德州一中29班网课讲义汇总

Hyannor

2026 年 2 月 1 日

目录

1 第一讲 解析几何(1)(2022/10/30)

Chapter1. 椭圆的定义

1. 设圆$x^2+y^2+2x-15=0$的圆心为A，直线过$B(1,0)$且与x轴不重合，交圆于C,D两点，过B作AC的平行线交AD于点E.证明：$|EA|+|EB|$为定值，并写出点E的轨迹方程.

2. (2019安徽合肥三模) 如图是数学家Dandelin用来证明一个平面截圆锥得到的截面曲线是椭圆的模型称为"Dandelin双球"，在圆锥内放两个大小不同的小球，使得它们分别与圆锥面、截面相切。设图中球O_1,O_2的半径分别为1和3，球心距离$O_1O_2=8$，截面分别与球O_1,O_2切于点F_1,F_2，F_1,F_2是截面椭圆的焦点，则此时的椭圆的离心率等于______.

图 1: 第2题图

3. 如下图，用与圆柱的母线成60°的平面截圆柱得到的切口曲线是椭圆，则该椭圆的离心率为______.

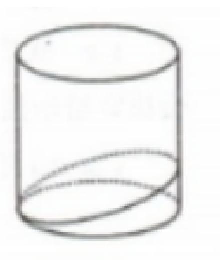


图 2: 第3题图

4. 已知动点 $P(x,y)$ 满足$10\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=|3x+4y+2|$, 则动点 P 的轨迹为______.

A. 椭圆　　B. 双曲线

C. 抛物线　　D. 无法确定

5. （2012 天津卷改编）设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A,B，点 P 在椭圆上且异于 A,B 两点. 若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $\dfrac{1}{2}$，则椭圆的离心率为______.

6. 已知 A,B 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴上的两个端点，$M,N$ 是椭圆上关于 x 轴对称的两点. 直线 AM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1k_2\neq0$。若$\sqrt{2}\,|k_1|+2\sqrt{2}\,|k_2|$的最小值为 1，则

椭圆的离心率为______.

Chapter.2 点差法与定比点差法

7. （2011 浙江）已知 F_1,F_2 分别为椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左右焦点，点 A,B在椭圆上，且$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$,则点 A 的坐标为______.

8. （2018 浙江）已知点 $P(0,1)$，椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=m\quad(m>1)$上两点$A,B$满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,则当$m=$______时，点 B 横坐标的绝对值最大.

9. 已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,过定点$P(0,3)$的直线与椭圆交于两点 A,B（A,B 可以重合），求$\left|\frac{PA}{PB}\right|$的取值范围.

Chapter3. 齐次化处理

10. (2017年全国I卷理科数学)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点$P_1(1,1)$,$P_2(0,1)$,$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$中恰有三点在椭圆$C$上.

(1)求椭圆C的方程;

(2)设直线l不经过点P_2且与C相交于A,B两点.若直线P_2A与直线P_2B的斜率之和为-1,试证明:l过定点.

11.（2020新高考I卷）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(a) 求椭圆 C 的方程；

(b) 点 M,N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足。证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

12.（2018全国I卷理数）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

(a) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

(b) 设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

13. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上一点 $A(2\sqrt{3},-1)$ 到两焦点的距离之和为 8。若点 B 是椭圆 C 的上顶点，点 P,Q 是椭圆 C 上异于点 B 的任意两点.

(a) 求椭圆 C 的方程；

(b) 若 $BP\perp BQ$，且满足 $3\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{DQ}$ 的点 D 在 y 轴上，求直线 BP 的方程；

(c) 若直线 BP 与直线 BQ 的斜率之积为 λ（λ 为常数，且 $\lambda<0$），证明：直线 PQ 过定点.

Chapter.4 非对称韦达定理

14.（2017连云港模）已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左右顶点分别为 A,B，过椭圆右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 P,Q 两点（不与 A,B 重合）。设直线 AP 的斜率为 k_1，直线 BQ 的斜率为 k_2，证明：$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

15. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的短轴长为 $4\sqrt{2}$，离心率为 $\dfrac{1}{3}$.

(a) 求椭圆方程；

(b) 设椭圆 C 的左右焦点分别为 F_1,F_2，左右顶点分别为 A,B，点 M,N 为椭圆位于 x 轴上方的两点，且 F_1M 与 F_2N 平行，记直线 AM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $3k_1+2k_2=0$，求直线 F_1M 的方程.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的上下顶点分别为 A,B，过点 $E(0,4)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于 M,N 两点。证明：直线 BM 与 AN 的交点 G 在定直线上，并求出该定直线的方程.

补充题目(可以自己作为练习题)

17. 已知 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，点 $P\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},1\right)$ 在椭圆 C 上，且 $\triangle F_1F_2P$ 的垂心为 $H\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$.

(a) 求椭圆 C 的方程；

(b) 设 A 为椭圆的左顶点，过点 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 D,E 两点，记直线 AD,AE 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $k_1+k_2=-\dfrac{1}{2}$，求直线 l 的方程.

18. 已知圆 $E:(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$，点 $F(\sqrt{3},0)$，动点 P 在 E 上，线段 PF 的垂直平分线与直线 PE 相交于点 Q，点 Q 的轨迹是曲线 C.

(a) 求 C 的方程；

(b) 已知过点 $(2,-1)$ 的直线 l 与 C 交于两点 A,B，M 是 C 与 y 轴正半轴的交点，设直线 MA,MB 的斜率分别为 k_1,k_2，证明：k_1+k_2 为定值.

19. 已知椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，椭圆的左右顶点分别为 A,B，直线 $x=4$ 上一点 P，连接 PA 交椭圆于点 M，连接 PB 交椭圆于点 N。证明：直线 MN 过定点.

20.（2019长郡模拟）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为 F_1,F_2，椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，且椭圆 C 过点 $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$.

(a) 求椭圆 C 的标准方程；

(b) 若直线 l 过椭圆 C 的左顶点 M，且与椭圆 C 的另一个交点为 N，直线 NF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 P，若 $PF_1\perp MN$，求直线 l 的方程.

2 第二讲 解析几何(2)(2022/11/6)

Chapter.1 参数方程

1. 设 M 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上一点，求 M 到直线 $x+2y-10=0$ 的最小距离.

2.（2021全国乙卷）设 B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\le 2b$，则 C 的离心率的取值范围为 ________.

A. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$

C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

3.（2020北大强基计划）求

$$\sqrt{3+2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta}+\sqrt{5-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin\theta}$$

的最大值.

Chapter.2 “齐次化处理”复习+补充练习

4.（2020新高考I卷改编·德州一中老校区 2022.11.5 高二周考）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(a) 求椭圆 C 的标准方程;

(b) 若直线 l 交 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为 0，求直线 l 的斜率.

原题第二问（我们上一讲已经讲过，这里不多赘述）：点 M,N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足。证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

5.（知乎秦子淳）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右顶点 $P(2,0)$，过右顶点作两条相互垂直的直线交椭圆于 A,B 两点，求证：直线 AB 过定点.

6.（第一讲第12题·2018全国I卷理数）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

(a) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程;

(b) 设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

7.（第一讲第13题）已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上一点 $A(2\sqrt{3},-1)$ 到两焦点的距离之和为 8。若点 B 是椭圆 C 的上顶点，点 P,Q 是椭圆 C 上异于点 B 的任意两点.

(a) 求椭圆 C 的方程;

(b) 若 $BP \perp BQ$，且满足 $3\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{DQ}$ 的点 D 在 y 轴上，求直线 BP 的方程；

(c) 若直线 BP 与直线 BQ 的斜率之积为 λ（λ 为常数，且 $\lambda < 0$），证明：直线 PQ 过定点.

***Chapter.3 仿射变换**

结论： 仿射变换是应对斜率关系的利器，尤其是在变换后出现垂直时相当好用.唯一的弊端就是考试不可作为步骤，但是可以作为思路的捷径.

主要用途： 观察，简单画个图观察下，了解大致思路（一般用仿射可以快速解决的题画个图很容易看出关系，看不出就走正统常规法）.

8.（椭圆第三定义的证明）对于椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$），设左右顶点分别为 A, B，椭圆上有一不与 A, B 重合的点 P. 求证：$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$（$e$ 为离心率）.

点差法给出的证明我们第一讲已经讲过，这里不多赘述.

9.（蒙日圆）

(a) 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$），过椭圆外一点 P 作两条切线，若两条切线互相垂直，求点 P 的轨迹方程；

(b) 已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > 0, b > 0$），过双曲线外一点 T 作两条切线，若两条切线互相垂直，求点 T 的轨迹方程.

10.（2022全国乙卷理）已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过点 $A(0, -2)$，$B\left(\dfrac{3}{2}, -1\right)$ 两点.

(a) 求 E 的方程；

(b) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$，证明：直线 HN 过定点.

11.（2019全国II卷节选）过坐标原点的直线交椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 于 P, Q 两点，点 P 在第一象限，$PE \perp x$ 轴，垂足为 E，连接 QE 并延长交 x 轴于点 G.证明：$\triangle POG$ 是直角三角形.

12.（2010江苏卷节选）在平面直角坐标系 xOy 中，如图，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ 的左右顶点分别为 A, B，右焦点为 F。设过点 $T(9, m)$ 的直线 TA, TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，其中 M 在 TA 上，N 在 TB 上.

补充题目(可以自己作为练习题)

13. 设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$）上一点。设直线 $l: \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ 与 x、y 轴的交点分别为 A, B，求 $|AB|$ 的最小值。(提示：考虑直线 l 与椭圆相切)

14.（2021新高考I卷）在平面直角坐标系 xOy 中，已知存在两点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$，$F_2(\sqrt{17}, 0)$，点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$，记 M 的轨迹为 C.

(a) 求 C 的方程；

(b) 设点 T 在直线 $x = \dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点，且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

15.（2011山东卷）已知直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两个不同点，且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，其中 O 为坐标原点.

(I) 证明：$x_1^2+x_2^2$ 和 $y_1^2+y_2^2$ 均为定值；

(II) 设线段 PQ 的中点为 M，求 $|OM|\cdot|PQ|$ 的最大值；

(III) 椭圆 C 上是否存在点 D,E,G，使得 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$？若存在，判断 $\triangle DEG$ 的形状；若不存在，请说明理由.

3 第三、四讲 计数原理(2022/12/4)

Chapter1. 特殊位置优先

1. 由$0,1,2,3,4,5$可以组成______个没有重复数字的五位奇数.

2. 7种不同的花排在一列的花盆里,若两种葵花不种在中间,也不种在两端的花盆里,有______种不同的排列方法.

Chapter2. 捆绑法

3. 7个人站在一排,其中甲乙相邻且丙丁相邻,共有多少种排法?

4. 展出的10幅不同的画,其中1幅水彩画,4幅油画,5幅国画,排成一列,要求同一类在一起,且水彩画不在两端,共有多少种排法?

Chapter3. 插空法

5. 一个晚会的节目有4个舞蹈，2个相声，3个独唱，舞蹈节目不能连续出场，则节目的出场顺序有多少种?

6. 某人打枪，射击8枪，命中4枪，恰好有3枪连在一起的情形有多少种?

Chapter4. 倍缩法与逐次插入法

7. 7人排队，其中甲乙丙3人顺序一定，共多少种排法?

8. 10个人身高各不相等，排成前后排，每排5人，要求从左至右身高逐渐增加，共多少种排法?

Chapter5. 求幂法

9. 把6个工人分配到7个工厂工作，共有多少种分法?

10. 某8层大楼一楼电梯上上来8名客人（一楼不下人），他们到各自的一层下电梯，下电梯的方法有几种?

Chapter.6 隔板法

11. 有10个运动员的名额，分给7个班，每班至少一个，有多少种分配方案?

12. 求不定方程

$$x+y+z+w=100$$

的非负整数解的组数.

13. 15个相同的小球放入编号1,2,3的盒子中，且每个盒子小球数要多于盒子的编号，共多少种分法?

14. 若$x_1<x_2$，则$f(x_1)\le f(x_2)$，则称$f(x)$为不严格增函数.已知函数的定义域$D=\{1,2,3,4,5,6\}$,值域$A=\{7,8,9\}$,求可以组成的不严格增函数的个数.

Chapter7. 分堆分组问题

推荐知乎 @夙蜡同学的文章：《计数原理中的分堆分组问题》

https://zhuanlan.zhihu.com/p/588467824

这个专题的题目均选自该文章.

15. 将6本不同的书进行分配，求下列每种情况的分配方法数：

(1)分给甲乙丙三人，每个人2本;

(2)分成3份，每份2本;

(3)分成3份，一份1本，一份2本，一份3本;

(4)分给甲乙丙三人，甲1本，乙2本，丙3本;

(5)分给甲乙丙三人，一份1本，一份2本，一份3本;

(6)分成4份，两份1本，两份2本;

(7)分给4人，有两人分得1本，其余两人各分得2本;

(8)一份4本，其余两份都是1本.

Chapter.8 合理分类法

16. 现共有10名演员，其中8人能唱歌，5人会跳舞，现在要演一个2人唱歌，2人跳舞的节目，有多少种排法？

17. 从4名男生和3名女生中选出4个人参加某个讲座，这4个人中需要既有男生又要有女生，则不同选择方法共有多少种？

Chapter.9 染色问题

18. 将4种不同的颜色分别涂入圆中的5个区域内，要求相邻的区域颜色不相同，则共有多少种涂法？

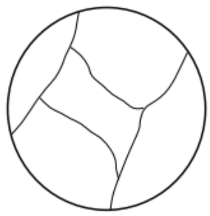


图 3: 第18题图

19. 将一个四棱锥的每一个顶点染上一个颜色，并使得一条棱上的两端异色，只有5种颜色可供使用，求不同染色方法数.

Chapter.10 正难则反

20. 从0,1,2,3,4,5,6,7,8,9这10个数字中取出3个数字，使其和为不小于10的偶数，不同取法有多少种？

21. 班级中有43位同学，从中抽取5人，正副班长、团支书至少有1人在内，有多少种抽法？

Chapter.11 环排和多排问题

22. 8个人围桌而坐，有多少种排法？

23. 8人排成前后两排，每排4人，其中甲和乙在前排，丙在后排，共有多少种排法？

24. 有两排座位，前排11个座位，后排12个座位，现在安排2人就座，规定前排中间的3个不能坐，并且这两人不左右相邻，那么有多少种不同排法？

Chapter.12 穷举法

25. 设有编号1,2,3,4,5的五个球和编号1,2,3,4,5的五个盒子，现将5个球投入这五个盒子内，要求每个盒子放一个球，并且恰有2个球的编号与盒子编号相同，有多少种排法？

26. 同一寝室4人，每人写一张贺年卡集中起来，然后每人各拿一张别人的贺年卡，则四张贺年卡不同的分配方式有多少种？

27. 定义域为$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$的$f(x)$满足：

①$f(1)=1$;

②$|f(x+1)-f(x)|=1(x=1,2,3,...,11)$;

③$f(1),f(6),f(12)$成等比数列.

问:有多少个$f(x)$?

28. 3人互相传球，由甲开始发球，并作为第一次传球，经过5次传球后，球仍回到甲的手中，则不同的传球方式有多少种？

Chapter.13 化归策略(排列组合综合练习)

29. 25个人排成5×5的方阵，现从中选3人，要求3人不在同一行也不在同一列，不同的选法有多少种？

30. 某城市的街区由12个全等的矩形区组成其中实线表示马路，从西南角走到东北角的最短路径有多少种？

31. 正方体的8个顶点可连成多少对异面直线？

32. 若圆上一共有8个不同点，不同点之间连线只能在圆内，交点不在圆上或圆外，共有多少种情况？

33. 马路上有编号为1,2,3,4,5,6,7,8,9的九盏路灯，现要关掉其中3盏，但不能关掉相邻的两盏或三盏，也不能关掉两端的2盏，满足条件的关灯方法有多少种？

34. 30030能被多少个不同的偶数整除？

35. 由0,1,2,3,4,5六个数字可以组成多少个没重复比324105大的数？

36. 由0,1,2,3,4,5这6个数字组成没有重复的四位偶数，将这些数字从小到大排起来，第71个数字是多少？

37. 在1,2,3,4,5,6,7任取6个数字作为一个3行2列的矩阵的元素，要求矩阵的第2行的两个数字之和等于5，而矩阵的第1行和第3行的两个数字之和都不等于5，则可以组成不同的矩阵有多少个?

4 第五讲 一场数字次序的派对—数列(1)(2022/12/14)

数列的基本概念 等差与等比数列

本文的知识内容部分来自：

《高中数学培优笔记——灵活思考与技巧解析》槿灵兮(吴梓帆) 崔荣军

Chapter.0 引言

数列的形式是一串数字，它最有趣味的地方也恰恰在于数字之间的横跳.找出这串数字序列内部的关联则成了数学家们关心的一个话题。毕达哥拉斯学派的信条是"万物皆数".那么，数列自然是打开星辰万物大门的一把钥匙，可以说，只要有对数探寻的地方，就有数列应用的场景.

本章主要关注数列的内部关联，以此介绍探究数列规律的方法以及其在高考题中的应用。因而会先介绍与数列相关的基本知识，并以等差数列和等比数列为例，展示探究数列问题的方式，然后会进一步展开讨论数列的表示形式.对于一般的数列，如何通过递推关系得到其通项公式？对于无法求出通项公式的数列，我们将结合一些构造方式辅助对其结构的研究来得到其性质.最后，还将对数列的极限进行研究，以数列为径，进入无穷的世界.同时，也会应用极限分析数列的性质，抓住数列那"看不见的尾巴".

须知，贯穿本章的主线为**递推**，本章中常用的手法是**归纳**.

什么是数列的基本知识呢？

不妨先从下面我们熟悉的模式来分析，来看这么几个数列：

①1,1,2,3,5,8,⋯

②1,4,27,256,3125,46656,⋯

③6,15,35,77,143,221,⋯

④6,2,8,10,18,⋯

那么，对于上面的这些数列，我们能否分别继续写呢？

相信读者不难得到前三组数的规律：①该数列是斐波那契数列（也称"兔子数列"），从第三个数字开始，每一个数都等于它前面两个数之和；②我们把这个数列中的数写成幂的形式，即1^1,2^2,3^3,4^4,5^5,6^6,$\cdots$,后续的数也将按照这个规律排列；③该数列中的数可以进行因数分解，即 2×3,3×5,5×7,7×11,11×13,13×17,$\cdots$ 后续的数也是由两个相邻的质数相乘得到的.

而对于④，可能很多人一下子摸不着头脑，觉得如果第6个数是2，就很容易获得答案了.如果再附加一条信息，即该数列的所有数都是偶数，那么我们就能很快得到答案了.它是由圆周率π中的每位数乘以2得到的.

Chapter.1 数列的基本概念

这里我们对数列中的概念进行一些阐述，以便于后续对数列的探究进行说明.

对于数列这个词本身，由于数列是一列按确定顺序排列的数，其中数列中的每一个数都叫做这个数列的项，排在数列中第n个位置的数被称为数列的第n项.如果一个数列中的数是有限个的，该数列就被称为有穷数列，反之则被称为无穷数列.

下面来说明数列的表示方式，最直接的方式就是像前文中的那样一一列出，但这种方式不太方便指定对象，于是又有了符号化的表述。如今一个数列为$\{a_n\}$，它所代表的就是形如a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n这样的一列数.我们用a_n指代数列的第n项，也称数列的通项（a_1则称为数列的首项）.在前文中，寻找

数列的规律在实质上是寻找一个以n为自变量的函数表达式来表示a_n.若记该函数（对应法则）为f，则$a_n = f(n)$是数列的函数表示法.

现在以前文列举的两个例子②④作为说明，给出其通项公式.

②中数列的通项公式为$a_n = n^n$；

④中数列的通项公式为$a_n = 2\times(\lfloor \pi\times 10^{n-1}\rfloor - \lfloor \pi\times 10^{n-2}\rfloor)\times 10$.

如果一个数列的第n项a_n与该数列的其他一项或多项之间存在对应关系，那么我们把对应关系式称为该数列的递推公式。例如上文①这样的斐波那契数列$\{F_n\}$，它的递推公式为$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

注：若无特殊说明，本文中的n均属于正整数.

1. 若数列$\left\{n(n+4)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$中的最大项是第$k$项，其中$k$是正整数，则$k=$______.

2. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，则$a_n$等于______.

A. $2+n\ln n$　　B. $2n+(n-1)\ln n$　　C. $2n+n\ln n$　　D.$1+n+n\ln n$

Chapter2. 等差数列

相信读者对于高斯小时候速求 1 到 100 的自然数之和的轶事已经略有耳闻了. 在“传闻”中, 小高斯写出两个和式, 由加法交换律, 将第一个和式写为 $1+\cdots+100$, 再将第二个和式写为 $100+\cdots+1$. 他注意到, 先将两个式子一上、一下排列, 再相加, 由加法结合律, 会有 $(1+100)+(2+99)+\cdots+(100+1)$, 此时采用乘法, 可以得到这个整体的和为 $100\times 101 = 10100$. 由于计算了两次 1 到 100 的自然数之和, 因此最后的答案为 $10100\div 2 = 5050$.

在这一小节中, 我们将以等差数列作为案例来介绍研究数列的一些方式, 并给出等差数列的一些性质, 它们对于解决一些问题是极为方便的.

等差数列的定义: 等差数列是指从第二项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数的一种数列, 这个差值就是等差数列的公差. 用定义式表示为$a_{n+1}-a_n=d$, 其中 d 为常数.

可以发现该定义式为等差数列的递推公式, 通项公式比递推公式更能直接反映数列的整体性质. 下面来推出等差数列的通项公式.

根据定义式 $a_{n+1}-a_n=d$, 先分别写出当 $k=1,2,\ldots,n-1$ 时的情形,

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1}=d.$$

再将以上各式累加得

$$a_n-a_1=(n-1)d.$$

因此就得到了等差数列的通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d).$$

可以发现, 等差数列是一个以斜率为 d、纵截距为 a_1-d 的离散型一次函数.

在数列的研究中, 还有一个被关注的问题, 即求数列的前 n 项和. 有些数列的求和过程是十分繁杂的, 而有些数列的求和无法用初等函数形式表示(与数列前 n 项和有关的内容在后续内容中会有更为详细的介绍), 但好在对等差数列的求和是十分简单的.

对于等差数列的前 n 项和, 其求和过程的推导实际上和高斯小时候所注意到的“倒序相加法”是一致的, 重点在于利用同一位置的正序与倒序的项相加的结果相同.

记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为等差数列的前 n 项和, 则 $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$, 从而

$$S_n + S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) = 2na_1 + n(n-1)d.$$

整理可得

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

等差数列前 n 项和公式 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 可以简记为“前 n 项和 = (首项 + 尾项) × 项数 ÷ 2”; 等差数列前 n 项和公式 $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$ 是关于 n 的, 以 $\dfrac{d}{2}$ 为二次项系数、$a_1 - \dfrac{d}{2}$ 为一次项系数的离散型二次函数.

以上便是关于等差数列由定义到通项公式以及前 n 项和公式的基本内容了. 下面来看三道例题以巩固以上的知识, 稍后将继续进一步讨论有关等差数列的更多性质.

3. (2019常州期末)在等差数列$\{a_n\}$中 ,已知$a_1 = 1$，$a_3 + a_5 = 8$, 则$a_7 =$ ______.

4. (2019石景山区期末)如果$2, a, b, c, 10$成等差数列,那么$c - a =$ ______.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 120$,则$a_{10} - \dfrac{2}{3}a_{11}$的值为______.

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 16

6. (2020岳阳一模)已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_3 = 52$,$a_1 + a_4 + a_7 = 147$,$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则使得S_n达到最大值时n是______.

A. 19　　B. 20　　C. 39　　D. 40

7. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_1 = 1$,$a_2 = 2$,且对于任意$n > 1$,$n \in \mathbb{N}^*$,满足$S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$,则______.

A. $a_9 = 17$　　B. $a_{10} = 19$　　C. $S_9 = 81$　　D. $S_{10} = 91$

8. (多选)(厦门模拟)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_1 + 3a_5 = S_7$,则下列结论正确的有______.

A. $a_4 = 0$　　B. S_n最大值为S_3　　C. $S_1 = S_6$　　D. $|a_3| < |a_5|$

5 第六讲 一场数字次序的派对—数列(2)(2022/12/20)

求数列通项公式的几种基础方法

Chapter.0 等差数列与等比数列基础

这算是基础中的基础了，必须熟记!

我们设数列$\{a_n\}$的首项为a_1,前 n 项和为S_n .

(一) 若该数列为等差数列，设公差为 d ，则有

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d}$$

并且

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}$$

(二)若该数列为等比数列，设公比为q ，则有

$$\boxed{a_n = a_1q^{n-1} = a_mq^{n-m}}$$

并且

$$\boxed{S_n = \begin{cases} na_1, q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_nq}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}}$$

Chapter.1 公式法

题目1. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$满足首项 $a_1 = 1$,$a_n^2 - (2a_{n+1} - 1)a_n - 2a_{n+1} = 0$.

(1)求a_2, a_3;

(2)求 $\{a_n\}$通项公式.

题目2. 若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题目3. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1 = 1$,前n项和为S_n.设λ与k是常数.若对一切正整数n，均有$S_{n+1}^{\frac{1}{k}} - S_n^{\frac{1}{k}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$成立,则称此数列为“$\lambda - k$”数列.

(1)若等差数列是“$\lambda - 1$”数列,求λ的值;

(2)若数列$\{a_n\}$是“$\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2$”数列,且$a_n > 0$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

Chapter.2 累加法

题目4. 已知数列 $\{a_n\}$首项 $a_1 = 1$,$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 (n \geq 2)$,求该数列通项公式.

题目5. 已知数列$\{a_n\}$首项 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 3^n + 1$,求该数列通项公式.

Chapter.3 累乘法

题目6. 已知数列$\{a_n\}$首项$a_1 = 1$,$a_n = 2n \cdot 5^{n-1}a_{n-1} (n \geq 2)$,求该数列通项公式.

题目7. 已知数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1=1$,$a_n=a_1+2a_2+3a_3+...+(n-1)a_{n-1}, n\geq 2$,求该数列通项公式.

Chapter.4 待定系数(配凑)与换元

题目8. 已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+4$,求该数列通项公式.

题目9. 已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=1$,$a_{n+1}=3a_n+4n$,求该数列通项公式.

题目10. 已知数列 $\{a_n\}$首项$a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$,求该数列通项公式.

我们只借一道例题谈谈换元法，其实换元可以算是一种思想(下面三角换元也是一种思想).

题目11. 已知数列$\{a_n\}$ 首项$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$,求该数列通项公式.

Chapter.5 前n项和与第n项混搭型

这种题你只需要记住一个要点：

$$\boxed{S_n-S_{n-1}=a_n, n\geq 2}$$

下面我们实战演练一下.

题目12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n项和为S_n ,且满足$a_n+S_n=n+3$,求该数列通项公式.

题目13. 已知数列$\{a_n\}$满足：$S_{n+1}\cdot S_n=a_{n+1}$,又$a_1=\dfrac{2}{9}$.

(1) 证明:数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$为等差数列;

(2) 求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

Chapter.6 *三角换元

需要注意的是，高考范围内大部分是考不到这部分的难度的，所以大家了解即可.[模拟题可能会？](主要是学习这种思想)

题目14. 设S_n为正项数列$\{a_n\}$的前n项和且$S_na_n=4^{-n}$,求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

题目15. (第一届通项杯)已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_{n+1}=2a_n^2-1$,求该数列通项公式.

Chapter.7 *特征根与线性递推

培优的常客，但一般来说高考是考不到这个难度的[考的话也不会求通项，顶多像下面2019年高考全国I卷理科数学那样求个第几项，那样用递归与累加也可以算出来(具体见下)]，也不可以在高考的时候直接使用.

题目16. (斐波那契数列)已知数列$\{a_n\}$的递推公式为$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,且$a_1=a_2=1$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题目17. 若数列$\{a_n\}$满足$a_0=0$且$a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}$,求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

题目18. (2019全国I卷理科数学)为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验.对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β, 一轮试验中甲药的得分记为X.

(I) 求X的分布列;

(II)若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分,$p_i(i=0,1,\cdots,8)$表示“甲药的累计得分为i时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0,p_8=1,p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$, 其中$a=P(X=-1),b=P(X=0),c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5,\beta=0.8$.

(i) 证明:$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列;

(ii) 求 p_4, 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

Chapter.8 *不动点

题目19. (例题8的另解)已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+4$,求该数列通项公式.

题目20. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{5a_n-1}{a_n+3}$,求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

题目21. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$,求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

Chapter.9 **与复数结合的通项公式

不会考,可以开拓一下眼界.

题目22. (第一届通项杯)已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=3$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$,求该数列通项公式.

题目23. (第二届通项杯)已知数列$\{a_n\}$首项$a_1=2$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+4}+\sqrt{a_n-2}$,求该数列通项公式.

愿这份友谊长存!

6 第七讲 一场数字次序的派对—数列(3)(2022/12/31)

求数列前n项和的几种基本方法

Chapter.1 错位相减法

1. 求和：

(1) $S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$;

(2) $S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$.

2. (2020全国一理) 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列， a_1 为 a_2 、 a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1=1$ ，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

3. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_n=2S_n+1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=(2n-1)\cdot a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n=2a_n-2$. 在数列 $\{b_n\}$ 中， $b_1=1$ ，点 $P(b_n,b_{n+1})$ 在直线 $x-y+2=0$ 上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n=a_n\cdot b_n$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .

5. (2019浙江模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3a_n-2^n$.

(1) 证明： $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}-1\right\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{na_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

6. 已知数列 $\{b_n\}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) 是递增的等比数列，且 b_1 、 b_3 为方程 $x^2-5x+4=0$ 的两根.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n=\log_2 b_n+3$ ，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(3) 若 $c_n=a_nb_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

Chapter.2 裂项相消法

1. 求和：

(1) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{98\times 99}+\dfrac{1}{99\times 100}$;

(2) $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$.

2. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且已知 $a_n>0$ ，满足 $a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=7$ ， $a_5+a_7=26$ ，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

4. (2021湖北黄冈9月调研) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ ($n\in\mathbb{N}^*$)，且 $a_1=1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

5. (2017全国三文数) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

6. (2021江苏六市2月联考) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+2a_{n+1}=3n+5$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ，有 $S_n<-\lambda^2+4\lambda$ （ λ 为偶数)，求 λ 的值.

7. (2021届广东10月联考) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{2}{a_2+1}+\dfrac{3}{a_3+1}+\cdots+\dfrac{n}{a_n+1}=\dfrac{n}{2}$ ，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $T_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ \left(1-\dfrac{1}{S_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{S_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{S_n}\right), & n\geq 2\end{cases}$, 求数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n\cdot T_n}\right\}$ 的前 n 项和 H_n .

8. (2021届绵阳一诊理数) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_{n+2}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$, $a_2=\dfrac{1}{5}$, $a_4=\dfrac{1}{9}$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $b_n=a_na_{n+1}$ ，则使不等式 $S_n>\dfrac{4}{27}$ 成立的 n 的最小值为（ ）.

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

9. 求和： $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

Chapter.3 分组求和法

1. 求下列数列的前 n 项和：

(1) $2^1+1,\ 2^2+2,\ 2^3+3,\ \cdots$;

(2) $1\dfrac{1}{2},\ 2\dfrac{1}{4},\ 3\dfrac{1}{8},\ \cdots$.

2. 求和：

(1) $S_n=1+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$;

(2) $S_n=(1\times 2^1+1)+(2\times 2^2+2)+\cdots+(n\times 2^n+n)$.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n+n=2a_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

(1) 证明：数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=a_n+2n+1$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

4. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

5. (2021届绵阳一诊理数) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_3=15$ ， $a_1\cdot a_2=a_7$.

(1) 求 a_n ;

(2) 若 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n\cdot a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

6. (2019江西九江模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1=1$ ， $2S_n=\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)a_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=(-1)^n\cdot(\log_3 a_n)^2$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

Chapter.4 倒序相加法

1. 求和： $\dfrac{1^2}{1^2+100^2}+\dfrac{2^2}{2^2+99^2}+\dfrac{3^2}{3^2+98^2}+\cdots+\dfrac{99^2}{99^2+2^2}+\dfrac{100^2}{100^2+1^2}$.

2. 求和： $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 79^\circ$.

3. 求和： $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$.

4. 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)$，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？试证明之.

Chapter.5　数列的周期性

1. 数列 $\{a_n\}$ 中，若对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值，且 $a_1 = 2$ ，$a_9 = 3$ ，$a_{98} = 4$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和 $S_{100} =$ ______.

2. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 2$ ，$a_{n+1} = \dfrac{1}{1-a_n}$ ，求前 2016 项和 $S_{2016} =$ ______.

3. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ ，$a_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ ，求前 2016 项和 $S_{2016} =$ ______.

4. (2019辽宁重点中学联考) 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1$ ，$a_{n+1} - a_n = \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2}$ ，求前 2018 项和 $S_{2018} =$ ______.

5. (2019广东湛江调研) 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 5$ ，且对任意的整数 n 总有 $(a_{n+1}+3)(a_n+3) = 4a_n + 4$ 恒成立，求前 2018 项和 $S_{2018} =$ ______.

7 第八讲 一场数字次序的派对—数列(4)(2023/1)

数列扫尾(属于数列独有的送别仪式哦):
数学归纳法、奇偶项问题、周期性问题

Chapter.1 数学归纳法

1. 请使用数学归纳法证明，对于任意的正整数n,都有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n$ ，且 $S_3=15$.

(1) 求 a_1 , a_2 , a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

3. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ，且 $\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=2n+1$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

(1) 求 a_2 , a_3 , a_4 ;

(2) 猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并用数学归纳法证明之.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，有 $a_1=\dfrac{1}{2}$ ， $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+3}$.

(1) 计算 a_2 , a_3 , a_4 ，并猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 用数学归纳法证明你的猜想.

5. (2020全国三理) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$ ， $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2 , a_3 ，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2^na_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

Chapter.2 奇偶性问题

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^{n-1}(4n-3)$ ，则它的前 100 项之和 S_{100} 等于（　　）.

A. 200

B. -200

C. 400

D. -400

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $a_2=\dfrac{1}{2}$ ，且对任意正整数 n 有 $[3+(-1)^n]a_{n+2}-2a_n+2[(-1)^n-1]=0,\quad n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 令 $b_n=a_{2n-1}$ ，判断 $\{b_n\}$ 是否为等差数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_n ，求 T_n .

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(-1)^n\cdot n$，若对任意的正整数 n，使得 $(a_{n+1}-p)(a_n-p)<0$ 恒成立，则实数 p 的取值范围是 ______.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$， $a_n\cdot a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$， $n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并写出其通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 求 S_n .

Chapter.3 周期性问题

1. (2021届贵州贵阳2月质检理数) 已知数列 $\{a_n\}$， $a_1=1$，且 $a_n\cdot a_{n+1}=\frac{n}{n+2}$，则 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{2n-2}\cdot a_{2n-1}\cdot a_{2n}=$ ______， $a_n=$ ______ .

2. (2020全国一文) 数列$\{a_n\}$ 满足$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前16项和为540，则$a_1=$ ______ .

3. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$， $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$，求 a_{2016} .

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4=3$， $a_9=5$，且 $a_{n-1}+a_n+a_{n+1}=9$ ($n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$)，则 a_{2013} 的值是（　　）.

A. 3

B. 1

C. 5

D. 9

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$， $a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}$，其前 n 项积为 T_n，则 $T_{2014}=$（　　）.

A. $\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. 6

D. -6

8 第九讲 概率统计(2023/1)

Chapter.1 概率统计扫尾(一中无权为我们规划)—一元线性回归模型与独立性检验

1. 某家电商场为了解广告宣传费与营业额之间的关系，得到如下数据统计表:

广告宣传费 x (万元)	3	4	5	6	7
营业额 y (万元)	10	14	15	17	19

根据数据表可得回归直线方程为 $\hat{y}=2.1x+\hat{a}$. 据此预测广告费用为 10 万元时，营业额为（　　）万元.

A. 24

B. 24.5

C. 25.5

D. 26

2. (2020·新课标Ⅱ) 某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加. 为调查该地某种野生动物的数量，将其分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得样本数据 (x_i, y_i) ($i=1,2,\ldots,20$)，其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i=60,\quad \sum_{i=1}^{20} y_i=1200,$$
$$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80,\quad \sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000,\quad \sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800.$$

(2) 求样本 (x_i, y_i) ($i=1,2,\ldots,20$) 的相关系数（精确到 0.01）.

附：相关系数公式为 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}, \sqrt{2}\approx 1.41.$

3. 两个变量 y 与 x 的回归模型中，分别选择了 4 个不同的模型，它们的相关系数 r 如表，其中拟合效果最好的模型是（　　）.

模型	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4
相关系数 r	0.48	0.15	0.96	0.30

A. 模型 1

B. 模型 2

C. 模型 3

D. 模型 4

4. 某超市统计了最近 5 年的商品销售额与利润率数据，经计算相关系数 $r=0.862$ ，则下列判断正确的是（　　）.

A. 商品销售额与利润率正相关，且具有较弱的相关关系

B. 商品销售额与利润率正相关，且具有较强的相关关系

C. 商品销售额与利润率负相关，且具有较弱的相关关系

D. 商品销售额与利润率负相关，且具有较强的相关关系

5. (2020·新课标Ⅱ) 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1(优)	2	16	25
2(良)	5	10	12
3(轻度污染)	6	7	8
4(中度污染)	7	2	0

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这一天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这一天“空气质量不好”. 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好		
空气质量不好		

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

6. “互联网+”是“智慧城市”的重要内涵， A 市在智慧城市的建设中，为方便市民使用互联网，在主城区覆盖了免费 WiFi. 为了了解免费 WiFi 在 A 市的使用情况，调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中抽取了 200 人进行抽样分析，得到如下列联表（单位：人）：

	经常使用免费 WiFi	偶尔或不用免费 WiFi	总计
45 岁及以下	70	30	100
45 岁以上	60	40	100
总计	130	70	200

(1) 根据以上数据，判断是否有 90% 的把握认为 A 市使用免费 WiFi 的情况与年龄有关.

(2) 将频率视为概率，现从该市 45 岁以上的市民中用随机抽样的方法每次抽取 1 人，共抽取 3 次. 记被抽取 3 人中“偶尔或不用免费 WiFi”的人数为 X ，若每次抽取的结果是相互独立的，求 X 的分布列、均值 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

附：卡方检验公式为 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024

Chapter.2 啾啾啾 高考难度刷题来啦~

1.(2020新高考I卷) 信息熵是信息论中的一个重要概念.设随机变量X所有可能的取值为$1,2,\cdots,n$且$P(X=i)=p_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$)， $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ，定义 X 的信息熵为$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.

判断下列命题是否正确：

(A) 若 $n=1$ ，则 $H(X)=0$

(B) 若 $n=2$ ，则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

(C) 若 $p_i=\dfrac{1}{n}$ ($i=1,2,\cdots,n$)，则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

(D) 若 $n=2m$ ，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$ ，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ ($j=1,2,\cdots,m$)，则 $H(X)\le H(Y)$

2. (2021 新高考 I 卷) 某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A 、 B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答. 若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分； B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分. 已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

(2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

3. (2022 全国甲卷) 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局. 三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5、0.4、0.8，各项目的比赛结果相互独立.

(1) 求甲学校获得冠军的概率；

(2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与数学期望.

4. (2020 天津市滨海新区塘沽第一中学模拟) 4 月 23 日是“世界读书日”，某中学开展了一系列的读书教育活动. 学校为了了解高三学生课外阅读情况，采用分层抽样的方法从高三某班甲、乙、丙、丁四个读书小组（每名学生只能参加一个读书小组）学生中抽取 12 名学生参加问卷调查. 各组人数统计如下：

小组	甲	乙	丙	丁
人数	12	9	6	9

(1) 从参加问卷调查的 12 名学生中随机抽取 2 人，求这 2 人来自同一个小组的概率；

(2) 从已抽取的甲、丙两个小组的学生中随机抽取 2 个，用 X 表示抽得甲组学生的人数，求随机变量 X 的分布列和均值.

5. 在孟德尔遗传理论中，传递性状依赖的特定携带者为遗传因子，遗传因子总是成对出现，例如：豌豆携带这样一对遗传因子： A 使子代开红花， a 使子代开白花，两个因子的组合构成了构成不同的一对遗传因子： AA 为开红花， Aa 或 aa 为开白花，生物在繁殖后代的过程中，后代的每一对遗传因子都包含一个父本的遗传因子和一个母本的遗传因子，而因为生殖细胞是由分裂过程产生的，每一个上一代的遗传因子以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率传给下一代，而且各代的遗传过程是相互独立的，可

以把第 n 次的选交设想为第 n 次试验的结果，每一次试验就相当于抛一枚均匀的硬币，比如对具有性状 Aa 的父本来讲，如果抛出正面就选择因子 A ，如果抛出反面就选择因子 a ，概率都是 $\frac{1}{2}$ ，对母本也一样，父本、母本各自随机选择得到的遗传因子再配对形成子代的遗传性状，假设三种遗传性状 AA 、 Aa （或 aa ）、 aa 在父本和母本中以同样的比例 $u:v:w$ ($u+v+w=1$) 出现，则在随机杂交实验中，遗传因子 A 被选中的概率是 $p=\frac{u+v}{2}$ ，遗传因子 a 被选中的概率是 $q=\frac{w+v}{2}$ ，称 p 、 q 分别为父本和母本中遗传因子 A 和 a 的频率， P 、 Q 实际上是父本和母本中两个遗传因子的个数之比。基于以上常识回答如下问题：

(1) 如果植物的上代父本、母本的遗传性状都是 Aa ，后代遗传性状为 AA 、 Aa （或 aa ）、 aa 的概率分别是多少？

(2) 对某一植物，经过实验室观察发现遗传性状 aa 具有重大缺陷，可人工剔除，从而使得父本和母本中仅有遗传性状为 AA 、 Aa （或 aa ）的个体。在进行第一代杂交实验时，假设遗传因子 A 被选中的概率为 p ， a 被选中的概率为 q ，其中 p 、 q 为定值且 $p+q=1$ ，求杂交所得子代的三种遗传性状 AA 、 Aa （或 aa ）、 aa 所占的比例 u_1 、 v_1 、 w_1 。

(3) 继续对 (2) 中的植物进行杂交实验，每次杂交前都需要剔除 aa 的个体。假设得到的第 n 代总体中 3 种遗传性状 AA 、 Aa 、 aa 所占的比例分别为： u_n 、 v_n 、 w_n ($u_n+v_n+w_n=1$)，设第 n 代遗传因子 A 和 a 的频率分别为 p_n 和 q_n ，已知有以下公式：$p_n=\frac{u_n+v_n}{1-w_n}$, $q_n=\frac{v_n}{1-w_n}$, $n=1,2,\ldots$

(i) 证明： $\left\{\frac{1}{q_n}\right\}$ 是等差数列；

(ii) 求 u_{n+1} 、 v_{n+1} 、 w_{n+1} 的通项公式，如果这种剔除某种遗传性状的随机杂交实验长期进行下去，会有什么现象发生？

6. (2021 年 4 月 23 日是第 26 个“世界读书日”，某组织举办“阅百年历程，传精神力量”主题知识竞赛，有基础题、挑战题两类问题. 每位参赛同学回答 n 个问题 ($n\geq 3, n\in\mathbb{N}^*$)，每次回答一个问题，若回答正确，则下一个问题从挑战题库中随机抽取；若回答错误，则下一个问题从基础题库中随机抽取. 规定每位参赛同学回答的第一个问题从基础题库中抽取，基础题答对一个得 10 分，否则得 0 分；挑战题答对一个得 30 分，否则得 0 分. 已知小明能正确回答基础类问题的概率为 $\frac{3}{5}$ ，能正确回答挑战类问题的概率为 $\frac{2}{5}$ ，且每次回答问题是相互独立的.

(1) 记小明前 2 题累计得分为 X ，求 X 的概率分布列和数学期望；

(2) 记第 k 题小明回答正确的概率为 a_k ($k=1,2,\ldots,n$)，证明：当 $k\geq 2$ 时，$a_k=-\frac{1}{5}a_{k-1}+\frac{3}{5}$,并求 $\{a_k\}$ 的通项公式.

7. (2020 新高考 I 卷) 为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中 PM2.5 和 SO_2 浓度（单位： $\mu g/m^3$ ），得下表：

SO_2 \ PM2.5	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

	$SO_2\le 150$	$SO_2>150$	合计
$PM2.5\le 75$			
$PM2.5>75$			
合计			

(3) 根据 (2) 中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关？

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

8. (2022 新高考 I 卷) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好	总计
病例组	40	60	100
对照组	10	90	100
总计	50	150	200

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R .

(i) 证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$;

(ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B)$ 、 $P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

9. (2022 全国乙卷) 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位： m^2 ）和材积量（单位： m^3 ），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.14	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=0.038$ ， $\sum_{i=1}^{10}y_i^2=1.6158$ ， $\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186 m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附：相关系数公式为$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$, $\sqrt{1.896}\approx 1.377$.

“就让料峭春风为一早就等在门口的彩蝶吹开耶路撒冷的第一朵玫瑰.”

9 第十讲 函数的局部性质—导数及其应用(1)(2023/1)

导数的定义、运算与几何意义

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

Chapter.1 导数的定义与运算

1. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=1$ ，则 $f'(x_0)=$ （ ）

A. $\dfrac{2}{3}$

B. $\dfrac{3}{2}$

C. 3

D. 2

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{\Delta x}=$ （ ）

A. $2f'(x_0)$

B. $f'(x_0)$

C. $3f'(x_0)$

D. $4f'(x_0)$

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x$

(2) $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$

(3) $y=(2x+1)\cdot \mathrm{e}^x$

(4) $y=\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}$

4. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x)=2xf'(\mathrm{e})+\ln x$ ，则 $f'(\mathrm{e})=$ ____________.

5. 设 $a\in\mathbb{R}$ ，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a\cdot\mathrm{e}^{-x}$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f'(x)$ 是奇函数，则 a 的值为（ ）

A. 1

B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D. -1

6. 已知 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$ ，求 $f'(1)$.

7. 已知函数 $f(x)=2\ln(3x)+8x$ ，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 的值为 __________.

8. 已知 $f(x)=x(x+k)(x+2k)(x-3k)$ ，且 $f'(0)=6$ ，则 $k=$ __________.

9. 若函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2021)$ ，则 $f'(0)=$ __________.

Chapter.2 导数的几何意义(part.1)

1. 设 $f(x)$ 是偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 1，则该曲线在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线的斜率为 __________.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}$ ，其中 $a\in\mathbb{R}$ ，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ ，则 a 的值为（ ）.

A. $-\dfrac{5}{4}$

B. $\dfrac{5}{4}$

C. $-\dfrac{3}{4}$

D. $\dfrac{1}{4}$

3. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{a\mathrm{e}^x}+b$ （ $a>0$ ），设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$ ，求 a ， b 的值.

4. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ________________；过点 $(1,1)$ 的切线方程为 ________________.

5. 已知曲线 $f(x)=x^3-2x$ ，求过点 $(1,-1)$ 的切线方程.

6. 直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $A(1,3)$ ，则 $2a+b$ 的值等于（ ）.

A. 2

B. -1

C. 1

D. -2

7. 已知某物体的运动方程是 $s(t)=t+\dfrac{1}{9}t^3$ ，求当 $t=3\,\mathrm{s}$ 时的瞬时速度.

8. 做直线运动的某物体，其位移 s 与时间 t 的关系是 $s=3t-t^2$ ，求物体的初速度.

9. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇（1452.4 – 1519.5）的画作《抱银貂的女人》中，女士脖颈上悬挂的黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽. 达·芬奇提出：“固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？”这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式：$f(x)=a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$,其中 a 为悬链线系数. $\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ ，相应地双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. 若直线

$x=m$ （ $m<0$ ）与双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 分别相交于点 A ， B ，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 ，曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P ，且 $\triangle PAB$ 为钝角三角形，则实数 m 的取值范围是 ________.

Chapter.3 导数的几何意义(part.2)

1. 已知函数 $f(x)=ax^2+1$ （ $a>0$ ）， $g(x)=x^3+bx$. 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求 a ， b 的值.

2. 已知直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，求 k 和 b 的值.

3. 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-6ax-11$ ， $g(x)=3x^2+6x+12$ 和直线 $m:y=kx+9$ ，又 $f'(-1)=0$ ，是否存在 k ，使直线 m 既是曲线 $y=f(x)$ 的切线，又是曲线 $y=g(x)$ 的切线？如果存在，求出 k 的值；如果不存在，请说明理由.

4. 已知函数 $f(x)=x^2-2a\ln x$ ，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，点 M 在函数 $y=f(x)$ 的图像上运动，直线 $y=x-2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像不相交，求点 M 到直线 $y=x-2$ 的距离的最小值.

5. 已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为 ______.

6. 设函数 $f(x)=(x-a)^2+(\ln x^2-2a)^2$ ，其中 $x>0$ ， $a\in\mathbb{R}$ ，存在 x_0 使得 $f(x_0)\le b$ 成立，则实数 b 的最小值为（　　）.

A. $\dfrac{1}{5}$

B. $\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{4}{5}$

D. 1

7. 若存在实数 x ，使得关于 x 的不等式 $\dfrac{(\mathrm{e}^x-a)^2}{9}+x^2-2ax+a^2\le\dfrac{1}{10}$ （其中 e 为自然对数的底数）成立，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$

B. $\left[\dfrac{1}{9},+\infty\right)$

C. $\left\{\dfrac{1}{10}\right\}$

D. $\left[\dfrac{1}{10},+\infty\right)$

8. 已知函数 $f(x)=(x+a)^2+\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{a}{\mathrm{e}}\right)^2$ ，若存在 x_0 ，使得 $f(x_0)\le\dfrac{4}{\mathrm{e}^2+1}$ ，则实数 a 的值为 ______.

9. 已知实数 a ， b ， c ， d 满足 $b=a-2\mathrm{e}^a$ ， $c+d=4$ ，其中 e 是自然对数的底数，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为（　　）.

A. 16

B. 18

C. 20

D. 22

10. 已知实数 a ， b ， c ， d 满足 $\dfrac{\mathrm{e}^{a-1}}{b}=\dfrac{c-1}{d}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为(　).

A. $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}{\mathrm{e}}$

B. $\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}$

C. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2}$

D. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}$

“你知道，有些鸟儿是注定不会被关在牢笼里的，它们的每一片羽毛都闪耀着自由的光辉.”

——《肖申克的救赎》

10 第十一讲 函数的局部性质—导数及其应用(2)(2023/1)

导数与函数单调性

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

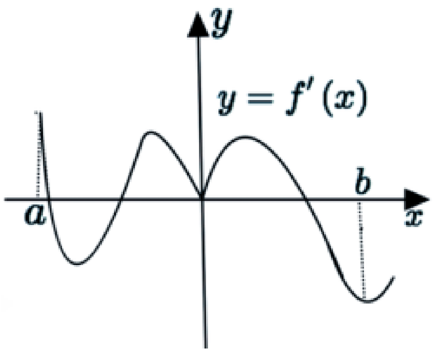
1. 函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有极小值点（　　）.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



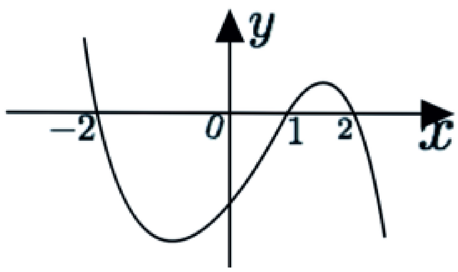
2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是（　　）.

A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$



3. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx-2a^2$ 在 $x=2$ 时有极值 0，求 $a+b$ 的值.

4. 已知曲线 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 设 $b>1$，设 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{b},b\right]$ 上的最大值和最小值.

5. 研究函数 $f(x)=x\ln x-x^3$ 在 $(1,+\infty)$ 上的单调性.

6. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$，求 $f(x)$ 的单调区间.

7. 设 $f(x)=a\ln x+1$（其中 $a>0$），若不等式 $f(x)>x$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

11 第十二讲 函数的局部性质—导数及其应用(3)(2023/1)

一元函数不等式与一元级数不等式证明

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

Chapter.1 一元函数不等式证明

1. 证明下列不等式：

(1) $\ln(1+x) \leq x$

(2) $1+x \leq \mathrm{e}^x$

(3) 当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x < x < \tan x$

2. 函数 $f(x) = ax^2 - \ln x + 1$，求证：当 $a = 1$ 时，$f(x) > \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

3. 设 a 为实数，函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2a$，$x \in \mathbb{R}$.

(a) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(b) 求证：当 $a > \ln 2 - 1$ 且 $x > 0$ 时，$\mathrm{e}^x > x^2 - 2ax + 1$.

4. 函数 $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$，$g(x) = (x^2+x)f'(x)$，证明：对任意 $x > 0$，$g(x) < 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

5. 函数 $f(x) = \dfrac{a\mathrm{e}^{x-1}}{x}$ 的图像在 $x = 2$ 处的切线斜率为 $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(a) 求实数 a 的值，并讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(b) 若 $g(x) = \mathrm{e}^x \ln x + f(x)$，证明：$g(x) > 1$.

6. 函数 $f(x) = -x - \ln(-x)$，$x \in [-e, 0)$，其中 e 为自然对数的底数.

(a) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(b) 求证：$f(x) + \dfrac{\ln(-x)}{x} > \dfrac{1}{2}$.

7.（2016全国三卷文数）设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(a) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(b) 证明：当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$；

(c) 设 $c > 1$，证明：当 $x \in (0, 1)$ 时，$1 + (c-1)x > c^x$.

8. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

(a) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(b) 证明：$f(x) > \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$（其中 e 是自然对数的底数，$\mathrm{e} = 2.71828\ldots$）.

9. 设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

(a) 求 a；

(b) 设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$.

Chapter.2　一元级数不等式证明

1. 证明：$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\ln(n+1)$.

2. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x+1}$（$a\in\mathbb{R}$）.

(a) 若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值，求 a；

(b) 当 $a=2$ 时，试比较 $f(x)$ 与 1 的大小；

(c) 求证：$\ln(n+1)>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$（$n\in\mathbb{N}^*$）.

3. 证明：$\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{\ln n^2}{n^2}<\dfrac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$（$n\geq 2$）.

4. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx^2$，$x\in\mathbb{R}$.

(a) 若 $k=\dfrac{1}{2}$，求证：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>1$；

(b) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，试求 k 的取值范围；

(c) 求证：$\left(1+\dfrac{1}{1^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)<\mathrm{e}^4$（$n\in\mathbb{N}^*$）.

5.（2017全国三理数）已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(a) 若 $f(x)\geq 0$，求 a 的值；

(b) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$，求 m 的最小值.

6. 已知函数 $f(x)=x^2-ax-x\ln x$，$a\in\mathbb{R}$.

(a) 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(b) 若 $n\in\mathbb{N}_+$，求证：$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)<\sqrt{\mathrm{e}}$.

7. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=x+1$（e 为自然对数的底数）.

(a) 求证：$f(x)\geq g(x)$ 恒成立；

(b) 设 m 是正整数，对任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)<m$，求 m 的最小值.

"陆上的人喜欢寻根问底，虚度了大好光阴，冬天忧虑夏天的姗姗来迟，夏天忧虑冬天的将至，所以他们不停四处游走，追求一个遥不可及的四季如夏的地方，然而我并不羡慕."

——《海上钢琴师》

12 第十三讲 函数的局部性质—导数及其应用(4)(2023/1)

含参函数单调性

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

1. 已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

2. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+k$（$k>0$）在 $x=0$ 处取得极值，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x+2y+1=0$.

(a) 求 a，b 的值；

(b) 若函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$，讨论 $g(x)$ 的单调性.

3. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}+a(2-\ln x)$（$a>0$），讨论 $f(x)$ 的单调性.

4. 求函数 $f(x)=(1-a)\ln x-x+\dfrac{ax^2}{2}$ 的单调区间.

5. 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-kx}\left(x^2+x-\dfrac{1}{k}\right)$（$k<0$）的单调区间.

6. 设函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+ax+(x-2)\mathrm{e}^x$（$a>0$），讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

7. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(2a+1)\mathrm{e}^x+x$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

8. 已知 $f(x)=x^2-1-2a\ln x$（$a\neq 0$），求函数 $f(x)$ 的极值.

9. 函数 $f(x)=ax^2+1$（$a>0$），$g(x)=x^3+bx$，其中 $a^2=4b$，求函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 上的最大值.

10. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}ax^2-\ln(x+1)$.

(a) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(b) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值是 0，求 a 的取值范围.

11. 函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-kx^2$，当 $k\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 时，求函数在 $[0,k]$ 上的最大值.

12. 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\mathrm{e}^x$，其中 $a>0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{a}{2}\right]$ 上是否存在最小值？若存在，求出最小值.

13. 函数 $f(x)=\dfrac{2ax+a^2-1}{x^2+1}$.

(a) 讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(b) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最大值和最小值，求 a 的取值范围.

14.（2017全国二卷理数）已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围.

“决定一个人命运的，不是我们的能力，而是我们的选择.”

13 第十四讲 函数的局部性质—导数及其应用(5)(2023/1)

极值最值取值范围

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

1. 设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$.

(a) 求实数 a 的取值范围，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(b) 证明：$f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$.

2.（2021届贵州贵阳2月质检理数）已知曲线 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{3}ax^3-ax^2$，其中 $a\in\mathbb{R}$.

(a) 当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(b) 若函数 $y=f(x)$ 有三个极值点 x_1,x_2,x_3（满足 $x_1<x_2<x_3$），求实数 a 的取值范围，并证明：$0<f(x_2)<\dfrac{\mathrm{e}}{6}$.

3. 已知函数 $f(x)=x+a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线 l 与直线 $x+2y=0$ 垂直，函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-bx$.

(a) 求实数 a 的值；

(b) 设 x_1,x_2（$x_1<x_2$）是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\geq\dfrac{7}{2}$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4ax+a\ln x+3a^2+2a$（其中 $a>0$）.

(a) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(b) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，当 a 变化时，求 $f(x_1)+f(x_2)$ 的最大值.

5. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{1-x}(2ax-a^2)$，其中 $a\neq 0$.

(a) 若函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

(b) 设函数 $f(x)$ 的最大值为 $g(a)$，当 $a>0$ 时，求 $g(a)$ 的最大值.

6.（2016全国二理数）

(a) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的单调性，并证明：当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$；

(b) 证明：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}$（$x>0$）有最小值，设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域.

7. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=2a\ln x$.

(a) 当 $a\geq -1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调递增区间；

(b) 设 $h(x)=f(x)+g(x)$，且 $h(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，其中 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$，求 $h(x_1)-h(x_2)$ 的最小值.

8.已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x$，其中 a 为非零实数.

(a) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(b) 若 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$\dfrac{f(x_2)}{x_1}<\dfrac{1}{2}$.

14 第十五讲 函数的局部性质—导数及其应用(6)(2023/1)

单变量不等式恒成立(分参与缩参)

本讲讲义由佟硕大大制作 特此说明(佟大大永远滴神!)

1. 已知 $\ln x < ax$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

2. 已知 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

3.（2019福建三明期末质量检测）已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x$.

(a) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(b) 若 $f(x) \geq 2x - \dfrac{1}{2}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

(a) 证明：$f'(x) \geq 2$；

(b) 若对所有 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$，求实数 a 的取值范围.

5.（2017全国二卷文数）设函数 $f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^x$.

(a) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(b) 当 $x \geq 0$ 时，$f(x) \leq ax + 1$，求 a 的取值范围.

6.（2016全国二卷文数）已知函数 $f(x) = (x + 1)\ln x - a(x - 1)$.

(a) 当 $a = 4$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(b) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$f(x) > 0$，求 a 的取值范围.

7.（2021届厦门一中10月质检）已知函数 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin x + m\ln x + 1$，$g(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}\sin x$.

(a) 求函数 $g(x)$ 的单调区间和极值；

(b) 当 $x \geq 1$ 时，若不等式 $g(x) - x - \mathrm{e}^{x-1} \leq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(c) 若存在 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，且当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f(x_1) = f(x_2)$，证明：$\dfrac{x_1 x_2}{4m^2} < 1$.

8. 已知 $\forall x \geq 1$，$\ln x - a(x - 1) \leq \dfrac{\ln x}{x + 1}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

9. 已知 $\ln \dfrac{1 + x}{1 - x} > k\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right)$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立，求实数 k 的取值范围.

10. 已知 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0，其中 $a > 0$.

(a) 求 a 的值；

(b) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$，均有 $f(x) \leq kx^2$ 成立，求实数 k 的最小值.

11.（2010大纲卷II）设函数 $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

(a) 证明：当 $x > -1$ 时，$f(x) \geq \dfrac{x}{x+1}$；

(b) 当 $x \geq 0$ 时，$f(x) \leq \dfrac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围.

12.（2020全国一卷理数）已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x + ax^2 - x$.

(a) 当 $a = 1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(b) 当 $x \geq 0$ 时，$f(x) \geq \dfrac{1}{2}x^3 + 1$，求 a 的取值范围.