

德州一中2021级29班测试题目汇总

Hyannor

2026年1月11日

目录

| | |
|-------------------|----|
| 2022年德州疫情网课高一数学检测 | 2 |
| 德州一中2021级29班第一次联考 | 8 |
| 德州一中2021级29班第二次联考 | 11 |
| 德州一中2021级29班第三次联考 | 14 |
| 德州一中2021级29班第四次联考 | 16 |

2022年德州疫情网课高一数学检测

考试时间：2022年4月 满分：200 分

·报名要求:一中老校区高一生(2021级)[新校区可以看电子版]

·注意事项(答题前请务必认真读完):

1. 答卷请答到本试卷配套的答题卡上,写在草稿纸和本试卷上无效.
2. 本试卷分为第I卷与第II卷,各100分,满分200分.

为激励大家踊跃作答,下说明奖励规则:设你的分数为 x 分,若 $150 < x < 180$,奖励1元;若 $180 \leq x \leq 195$,奖励5元;若 $x > 195$,奖励10元.

3. 考试时间: 2022.4.16(周六) - 2022.4.21(周四) 约五天时间

交卷时间不晚于 2022.4.21 22:00 特别地,允许提前交卷.

交卷方式: 将答题卡送至命题人手中或拍照发至命题人QQ上 (推荐前者)

答案与解析会在2022.4.22(周五)公布.

4. 因笔者水平有限, 里面存在搬运的试题, 在答案解析中笔者会将搬运的原创题目注明来历, 同步高考卷类似的公开试题就不注明了(想起来的时候也会注明, 但原创一定会注明!)

5. 作答平面几何(33题)请将图画到答题卡相应位置, 否则扣2分.

6. 请勿外传试题, 因为笔者能力太低, 只是为了娱乐才组的题目.

7. 题目类型及分值:

·第I卷含第1题至第25题(1-15为不定项选择, 每道题有一个或多个选项符合题意, 每小题4分, 选对但是不全得2分, 错选得0分; 16-25为填空题, 每小题4分);

·第II卷含第26题至第33题(解答题, 26题10分, 27,29,30,31,32题每题12分, 28题14分, 33题16分)

8. 至于为什么我没有用LATEX, 那是因为WPS有一些题copy会比较方便.(现在补充上了哈哈)

9. 请诚信考试! 主要是想帮助大家提高能力, 查的话就没什么意义了.

10. 祝君好运! 加油!

第 I 卷

题目1.(本小题4分) 已知集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x|\ln x \geq 1\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

- A. $[e, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(-1, e]$ D. $[e, 3)$

题目2.(本小题4分) 高斯(Gauss)被称为“数学王子”,他在大学时就完成了正十七边形可作的证明.他的一项成就就是“代数基本定理”,代数基本定理是说一元 n 次多项式在 \mathbb{C} 上有 n 个根.

设 $x^3 = 1$ 的非实根 $x = \omega$,则下列说法中正确的有 $\underline{\hspace{2cm}}$. (设虚数单位为i)

- A. $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\omega^2 = \bar{\omega}$ C. $\omega = -1 \pm \sqrt{3}i$ D. $1 + \omega + \omega^2 \neq 0$

题目3.(本小题4分) $\frac{2 \tan 15^\circ}{2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \tan^2 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}.$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

题目4.(本小题4分) 方程 $y^2 = 6x - x^2$ 表示的曲线为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆

题目5.(本小题4分)已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,若 $a_4 + a_7 = 31$,并且 $a_1 + a_2 + a_5 = 21$,则下列说法中正确的有_____.

- A. 数列首项 $a_1 = 3$ B. 数列公差 $d = 3$ C. 数列前十项和 $S_{10} = 137$ D. 数列通项公式为 $a_{n+1} - a_n = 3$

题目6.(本小题4分)已知正多面体顶点数 V ,面数 F ,棱数为 E 之间关系满足 $V + F - E = 2$,那么这样的正多面体可以是_____.

- A. 正八面体 B. 正十二面体 C. 正十六面体 D. 正二十面体

题目7.(本小题4分)三角形有很多性质,我们研究的一个方面可以从五心入手.下面提到的四心中,到三角形三个顶点的距离的平方和最小的为_____.

- A. 垂心 B. 内心 C. 重心 D. 外心

题目8.(本小题4分)语言在我看来是很优美的存在,下面给出几个例子,可以试着体味里面蕴含的思想或尝试进一步意译.“Sometimes ever,sometimes never”意为“相聚有时,后会无期”;“And leaves the world to darkness and to me”意为“仅余我与暮色平分此世界”;“Let life be beautiful like summer flowers and death like autumn leaves”意为“生如夏花之绚烂,死如秋叶之静美”.林语堂曾将“So dim, so dark. So dense, so dull. So damp, so dank, so dead”翻译为李清照的诗词“寻寻觅觅,冷冷清清,凄凄惨惨戚戚”.我最喜欢的是下面:

I love three things in the world 浮世万千,吾爱有三
The sun, the moon, and you 日,月与卿
The sun for the day, the moon for the night 日为朝,月为暮
And you for ever 而卿为朝朝暮暮

数学语言也是很美丽的,挺典型的是欧式几何的几何语言和高等数学的代数语言.我们可以尝试对于坐标系数学语言进行“翻译(translating)”.

我们约定以直角坐标系中的原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴,得到一个极坐标系.下列说法中正确的有_____.

- A. 假设非极点的点 P 的直角坐标和极坐标分别是 (x, y) 和 (ρ, θ) ,那么一定有 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$.
B. 如果我们约定在极坐标系下对于 $\theta \in [0, \pi), (\rho, \theta)$ 和 $(-\rho, \pi + \theta)$ 表示同一个点,过原点(极点)的倾斜角(为了好理解,仍使用直角坐标系下的名称)为 θ_0 那么过原点的直线的方程一定写作 $\theta = \theta_0$.
C. 圆在直角坐标系下的标准方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,在极坐标下的一般方程为 $\rho^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$.其中 r 为圆的半径, (a, b) 为圆在直角坐标系下的圆心坐标,圆心坐标在极坐标系下表示为 (ρ_0, θ_0) .

D. 我们约定:在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中, z 为非原点的任意点,设 $r = |OP|$, θ 表示 \overrightarrow{OP} 与 z 轴正方向的夹角(称天顶角),设 P 在平面 xOy 内的投影为 \overrightarrow{OQ} , φ 表示从 x 轴逆时针旋转到 OQ 上的角(称方位角),这样用数组 (r, φ, θ) 表示的坐标称为点 P 的球坐标.根据此约定,我们有 $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta$.

题目9.(本小题4分)函数(function),最早由中国清朝数学家李善兰(1811-1882)翻译,出于其著作《代数学》.之所以这么翻译,他给出的原因是“凡此变数中函彼变数者,则此为彼之函数”,也即函数指一个量随着另一个量的变化而变化,或者说一个量中包含另一个量.下面关于函数 $f(x) = x^x$ 的说法中不正确的有_____.

- A. 函数定义域为 $(0, +\infty)$ B. 函数在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上是增函数
C. 函数在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上是增函数 D. $0 < a < 1$ 时,函数 $g(x) = f(x) - a$ 有两个零点

题目10.(本小题4分)立体几何可以培养我们空间想象的能力,提高几何素养.下列关于立体几何中的命题,假命题有_____.

- A. 若平面 α, β 相交,在两个平面中各取两点,这四点都不在交线上,那么这四点可以确定1或4个平面;
- B. 在空间四边形 $ABCD$ 的各边 AB, BC, CD, DA 上依次取点 E, F, G, H .若 EF, GH 所在直线相交于点 P ,则点 P 必定在直线 AC 上;
- C. 直线 a, b 为异面直线,过直线 a 与直线 b 平行的平面有且只有一个或不存在;
- D. 空间中三个平面能把空间分成6或4部分.

题目11.(本小题4分)已知 $3m^2 \leq 2k^2 + 1$,则下列说法中正确的有_____.

- A. $\frac{m^2}{k^2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- B. $\frac{|m|\sqrt{2k^2 + 1 - m^2}}{2k^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. 若 $m > 0$,则 $\frac{6m^2 + 1}{m\sqrt{m^2 + 1}} \geq 2\sqrt{5}$
- D. $\frac{|m|\sqrt{2k^2 + 1 - m^2}}{2k^2 + 1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

题目12.(本小题4分)下列叙述中不正确的有_____.

- A. 如果两个角的正弦值相等,那么这两个角相等或互补;
- B. 如果 $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sin x$,记 $f'(x)$ 为导数 $g(x)$,则恒有 $g(f(x)) > f(g(x))$ 成立;
- C. 如果平面向量 $\mathbf{a} = (1, x)$ 与向量 $\mathbf{b} = (3, -1)$ 的夹角为钝角,那么 $x > 3$;
- D. 函数 $y = \tan x$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时函数值不存在,函数 $y = \cot x$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时函数值为0. $(k \in \mathbb{Z})$

题目13.(本小题4分)已知 $0 < x < y < \pi$,且 $e^x \sin x = e^y \sin y$,其中e为自然对数的底数,则下列选项中一定成立的是_____.

- A. $\sin x < \sin y$
- B. $\sin x + \cos y > 0$
- C. $\sin x > \cos y$
- D. $\cos x > \sin y$

题目14.(本小题4分)已知 $A, B, C \in (0, \pi)$, $A + B + C = 2\pi$, $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$, 则一定有_____.

- A. $A > B$
- B. $A = B$
- C. $A < B$
- D. 无法比较 A, B 大小

题目15.(本小题4分)已知 $a = \sin 0.01$, $b = 2^{0.02} - 1$, $c = \frac{0.03}{\pi}$,则 a, b, c 大小关系为_____.

- A. $c < b < a$
- B. $c < a < b$
- C. $b < a < c$
- D. $b < c < a$

题目16.(本小题4分)规定向量 \mathbf{m} 在向量 \mathbf{n} 上的投影为 $\text{Prj}_{\mathbf{n}} \mathbf{m}$.已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 0)$,则 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} =$ _____.

题目17.(本小题4分)函数 $y = \frac{\sqrt{(1 - 2 \sin x)^0}}{x^2 \tan x} \ln(3x + 1)$ 的定义域为_____.

题目18.(本小题4分)已知抛物线 $C : y^2 = 2x$ 的焦点为 F ,准线为 l ,点 P 在抛物线 C 上, PQ 垂直 l 于点 Q , QF 与 y 轴交于点 T , O 为坐标原点,且 $|OT| = \sqrt{3}$,则 $|PF| =$ _____.

题目19.(本小题4分) $\frac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ} + \frac{1 + \tan^2 120^\circ}{1 - \tan^2 120^\circ} =$ _____.

题目20.(本小题4分)已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{17}$, 则 $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

题目21.(本小题4分)请写出一个定义域为 $(e, +\infty)$ 并且值域为 \mathbb{R} 的函数: _____.

题目22.(本小题4分)在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 点 P 为该三角形三条垂直平分线的交点, 设 $|\overrightarrow{AP}| = m$, 并且满足 $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, $4a \cos A + 3b \cos B = 4m$, 则 $A =$ _____.

题目23.(本小题4分)已知 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x+1 = y+z$, $xy+z^2+14-7z=0$, 则 x^2+y^2 的取值范围为_____.

题目24.(本小题4分)我们从必修一第一章就学习了集合. 集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性. 集合论的基础是由德国数学家康托尔(G.Cantor 1845-1918)在19世纪70年代奠定的, 经过一大批卓越的科学家半个世纪的努力, 到20世纪20年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位, 可以说, 现代数学各个分支的几乎所有成果都构筑在严格的集合理论上. 现在我们定义 $\text{card}(S)$ 为集合 S 的元素个数, 若集合 $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 并且满足如下条件:

(i) $A \cup B \cup C = A \cup B = A \cup C = B \cup C \neq A \cap B$;

(ii) $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, 而且 $\text{card}(A \cup B \cup C) = 3$,

则称有序 (A, B, C) 为“super9”集合组, 则“super9”集合组有_____个.

题目25.(本小题4分)已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 和单位向量 \mathbf{e} 满足 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$, 并且满足条件 $|\mathbf{b} - \mathbf{e}| = 1$, $|\mathbf{a} + \mathbf{c}| + |\mathbf{a} - \mathbf{c}| = 4|\mathbf{a}|$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| + 2|\mathbf{b} - \mathbf{c}| + 4|\mathbf{c} - \mathbf{a}|$ 的最小值为_____.

第 II 卷

题目26.(本小题10分)[计分说明:请完成下面两道题目, 题目A满分5分, 题目B满分5分]

题目A.我们都知道伟大数学家高斯(Gauss 1777-1855)小时候就已经算出 $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$, 由此也可以证明诸如此类首项为1, 公差为1的等差数列的求和公式: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

事实上, 我们还有如下公式:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24},$$

$$\sum_{k=1}^n k^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90},$$

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20},$$

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)}{66}.$$

请证明第一个公式: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(注明: $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$)

题目B.证明: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ (n 为正整数).

题目27.(本小题12分)已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$.

(1)求该函数的周期 T 和单调性;

(2)将函数 $f(x)$ 的图像向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图像, 函数 $h(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 试讨论在 $[0, \pi]$ 上函数 $p(x) = h(x) - a$ 零点的情况.

题目28.(本小题14分)如图所示, 在三角形 ABC 中, $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$. O 是三角形 ABC 的外心. $OE \perp BC$, 垂足为 E , $AF \perp BC$, 垂足为 F .

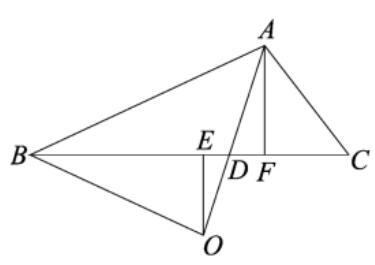


图 1: 题目28图

(1)求 $\cos \angle AOB$ 的值;

(2)设 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 求 $\lambda + \mu$ 的值;

(3)设点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心(在图中未画出), 过点 G 作直线分别交线段 AB, AC 于点 N, M (M, N 不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合), 求 $\frac{S_{\triangle ANE}}{S_{\triangle CMG}}$ 的最小值.

题目29.(本小题12分)复数(Complex number)在历史上曾一度被当时的大数学家不承认其存在. 然而复数对于在解决某些问题有它独特的优势(在以下各小题中, 解答没有本质用到复数的, 小题分数归零).

(1)试用复数的相关知识, 求 $\cos 72^\circ$ 的值;

(2)[计分说明: 请在下面两道题目中任选一道, 如果同时选择两道题目, 则按第一道计分]

题目a.设复数 z 满足 $\left| \arg \left(\frac{z+1}{z+2} \right) \right| = \frac{\pi}{6}$, 求 $\arg z$ 的取值范围.

题目b.利用复数有关知识, 证明:

$$\frac{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}{\sin x + \sin 3x + \sin 5x} = \cot x.$$

题目30.(本小题12分)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 并且过点 $\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)已知椭圆的右顶点和上顶点分别为 A 和 B , 设直线 $l: y = kx + m (m \neq 0)$ 交椭圆于 P, Q 两点, PQ 的中点为 M , 是否存在直线 l 使得 $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{AB}$? 若存在, 求出直线 l 的斜率; 若不存在, 请说明理由.

题目31.(本小题12分)已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)记 $g(x) = f(x) - m$, $m \in \mathbb{R}$, 设 $g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

题目32.(本小题12分)给定正整数 $n \geq 2$,证明:存在正整数 a, b ,使得

$$n^2 + n + 1 = \frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1}.$$

题目33.(本小题16分)[计分说明:请完成下面两道题目,题目A满分6分,题目B满分10分]

题目A.三角形 ABC 中有三点 X, Y, Z ,其中 X 为该三角形三条中线的交点, Y 满足为三角形三条垂线的交点, Z 为三角形外心.证明: X, Y, Z 三点共线且 $ZX : XY = 1 : 2$.

题目B.在锐角三角形 ABC 中,以 AB 为直径的圆 Γ_1 与 AC 交于点 E ,以 AC 为直径的圆 Γ_2 与 AB 交于一点 F ,且 H 为三角形 ABC 的垂心, O 为三角形 AEF 的外心.证明: A, O, H 三点共线.

德州一中2021级29班第一次联考

考试时间：2023年1月 满分：150 分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $\bar{z} - 2z = \frac{2(1+2i)}{1-i}$, 则 $|z| =$
 - A. 1
 - B. $\sqrt{2}$
 - C. $\sqrt{5}$
 - D. $\sqrt{10}$

2. 若集合 $A = \{x \mid \ln x > -1\}, B = \{x \mid e^x \geq ex\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(0, +\infty)$
 - B. $(0, e^{-1})$
 - C. $(e^{-1}, +\infty)$
 - D. $[1, +\infty)$

3. “向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ” 是 “ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为钝角”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件

4. 现代医疗检测技术的整体准确率可以非常的高,但在特定情况下,即使你个人检出阳性,你真正得病的概率也可以非常的低,即是说再准确的检测也未必预测得准.医学上在患病的情况下检出阳性的概率称为检测的“灵敏度”,在未患病的情况下检出阴性的概率称为检测的“特异度”.新冠疫情期间1名普通无基础病的成年人检测出阳性,在那期间新冠发病率约为1%,检测的灵敏度约为90%,特异度约为91%,则该成年人患新冠的概率约为
 - A. $\frac{9}{10}$
 - B. $\frac{4}{5}$
 - C. $\frac{1}{10}$
 - D. $\frac{1}{100}$

5. 若正三角形 ABC 的重心为 O , 记 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} =$
 - A. $-2\mathbf{a} - \mathbf{b}$
 - B. $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$
 - C. $-3\mathbf{a} - \mathbf{b}$
 - D. $-3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

6. 若首项为1的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = a_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}$, 则当 $n > 2$ 时, $a_n =$
 - A. $2^n - n$
 - B. $5 \cdot 2^{n-2} - n - 1$
 - C. $2n - 1$
 - D. $3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$

7. 已知 $a = \sin 0.01$, $b = e^{0.01} - 1$, $c = \frac{0.03}{\pi}$, 则 a, b, c 大小关系为
 - A. $a < c < b$
 - B. $a < b < c$
 - C. $c < b < a$
 - D. $c < a < b$

8. 若抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F , 过点 F 作一直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 则 $\frac{|AF|^2 \cdot |BF|^2}{4|BF|^2 + |AF|^2}$ 的最大值为
 - A. $\frac{5}{16}$
 - B. $\frac{1}{5}$
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{7}{16}$

二、选择题：本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 一个盒子中有10个样式形状都相同只有颜色不同的小球,其中3个是黄球,剩余的球是红球,一次性抽取4个小球,设取到红球的个数为 X , 则下列说法正确的有
 - A. $X \sim B(4, 0.7)$
 - B. $X \sim H(10, 4, 7)$
 - C. $E(X) = 2.8$
 - D. $P(X < 4) = \sum_{i=1}^3 P(X = i)$

10. 已知平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$,则
- A. $AA' \perp$ 面 $ABCD$ B. $AB = CD$
 C. 面 ABB' 与面 DCC' 平行 D. $ABCD$ 可以为等腰梯形
11. 对于函数 $f(x) = x^x, x > 0$, Gauss取整函数 $g(x) = [x]$, 则
- A. $f(x)$ 有一个极值点 B. $g(x)$ 是奇函数
 C. $g(f(x)_{\min}) = 0$ D. $\exists x_0 > 0$,使得 $g(\ln f(x_0) + x_0) < -1$
12. 三角函数作为初等函数之一,它的地位非常重要.在求解圆周率 π 的一些公式也可以看到三角函数的影子.已知 $\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\dots$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, 则
- A. 圆内接正 n 边形面积 $S_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$ (R 为圆的半径)
 B. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
 C. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
 D. 圆内接正 n 边形面积 $S_n = n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$ (R 为圆的半径)

三、填空题: 本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $(x^2 - 1)(1 - 2x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为_____ (用数字作答).
14. 已知函数 $f(x) = x \sin x^2 \cdot (2^x - 3a \cdot 2^{-x})$ 是偶函数,则 $a =$ _____.
15. 概率统计中的马尔可夫(Markov 1856-1922)不等式是说,对于非负的随机变量 X 和任意的正数 a ,都有 $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.那么超过人均收入5倍的人数最多占总人数的_____.
16. 若四面体 $V - ABC$ 的四个面面积都相等且体积为 $4\sqrt{3}$,其内切球的半径 $r = 2$,则该四面体的每个面的面积都为_____.

四、解答题: 本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- 17.(10分)为了研究学生成绩与普通高中假期提早开学之间是否有关系,一个调查机构经过随机对150名来自不同学校学生的调查得到了如下调查数据.

| | 不提早开学 | 提早开学 | 总计 |
|-------|-------|------|-----|
| 成绩优秀 | 54 | 18 | 72 |
| 成绩非优秀 | 36 | 42 | 78 |
| 总计 | 90 | 60 | 150 |

- (1)能否有99%的把握认为学生成绩是否优秀与是否提早开学之间有关?
- (2)若在这群人中随机选取一名同学,记事件 A 表示“该学生所在学校提早开学”,事件 B 表示“该学生成绩优秀”.
- (i) 利用该调查数据,求出 $P(A|B)$ 的估计值;
- (ii) 根据分层抽样的原则抽取15人参加主题为“没有学生拥护的教育将毫无意义”讨论活动,为了节约时间,只准备在15人中随机抽取3名同学一起上台演讲,记抽取的学生中满足事件 $\bar{A}B$ 的个数为 X ,求出 X 的分布列和数学期望。

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

| $P(\chi^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|--------------------|-------|-------|--------|
| k | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18.(12分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B \cos C - \sin C(1 - \cos B)} = \frac{a + c}{b}.$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a + b + c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆半径 R 的取值范围.

19.(12分) 如图在梯形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ, CD = 2, AD = AB = 1, BDEF$ 为正方形, $AC \cap BD = O$, 面 $EDB \perp$ 面 ABC .

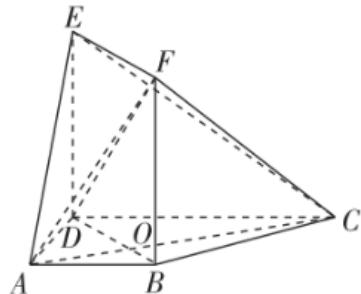


图 2: 题19图

(1) 证明: 在棱 AE 上存在一点 G , 使得平面 $OBG \parallel$ 平面 EFC ;

(2) 求二面角 $B - EF - C$ 的正弦值.

20.(12分) 已知实数 a_0 满足 $a_0 - a_0 \ln a_0 = 1 + \ln a_0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3a_0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = S_n - 2^{n+2} + e^n$, 求 b_n 的最小值.

(参考数据: $e = 2.71 \dots, \ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.097$)

21.(12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 并且过点 $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 记椭圆的右焦点为 F , 右顶点为 P , 过 F 的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点(该两点都不与 P 重合), 证明: $\tan \angle OPM \cdot \tan \angle OPN$ 为一定值.

22.(12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2, a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 1$ 且存在 $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $2x_1^2 + x_2^2 > \frac{4}{3}$.

德州一中2021级29班第二次联考

考试时间：2023年6月 满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.
如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.
4. 穿越逆境,抵达繁星.

一、单项选择题：本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid 2^x > -1\}, B = \{x \mid x \subseteq A\}$,则 $A \cap B =$
 - A. \mathbb{R}
 - B. $(0, +\infty)$
 - C. $\{\mathbb{R}\}$
 - D. \emptyset
2. 已知 $\bar{z} = 3 - i$,则 $z + 2i$ 的虚部为
 - A. $3i$
 - B. i
 - C. 3
 - D. 1
3. 已知 A, B 为椭圆 C 的两个焦点, M 是椭圆的一个顶点, $\angle AMB = \frac{2\pi}{3}$, C 的离心率为
 - A. $\frac{1}{2}$
 - B. $\frac{2}{3}$
 - C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 - D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 若圆上有9个不同点,记不同点连线的第 k 个在圆内的交点为 M_k ,则 k 的最大值为
 - A. 126
 - B. 210
 - C. 42
 - D. 84
5. 三棱锥 $A - BCD$ 中, $AC \perp BC, BD \perp CD$,若 $AB = 3, BD = 1$,则当该三棱锥的体积最大时, $BC =$
 - A. 2
 - B. $\sqrt{5}$
 - C. $\sqrt{2}$
 - D. $\sqrt{7}$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^6 \binom{6}{n} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n$,则该数列前六项和 $S_6 =$
 - A. $\frac{9}{5}$
 - B. $\frac{10}{7}$
 - C. 1
 - D. 以上都不对
7. 33^{22} 除以5的余数是
 - A. 4
 - B. 3
 - C. 2
 - D. 1
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0, a_n \neq 1$,且 $a_{n+1} = |a_n \ln a_n|$.若实数对 (β, γ) 满足当 $a_1 = \beta$ 时,数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列并且当 n 充分大时该数列会趋向一个定值 γ ,则实数 β 与 γ 可能满足的是
 - A. $\frac{\beta}{\gamma} = 1$
 - B. $\frac{\beta}{\gamma} = 2$
 - C. $\frac{\beta}{\gamma} = e^2$
 - D. $\frac{\beta}{\gamma} = e^3$

二、多项选择题：本题共4小题,每小题5分,共20分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 若 x_1, x_2, \dots, x_n 是n个互异实数,已知集合 $A = \{x \mid x = x_i, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$,且对于任意 $\alpha \in A$ 都有 $\sin \alpha = \beta \in B$.设 $M_{(j)}$ 满足 $M_{(j)} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_j\} = M$, $a_k \in M, a_k \notin M_{(j)}, 1 \leq k \leq j, k \in \mathbb{N}$,则下列说法不正确的有

- A. 集合 $B = \{y \mid y = \sin x_i, x_i \in A\}$
 - B. 集合B中元素极差不大于2
 - C. 集合B中元素个数小于等于集合A中元素个数
 - D. 集合 $A_{(\lambda)}$ ($1 \leq \lambda \leq n, \lambda \in \mathbb{N}$) 中元素标准差可能等于集合B中元素标准差
10. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数,且 $f(x-2)$ 与 $f(x+2)$ 都是奇函数,则下面不一定正确的有
- A. $f(x)$ 是奇函数
 - B. $f(x)$ 是偶函数
 - C. $f(x+4) = f(x)$
 - D. $f(x+6)$ 是奇函数

11. 已知点 (x, y) 在曲线 $C : (x^3 - 5x + y)^{2023} + x^{2023} = -x^3 + 4x - y$ 上,记 $f(x) = y$,则有

- A. $f(x)$ 为奇函数
- B. $f(x)$ 值域为 $(0, +\infty)$
- C. $g(x) = f(x) + 4$ 有且仅有1个零点
- D. 若正方形的四个顶点都在该曲线上, 则满足条件的正方形有且仅有2个

12. 已知正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中被挖去以底面内切圆为底,高与正方体边长相同的圆锥, $AB = 2$,则下列说法中正确的有

- A. 该立体图形体积为 $8 - \frac{2\pi}{3}$
- B. 若将一小球放入圆锥空隙中,球心恰与正方体体心重合,则小球半径为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- C. 若将一半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的小球放入圆锥,则球心与正方体体心的距离为 $\frac{5}{2}$
- D. 若将两个相同的此立体模型从面 $ABCD$ 相接形成新的模型一;将原立体图形沿面 $DB'B$ 切开再将其中一半沿面 $DB'B$ 绕正方体体心旋转 180° 拼接成模型二,则模型一所能容纳的最大球体积为模型二所能容纳的8倍(不考虑放入时的限制)

三、填空题: 本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 在正八边形 $ABCDEFGH$ 中记 $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AE} = \mathbf{b}$,则 $\overrightarrow{HD} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示)
14. 过点 $M(2, 4)$ 作曲线 $y^2 = 4 - x^2$ 的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 《三体》中讲述了初始形成的宇宙其实是十一维的,在他们的世界中除了我们三维空间的长宽高还有其他八个方向. 对于一个广义的体积定义,在 n 维空间 ($n > 2$ 且 n 为正整数) 中半径为 R 的球的体积 V_n 可以写成下面的形式: $V_n = \frac{2\pi R^n}{n} \cdot T_{n-2}$, 已知其中 T_n 为通项公式为 $a_n = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积,则十一维空间中单位球的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 当空间的维度趋向于正无穷大的时候,单位球的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (Hint: $(n+1)! = n!(n+1)$)

16. 某个城市有10条东西向的公路和10条南北向的公路,共交于100个路口. 小明从某个路口驾车出发,经过每个路口恰一次,最后回到出发点. 在经过每个路口时,向右转不需要等待,直行需要等待1分钟,向左

转需要等待2分钟,则小明在路口等待总时间的可能值为_____分钟.(不忽略起点终点处的转弯时间)

四、解答题：本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10分)已知中空正四面体 $A-BCD$,高为 h ,考虑向该容器注入水.(不考虑水的变化)

(1) 若面 BCD 放置于地,求装水至 $\frac{1}{2}h$ 处所需水的体积;

(2) 若保持(1)中水的体积不变,将 A 放置于地,面 BCD 与地面平行,求此时水的高度.

18.(12分) 已知锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, a,b,c 分别为 A,B,C 的对边,记 $\triangle ABC$ 的面积为 S ,且

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos B}{\sin C - \cos C}.$$

(1) 证明: $a^2 < bc$;

(2) 若 AD 为 BC 边上的高, E 是线段 AB 上一点(不与 A, B 重合), $\sin C = \frac{12}{13}$,记 $DE = l$,求 $\frac{l}{\sqrt{S}}$ 的取值范围.

19.(12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\cos x - x}{x^2}, x > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 若正数 a 使得 $af(x) + \frac{8\pi}{9} \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

20.(12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足首项为1,且有 $a_{n+1} - a_n = 2$,数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n b_n = (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$.

(1) 设 $S_n = \sum_{i=1}^n b_i$,判断是否存在实数 λ 使得 $b_n \leq \lambda S_n$ 恒成立,若存在,求出 λ 的取值范围;若不存在,说明理由;

(2) 试求使得 $c_n = (a_n + 2)^{2023}$ 展开式中 n^m 的系数最大的正整数 m .

21.(12分) 在直角坐标系 xOy 中,若点 P 到 y 轴的距离等于点 P 到点 $(2, 0)$ 的距离,记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 若 W 与双曲线 $C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4-a^2} = 1 (1 < a < 2)$ 相交于 A, B 两点, F 是 C 的右焦点,直线 AF 分别与 W, C 交于点 M, N (不同于 A, B),直线 BM, BN 分别交 x 轴于 P, Q 两点. 试求 $\frac{|FQ|}{|FP|}$ 的取值范围.

22.(12分) A与B两人进行“抽Ghost牌”游戏. 游戏开始时,A手中有 n 张两两不同的牌,其中 $n \in \mathbb{N}_+$. B手上有 $n+1$ 张牌,其中有 n 张牌与A手中的牌相同,另一张牌为Ghost牌,与其他所有牌都不同. 假设每一次抽牌从对方手上抽到任一张牌的概率都相同. 游戏规则为:

i) 双方交替从对方手中抽取一张牌,A先从B手中抽取;

ii) 若某位玩家抽到对方的牌与自己手中的某一张一致,则将两张牌丢弃;

iii) 最后剩一张牌时,持有这一张牌的玩家为输家.

(1) 假设初始时A手上有1张牌,求A获胜的概率;

(2) 设初始A手上有 n 张牌时A的胜率为 a_n .

①试证明: 当 $n > 2$ 时, $(n+2)a_n = na_{n-2} + 1$;

②求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,并说明这个游戏是否公平.

德州一中2021级29班第三次联考

考试时间：2023年8月 满分：180 分

注意事项：

1. 答卷请答到本试卷配套的答题卡上，写在草稿纸和本试卷上无效。
2. 本试卷分为第一试与第二试，各90分，满分180分。
3. 考试时间：2023.8.20 第一试8:30-11:20；第二试13:30-16:20。
4. 请勿外传试题。
5. 请诚信考试，祝君好运！

第一试

题目1.(本小题30分)已知 ΔABC 是锐角三角形， a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 的对边， $\frac{a^2}{b} = b + c$. 求 $\frac{\sqrt{2}a + c}{2b}$ 的取值范围。

题目2.(本小题30分)赌徒永远不明白，与自己对赌的不是运气，也不是庄家，他们是在与狄利克雷、伯努利、高斯、纳什、凯利这样的大数学家对决数学。下面我们来模拟一个情形：假设龙宝宝进入赌场参与一个赌博游戏，我们为了简化模型，姑且假设他去的是正规的理想赌场，即每一局龙宝宝赌赢的概率为50%，且赌输就要输掉1元，赌赢就会赢得1元，龙宝宝会一直玩下去，直到遇到如下两种情况龙宝宝会结束赌博：一种是手中赌金为0元，即他输光了；一种是龙宝宝赌到预期的 B 元，他也遵循“及时”收手的原则停止赌博。根据以上理想化的假设。

证明：久赌无赢家。

题目3.(本小题30分)若 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{9}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq 6.$$

第二试

题目4.(本小题30分)考虑序列

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{n^2}, a_1 = \frac{2}{5}.$$

证明：对所有正整数 n 都有 $a_n < 1$.

题目5.(本小题30分) “我在时间的荒野里想起你” .柒柒与苏苏远隔千里而彼此思念.假使苏苏与柒柒要进行信息交谈，为防止被人窃取，他们打算要进行信息加密.柒柒要传给苏苏一个明文 m ，柒柒按如下方式进行加密：取相当大的互质数 p 与 q ，令 $N = pq > m$ ，规定 $r = \varphi(N)$ （这里 $\varphi(N)$ 表示小于等于 N 的正整数中与 N 互质数的个数），之后再取一正整数 e 使得 $e < r$ 且 $(e, r) = 1$ 与一正整数 d ，使得 $ed \equiv 1 \pmod{r}$.此后两人约定公钥为 (N, e) ，加密后的密文 $c \equiv m^e \pmod{N}$.苏苏手中有私钥 (N, d) ，可以对密文 c 进行解密得到明文 m ，这里苏苏和柒柒知道 $m \equiv c^d \pmod{N}$. 试说明这种加密算法可行性与安全性.

[Hint:对于整数 a, b, n , $a \equiv b \pmod{n}$, 若 a 与 b 除以 n 的余数相同.]

题目6.(本小题30分)已知一平面图形中 AB, AC 为一定圆的切线， A 为 l_1 上的定点，定圆与 l_2 相切且 $l_1 \perp l_2$.线段 AB 与线段 AC 分别交直线 l_2 与 D, E 两点，点 F 为不与 D 重合且在 D 的右侧的一动点，总是满足 $DF = GE$.

证明：线段 FG 必然与定圆相交.

德州一中2021级29班第四次联考

考试时间：2024年1月 满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。

如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

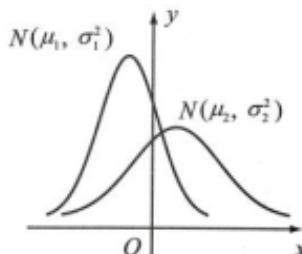
4. 穿越逆境，抵达繁星。

一、单项选择题：本题共6小题，每小题5分，共30分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid \ln x > 0\}$, $B = \{x \mid y^{\frac{x}{\ln y}} \leq e, y > 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$

- A. $(-\infty, e]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(0, 1]$ D. $(0, e]$

2. 设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ($\sigma_1 > 0$) 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ($\sigma_2 > 0$) 的密度函数图像如下图所示，则下列说法正确的是



(第2题)

图 3: 题2图

A. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$

B. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$

C. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$

D. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , $a_1 > 0$, 其公比 $q > 1$, 若 $T_{2023} < 1, T_{2024} > 1$, 则小于1的最大项是

A. a_{2023}

B. a_{2024}

C. a_{1012}

D. 以上都不对

4. 已知四面体 $S - ABC$ 中 $SC \perp$ 面 ABC , $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$, 以 SC 为边长的正方形面积为三角形 ABC 面积的 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 倍, 该四面体外接球的半径长为 $\frac{3}{2}SC$, 则 $\triangle ABC$ 中 AC 与 BC 的较长边与较短边之比为

A. $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{13+\sqrt{165}}{2}$

C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D. 以上都不对

5. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆直径长等于 AC 与 AB 长度之和, 则角 A 的最大值为

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $2 \arccos \frac{1}{4}$

D. 以上都不对

6. 从18个相同的小球中分出4堆放入编号为1,2,3,4的四个箱子中, 要求每个箱子中的小球个数多于自身编号数, 则有_____种分法.

- A. 165 B. 70 C. 35 D. 以上都不对

二、多项选择题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

7. 若 x_1, x_2, \dots, x_n 是n个互异实数, 已知集合 $A = \{x \mid x = x_i, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$, 且对于任意 $\alpha \in A$ 都有 $\sin \alpha = \beta \in B$. 设 $M_{(j)}$ 满足 $M_{(j)} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_j\} = M$, $a_k \in M$, $a_k \notin M_{(j)}$, $1 \leq k \leq j$, $j, k \in \mathbb{N}$. 集合Q的元素个数称为该集合的势, 记作 $|Q|$, 若两个无限集合中的元素存在一一对应关系, 则称两个集合势相同. 据以上材料, 下列说法正确的有

- A. “存在 $m \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq n$ 使得 $x_p = x_q + 2m\pi$ ”是“ $|B| \leq n$ ”的充分不必要条件
 B. “存在 $\gamma \in B, \gamma \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ”是“ $|B| > n$ ”的既不充分也不必要条件
 C. 若 $0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}$, $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, $|A|, |B| > 100$, 则 $1 \leq \lambda \leq 100$ 时, 有 $|A_{(\lambda)}| = |B_{(\lambda)}|$
 D. 若 $D = \left\{ \zeta \mid \zeta = \frac{r}{2}, r \in \mathbb{N} \right\}$, 则 $1 \leq \mu \leq 100$, 有 $|D_{(\mu)}| = |\mathbb{N}_{(\mu)}|$

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为F, 点F关于y轴的对称点为点E. 过F作一直线l交C于A△B两点, 点A在F的上侧且在B右侧, 且l交y轴于点M. 若 $\sin \angle AFE = \frac{3}{5}$, 则下列说法正确的有

- A. 直线AE的斜率小于 $\frac{3}{5}$ B. $|AE| = \sqrt{34}p$
 C. $|BM| < \frac{2}{5}|BF|$ D. $\sin \angle AEB > \frac{5}{6}$

9. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (\sin \alpha, \cos \alpha), \overrightarrow{OB} = (\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta))$, 记 $\overrightarrow{AB} = (m, n)$, 其中满足 $\alpha + \frac{\beta}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 下面正确的是

- A. $\frac{n}{m} = -\tan\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$
 B. \overrightarrow{OA} 在 \overrightarrow{OB} 上的投影数量为 $\cos \beta$
 C. “ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$ ”是“ $\beta - \alpha = \pi$ ”的必要不充分条件
 D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \cos \frac{\beta}{2}, 2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2}\right)$

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分.

10. 已知 $M = \{x \mid x^3 = 8, x \in \mathbb{C}\}$, $N = \{|x| \mid x \in M\}$, 则 $\sum_{x \in N} x = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, AC 边上的高为1, 则 $\angle B$ 的最大值是_____.

12. 数学可以刻画样本之间的“距离”, 阎式距离就是常用的一种刻画距离的方式, 两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 的阎式距离为 $D_p(A, B) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, 其中p为非零常数. 已知点P到两点 $F_1(-c, 0)$ 与 $F_2(c, 0)$ 的阎式距离 $D_p(P, F_1) + D_p(P, F_2) = 2m > 2c$, 若 $m = 2$, 则P点纵坐标的取值范围为_____; P点到直线 $x - 2y + 4 = 0$ 的最小距离为_____.

四、解答题: 本题共6小题, 共90分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. (15分) 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A = \sin B \sin C$.

(1) 试求角A的最大值;

(2) 若锐角 $\triangle ABC$ 中 $b = 1$, 求 $\sin C$ 的取值范围.

14. (15分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $AB = BC = B_1C_1 = 1$, 侧面 ABB_1A_1 是矩形, $\angle BB_1C_1 = \frac{\pi}{4}$. 点 M 在 BB_1 上满足 $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 点 N 为 CC_1 的中点, 且 $\overrightarrow{BP_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC_1}$.

(1) 证明: 在 A_1B_1 上存在一点 Q , 使得面 $QMN \parallel$ 面 A_1BC_1 ;

(2) 求二面角 $P_1 - AN - M$ 的正弦值.

15. (15分) 足球是一项有趣的运动, 它有益于我们的身心健康。在面对足球时有时也会抒发人生的感悟, 正如足球解说员贺炜所言: “人生当中成功只是一时的, 失败却是主旋律。但是如何面对失败, 却把人分成了不同的样子。有的人会被失败击垮, 有的人能够不断地爬起来继续向前……我想真正的成熟并不是追求完美, 而是直面自己的缺憾, 这才是生活的本质。”苏苏参加足球训练, 每次训练都随机, 他选择传球与射门的概率均为0.5, 每次训练时成功概率是 p :

①传球时 $p = \frac{2}{3}$, 成功记1分, 否则记0分;

②射门时 $p = \frac{1}{3}$, 成功记2分, 否则记0分.

已知苏苏连续测试 n 次, 他的总得分记为 X 分, 记其数学期望为 $E(X)$, 方差为 $D(X)$. 设测试达到 n 次时结束.

(1) 证明: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$;

(2) 若 $n = 2$, 求 X 的分布列、数学期望和方差;

(3) 记苏苏每一次测试都成功结束测试的概率为 $f(n)$, 试求出 $f(n)$ 的通项公式.

16. (15分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 且过点 $M\left(1, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$, 过点 M 作 MP 平行于 y 轴. 点 P 在抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 点 P 到 E 的焦点距离为2.

(1) 求椭圆 C 与抛物线 E 的方程;

(2) 若一直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交抛物线 E 于 T, H 两点, 记 TH 的中点为 Q , $|QT|^2 - |OQ|^2 = 2p$.

①证明: TH 过一定点;

②记 TH 过定点为 G , 问: 是否存在一点 K , 使得 $\frac{|KA|}{|GA|} = \frac{|KB|}{|GB|}$? 若存在, 求出点 K 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

17. (15分) 已知函数 $f(x) = \ln x - (x - a)^2$, $g(x) = axe^{-x}$.

(1) 若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 + x_2 > 2a$;

(2) 若 $h(x) = f(x+1) + g(x)$ 的图像与 $y = -(x+1-a)^2$ 的图像有两个交点, 并且交点横坐标分别位于区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 上, 求实数 a 的取值范围.

18. (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_n^2$, $a_1 = \frac{2}{5}$.

(1) 若 $\lambda = 0$, $\mu = 2$, 求该数列前 n 项积 T_n ;

(2) 若 $\lambda = 1$ 时:

① $\mu = 2$ 时, 记 $c_n = \frac{2}{2a_n + 1}$, 证明: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{5}{2}$;

② $\mu = \frac{1}{n^2}$ 时, 证明: $a_n < \frac{6}{5}$.