2}$.

12. 已知函数 $f(x)=ax^{2}-x+(1+b)\ln x(a、b\in R)$.

(1) 当 $a=1$，$b=-4$ 时，求 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $b=-2$，$x\geqslant 1$ 时，求 $g(x)=|f(x)|$ 的最小值．

13. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+a)^{2}+b\ln x$，$a,b\in R$.

(1) 若直线 $y=ax$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 $a^{2}b$ 的最大值；

(2) 设 $b=1$，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$，求 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}$ 的取值范围．

14. 已知函数 $f(x)=ae^{x}-x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值．

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^{3}-x^{2}+x$.

(1) 当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

(2) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in R)$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值．

专题6：三次函数

1. 已知$f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$在$x=-1$时有极值0，则$a-b=$ (　　)

A. -7　　B. -2　　C. -7和-2　　D. 以上答案都不对

2. 已知函数$f(x)=x^3-3x^2+5$，$g(x)=m(x+1)\,(m\in R)$，若存在唯一的正整数x_0，使得$f(x_0)<g(x_0)$，则实数m的取值范围是 (　　)

A. $\left[0,\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

3. 设函数$f(x)=x^3-3x^2-ax+5-a$，若存在唯一的正整数x_0，使得$f(x_0)<0$，则a的取值范围是 (　　)

A. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$

4. 已知函数$f(x)=-x^3+ax^2-x-1$在$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，则实数a的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　　B. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

C. $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

5. 若函数$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$在区间$\left(\frac{1}{2},3\right)$上有极值点，则实数$a$的取值范围是 (　　)

A. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　B. $\left[2,\frac{5}{2}\right)$　　C. $\left(2,\frac{10}{3}\right)$　　D. $\left[2,\frac{10}{3}\right)$

6. 若$f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$在$x=1$处取得极大值10，则$\frac{b}{a}$的值为 (　　)

A. $-\frac{3}{2}$或$-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$或$\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

7. 如果函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$在区间$(1,4)$上为减函数，在$(6,+\infty)$上为增函数，则实数$a$的取值范围是 (　　)

A. $a\leqslant 5$　　B. $5\leqslant a\leqslant 7$　　C. $a\geqslant 7$　　D. $a\leqslant 5$或$a\geqslant 7$

8. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$在区间$\left(\frac{1}{2},3\right)$上既有极大值又有极小值，则实数$a$的取值范围是 (　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　D. $\left(2,\frac{10}{3}\right)$

9. 已知函数$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x(a\geqslant 0)$在区间$(0,1)$上不是单调函数，则实数$a$的取值范围是 (　　)

A. $(0,2)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

10. 函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+2(m-1)x$在$(0,4)$上无极值，则$m=$______.

11. 设函数$f(x)=x^3+(1+a)x^2+ax$有两个不同的极值点x_1，x_2，且对不等式$f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$恒成立，则实数a的取值范围是__________.

12. 若函数$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$在区间$\left[\frac{1}{2},3\right]$上单调递减，则实数$a$的取值范围是__________.

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{2}{3}$ 在区间 $(a,a+5)$ 上存在最小值，则实数 a 的取值范围是 __________ .

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax+1$，$a\in R$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内是减函数，则实数 a 的取值范围是 ______ .

专题7：零点问题

1. 设函数$f(x)=x^2-2ex-\dfrac{\ln x}{x}+a$(其中e为自然对数的底数，若函数$f(x)$至少存在一个零点，则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $\left(0,e^2-\dfrac{1}{e}\right]$　B. $\left(0,e^2+\dfrac{1}{e}\right]$　C. $\left[e^2-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$　D. $\left(-\infty,e^2+\dfrac{1}{e}\right]$

2. 设函数$f(x)=x^3-2ex^2+mx-\ln x$，记$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，若函数$g(x)$至少存在一个零点，则实数m的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\ e^2+\dfrac{1}{e}\right]$　B. $\left(0,\ e^2+\dfrac{1}{e}\right]$　C. $\left(e^2+\dfrac{1}{e},\ +\infty\right]$　D. $\left(-e^2-\dfrac{1}{e},\ e^2+\dfrac{1}{e}\right]$

3. 已知函数$f(x)=\dfrac{me^x}{2}$与函数$g(x)=-2x^2-x+1$的图象有两个不同的交点，则实数m取值范围为 ( )

A. $[0,1)$　B. $[0,2)\cup\left\{-\dfrac{18}{e^2}\right\}$　C. $(0,2)\cup\left\{-\dfrac{18}{e^2}\right\}$　D. $[0,2\sqrt{e})\cup\left\{-\dfrac{18}{e^2}\right\}$

4. 已知函数$f(x)$的定义域为R，且对任意$x\in R$都满足$f(1+x)=f(1-x)$，当$x\leqslant 1$时，$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant 1\\ e^x, & x\leqslant 0\end{cases}$.(其中e为自然对数的底数)，若函数$g(x)=m|x|-2$与$y=f(x)$的图象恰有两个交点，则实数$m$的取值范围是 ( )

A. $m\leqslant 0$或$m=e$　B. $0<m\leqslant\dfrac{3}{2}$　C. $\dfrac{3}{2}<m<e$　D. $m>e$

5. 定义：如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上存在$x_1,x_2(a<x_1<x_2<b)$，满足$f'(x_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的一个双中值函数，已知函数$f(x)=x^3-\dfrac{6}{5}x^2$是区间$[0,t]$上的双中值函数，则实数$t$的取值范围是 ( )

A. $\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　B. $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　C. $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right)$　D. $\left(1,\dfrac{6}{5}\right)$

6. 定义：如果函数$y=f(x)$在定义域内给定区间$[a,b]$上存在$(a<x_0<b)$，满足$f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数$y=f(x)$是$[a,b]$上的“平均值函数”，$x_0$是它的一个均值点．则下列叙述正确的个数是 ( )

①$y=x^2$是区间$[-1,1]$上的平均值函数，0是它的均值点；

②函数$f(x)=-x^2+4x$在区间$[0,9]$上是平均值函数，它的均值点是5；

③函数$f(x)=\log_2 x$在区间$[a,b]$(其中$b>a>0$)上都是平均值函数；

④若函数$f(x)=-x^2+mx+1$是区间$[-1,1]$上的平均值函数，则实数m的取值范围是$(0,2)$

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

7. 若存在正实数m，使得关于x的方程$x+a(2x+2m-4ex)[\ln(x+m)-\ln x]=0$有两个不同的根，其中e为自然对数的底数，则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)$　B. $\left(0,\dfrac{1}{2e}\right)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

8. 已知函数 $u(x)=(2\mathrm{e}-1)x-m$，$v(x)=\ln(x+m)-\ln x$ 若存在 m，使得关于 x 的方程 $2a\cdot u(x)\cdot v(x)=x$ 有解，其中 e 为自然对数的底数则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $\left(0,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$　　D. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

9. 若关于 x 的方程 $\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<0<x_2<x_3$，其中 $m\in R$，e 为自然对数的底数，则 $\left(\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}+1\right)^2\left(\frac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}+1\right)\left(\frac{x_3}{\mathrm{e}^{x_3}}+1\right)$ 的值为　（　　）

A. $1+m$　　B. e　　C. $m-1$　　D. 1

10. 若关于 x 的方程 $|\mathrm{e}^x-1|+\frac{2}{|\mathrm{e}^x-1|+1}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1、x_2、x_3，$(x_1<0<x_2<x_3)$ 其中 $m\in R$，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$，则 $(|\mathrm{e}^{x_1}-1|+1)\cdot(|\mathrm{e}^{x_2}-1|+1)\cdot(|\mathrm{e}^{x_3}-1|+1)^2$ 的值为　（　　）

A. e　　B. 4　　C. $m-1$　　D. $m+1$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ -x^2+2x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}x+m$ 恰有三个不相等的实数解，则 m 的取值范围是　（　　）

A. $\left[0,\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[0,\frac{9}{16}\right]$　　D. $\left(0,\frac{9}{16}\right)$

12. 已知函数 $f(x)=(3x+1)\mathrm{e}^{x+1}+mx(m\geqslant -4\mathrm{e})$，若有且仅有两个整数使得 $f(x)\leqslant 0$，则实数 m 的取值范围是　（　　）

A. $\left(\frac{5}{\mathrm{e}},2\right]$　　B. $\left[-\frac{5}{2\mathrm{e}},-\frac{8}{3\mathrm{e}^2}\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{8}{3\mathrm{e}^2}\right)$　　D. $\left[-4\mathrm{e},-\frac{5}{2\mathrm{e}}\right)$

13. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+a}$，$a$ 是常数，且 $a\geqslant 1$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 零点的个数；

(Ⅱ) 证明：$\frac{2}{2n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{3}{3n+1}$，$n\in N^+$.

14. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .

15. 已知函数 $f(x)=(ex-\mathrm{e})\mathrm{e}^x+ax^2$，$a\in R$.

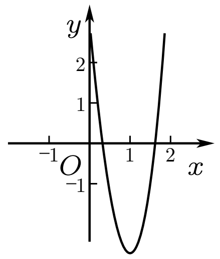
(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

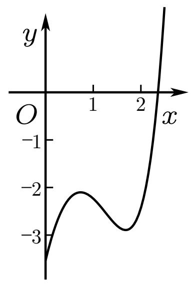
(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .

16. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .





17. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}[ax^{2}+(a-2)]-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点,求 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x)=x^{3}+ax+\dfrac{1}{4}$, $g(x)=-\ln x$

(i) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(ii) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值,设函数 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\}\ (x>0)$,讨论 $h(x)$ 零点的个数.

19. 已知函数 $f(x)=-x^{2}+a-\dfrac{1}{4x}(a\in R)$,$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线,

(2) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值,设函数 $h(x)=\max\{xf(x), xg(x)\}\ (x>0)$,当 $0<a<3$ 时,讨论 $h(x)$ 零点的个数.

20. 已知函数 $f(x)=-x^{2}+a-\dfrac{1}{4x}$.

(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(2) 设函数 $g(x)=xf(x)$,讨论 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上零点的个数.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x^{2}-1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-\sin x$,若 $h(x)=g(x)\,(f(x)-2x)$ 且 $y=h(x)$ 有两个零点,求 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln(x+1)+\ln a-1$.

(1) 若 $a=1$,求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点,求 a 的取值范围.

专题8：恒成立与存在性问题

1. 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

2. 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在两个整数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 都小于 0，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{5}{3e^2},\frac{3}{2e}\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{2e}\right)$　　C. $\left[\frac{5}{3e^2},1\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

3. 已知函数 $f(x)=(x^2-a)\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$　　B. $(-1,0)$　　C. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $(-1,+\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=x\left(a-\frac{1}{e^x}\right)$，曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-e^2,+\infty)$　　B. $(-e^2,0)$　　C. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

5. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2(a>0)$，若对任意两个不等的正实数 x_1，x_2 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geqslant 2$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,1)$

6. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2$，若对任意两个不等的正实数 x_1，x_2 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

7. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$，若对 $\forall p,q\in(0,1)$，且 $p\neq q$，有 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,18)$　　B. $(-\infty,18]$　　C. $[18,+\infty)$　　D. $(18,+\infty)$

8. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2$，在区间 $(0,1)$ 内任取两个数 p，q，且 $p\neq q$，不等式 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[8,+\infty)$　　B. $(3,8]$　　C. $[15,+\infty)$　　D. $[8,15]$

9. 设函数 $f(x)=e^x(x^3-3x+3)-ae^x-x(x\geqslant -2)$，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 有解，则实数 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{e}-1$　　B. $2-\frac{2}{e}$　　C. $1-\frac{1}{e}$　　D. $1+2e^2$

10. 设函数 $f(x)=x(\ln x)^3-(3x+1)\ln x+(3-a)x$，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 有解，则实数 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{e}-1$　　B. $2-\frac{2}{e}$　　C. $1+2e^2$　　D. $1-\frac{1}{e}$

11. 设函数 $f(x)=e^x\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2\right)-2ae^x-x$，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有解，则实数 a 的最小值为 (　　)

A. $-\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$　　B. $-\frac{3}{2}-\frac{2}{e}$　　C. $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2e}$　　D. $-1-\frac{1}{e}$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+(x-b)^2}{x}(b\in R)$，若存在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得 $f(x)>-x\cdot f'(x)$，则实数 b 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-\sqrt{2})$　　B. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right)$　　D. $(-\infty,3)$

13. 已知 $f(x)=xe^x$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若存在 $x_1,x_2\in R$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　C. $(0,e)$　　D. $\left[-\frac{1}{e},0\right)$

14. 设过曲线 $g(x)=ax+2\cos x$ 上任意一点处的切线为 l_1，总存在过曲线 $f(x)=-e^x-x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1 /\!/ l_2$，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty]$　　C. $(-\infty,-3]$　　D. $(-\infty,-3)$

15. 设函数 $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$，$g(x)=xe^x$，若对任意 $x_1,x_2\in(0,e]$，不等式 $\frac{g(x_1)}{k+1}\leqslant\frac{f(x_2)}{k}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围为 (　　)

A. $\left(\frac{4}{e^{e+1}},\frac{1}{e}\right]$　　B. $(e,4]$　　C. $\left(0,\frac{e^{e+1}}{4-e}\right]$　　D. $\left(0,\frac{4}{e^{e+1}-4}\right]$

16. 设 e 表示自然对数的底数，函数 $f(x)=\frac{(e^x-a)^2}{4}+(x-a)^2(a\in R)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{5}$ 有解，则实数 a 的值为 ______.

17. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2+x$，若对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}<1$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ______.

18. (1) 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是 ______.

(2) 已知 $f(x)=xe^x$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若 $\exists\, x_1,x_2\in R$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，则实数 a 的取值范围 ______.

19. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $c^2x^2-(cx+1)\ln x+cx\geqslant 0$ 恒成立，则实数 c 的取值范围是 ______.

20. 若关于 x 的不等式 $(ax+1)(e^x-aex)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______.

21. 关于 x 的不等式 $(ax-1)(\ln x+ax)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______.

22. 已知关于 x 的不等式 $ax^3+x^2+x\leqslant\ln x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______.

23. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a<0)$，$g(x)=\frac{4}{x}$，若对任意 $x_1,x_2\in(0,1]$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|g(x_1)$

$-g(x_2)|$ 成立,则实数 a 的取值范围为 ________.

24. 若 $f(x)=x-1-a\ln x$, $g(x)=\dfrac{ex}{e^x}$, $a<0$,且对任意 x_1, $x_2\in[3,4]$ $(x_1\neq x_2)$, $|f(x_1)-f(x_2)|<\left|\dfrac{1}{g(x_1)}-\dfrac{1}{g(x_2)}\right|$ 的恒成立,则实数 a 的取值范围为 ________.

25. 设过曲线 $f(x)=-e^x-x+3a$ 上任意一点处的切线为 l_1,总存在过曲线 $g(x)=(x-1)a+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2,使得 $l_1\perp l_2$,则实数 a 的取值范围为 ________.

26. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^2x^2+1}{x}$,$g(x)=\dfrac{e^2x}{e^x}$,对任意 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$,不等式 $\dfrac{f(x_1)}{k+1}\geqslant\dfrac{g(x_2)}{k}$,恒成立,则正数 k 的取值范围是 ________.

27. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a\in R)$, $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$,当 $a<0$ 时,且对任意的 x_1, $x_2\in[4,5]$ $(x_1\neq x_2)$, $|f(x_1)-f(x_2)|<|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 ________.

专题 9：构造函数解不等式

1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ $(x\in R)$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

2. 函数 $f(x)$ 的定义域是 R，$f(0)=2$，对任意 $x\in R$，$f(x)+f'(x)<1$，则不等式 $e^xf(x)>e^x+1$ 的解集为（　　）

A. $\{x|x>0\}$

B. $\{x|x<0\}$

C. $\{x|x<-1$，或 $x>1\}$

D. $\{x|x<-1$，或 $0<x<1\}$

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>x-1$，则不等式 $f(x)<\frac{1}{2}x^2-x+1$ 的解集为（　　）

A. $\{x|-2<x<2\}$　　B. $\{x|x>2\}$　　C. $\{x|x<2\}$　　D. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

4. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,e^4)$　　D. $(e^4,+\infty)$

5. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)=f(x-2)$，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为 ( )

A. $(0,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $(-2,+\infty)$

6. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$（e 为自然对数的底数）的解集为（　　）

A. $(0,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

D. $(3,+\infty)$

7. 已知函数 $f(x)$ 对定义域 R 内的任意 x 都有 $f(x)=f(4-x)$，且当 $x\neq 2$ 时其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)>2f'(x)$ 若 $2<a<4$ 则（　　）

A. $f(2^a)<f(3)<f(\log_2 a)$

B. $f(\log_2 a)<f(3)<f(2^a)<f(3)<f(2^a)$

C. $f(3)<f(\log_2 a)<f(2^a)$

D. $f(\log_2^a)<f(2^a)<f(3)$

8. 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式不成立的是（　　）

A. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

B. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(0)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D. $f(0)<2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

9. 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是（　　）

A. $2f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f(0)$　　B. $f(0)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $f(-1)>f(1)$　　D. $f(1)>f(0)\cos 1$

10. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对 $\forall x\in R$，都有 $2f'(x)>f(x)$ 成立，若 $f(\ln 4)=2$，则不等式 $f(x)>e^{\frac{x}{2}}$ 的解是 ( )

A. $x>1$　　B. $0<x<1$　　C. $x>\ln 4$　　D. $0<x<\ln 4$

11. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，对 $\forall x\in R$，都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，若 $f(2)=e^2$，则不等式 $f(x)>e^x$ 的解是 ( )

A. $(2,+\infty)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,\ln 2)$

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(2)=0$，当 $x>0$ 时，有 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集是 ( )

A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

13. 已知一函数满足 $x>0$ 时，有 $g'(x)=2x^2>\dfrac{g(x)}{x}$，则下列结论一定成立的是 ( )

A. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\leqslant 3$　　B. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\geqslant 2$　　C. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)<4$　　D. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\geqslant 4$

14. 定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 使不等式 $2f(x)<xf'(x)<3f(x)$ 恒成立，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则 ( )

A. $8<\dfrac{f(2)}{f(1)}<16$　　B. $4<\dfrac{f(2)}{f(1)}<8$　　C. $3<\dfrac{f(2)}{f(1)}<4$　　D. $2<\dfrac{f(2)}{f(1)}<3$

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图象关于 y 轴对称，且当 $x<0$ 时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ 恒成立，设 $a>1$，则 $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}$，$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})$，$(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$ 的大小关系为 ( )

A. $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

B. $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

C. $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

D. $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

16. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $xf'(x)<2f(x)$ 成立，则 ( )

A. $2f(\sqrt{3})>3f(\sqrt{2})$　　B. $2f(1)<3f(\sqrt{2})$　　C. $4f(\sqrt{3})<3f(2)$　　D. $4f(1)>f(2)$

17. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)<xf'(x)<2f(x)-x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则下列不等式中，一定成立的是 ( )

A. $\dfrac{f(2)}{3}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{f(2)}{2}$　　B. $\dfrac{f(2)}{4}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{f(2)}{2}$

C. $\dfrac{3f(2)}{8}<f(1)<\dfrac{f(2)}{3}+\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{f(2)}{4}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{3f(2)}{8}$

18. 若 $a=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{4}}$，$b=\left(\dfrac{7}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$，$c=\log_2\dfrac{7}{8}$，定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$ 且 x_1

$\neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的大小顺序为 ( )

A. $f(b)<f(a)<f(c)$ B. $f(c)>f(b)>f(a)$ C. $f(c)>f(a)>f(b)$ D. $f(b)>f(c)>f(a)$

19. 设定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足，对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<1$，且 $f(3)=3$，则不等式 $\dfrac{f(x)}{x}>1$ 的解集为 ( )

A. $(-3,0)\cup(0,3)$
B. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$
C. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$
D. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

20. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且有 $3f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $(x+2015)^3f(x+2015)+27f(-3)>0$ 的解集是 ______.

21. 设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$，$\forall x\in R$，有 $f(-x)+f(x)=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)<x$，若 $f(4-m)-f(m)\geqslant 8-4m$，则实数 m 的取值范围是 ______.

22. 已知定义在 R 上函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)<-2$，则不等式 $f(\ln x)>5-2\ln x$ 的解集为 ______.

23. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)<1$，$f(0)=4$，则不等式 $e^x[f(x)-1]>3$(e 为自然对数的底数)的解集为 ______.

24. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)>1-f'(x)$，$f(0)=0$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则不等式 $e^xf(x)>e^x-1$(其中 e 为自然对数的底数)的解集为 ______.

25. 函数 $f(x)$，$g(x)$ $(g(x)\neq 0)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，$f(-3)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集为 ______

26. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(-1)=0$，若不等式 $\dfrac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 对区间 $(-\infty,0)$ 内任意两个不相等的实数 x_1，x_2 都成立，则不等式 $xf(2x)<0$ 解集是 ______.

专题10:有关距离问题

1. 设点P在曲线$y=\frac{1}{2}e^x$上,点Q在曲线$y=\ln(2x)$上,则$|PQ|$最小值为 ( )

A. $1-\ln2$ B. $\sqrt{2}(1-\ln2)$ C. $1+\ln2$ D. $\sqrt{2}(1+\ln2)$

2. 设点P在曲线$y=e^{2x}$上,点Q在曲线$y=\frac{1}{2}\ln x$上,则$|PQ|$的最小值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)$ B. $\sqrt{2}(1-\ln2)$ C. $\sqrt{2}(1+\ln2)$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\ln2)$

3. 设点P在曲线$y=x$上,点Q在曲线$y=\ln(2x)$上,则$|PQ|$的最小值为 ( )

A. $\frac{1-\ln2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)$ C. $\frac{1+\ln2}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}(1+\ln2)}{2}$

4. 设动直线$x=m$与函数$f(x)=x^3$,$g(x)=\ln x$的图象分别交于点M、N,则$|MN|$的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{3}(1+\ln3)$ B. $\frac{1}{3}\ln3$ C. $\frac{1}{3}(1-\ln3)$ D. $\ln3-1$

5. 设动直线$x=m$与函数$f(x)=e^x$,$g(x)=\ln x$的图象分别交于点M,N,则$|MN|$最小值的区间为 ( )

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$ B. $(1,2)$ C. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ D. $\left(\frac{5}{2},3\right)$

6. 已知直线$y=a$分别与函数$y=e^{x+1}$和$y=\sqrt{x-1}$交于A,B两点,则A,B之间的最短距离是 ( )

A. $\frac{3-\ln2}{2}$ B. $\frac{5-\ln2}{2}$ C. $\frac{3+\ln2}{2}$ D. $\frac{5+\ln2}{2}$

7. 若实数a,b,c,d满足$|b+a^2-4\ln a|+|2c-d+2|=0$,则$(a-c)^2+(b-d)^2$的最小值为 ( )

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{2}x-1, & x>0\end{cases}$,若$m<n$且$f(m)=f(n)$,则$n-m$的最小值为 ( )

A. $2\ln2-1$ B. $2-\ln2$ C. $1+\ln2$ D. 2

9. 已知函数$f(x)=x^3+\sin x$,$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & x<0\\ \ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$,若关于$x$的方程$f(g(x))+m=0$有两个不等实根$x_1$,$x_2$,且$x_1<x_2$,则$x_2-x_1$的最小值是 ( )

A. 2 B. $3-\ln2$ C. $4-2\ln2$ D. $3-2\ln2$

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+1, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}$,若$x_1<x_2$且$f(x_1)=f(x_2)$,则$x_2-x_1$的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{2}{3},\ln2\right]$ B. $\left(\frac{2}{3},\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right]$ C. $\left[\ln2,\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right]$ D. $\left(\ln2,\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)$

11. 已知点M在曲线$y=3\ln x-x^2$上,点N在直线$x-y+2=0$上,则$|MN|$的最小值为__________.

12. 已知直线$y=b$与函数$f(x)=2x+3$和$g(x)=ax+\ln x$分别交于A,B两点,若AB的最小值为2,则$a+b=$__________.

13. 若实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{2a^2-\ln a}{b}=\dfrac{3c-2}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ________.

14. 若实数 a、b、c、d 满足 $\dfrac{a^2-2\ln a}{b}=\dfrac{3c-4}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ______.

15. 已知实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{a-2e^a}{b}=\dfrac{1-c}{d-1}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ________.

专题11:参数的值或范围问题

1. 已知函数$f(x)=x-\ln x$,$g(x)=x^2-ax$.

(1) 求函数$f(x)$在区间$[t,t+1]$ $(t>0)$上的最小值$m(t)$;

(2) 令$h(x)=g(x)-f(x)$,$A(x_1,h(x_1))$,$B(x_2,h(x_2))$ $(x_1\neq x_2)$是函数$h(x)$图象上任意两点,且满足$\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$,求实数$a$的取值范围;

(3) 若$\exists x\in(0,1]$,使$f(x)\geqslant\dfrac{a-g(x)}{x}$成立,求实数$a$的最大值.

2. 已知函数$f(x)=x\ln x$,$g(x)=-x^2+ax-3$.

(Ⅰ) 求$f(x)$在$[t,t+2]$ $(t>0)$上的最小值;

(Ⅱ) 若存在$x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$(e是常数,$\mathrm{e}=2.71828\cdots$)使不等式$2f(x)\geqslant g(x)$成立,求实数$a$的取值范围;

(Ⅲ) 证明对一切$x\in(0,+\infty)$都有$\ln x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{2}{ex}$成立.

3. 已知函数$f(x)=x\ln x$,$g(x)=-x^2+ax-2$

(Ⅰ) 求函数$f(x)$在$[t,t+2]$ $(t>0)$上的最小值;

(Ⅱ) 若函数$y=f(x)+g(x)$有两个不同的极值点x_1,$x_2(x_1<x_2)$且$x_2-x_1>\ln 2$,求实数a的取值范围.

4. 已知函数$f(x)=\ln x$,$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-bx+1$($b$为常数).

(1) 函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线与函数$g(x)$的图象相切,求实数b的值;

(2) 若$b=0$,$h(x)=f(x)-g(x)$,$\exists x_1$、$x_2[1,2]$使得$h(x_1)-h(x_2)\geqslant M$成立,求满足上述条件的最大整数M;

(3) 当$b\geqslant 2$时,若对于区间$[1,2]$内的任意两个不相等的实数x_1,x_2,都有$|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$成立,求$b$的取值范围.

5. 设函数$f(x)=ax^2-a-\ln x$,$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$,其中$a\in R$,$\mathrm{e}=2.718^{\cdots}$为自然对数的底数.

(1) 讨论$f(x)$的单调性;

(2) 证明:当$x>1$时,$g(x)>0$;

(3) 确定a的所有可能取值,使得$f(x)>g(x)$在区间$(1,+\infty)$内恒成立.

6. 已知函数$f(x)=x+a\ln x$在$x=1$处的切线与直线$x+2y=0$垂直.

(Ⅰ) 求实数a的值;

(Ⅱ) 函数$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-bx$,若函数$g(x)$存在单调递减区间,求实数$b$的取值范围;

(Ⅲ) 设x_1,$x_2(x_1<x_2)$是函数$g(x)$的两个极值点,若$b\geqslant\dfrac{7}{2}$,求$g(x_1)-g(x_2)$的最小值.

7. 已知函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{a+1}{2}x^2+1$

(1) 当$a=\dfrac{1}{2}$时,求$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$上的最值

(2) 讨论函数$f(x)$的单调性

(3) 当$-1<a<0$时,有$f(x)>1+\dfrac{2}{a}\ln(-a)$恒成立,求$a$的取值范围.

8. 已知函数$f(x)=ax+x\ln x$的图象在点$x=\mathrm{e}$(e为自然对数的底数)处的切线的斜率为3.

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)若 $f(x)\leqslant kx^2$ 对任意 $x>0$ 成立，求实数 k 的取值范围；

(Ⅲ)当 $n>m>1(m,n\in N^*)$ 时，证明：$\frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}}>\frac{m}{n}$.

9. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，其中 $a>0$. 设 $g(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，

(1) 求 a 的值；

(2) 对任意 $x_1>x_2>0$，$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3) 讨论方程 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)$ 在 $[1,+\infty)$ 上根的个数 .

10. 设函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

(Ⅰ)讨论：$f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围 .

专题12:分离参数法

1. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}-ae^{-x}$,若$f'(x)\geqslant 2\sqrt{3}$恒成立,则实数$a$的取值范围是__________.

2. 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$,若$f(x)<x^{2}$在$(1,+\infty)$上恒成立,则a的取值范围是__________.

3. 若对任意$x\in R$,不等式$3x^{2}-2ax\geqslant|x|-\frac{3}{4}$恒成立,则实数$a$的范围是__________.

4. 设函数$f(x)=x^{2}-1$,对任意的$x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$,$f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^{2}f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$恒成立,则实数$m$的取值范围是__________.

5. 若不等式$x^{2}+2+|x^{3}-2x|\geqslant ax$对$x\in(0,4)$恒成立,则实数$a$的取值范围是__________.

6. 设正数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2}x^{2}+1}{x}$,$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{2}x}{\mathrm{e}^{x}}$,对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,不等式$\frac{g(x_1)}{k}\leqslant\frac{f(x_2)}{k+1}$恒成立,则正数$k$的取值范围是__________.

7. 已知函数$f(x)=ax^{2}-(2a+1)x+\ln x,a\in R,g(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$,若对于任意的$x_1\in(0,+\infty)$,$x_2\in R$,不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$恒成立,求实数$a$的取值范围.

8. 若不等式$x+2\sqrt{2xy}\leqslant a(x+y)$对任意正数$x,y$恒成立,则正数$a$的最小值是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$　　D. $2\sqrt{2}+1$

9. 已知函数$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$,如果当$x\geqslant 1$时,不等式$f(x)\geqslant\frac{k}{x+1}$恒成立,求实数$k$的取值范围.

10. 已知函数$f(x)=x+x\ln x$, 若$k\in Z$, 且$k<\frac{f(x)}{x-1}$对任意$x>1$恒成立, 则k的最大值为____________.

11. 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^{2}-2x(a<0)$.

(1) 若函数$f(x)$在定义域内单调递增,求实数a的取值范围;

(2) 若$a=-\frac{1}{2}$,且关于x的方程$f(x)=-\frac{1}{2}x+b$在$[1,4]$上恰有两个不等的实根,求实数b的取值范围

12. 已知函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}+a(x-\ln x)$.(e为自然对数的底数)

(Ⅰ) 当$a>0$时,试求$f(x)$的单调区间;

(Ⅱ) 若函数$f(x)$在$x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$上有三个不同的极值点,求实数$a$的取值范围.

13. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}+ax-a$, $g(x)=2xe^{x}$.

(Ⅰ) 讨论函数$y=f(x)$的单调性;

(Ⅱ) 若不等式$f(x)>g(x)$有唯一正整数解,求实数a的取值范围.

14. 已知函数$f(x)=(x^{2}-ax-a)\mathrm{e}^{x}$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性;

(2) 若$a\in(0,2)$,对于任意$x_1,x_2\in[-4,0]$,都有$|f(x_1)-f(x_2)|<4\mathrm{e}^{-2}+me^{a}$恒成立,求$m$的取值范围.

15. 已知函数$f(x)=x-ae^{x}+b$,其中$a,b\in R$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $a=1$，$k\in R$，若存在 $b\in[0,2]$，对于任意的实数 $x\in[0,1]$，恒有 $f(x)\geqslant ke^{x}-xe^{x}-1$ 成立，求 k 的最大值；.

16. 已知函数 $f(x)=\ln x-x+a+1$. 若存在 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围 .

17. 已知函数 $f(x)=x^{2}-(a+2)x+a\ln x$，$a\in R$

(I) 若 $a=-2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(II) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的单调性；

(III) 若存在 $x\in[1,\mathrm{e}]$，使得 $f(x)\leqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围 .

专题13:数形结合法

1. 已知不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 在 $x\in(1,2)$ 上恒成立,则实数 a 的取值范围是 ________ .

2. 若不等式 $\log_a x>\sin 2x(a>0,a\neq 1)$ 对于任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 都成立,则实数 a 的取值范围是 ________ .

3. 若不等式 $x+|x-2c|>1$ 对任意 $x\in R$ 恒成立,求 c 的取值范围 ________ .

4. 若 $|p|\leqslant 2$, 不等式 $x^2+px+1>2p+x$ 恒成立, 则 x 的取值范围是 ________.

5. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$,若对任意的 $x\in[m,m+1]$,都有 $f(x)<0$ 成立,则实数 m 的取值范围是 ________.

6. 已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$,设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A,若 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是 ________.

7. 已知函数 $f(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax+\ln x$. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,不等式 $f(x)<0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ________.

8. 设 $a\in R$,若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1][x^2-ax-1]\geqslant 0$,则 $a=$ ________.

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3, & x\leqslant 0\\ -x^2-2x+3, & x>0\end{cases}$,不等式 $f(x+a)>f(2a-x)$ 在 $[a,a+1]$ 上恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,0)$ C. $(0,2)$ D. $(-2,0)$

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$,若 $\forall\, x\in R$,$f(x-1)\leqslant f(x)$,则实数 a 的取值范围是 ________.

专题14：构造函数

1. 已知函数 $f(x)=mx-\alpha\ln x-m$，$g(x)=\dfrac{ex}{e^x}$，其中 m，α 均为实数．

(1) 求 $g(x)$ 的极值；

(2) 设 $m=1$，$\alpha<0$，若对任意的 x_1，$x_2\in[3,4]\,(x_1\neq x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\dfrac{1}{g(x_2)}-\dfrac{1}{g(x_1)}\right|$ 恒成立，求 α 的最小值；

(3) 设 $\alpha=2$，若对任意给定的 $x_0\in(0,e]$，在区间 $(0,e]$ 上总存在 t_1、$t_2(t_1\neq t_2)$，使得 $f(t_1)=f(t_2)=g(x_0)$ 成立，求 m 的取值范围．

2. 已知 $f(x)=e^{2x}+\ln(x+a)$.

(1) 当 $a=1$ 时：

①求 $f(x)$ 的图象在点 (0,1) 处的切线方程；②当 $x\geqslant 0$ 时，求证：$f(x)\geqslant(x+1)^2+x$.

(2) 若存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使得 $f(x_0)<2\ln(x_0+a)+x_0^2$ 成立，求实数 a 的取值范围．

3. 已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ) 当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 设 $g(x)=f(x)-x+2a\ln x$，且 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，其中 $x_1<x_2$，若 $g(x_1)-g(x_2)>t$ 恒成立，求 t 的取值范围．

4. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$($a$ 为常数) 有两个极值点．

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1，x_2，若不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求 λ 的最小值．

5. 记 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值．如 $\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$. 已知函数 $f(x)=\max\{x^2-1,2\ln x\}$，$g(x)=\max\{x+\ln x,ax^2+x\}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的值域；

(2) 试探讨是否存在实数 a，使得 $g(x)<\dfrac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由．

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，$g(x)=a\ln x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $6x-2y-5=0$，求实数 a 的值；

(2) 设 $h(x)=f(x)+g(x)$，若对任意两个不等的正数 x_1，x_2，都有 $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

7. 已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+x$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 证明当 $a\geqslant 2$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)<\left(\dfrac{a}{2}-1\right)x^2+ax-1$ 恒成立；

(Ⅲ) 若正实数 x_1，x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$，证明 $x_1+x_2\geqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. 设 $a\in Z$，已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 (1,2) 内有一个零点 x_0，$g(x)$

为 $f(x)$ 的导函数 .

(Ⅰ) 求 $g(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 设 $m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

(Ⅲ) 求证：存在大于 0 的常数 A，使得对于任意的正整数 p，q，且 $\frac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，满足 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\frac{1}{Aq^4}$.

专题15：不等式放缩法

1. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a(x+1)\ (x\geqslant1)$，$g(x)=(x-1)\ln x$，其中 e 为自然对数的底数 .

(1) 若 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 若在 (1) 的条件下，当 a 取最大值时，求证：$f(x)\geqslant g(x)$.

2. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}$，$g(x)=x\ln x-x^{2}+(\mathrm{e}-1)x+1$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上的最小值：

(3) 证明：当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant f(x)$.

3. 已知函数 $f(x)=4\mathrm{e}^{x-1}+ax^{2}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求实数 a、b 的值；

(2)$x>0$ 且 $x\neq1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 的图象恒在切线 $y=bx+1$ 的上方；

(3) 证明不等式：$4x\mathrm{e}^{x-1}-x^{2}-3x-2\ln x\geqslant0$.

4. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1，f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上的最大值；

(3) 证明：当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^{x}+(1-\mathrm{e})x-x\ln x-1\geqslant0$.

5. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}+ax+2\ln x,a\in R$，已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 .

(1) 求实数 a 的值；

(2) 当 $x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$(其中 e 是自然对数的底数) 时，证明：$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}-x)(\mathrm{e}+x-6)+4}\geqslant x^{4}$；

(3) 证明：对任意的 $n>1$，$n\in N*$，不等式 $\ln\frac{2^{n}}{n!}<\frac{1}{12}n^{3}-\frac{5}{8}n^{2}+\frac{31}{24}n$ 恒成立 .

专题16：卡根法专题

1. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2$，$a\in R$

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的单调区间，

(Ⅱ)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant(a-1)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-x$，$g(x)=\ln x$.

(Ⅰ)求函数 $y=xg(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ)若 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，求 $y=f[xg(x)+t]$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值(结果用 t 表示)；

(Ⅲ)关于 x 的不等式 $g(x)-\frac{a}{2}f(x)\leqslant\left(\frac{3}{2}a-1\right)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+bx$，曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$.

(1)求实数 a，b 的值；

(2)如果不等式 $f'(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 恒成立，求整数 k 的最大值.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+x\ln x$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $3x-y-2=0$.

(Ⅰ)求实数 a、b 的值；

(Ⅱ)设 $g(x)=x^2-x$，若 $k\in Z$，且 $k(x-2)<f(x)-g(x)$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，求 k 的最大值.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$h(x)=ax(a\in R)$.

(Ⅰ)函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象无公共点，试求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ)是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f(x)+\frac{m}{x}$ 的图象在 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的图象的下方？若存在，请求出最大整数 m 的值；若不存在，请说理由.

(参考数据：$\ln2=0.6931$，$\ln3=1.0986$，$\sqrt{\mathrm{e}}=1.6487$，$\sqrt{[3]}\mathrm{e}=1.3956$).

6. 已知函数 $f(x)=\ln x+(1-a)x^3+bx$，$g(x)=xe^x-b(a,b\in R$，e为自然对数的底数)，且 $f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程为 $y=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right)x$

(Ⅰ)求实数 a，b 的值；

(Ⅱ)求证：$f(x)\leqslant g(x)$

7. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$h(x)=ax(a\in R)$.

(1)函数 $f(x)$ 的图象与 $h(x)$ 的图象无公共点，求实数 a 的取值范围；

(2)是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f(x)+\frac{m}{x}$ 的图象在 $g(x)=\frac{ex}{x}$ 的图象的下方？若存在，求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由.$\left(\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\ln2\approx1.99\right)$

专题17：数列不等式

1. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=-\frac{a}{2}x^2-x$，(其中 $a\in R$，e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$).

(1) 令 $h(x)=f(x)+g'(x)$，若 $h(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 a 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n<m$，求 m 的最小值 .

2. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，求 m 的最小值 .

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+a$(其中 $a\in R$，e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$).

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 设 t 为整数，对于任意正整数 n，$\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n<t$，求 t 的最小值 .

4. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-ax+2$.

(1) 当 $a=1$ 时，求在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 在定义域上具有单调性，求实数 a 的取值范围；

(3) 求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\ln(n+1)$，$n\in N^*$.

5. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x,g(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+2}(a\in R)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值；

(2) 若对 $\forall x>0$，$f(x)+g(x)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\ln(n+1)\ (n\in N^*)$.

6. 已知函数 $f(x)=a(x^2-1)-\ln x$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>\frac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}$.

7. 已知函数 $f(x)=a(x^2-x)-\ln x(a\in R)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极值，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>\frac{n-1}{n}$.

8. 已知函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\frac{2x}{x+2}(a>0)$.

(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，试比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 $f(0)$ 的大小；

(3) 证明：$\mathrm{e}^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!\ (n\geqslant 2,n\in N)$.

9. 已知函数 $f(x)=(a-1)\ln(\mathrm{e}^x+a^2-a-2)$（$a$ 为常数）是实数集 R 上的增函数，对任意的 $x\in R$，有 $f(x)+f(-x)=0$，函数，函数 $g(x)=\ln[f(x)+1]$.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 若对任意的 $x>0$，$g(x)<px$ 恒成立，求实数 p 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\in N^*$ 时，$g(n)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+b+(x\in R)$，且 $f(0)=1$.

(1) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴交于点 B，且 $A(1,f(1))$，求 $d(a)=|AB|^2$ 在 $a\in[c,+\infty)$ 的最小值；

(3) 若 $a=-\dfrac{1}{2}$，$M_n=f(1)+\dfrac{1}{2}f(2)+\dfrac{1}{3}f(3)+\cdots+\dfrac{1}{n}f(n)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$，$a_n=\dfrac{2n-1}{6M_n}(n\in N^*)$，$S_n=a_1+a_3+\cdots+a_n$，求证：$S_n<\dfrac{3}{4}$.

11. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ) 若方程 $f(x)=0$ 有两根 x_1，x_2，求 a 的取值范围；

(Ⅱ) 在(Ⅰ)的前提下，设 $x_1<x_2$，求证：$\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；

(Ⅲ) 若不等式 $f(x)\geqslant a$ 恒成立，求证：$\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<a+\dfrac{1}{\mathrm{e}-a}(n\in N^*)$.

12. 已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)$ 有 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\dfrac{1}{x}+3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设函数 $g(x)=\sqrt{f^2(x)-2x}(x>0)$，直线 $y=\sqrt{2}n-x(n\in N^*)$ 分别与函数 $y=g(x)$，$y=g^{-1}(x)$ 交于 A_n、B_n 两点 $(n\in N^*)$. 设 $a_n=|A_nB_n|$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

①求 a_n，并证明 $S_{n-1}^2=S_n^2-\dfrac{2S_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}(n\geqslant 2)$；

②求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n^2>2\left(\dfrac{S_2}{2}+\dfrac{S_3}{3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n}\right)$.

13. 已知函数 $f(x)=a\ln x-ax+1(a\in R$ 且 $a\neq 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求证：$\dfrac{\ln 2}{2}\times\dfrac{\ln 3}{3}\times\dfrac{\ln 4}{4}\times\cdots\times\dfrac{\ln n}{n}<\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

14. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1(a\in R)$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(Ⅱ) 若对一切实数 $x\in R$，都有 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(Ⅲ) 求证：$\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，$n\in N^*$.

15. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}(a\neq 0)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，求函数 $g(x)$ 在 $[m,m+1]$ $(m>0)$ 上的最小值；

(2) 若对于一切 $x\in R$，$f(x)-x-1\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值集合；

(3) 求证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(\sqrt{\mathrm{e}})^i}<\frac{4}{\mathrm{e}}$.

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(x^2+ax)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 2.

(Ⅰ) 求实数 a 的值；

(Ⅱ) 设 $g(x)=-x\left(x-t-\frac{3}{\mathrm{e}}\right)(t\in R)$，若 $g(x)\geqslant f(x)$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立，求 t 的取值范围；

(Ⅲ) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$，

求证：当 $n\geqslant 2$，$n\in N$ 时 $f\left(\frac{a_1}{n}\right)+f\left(\frac{a_2}{n}\right)+L+f\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)<n\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{2\mathrm{e}}\right)$(e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}\approx 2.71828$).

17. 已知函数 $f(x)=x^2+\ln(x-a)$，$a\in R$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 有两个不同的极值点，求 a 的取值范围；

(Ⅱ) 当 $a\leqslant -2$ 时，令 $g(a)$ 表示 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上的最大值，求 $g(a)$ 的表达式；

(Ⅲ) 求证：$\frac{3n^2+5n}{8n^2+24n+16}+\ln\sqrt{n+1}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n\in N^*$.

18. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x-1$，其中 $a>0$，

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 上的最小值；

(2) 求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant n-\ln(n!)$ $(n\in N^*)$.

专题18：极值点偏移问题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{a}-2\ln x(a\in R,a\neq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1x_2>\mathrm{e}$.

2. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 x_1，x_2，$(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

(ⅰ)$x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$；

(ⅱ)$x_2-x_1>\dfrac{2\sqrt{1-ea}}{a}$.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-3$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$

(Ⅰ) 求证：$0<a<\mathrm{e}^2$

(Ⅱ) 求证：$x_1+x_2>2a$.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}\ln x-3$ 有两个零点 x_1，x_2

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 求证：$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2a$.

5. 已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+(a-1)x+\ln x$，$a\in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(1-x)<f(1+x)$；

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，比较 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与0的大小，并证明你的结论．

6. 已知函数 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$，其中 a 为常数．

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2) 若 $g(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：无论实数 a 取什么值都有 $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}>g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{2}\ln x-1(m\in R)$ 的两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(mx)-1(m>1)$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

(Ⅰ) 求实数 m 的取值范围；

(Ⅱ) 证明：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{1}{m}$.

专题19：双变量问题

1. 已知函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+x+1(a>0)$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 是定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1，x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>5-2\ln 2$.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x(a>0)$

(1) 若 $a=1$，求 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在定义域上是单调函数，求 a 的取值范围；

(3) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>-\frac{3+2\ln 2}{4}$.

3. 设函数 $f(x)=\ln\frac{1}{a^4x}-x^2+ax(a>0)$.

(1) 若 $f(x)$ 在定义域上为单调函数，求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1，x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，求 $f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值 .

4. 已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax$($a$ 为常数).

(1) 若 $f(x)$ 是定义域上的单调函数，求 a 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $|x_1-x_2|\leqslant 1$，求 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的取值范围 .

5. 已知函数 $f(x)=x^2-1+a\ln(1-x)$，$a\in R$.

(Ⅰ) 若函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$. 证明：$\frac{f(x_1)}{x_2}>\frac{f(x_2)}{x_1}$.

6. 已知函数 $f(x)=\ln x$.

(1) 若曲线 $g(x)=f(x)+\frac{a}{x}-1$ 在点 $(2,g\ (2))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行，求实数 a 的值 .

(2) 若 $h(x)=f(x)-\frac{b(x-1)}{x+1}$ 在定义域上是增函数，求实数 b 的取值范围 .

(3) 设 m、$n\in R^*$，且 $m\neq n$，求证：$\frac{m-n}{m+n}<\left|\frac{\ln m-\ln n}{2}\right|$.

7. 已知函数 $\varphi(x)=\ln x$.

(1) 若曲线 $g(x)=\varphi(x)+\frac{a}{x}-1$ 在点 $(2,g(2))$ 处的切线与直线 $3x+y-1=0$ 平行，求 a 的值；

(2) 求证函数 $f(x)=\varphi(x)-\frac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数；

(3) 设 m，$n\in R^+$，且 $m\neq n$，求证：$\frac{m-n}{m+n}<\left|\frac{\ln m-\ln n}{2}\right|$.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $x+y+3=0$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅱ) 设 $g(x)=\ln x$，求证：$g(x)\geqslant f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立；

(Ⅲ) 已知 $0<a<b$，求证：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+mx$(m 为常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $m\leqslant -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$ 的两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 恰为 $h(x)=2\ln x-ax-x^2$ 的零点，求 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值 .

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx(m\in R)$.

(Ⅰ) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 当 $m\geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $g(x)=2f(x)+x^2$ 的两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 恰为 $h(x)=\ln x-cx^2-bx$ 的零点，求 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值 .

专题20：凹凸反转问题

1. 设函数 $f(x)=\ln x-e^{1-x}$，$g(x)=a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}$.

(1) 判断函数 $y=f(x)$ 零点的个数，并说明理由；

(2) 记 $h(x)=g(x)-f(x)+\dfrac{e^x-ex}{xe^x}$，讨论 $h(x)$ 的单调性；

(3) 若 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2. 设函数 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}$，证明 $f(x)>1$.

3. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x$.

(1) 当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $a=1$ 时，证明：$f(x)-\dfrac{1}{e^x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

4. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-\ln(x+a)$.

(Ⅰ) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(Ⅱ) 当 $a\leqslant 1$ 时，证明：$f(x)>0$.

5. 设函数 $f(x)=ae^x$，$g(x)=\ln x+b$，其中 a，$b\in R$，e是自然对数的底数.

(1) 设 $F(x)=xf(x)$，当 $a=e^{-1}$ 时，求 $F(x)$ 的最小值；

(2) 证明：当 $a=e^{-1}$，$b<1$ 时，总存在两条直线与曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都相切；

(3) 当 $a\geqslant\dfrac{2}{e^2}$ 时，证明：$f(x)>x[g(x)-b]$.

6. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2+x+1$.

(1) 当 $a=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2) 当 $a=0$ 时，证明：$xe^x\geqslant f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

专题21：与三角函数有关题

1. 已知函数$f(x)=2\sin x+\tan x-2x$.

(1) 证明：函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增；

(2) 若$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<mx^2$，求$m$的取值范围.

2. 已知函数$f(x)=\ln(e^x+a)$（a为常数，e是自然对数的底数）是实数集R上的奇函数，函数$g(x)=\lambda f(x)+\sin x$是区间$[-1,1]$上的减函数.

(Ⅰ) 求a的值；

(Ⅱ) 若$g(x)\leqslant t^2+\lambda t+1$在$x\in[-1,1]$及$\lambda$所在的取值范围上恒成立，求$t$的取值范围；

(Ⅲ) 试讨论函数$h(x)=\frac{\ln x}{f(x)}-x^2+2ex-m$的零点的个数.

3. 已知函数$f(x)=2x+ax^2+b\cos x$在点$\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$处的切线方程为$y=\frac{3\pi}{4}$.

(Ⅰ) 求a，b的值，并讨论$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的增减性；

(Ⅱ) 若$f(x_1)=f(x_2)$，且$0<x_1<x_2<\pi$，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

（参考公式：$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$）

4. 设$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$.

(Ⅰ) 求证：当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$；

(Ⅱ) 若不等式$e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$对任意的$x\geqslant 0$恒成立，求实数$a$的取值范围.

5. 已知函数$f(x)=e^x\sin x$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 如果对于任意的$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geqslant kx$恒成立，求实数$k$的取值范围；

(3) 设函数$F(x)=f(x)+e^x\cdot\cos x$，$x\in\left[-\frac{2015\pi}{2},\frac{2017\pi}{2}\right]$. 过点$M\left(\frac{\pi-1}{2},0\right)$作函数$F(x)$的图象的所有切线，令各切点的横坐标构成数列$\{x_n\}$，求数列$\{x_n\}$的所有项之和$S$的值.

6. 已知函数$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 如果对于任意的$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，$f(x)\leqslant kx$恒成立，求实数$k$的取值范围.

7. 已知函数$f(x)=e^x\sin x$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 如果对于任意的$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geqslant kx$总成立，求实数$k$的取值范围.

8. 已知$f(x)=\sin x-\cos x-ax$，其中$a\in R$.

(1) 若$f(x)$在$x=0$处取得极值，求实数a的值.

(2) 若$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，求实数$a$的取值范围.

9. 已知 $f(x)=\sin x-\cos x-ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调,求实数 a 的取值范围;

(2) 证明:当 $a=\frac{2}{\pi}$ 时,$f(x)\geqslant -1$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立.

10. 已知 $f(x)=x\ln x+\frac{a}{2}x^2+1$.

(1) 若 $f(x)$ 在其定义域上为单调递减函数,求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-x\ln x-1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明:若 $x>1$,则不等式 $(x-1)\left[f(x)-\frac{a}{2}x^2\right]>ax\ln x$ 成立.

专题22：隐零点设而不求

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$ 的图象在点 $A(0,-1)$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅲ) 若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$，求 k 的最大值.

2. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

(Ⅰ) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 当 $m\leqslant 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m 并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}+\ln(2-x)$ 为奇函数时，证明：$f(x)>0$ 恒成立.

4. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

(Ⅰ) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 证明：$\mathrm{e}^x-\ln(x+2)>0$.

5. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-t}-\ln x$

(Ⅰ) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 t 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 当 $t\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>0$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2+ax+1$ 在 $(-1,0)$ 上有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 证明：当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$f(x)>\dfrac{11}{12}$.

7. 已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$，其中 $a>0$.

(Ⅰ) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 证明：存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

8. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，

(Ⅰ) 当 $a>0$ 时，求证：存在唯一的 $x_0\in\left(-\dfrac{1}{2a},0\right)$，使得 $g(x_0)=0$；

(Ⅱ) 若存在实数 a，b，使得 $f(x)\geqslant b$ 恒成立，求 $a-b$ 的最小值.

专题 23：端点效应专题

1. 设函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}$

(I) 证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

(II) 若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

2. (理) 已知函数 $f(x)=\sin x+\ln(1+x)$.

(I) 求证：$\frac{1}{n}<f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{2}{n}(n\in N^{+})$；

(II) 如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

3. 设函数 $f(x)=ax\cdot\ln x(a>0)$.

(I) 当 $a=2$ 时，判断函数 $g(x)=f(x)-4(x-1)$ 的零点的个数，并且说明理由；

(II) 若对所有 $x\geqslant 1$，都有 $f(x)\leqslant x^{2}-1$，求正数 a 的取值范围.

4. 设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若对所有的 $x\geqslant 0$，均有 $f(x)\geqslant ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

5. 设函数 $f(x)=(2x+1)\ln(2x+1)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(II) 求 $f(x)$ 的极小值；

(III) 若对所有的 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\geqslant 2ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，其中 $a>0$.

(1) 求 a 的值；

(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant kx^{2}$ 成立，求实数 k 的最小值.

7. 设函数 $f(x)=ax+\cos x$，$x\in[0,\pi]$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$，求 a 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $x>1$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x-a\cdot\frac{x-1}{x+1}(a\in R)$.

(1) 若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值；

(2) 令 $g(x)=(x+1)\cdot f(x)$，若对任意 $x\geqslant e$，有 $g(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 设 m,n 为实数，且 $m>n$，求证：$e^{\frac{m+n}{2}}<\frac{e^{m}-e^{n}}{m-n}<\frac{e^{m}+e^{n}}{2}$.

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$，$g(x)=e^{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $h(x)=f(x+1)+g(x)$，当 $x>0$ 时，$h(x)>1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$ (其中 $a>0$，e 是自然对数的底数).

(Ⅰ) 若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{a}x+a$ 有唯一实根，求 $(1+\ln a)a^2$ 的值；

(Ⅱ) 若过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 与直线 $y=-ex+1$ 垂直，证明：$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$；

(Ⅲ) 设 $g(x)=f(x+1)+\mathrm{e}^x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$，$g(x)=\mathrm{e}^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 过原点分别作曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的切线 l_1、l_2，已知两切线的斜率互为倒数，证明：$a=0$ 或 $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$；

(3) 设 $h(x)=f(x+1)+g(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)\geqslant 1$，求实数 a 的取值范围.

专题24：最大最小函数问题

1. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x-1$，$g(x)=x^3-1$.

(1) 若直线 $l: y=-x+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，求实数 a 的值；

(2) 用 $\min\{m, m\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\}\ (x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

2. 已知函数 $f(x)=\ln(x-1)$，$g(x)=\frac{2a}{3}x^3+3(1-a)x^2-18x+11a+26(a<0)$.

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2) 记 $\min\{m, n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设 $F(x)=\min\{f(x), g(x)\}\ (x>1)$，若函数 $y=F(x)$ 至少有三个零点，求实数 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{2a}{3}x^3+2(1-a)x^2-8x+8a+7$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $y=f(x)+g(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a<0$ 时，记函数 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\}\ (x>0)$，若函数 $y=h(x)$ 至少有三个零点，求实数 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x)=4\ln x+\frac{2x+1}{x^2}+a-3, g(x)=4\ln x$.

(1) 求证：$f(x)\geqslant\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+a$；

(2) 用 $\max\{p, q\}$ 表示 p，q 中的最大值，记 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，讨论函数 $h(x)$ 零点的个数.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+a$，$g(x)=x^2-1$.

(1) 当 $a=0$，$x>0$ 且 $x\neq1$ 时，证明：$\frac{1+x}{1-x}f(x)<\frac{2}{1-x^2}g(x)$；

(2) 定义 $\max\{m,n\}=\begin{cases}m, & m\geqslant n\\ n, & m<n\end{cases}$，设函数 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}\ (x>0)$，试讨论 $h(x)$ 零点的个数.

专题 25：恒成立专题

1. 若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，则整数 k 的最大值为 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知关于 x 的不等式 $e^x>\ln x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，则整数 a 的最大取值为 (　　)

A. 3　　B. 1　　C. 2　　D. 0

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x,g(x)=\ln x$，当 $x>1$ 时，不等式 $2f'(x)+xg(x)+3>m(x-1)$ 恒成立，则整数 m 的最大值为 ________

4. 已知函数 $f(x)=\ln x,g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$，当 $x>1$ 时，不等式 $k(x-1)<xf(x)+2g'(x)+3$ 恒成立，则整数 k 的最大值为 ________.

5. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=axe^x$，$a\in R$.

(1) 若函数 $h(x)=x^2-x-2f(x)$，求函数 $h(x)$ 的单调区间；

(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax^2+a$.

(1) 当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 若对任意 $x\geqslant1$，有 $f(x)\leqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x)=ae^{x+1}$，$g(x)=\ln\dfrac{x}{a}-1$，其中 $a>0$.

(1) 若 $d=1$，在平面直角坐标系 xOy 中，过坐标原点 O 分别作函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象的切线 l_1，l_2. 求 l_1，l_2 的斜率之积；

(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小值.

8. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\lambda(x^2-1)$ (λ 为常数).

(1) 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，证明：对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立；

(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最值；

(2) 若 $f(x)+e^x\geqslant\ln x+x+a$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x)=ax+1+\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 对于任意 $x>0$，不等式 $f(x)\leqslant xe^x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

11. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$，$g(x)=e^{2x}-2ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的值域；

(2) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，不等式 $g(x)\geqslant f'(x)$ 恒成立 ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)，求实数 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2+ax-6\ln x(a\in R)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小正整数值．$\left(\ln\frac{3}{2}\approx 0.404\right)$

13. 已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程；

(2) 若当 $x>1$ 时，$f(x)+x>k(x-1)$ 恒成立，求正整数 k 的最大值.

14. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(1) 若 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $(x-1)f(x)\geqslant mx^2-1$ 恒成立，求 m 的取值范围；

(2) 求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>4\ln x+8-8\ln 2$.

专题26:筷子夹汤圆专题

1. 已知函数 $f(x)=4x-x^4$, $x\in R$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P,曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$,求证:对于任意的实数 x,都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(Ⅲ) 若方程 $f(x)=a$(a 为实数) 有两个实数根 x_1, x_2,且 $x_1<x_2$,求证: $x_2-x_1\leqslant -\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

2. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$, $x\in R$. 其中 $n\in N$. $n\geqslant 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P,曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$,求证:对于任意的正实数 x,都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(3) 设 $n=5$,若关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2,求证: $|x_2-x_1|<2-\frac{a}{4}$.

3. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$, $x\in R$,其中 $n\in N^*$,且 $n\geqslant 2$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P,曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$,求证:对于任意的正实数 x,都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(Ⅲ) 若关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2,求证: $|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.

4. 已知函数 $f(x)=(x+b)(\mathrm{e}^x-a)$ $(b>0)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $(\mathrm{e}-1)x+ey+\mathrm{e}-1=0$.

(1) 求 a, b;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的交点为点 P,曲线在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$,求证:对于任意的实数 x,都有 $f(x)\geqslant h(x)$;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个实数根 x_1, x_2,且 $x_1<x_2$,证明: $x_2-x_1\leqslant 1+\frac{m(1-2\mathrm{e})}{1-\mathrm{e}}$.

5. 已知函数 $f(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$.

(1) 求 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $a\leqslant \mathrm{e}-1$,证明: $f(x)\geqslant a\ln x+2ex-2$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立;

(3) 若方程 $f(x)=b$ 有两个实数根 x_1, x_2,且 $x_1<x_2$,证明: $x_2-x_1\leqslant 1+\frac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\frac{eb}{\mathrm{e}-1}$.

6. 已知函数 $f(x)=ax-\mathrm{e}^x+1$,曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线为 $y=2x$.

(1) 证明:曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴有交点;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P,曲线在点 P 处的切线为直线 l,求证:曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$(m 为正实数) 有不等实根 x_1, $x_2(x_1<x_2)$,求证: $x_2-x_1<2-\frac{3m}{4}$.

7. 已知函数 $f(x)=6x-x^6$, $x\in R$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P,求曲线在点 P 处的切线方程;

(Ⅲ) 若方程 $f(x)=a$(a 为实数) 有两个实数根 x_1, x_2 且 $x_1<x_2$,求证: $x_2-x_1\leqslant 6^{\frac{1}{5}}-\frac{a}{5}$.

8. 已知函数 $f(x)=ax-\mathrm{e}^x+1$，$\ln3$ 是 $f(x)$ 的极值点.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线为直线 l. 求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(Ⅲ) 若关于 x 的方程 $f(x)=m(m>0)$ 有两个不等实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{7m}{10}$.

9. 已知函数 $f(x)=3x-\mathrm{e}^x+1$，其中 $\mathrm{e}=0.71828\cdots$，是自然对数的底数.

(I) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴相交于点 $P(x_0, 0)$，曲线在点 P 处的切线为 l，求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(II) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$(m 为正实数) 有两个不等实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{3}{4}m$.

10. 已知函数 $g(x)=x^4$，$x\in R$，在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程记为 $y=m(x)$，令 $f(x)=m(x)-g(x)+3$.

(I) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴相交于 P，$f(x)$ 在点 P 处的切线为 l，证明：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(II) 关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为正实数) 有两个实根 x_1，x_2，求证：$|x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{3}$.

专题 27：找点专题

1. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{2}{e^x}+1(a\in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $a\neq 0$ 时，讨论函数 $g(x)=f(x)-a-3$ 的零点个数，并给予证明.

2. 已知函数 $f(x)=e^x\sin x$.(e 是自然对数的底数)

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 记 $g(x)=f(x)-ax$，$0<a<3$，试讨论 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点个数 .(参考数据：$e^{\frac{\pi}{2}}\approx 4.8$)

3. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1$，其中 $a>0$，e 为自然对数的底数 .

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数 .

4. 已知函数 $f(x)=a(x-1)\cdot e^x-b\cdot \ln x$，其中 $a\geqslant 1$，$b\in R$.

(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，证明不等式 $\ln x\leqslant a\cdot(x-1)$ 恒成立；

(2) 若 $\dfrac{b}{a}>e(e=2.718\cdots)$，证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点 .

5. 已知函数 $f(x)=2x\cdot \ln a-(x+a)\cdot \ln x$.

(1) 当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数 .

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+a(\ln x-x)$，$a\in R$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

7. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{a}{x+1}$.

(Ⅰ) 设函数 $h(x)=(x-1)F(x)$，当 $a=2$ 时，证明：当 $x>1$ 时，$h(x)>0$；

(Ⅱ) 若 $F(x)$ 有两个不同的零点，求 a 的取值范围 .

8. 已知函数 $f(x)=e^x+\sin x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 令 $g(x)=f(x)-ax-1$，当 $a\in[1,2)$ 时，证明：函数 $g(x)$ 有 2 个零点 .

9. 已知函数 $f(x)=ae^x-2x+1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 函数 $g(x)=f(x)+x\ln x$，当 $a>0$ 时，讨论 $g(x)$ 零点的个数 .

10. 已知函数 $f(x)=1-\dfrac{ax^2}{e^x}$，$a\in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于直线 $y=x$，求该切线方程；

(2) 若 $a=1$，求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

(3) 若 $f(x)$ 恰有两个零点，求 a 的值.

11. 已知函数 $f(x)=2xe^x-ax-a\ln x(a\in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a=2\mathrm{e}$，求函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

12. 已知函数 $F(x)=xe^{x}-a\ln(x+1)(a\geqslant 1)$.

(1) 求函数 $F(x)$ 的定义域；

(2) 求函数 $F(x)$ 的零点个数 .