导数 27 个专题

目 录

专题1：切线问题

1. 若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+2x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\ln\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\ln 2,+\infty)$

【答案】 A

【解析】 设公切线与函数 $f(x)=\ln x$ 切于点 $A(x_1,\ln x_1)\ (x_1>0)$，

则切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$；

设公切线与函数 $g(x)=x^2+2x+a$ 切于点 $B(x_2,x_2^2+2x_2+a)\ (x_2<0)$，

则切线方程为 $y-(x_2^2+2x_2+a)=2(x_2+1)(x-x_2)$，

所以有 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2(x_2+1)\\ \ln x_1-1=-x_2^2+a.\end{cases}$，$\because x_2<0<x_1$，$\therefore 0<\frac{1}{x_1}<2$.

又 $a=\ln x_1+\left(\frac{1}{2x_1}-1\right)^2-1=-\ln\frac{1}{x_1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1}-2\right)^2-1$，令 $t=\frac{1}{x_1}$，

$\therefore 0<t<2$，$a=\frac{1}{4}t^2-t-\ln t$.

设 $h(t)=\frac{1}{4}t^2-t-\ln t(0<t<2)$，则 $h'(t)=\frac{1}{2}t-1-\frac{1}{t}=\frac{(t-1)^2-3}{2t}<0$，

$\therefore h(t)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数，则 $h(t)>h(2)=-\ln 2-1=\ln\frac{1}{2\mathrm{e}}$，

$\therefore a\in\left(\ln\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$，故选 A.

2. 已知直线 $y=2x$ 与曲线 $f(x)=\ln(ax+b)$ 相切，则 ab 的最大值为 (　　)

A. $\frac{\mathrm{e}}{4}$　　B. $\frac{\mathrm{e}}{2}$　　C. e　　D. $2\mathrm{e}$

【答案】 C

【解析】 设切点 $(x_0,\ln(ax_0+b))$，则由 $f'(x_0)=\frac{a}{ax_0+b}=2$ 得 $ax_0+b=\frac{1}{2}a(a>0)$，

又由 $\ln(ax_0+b)=2x_0$，得 $x_0=\frac{1}{2}\ln(ax_0+b)=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，

则 $b=\frac{a}{2}-ax_0=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$，有 $ab=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\ln\frac{a}{2}(a>0)$，

令 $g(a)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\ln\frac{a}{2}$，则 $g'(a)=a\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{a}{2}\right)$，

故当 $0<a<2\sqrt{\mathrm{e}}$ 时 $g'(a)>0$；当 $a>2\sqrt{\mathrm{e}}$ 时 $g'(a)<0$，

故当 $a=2\sqrt{\mathrm{e}}$ 时 $g(a)$ 取得极大值也即最大值 $g(2\sqrt{\mathrm{e}})=\mathrm{e}$. 故选：$C$.

3. 已知 P 是曲线 C_1：$y=\mathrm{e}^x$ 上任意一点，点 Q 是曲线 C_2：$y=\frac{\ln x}{x}$ 上任意一点，则 $|PQ|$ 的最小值是 (　　)

A. $1-\frac{\ln 2}{2}$　　B. $1+\frac{\ln 2}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 (1) 曲线 C_1：$y=\mathrm{e}^x$，求导得 $y'=\mathrm{e}^x$，

易知 C_1 在点 $A(0,1)$ 处切线方程为 $y=x+1$.

下面证明 $e^x \geqslant x+1$ 恒成立：

构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，求导得 $f'(x)=e^x-1$，

则 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增 .

故函数 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $e^x \geqslant x+1$ 恒成立，有 C_1 为下凸曲线

(2) 曲线 C_2：$y=\frac{\ln x}{x}$，求导得 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x=1$ 时，$y'=1$，且 C_2 过点 $B(1,0)$

故 C_2 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

下面证明 $x-1\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立：

令 $F(x)=x^2-x-\ln x$，则 $F'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=0$，即 $F(x)\geqslant F(1)=0$，

则 $x^2-x-\ln x\geqslant 0$，即 $x-1\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，有 C_2 为上凸曲线

(3) 由 C_1 在 $A(0,1)$ 处切线 $y=x+1$ 与 C_2 在 $B(1,0)$ 处的切线 $y=x-1$，知：它们相互平行

又直线 AB 的斜率 $k=-1$，即可知：直线 AB 与两条切线同时垂直

$\therefore$ 综上，知：$|PQ|$ 最小时，A 即为 P 点，B 即为 Q 点，故 $|PQ|_{\min}=|AB|$

$\therefore |PQ|_{\min}=|AB|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故选：$D$

4. 若曲线 $y=ax+2\cos x$ 上存在两条切线相互垂直，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B. $[-1,1]$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $[-\sqrt{3},1]$

【答案】 A

【解析】 【解析】$y'=a-2\sin x$，要使曲线 $y=ax+2\cos x$ 上存在两条切线相互垂直，

只需切线斜率最小时，其负倒数仍在导函数值域内取值，即 $-\frac{1}{y'_{\min}}\leqslant y'_{\max}$，显然 $y'_{mn}<0$，

故只需 $(y')_{\min}\times(y')_{\max}\leqslant-1$，

因为 $y'=a-2\sin x$ 最小值为 $a-2<0$，最大值为 $a+2>0$，

所以 $(a-2)(a+2)\leqslant-1$，即 $a^2\leqslant 3$，

解得 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$. 故选：$A$.

5. 已知关于 x 不等式 $ae^x\geqslant x+b$ 对任意 $x\in R$ 和正数 b 恒成立，则 $\frac{a}{b}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】 B

【解析】 设 $f(x)=ae^x$，$g(x)=x+b$，

若 $ae^x\geqslant x+b$，对任意 $x\in R$ 和正数 b 恒成立，

则 $f(x)\geqslant g(x)$，对任意 $x\in R$ 和正数 b 恒成立，

如图 1，

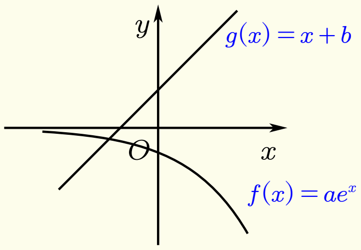


图1

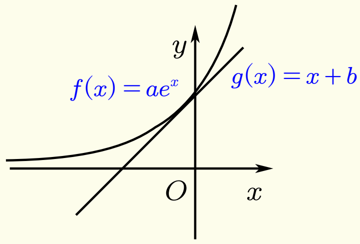


图2

$a\leqslant 0$ 时，$ae^x\geqslant x+b$，对任意 $x\in R$ 和正数 b 不恒成立；

如图2，$a>0$ 时，$f(x)=ae^x$，则 $f'(x)=ae^x$，

设 $f'(x_0)=ae^{x_0}=1$，解得 $x_0=-\ln a$，且 $f(x_0)=ae^{x_0}=ae^{-\ln a}=1$，

$\therefore$ 当 $f(x)=ae^x$ 的切线斜率为1时，切点坐标为 $(-\ln a,1)$，

由直线的点斜式方程可得切线方程为 $y-1=x+\ln a$，

即 $y=x+\ln a+1$，

若 $f(x)\geqslant g(x)=x+b$，对任意 $x\in R$ 和正数 b 恒成立，则 $\ln a+1\geqslant b$

$\therefore \ln a-\ln b\geqslant b-1-\ln b \therefore \dfrac{a}{b}\geqslant \mathrm{e}^{b-1-\ln b}$，

设 $h(b)=b-1-\ln b$，$b>0$

$h'(b)=1-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-1}{b}$，

$\therefore b=1, h'(b)=0$，$b>1, h'(b)>0$，$b<1, h'(b)<0$，

$\therefore h(b)\geqslant h(1)=0$，

$\therefore \dfrac{a}{b}\geqslant \mathrm{e}^{b-1-\ln b}\geqslant \mathrm{e}^{h(b)}\geqslant \mathrm{e}^0=1$ 故选：B.

6. 若存在实数 a,b，使不等式 $2\mathrm{e}\ln x\leqslant ax+b\leqslant \dfrac{1}{2}x^2+\mathrm{e}$ 对一切正数 x 都成立(其中 e 为自然对数的底数)，则实数 a 的最大值是 (　　)

A. $\sqrt{\mathrm{e}}$　　B. $2\mathrm{e}$　　C. $2\sqrt{\mathrm{e}}$　　D. 2

【答案】 C

【解析】 存在实数 a,b，使不等式 $2\mathrm{e}\ln x\leqslant ax+b\leqslant \dfrac{1}{2}x^2+\mathrm{e}$ 对一切正数 x 都成立，要求 a 的最大值，临界条件即为直线 $y=ax+b$ 恰为函数 $f(x)=2\mathrm{e}\ln x, g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\mathrm{e}$ 的公切线.

设 $f(x)=2\mathrm{e}\ln x$ 的切点为 (x_1,y_1) $(x_1>0)$，$f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}}{x}$，$\therefore a=\dfrac{2\mathrm{e}}{x_1}$.

设 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\mathrm{e}$ 的切点为 (x_2,y_2) $(x_2>0)$，$g'(x)=x$，$\therefore a=x_2$，

所以 $a=\dfrac{2\mathrm{e}}{x_1}=x_2$，$\therefore x_1x_2=2\mathrm{e}$.

由题得 $\dfrac{2\mathrm{e}\ln x_1-\dfrac{1}{2}x_2^2-\mathrm{e}}{x_1-x_2}=a=x_2$，$\therefore 2\ln x_1+\dfrac{2\mathrm{e}}{x_1^2}-3=0$.

设 $h(x_1)=2\ln x_1+\dfrac{2\mathrm{e}}{x_1^2}-3(x_1>0)$，所以 $h'(x_1)=\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{4\mathrm{e}}{x_1^3}=\dfrac{2x_1^2-4\mathrm{e}}{x_1^3}$，

所以函数 $h(x_1)=2\ln x_1+\dfrac{2\mathrm{e}}{x_1^2}-3$ 在 $(0,2\sqrt{\mathrm{e}})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$ 单调递增.

又 $h(\sqrt{e})=2\ln\sqrt{e}+\frac{2e}{e}-3=1+2-3=0$，

当 $x_1\to+\infty$ 时，$h(x_1)=2\ln x_1+\frac{2e}{x_1^2}-3>0$，

所以方程另外一个零点一定大于 $2\sqrt{e}$. 所以方程小的零点为 $\sqrt{e}$，

所以 $a_{\max}=\frac{2e}{\sqrt{e}}=2\sqrt{e}$. 故选：$C$

7. 若对函数 $f(x)=2x-\sin x$ 的图象上任意一点处的切线 l_1，函数 $g(x)=me^x+(m-2)x$ 的图象上总存在一点处的切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则 m 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\frac{e}{2},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{e}{2}\right)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(0,1)$

【答案】 D

【解析】 由 $f(x)=2x-\sin x$，得 $f'(x)=2-\cos x\in[1,3]$，所以 $-\frac{1}{2-\cos x}\in\left[-1,-\frac{1}{3}\right]=A$，

由 $g(x)=me^x+(m-2)x$，得 $g'(x)=me^x+m-2$.

(1) 当 $m>0$ 时，导函数单调递增，$g'(x)\in(m-2,+\infty)$，

由题意得 $\forall x_1,\exists x_2,f'(x_1)g'(x_2)=-1\ \therefore g'(x_2)=-\frac{1}{f'(x_1)}\ \therefore A\subseteq B$

故 $m-2<-1$，解得 $0<m<1$；

(2) 当 $m<0$ 时，导函数单调递减，$g'(x)\in(-\infty,m-2)$，

同理可得 $m-2>-\frac{1}{3}$，与 $m<0$ 矛盾，舍去；

(3) 当 $m=0$ 时，不符合题意 .

综上所述：m 的取值范围为 $(0,1)$. 故选：D.

8. 若过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 $C:y=xe^x$ 相切，则 m 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\frac{5}{e^2},0\right)$　　B. $\left(-\frac{5}{e^2},e\right)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $\left(-\frac{3}{e^2},-\frac{1}{e}\right)$

【答案】 A

【解析】 设切点为 $M(x_0,y_0)$，$\because y=xe^x$，$\therefore y'=(x+1)e^x$，

$\therefore M$ 处的切线斜率 $k=(x_0+1)e^{x_0}$，则过点 P 的切线方程为 $y=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)+x_0e^{x_0}$，

代入点 P 的坐标，化简得 $m=(-x_0^2+x_0+1)e^{x_0}$，

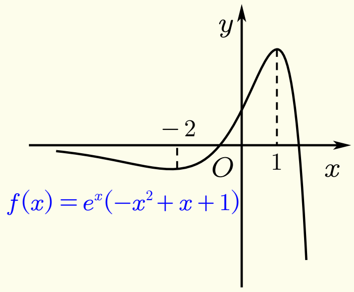
$\because$ 过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 $C:y=xe^x$ 相切，

$\therefore$ 方程 $m=(-x_0^2+x_0+1)e^{x_0}$ 有三个不等实根 .

令 $f(x)=(-x^2+x+1)e^x$，求导得到 $f'(x)=(-x^2-x+2)e^x$，

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

如图所示，故 $f(-2)<m<0$，即 $-\frac{5}{e^2}<m<0$. 故选：A.



9. 已知 $y=kx+b$ 是函数 $f(x)=\ln x+x$ 的切线，则 $2k+b$ 的最小值为__________.

【答案】 $2+\ln 2$

【解析】 根据题意，直线 $y=kx+b$ 与函数 $f(x)=\ln x+x$ 相切，设切点为 $(m,\ln m+m)$，

函数 $f(x)=\ln x+x$，其导数 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$，则 $f'(m)=\dfrac{1}{m}+1$，

则切线的方程为：$y-(\ln m+m)=(\dfrac{1}{m}+1)(x-m)$，变形可得 $y=(\dfrac{1}{m}+1)x+\ln m-1$，

又由切线的方程为 $y=kx+b$，

则 $k=\dfrac{1}{m}+1$，$b=\ln m-1$，

则 $2k+b=\dfrac{2}{m}+2+\ln m-1=\ln m+\dfrac{2}{m}+1$，

设 $g(m)=\ln m+\dfrac{2}{m}+1$，其导数 $g'(m)=\dfrac{1}{m}-\dfrac{2}{m^2}=\dfrac{m-2}{m^2}$，

在区间 $(0,2)$ 上，$g'(m)<0$，则 $g(m)=\ln m+\dfrac{2}{m}+1$ 为减函数，

在 $(2,+\infty)$ 上，$g'(m)>0$，则 $g(m)=\ln m+\dfrac{2}{m}+1$ 为增函数，

则 $g(m)_{\min}=g(2)=\ln 2+2$，即 $2k+b$ 的最小值为 $\ln 2+2$；故答案为 $\ln 2+2$.

10. 存在 $k>0,b>0$ 使 $kx-2k+b\geqslant\ln x$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{k}$ 的最小值为____________.

【答案】 1

【解析】 存在 $k>0,b>0$ 使 $kx-2k+b\geqslant\ln x$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，

则等价于存在 $k>0,b>0$，$y=k(x-2)+b$ 在 $y=\ln x$ 的上方 .

直线 $y=k(x-2)+b$ 过定点 $(2,b)$，即定点在直线 $x=2$ 上，

设直线 $y=k(x-2)+b$ 与 $y=\ln x$ 相切于点 (x_0,y_0)，

$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以 $k=\dfrac{1}{x_0}$，

由 $k=\dfrac{y_0-b}{x_0-2}=\dfrac{\ln x_0-b}{x_0-2}$ 得 $k=\dfrac{\ln\frac{1}{k}-b}{\frac{1}{k}-2}$，

化简得 $b=2k-1-\ln k$，故 $\dfrac{b}{k}=2-\dfrac{1}{k}-\dfrac{\ln k}{k}$.

构造函数 $g(k)=2-\dfrac{1}{k}-\dfrac{\ln k}{k}(k>0)$，则 $g'(k)=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1-\ln k}{k^2}=\dfrac{\ln k}{k^2}$，

所以当 $0<k<1$ 时，$g'(k)<0$，函数 $g(k)$ 递减，当 $k>1$ 时，$g'(k)>0$，函数 $g(k)$ 递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2-1=1$. 所以 $\dfrac{b}{k}$ 的最小值为 1. 故答案为：1

11. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+2)$ 的切线，则 $k=$ ________.

【答案】 1 或 $\frac{1}{\mathrm{e}}$

【解析】 设 $y=kx+b$ 与 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln(x+2)$，分别切于点 (x_1,e^{x_1})，$(x_2,\ln(x_2+2))$，

由导数的几何意义可得：$k=\mathrm{e}^{x_1}=\frac{1}{x_2+2}$，即 $x_2+2=\frac{1}{\mathrm{e}^{x_1}}$，①

则切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\mathrm{e}^{x_1}x-\mathrm{e}^{x_1}x_1+\mathrm{e}^{x_1}$，

或 $y-\ln(x_2+2)=\frac{1}{x_2+2}(x-x_2)$，即 $y-\ln(x_2+2)=\frac{1}{x_2+2}(x-x_2)$，②

将①代入②得 $y=\mathrm{e}^{x_1}x+2\mathrm{e}^{x_1}-1-x_1$，

又直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+2)$ 的切线，

则 $-\mathrm{e}^{x_1}x_1+\mathrm{e}^{x_1}=2\mathrm{e}^{x_1}-1-x_1$，

即 $(\mathrm{e}^{x_1}-1)(x_1+1)=0$，

则 $x_1=-1$ 或 $x_1=0$，

即 $k=\mathrm{e}^0=1$ 或 $k=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故答案为：1 或 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

12. 已知直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像相切于点 $P(x_1,y_1)$，与函数 $y=\ln x$ 的图像相切于点 $Q(x_2,y_2)$，若 $x_2>1$，且 $x_2\in(n,n+1)$，$n\in Z$，，则 $n=$ ________.

【答案】 4

【解析】 依题意，可得 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=k=\frac{1}{x_2}\\ y_1=\mathrm{e}^{x_1}=kx_1+b\\ y_2=\ln x_2=kx_2+b\end{cases}$，整理得 $x_2\ln x_2-\ln x_2-x_2-1=0$

令 $f(x)=x\ln x-\ln x-x-1(x>1)$，则 $f'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增

且 $f'(1)\cdot f'(2)<0$，$\therefore$ 存在唯一实数 $m\in(1,2)$，使 $f'(m)=0$

$f(x)_{\min}=f(m)<f(1)<0$，$f(2)=\ln 2-3<0$，$f(3)=2\ln 3-4<0$，

$f(4)=3\ln 4-5<0$，$f(5)=4\ln 5-6>0$，$\therefore x_2\in(4,5)$，故 $n=4$.

13. 若直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=\ln x$ 的切线，又是曲线 $y=\mathrm{e}^{x-2}$ 的切线，则 $b=$ ______.

【答案】 0 或 -1

【解析】 令 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{x-2}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=\mathrm{e}^{x-2}$.

设切点分别 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1-1$；

$y-\mathrm{e}^{x_2-2}=\mathrm{e}^{x_2-2}(x-x_2)$，即 $y=\mathrm{e}^{x_2-2}\cdot x+(1-x_2)\mathrm{e}^{x_2-2}$，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\mathrm{e}^{x_2-2}\\ \ln x_1-1=(1-x_2)\mathrm{e}^{x_2-2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}\ln x_1=2-x_2\\ \ln x_1-1=(1-x_2)\mathrm{e}^{x_2-2}\end{cases}$，

$\therefore(1-x_2)\cdot(1-\mathrm{e}^{x_2-2})=0$，$\therefore x_2=1$ 或 $x_2=2$.

当 $x_2=1$ 时，切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$，$\therefore b=0$；

当 $x_2=2$ 时，切线方程为 $y=x-1$，$\therefore b=-1$.

综上所述，$b=0$ 或 $b=-1$. 故答案为：$b=0$ 或 $b=-1$

14. 已知实数 a,b,c,d ，满足 $\frac{\ln a}{b}=\frac{2c}{d-1}=1$ ，那么 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ________.

【答案】 $\frac{(2+\ln2)^2}{5}$

【解析】 由 $\frac{\ln a}{b}=1$ 可知，点 $A(a,b)$ 在函数 $f(x)=\ln x$ 上，

由 $\frac{2c}{d-1}=1$ 知，点 $B(c,d)$ 在直线 $y=2x+1$ 上，

则 $(a-c)^2+(b-d)^2=|AB|^2$，

所以当点 A 处的切线与直线 $y=2x+1$ 平行时，点 A 到直线 $y=2x+1$ 的距离的平方就是 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值．

由 $f'(x)=\frac{1}{x}=2$ 得，$x=\frac{1}{2}$，所以 $A\left(\frac{1}{2},-\ln2\right)$，

所以 $(a-c)^2+(b-d)^2\geqslant\left(\frac{|2+\ln2|}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{(2+\ln2)^2}{5}$，所以 $\min=\frac{(2+\ln2)^2}{5}$，

故答案为 $\frac{(2+\ln2)^2}{5}$.

15. 若直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$ 相切于点 P，与曲线 $y=\ln(x+1)$ 相切于点 Q，则 $k=$ ________.

【答案】 2

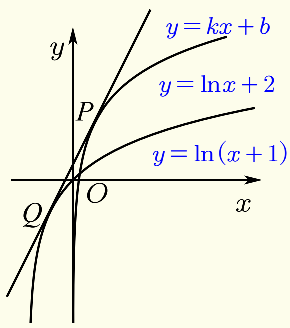
【解析】 设直线与 $y=\ln x+2$ 相切与点 $(m,\ln m+2)$，此时斜率为 $\frac{1}{m}$，

由点斜式得切线方程为 $y-(\ln m+2)=\frac{1}{m}(x-m)$，即 $y=\frac{1}{m}x+\ln m+1$.

对于曲线 $y=\ln(x+1)$，其导数 $y'=\frac{1}{x+1}$，令 $\frac{1}{m}=\frac{1}{x+1}$，得 $x=m-1$，

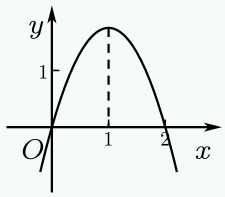
故切点坐标为 $(m-1,\ln m)$，代入切线方程得 $\frac{m-1}{m}+\ln m+1=\ln m$，

解得 $m=\frac{1}{2}$，故 $k=\frac{1}{m}=2$.



专题 2：函数的图像

1. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+c$，其导数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的极大值是 ( )



A. $a+b+c$　　B. $8a+4b+c$　　C. $3a+2b$　　D. c

【答案】 B

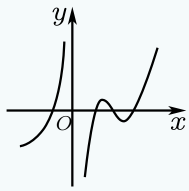
【解析】 【解析】由导函数的图象知，

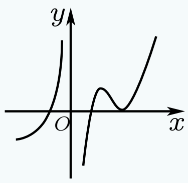
$f(x)$ 在 $(1,2)$ 递增；在 $(2,+\infty)$ 上递减

所以当 $x=2$ 时取得极大值，极大值为：$f(2)=8a+4b+c$

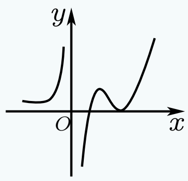
则函数 $f(x)$ 的极大值是 $8a+4b+c$　故选：B.

2. 设函数 $y=f(x)$ 可导，$y=f(x)$ 的图象如图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 可能为 ( )

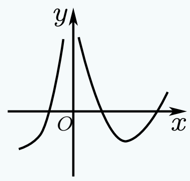




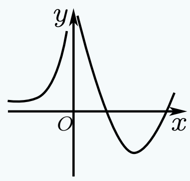
A.



B.



C.



D.

【答案】 D

【解析】 【解析】根据 $y=f(x)$ 的图象可知其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，

故其导函数的定义域也为 $\{x|x\neq 0\}$，

又从原函数 $y=f(x)$ 的图象可知，函数 $y=f(x)$ 的单调性是：

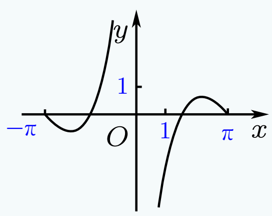
函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,a)$ 上是增函数，在 (a,b) 上是减函数，在 $(b,+\infty)$ 是增函数，

即 $y=f(x)$ 是先增后减再增，

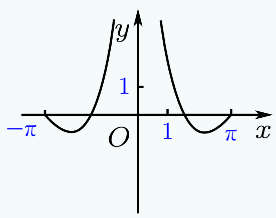
得出导函数是先正后负再正，

根据选项中的函数 $f(x)$ 的单调性知选 D. 故选：D.

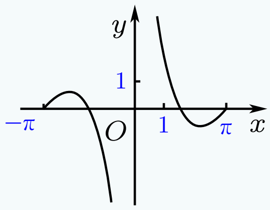
3. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为 ( )

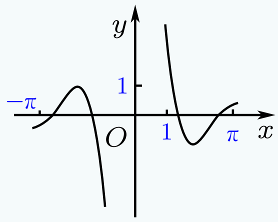


A.



B.

C. 

D. 

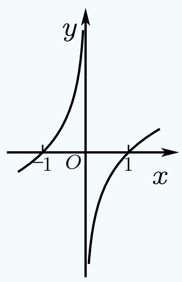
【答案】 C

【解析】 【解析】函数 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$,

可知函数是奇函数,排除选项 B,当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,排除 A,

$x=\pi$ 时,$f(\pi)=0$,排除 D. 故选:C.

4. 若函数 $f(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的解析式可能是 (　　)



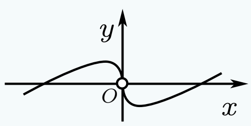
A. $f(x)=\frac{x}{2\ln|x|}$　　B. $f(x)=\ln|x|-x^2$　　C. $f(x)=\frac{1}{x}+\ln|x|$　　D. $f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x|}$

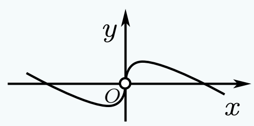
【答案】 D

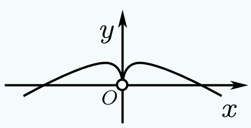
【解析】 函数图象关于原点对称,函数为奇函数,排除 B,C,

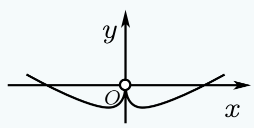
又 $f(1)=0$,则 $f(x)=\frac{x}{2\ln|x|}$ 无意义,排除 A,故选:D.

5. 函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{x^2+1}$ 的图象大致为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

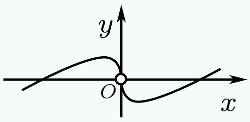
【答案】 A

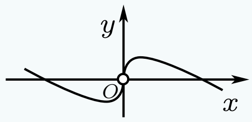
【解析】 【解析】因为 $f(-x)=\frac{-x\ln|-x|}{(-x)^2+1}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,图象关于原点对称,

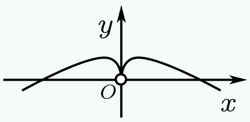
排除 C,D,

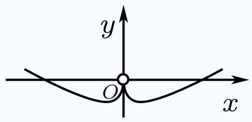
因为 $f(1)=0$,$0<x<1$ 时,$f(x)<0$,所以排除 B. 故选:A.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x^2+1}, & x>0\\ \dfrac{x\ln(-x)}{x^2+1}, & x<0\end{cases}$ 的图象大致为 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】 A

【解析】 【解析】若 $x>0$，则 $-x<0$，

则 $f(-x)=\dfrac{-x\ln x}{x^2+1}=-f(x)$，

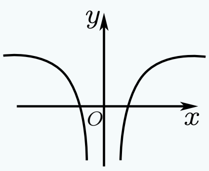
若 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=\dfrac{-x\ln(-x)}{x^2+1}=-f(x)$，

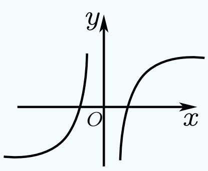
综上 $f(-x)=-f(x)$，

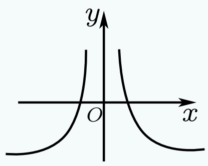
即 $f(x)$ 是奇函数，图象关于圆的对称，排除 C，D，

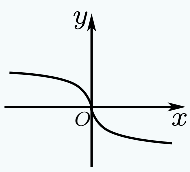
当 $x>0$，且 $x\to 0$ 时，$f(x)<0$，排除 B，故选：A.

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 的大致图象是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

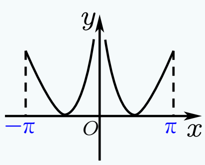
【答案】 B

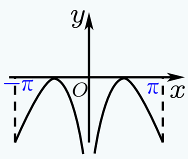
【解析】 $f(-x)=\dfrac{-x|\ln(-x)|}{|-x|}=\dfrac{-x\ln|x|}{|x|}=-f(x)$，

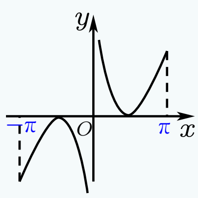
$\therefore f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，故 A，C 错误；

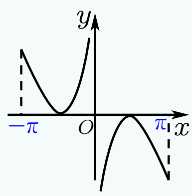
又当 $x>1$ 时，$\ln|x|=\ln x>0$，$\therefore f(x)>0$，故 D 错误，故选：B.

8. 函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cos x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 且 $x\neq 0)$ 的图象可能为 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】 D

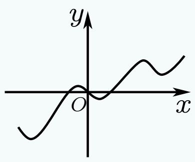
【解析】 【解析】$f(-x)=\left(-x+\dfrac{1}{x}\right)\cos(-x)=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cos x=-f(x)$，

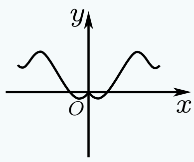
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数，

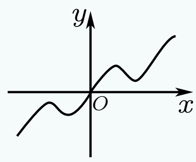
∴函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故排除 A，B，

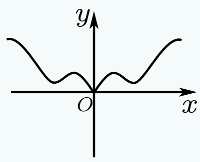
当 $x=\pi$ 时，$f(\pi)=\left(\pi-\dfrac{1}{\pi}\right)\cos\pi=\dfrac{1}{\pi}-\pi<0$，故排除 C，故选：D.

9. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(x)$ 的图象是 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】 A

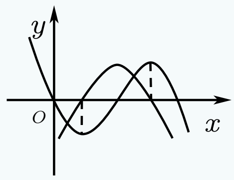
【解析】 由 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\cos x$，

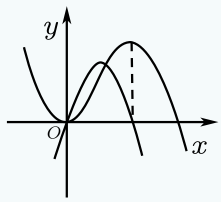
∴$f'(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$，它是一个奇函数，其图象关于原点对称，故排除 B，D.

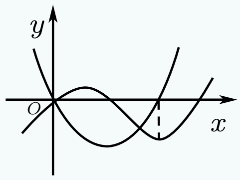
又 $f''(x)=\dfrac{1}{2}-\cos x$，当 $-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos x>\dfrac{1}{2}$，∴$f''(x)<0$，

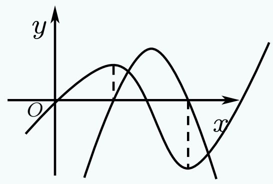
故函数 $y=f'(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，故排除 C. 故选：A.

10. 下面四图都是同一坐标系中某三次函数及其导函数的图象，其中一定不正确的序号是 (　　)









A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ①④

【答案】 B

【解析】 根据 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 递增；$f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 递减可得：

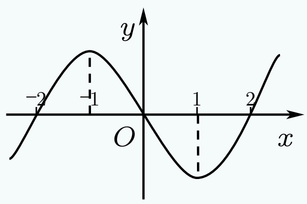
①中函数的图象从左向右先减后增再减，对应的导函数是小于 0，大于 0，再小于 0；

②中函数的图象也是从左向右先减后增再减，对应的导函数是小于 0，大于 0，再小于 0；所以①②可能正确 .

而③中函数的图象从左向右先减后增，对应的导函数是小于 0，大于 0，再小于 0，大于 0；

④中函数的图象从左向右先增后减后，对应的导函数也是小于 0，大于 0，再小于 0，大于 0；所以③④可能错误 . 故选：B.

11. 已知 R 上的可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x-2)f'(x)>0$ 的解集为 (　　)



A. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(1,2)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-1,1)\cup(2,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 由函数 $f(x)$ 的图象可得，

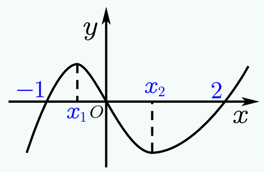
当 $x\in(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$.

由 $(x-2)f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)>0\\x-2>0\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}f'(x)<0\\x-2<0\end{cases}$ ②

解①得，$x>2$，解②得，$-1<x<1$，

综上，不等式 $(x-2)f'(x)>0$ 的解集为 $(-1,1)\cup(2,+\infty)$，故选：D.

12. 函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象如图所示，则 $x_1^2+x_2^2$ 等于 ( )



A. $\frac{8}{9}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{16}{9}$　　D. $\frac{28}{9}$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，由图象知，

$-1+b-c+d=0$，$0+0+0+d=0$，$8+4b+2c+d=0$，

$\therefore d=0$，$b=-1$，$c=-2$

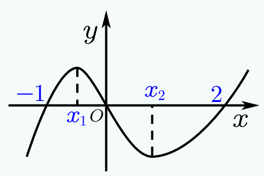
$\therefore f'(x)=3x^2+2bx+c=3x^2-2x-2$.

由题意有 x_1 和 x_2 是函数 $f(x)$ 的极值点，故有 x_1 和 x_2 是 $f'(x)=0$ 的根，

$\therefore x_1+x_2=\frac{2}{3}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{2}{3}$.

则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\frac{4}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$，故选：$C$.

13. 如图是函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象，则 $x_1+x_2=$ ( )



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. $\frac{28}{9}$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，由图象知，

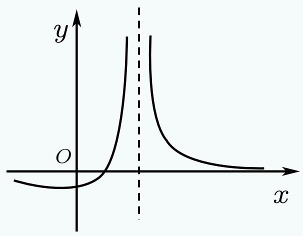
$-1+b-c+d=0$，$0+0+0+d=0$，$8+4b+2c+d=0$，

$\therefore d=0$，$b=-1$，$c=-2$

$\therefore f'(x)=3x^2+2bx+c=3x^2-2x-2$. 由题意有 x_1 和 x_2 是函数 $f(x)$ 的极值点，

故有 x_1 和 x_2 是 $f'(x)=0$ 的根，$\therefore x_1+x_2=\frac{2}{3}$，故选：$A$.

14. 函数 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是 ( )



A. $a<0,b>0,c<0$　　B. $a>0,b<0,c<0$

C. $a>0,b<0,c>0$　　D. $a<0,b>0,c>0$

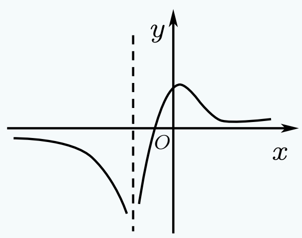
【答案】 B

【解析】 依题意，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq -c\}$，从函数图象上看，$-c>0$，故 $c<0$，

当 $x=0$ 时，$f(x)<0$，所以 $\dfrac{b}{c^2}<0$，所以 $b<0$，

根据函数图象，当 $x\to\infty$ 时，$ax+b>0$，故 $a>0$，故选：B.

15. 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象大致如图所示，则下列结论正确的是（　　）



A. $a>0,b>0,c>0$　　B. $a<0,b>0,c<0$

C. $a<0,b<0,c>0$　　D. $a>0,b>0,c<0$

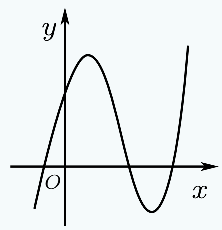
【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$，

$\therefore x=-c$ 时，函数值不存在，结合函数图象得 $c>0$，排除 B 和 D；

当 $x=0$ 时，$f(0)=b$，结合函数图象得 $b>0$，排除 C. 故选：A.

16. 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是（　　）



A. $a>0,b<0,c>0,d>0$　　B. $a>0,b<0,c<0,d>0$

C. $a<0,b<0,c>0,d>0$　　D. $a>0,b>0,c>0,d<0$

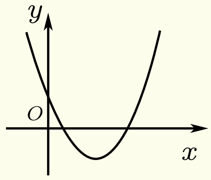
【答案】 A

【解析】 由图可知，$f(0)=d>0$，

$\because f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

从图象可知，$f(x)$ 先递增，后递减，再递增，且极大值点和极小值点均大于 0，

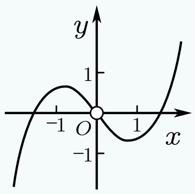
其导函数的图象大致如下：



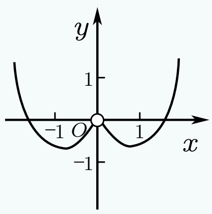
$\therefore a>0, -\dfrac{b}{3a}>0, \triangle=(2b)^2-4\cdot 3a\cdot c>0, f'(0)>0,$

$\therefore a>0, b<0, c>0$. 故选：A.

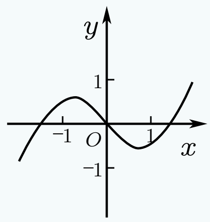
17. 函数 $y=\dfrac{x^2}{\sin x}(2x^2-\mathrm{e}^{|x|})$ 在 $[-2, 2]$ 的图象大致为 (　　)



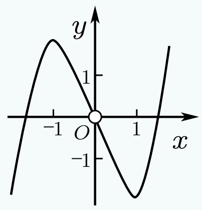
A.



B.



C.



D.

【答案】 A

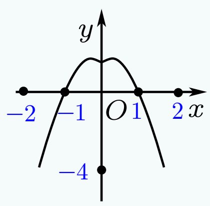
【解析】 根据题意，函数 $y=\dfrac{x^2}{\sin x}(2x^2-\mathrm{e}^{|x|})$ 在 $[-2, 2]$ 中，必有 $x\neq 0$；

又由 $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{\sin(-x)}[2(-x)^2-\mathrm{e}^{|-x|}]=-\dfrac{x^2}{\sin x}(2x^2-\mathrm{e}^{|x|})=-f(x)$，函数为奇函数，排除 B，

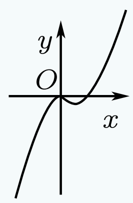
$f(1)=\dfrac{1}{\sin 1}(2-\mathrm{e})=\dfrac{2-\mathrm{e}}{\sin 1}\approx -1$，排除 D，

$f(2)=\dfrac{4}{\sin 2}(2\times 2^2-\mathrm{e}^2)\approx 2$，排除 C；故选：A.

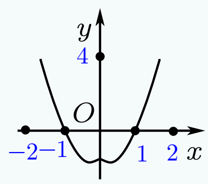
18. 函数 $y=2x^2-2^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 的图象大致为 (　　)



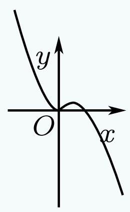
A.



B.



C.



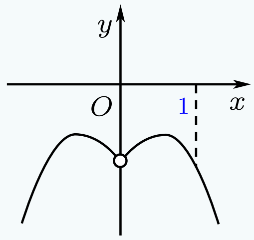
D.

【答案】 C

【解析】 函数 $y=2x^2-2^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 是偶函数，排除选项 B、D，

当 $x=2$ 时，$f(2)=4>0$，排除选项 A. 故选：C.

19. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ( )



A. $f(x)=\ln|x|-x^2$　　B. $f(x)=\ln|x|-|x|$　　C. $f(x)=2\ln|x|-x^2$　　D. $f(x)=2\ln|x|-|x|$

【答案】 A

【解析】 由图可知，函数 $f(x)$ 为偶函数，于是只需考查 $x>0$ 的情况即可，

且当 $x>0$ 时，$f(x)$ 的极大值点小于 1.

选项 A，$f(x)=\ln x-x^2$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

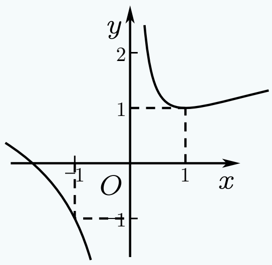
$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极大值点为 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$，符合题意；

同理可得，

选项 B 中函数对应的极大值点为 $x=1$，选项 C 中函数对应的极大值点为 $x=1$，

选项 D 中函数对应的极大值点为 $x=2>1$，均不符合题意，故选：A.

20. 已知某函数的图象如图所示，则该函数的解析式可能是 ( )



A. $f(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}$　　C. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln|x|$　　D. $f(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{|x|}$

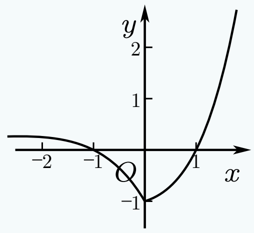
【答案】 B

【解析】 选项 A，$f(1)=-1$ 与图象矛盾，故 A 错误；

选项 C，$f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1<0$ 与图象矛盾，故 C 错误；

选项 D，$f(-1)=1$ 与图象矛盾，故 D 错误 . 故选：B.

21. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则它的解析式可能是 ( )



A. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2^x}$　　B. $f(x)=2^x(|x|-1)$　　C. $f(x)=|\ln|x||$　　D. $f(x)=xe^x-1$

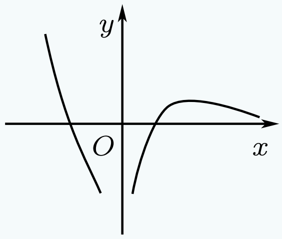
【答案】 B

【解析】 由图象可知，函数的定义域为 R，故排除 C；

由 $f(1)=0$ 可知，故排除 D；

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，故排除 A；故选：B.

22. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则该函数的解析式可能是　　(　　)



A. $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{e^x}$　　B. $f(x)=e^x\ln|x|$　　C. $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$　　D. $f(x)=(x-1)\ln|x|$

【答案】 A

【解析】 由图象可知，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$

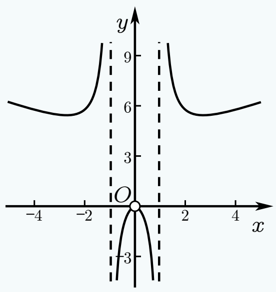
对于 A：满足要求，

对于 B：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=e^x\ln|x|\to+\infty$，不满足，

对于 C：当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=e^x\ln|x|\to 0$，不满足，

对于 D：当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=(x-1)\ln|x|\to+\infty$，不满足，故选：$A$.

23. 已知某函数的图象如图所示，则下列解析式中与此图象最为符合的是　　(　　)



A. $f(x)=\dfrac{2x}{\ln|x|}$　　B. $f(x)=\dfrac{2|x|}{\ln|x|}$　　C. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{|x|-\dfrac{1}{|x|}}$

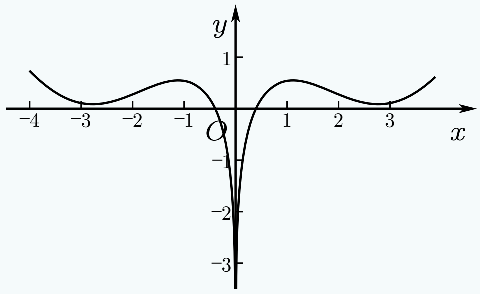
【答案】 B

【解析】 由函数的图象可知函数是偶函数，选项 A 函数是奇函数不成立.

$x=0$，函数没有意义，所以选项 C 的函数不成立；

$x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{|x|-\dfrac{1}{|x|}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$，函数是减函数，所以选项 D 不成立；故选：B.

24. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是　　（　　）



A. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}\cdot\cos x$　　B. $f(x)=\ln|x|\cdot\cos x$　　C. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}+\cos x$

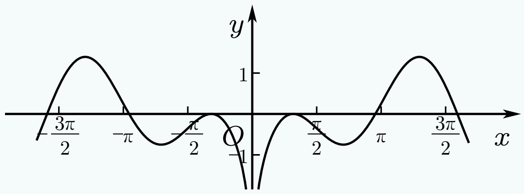
D. $f(x)=\ln|x|+\cos x$

【答案】 D

【解析】 由图可知 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，故可排除 A，B；

对于 C：$f(x)=\mathrm{e}^{|x|}+\cos x$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)>0$，故可排除 C. 故选：D.

25. 已知函数 $f(x)$ 的局部图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以是　　（　　）



A. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x$　　B. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x$

C. $f(x)=\ln|x|\cdot\sin\frac{\pi}{2}x$　　D. $f(x)=\ln|x|\cdot\cos\frac{\pi}{2}x$

【答案】 D

【解析】 由图可知，函数 $f(x)$ 为偶函数，可排除选项 A 和 C；

对于选项 B 和 D，都有 $f(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x>0$，与函数图象不符；$f(x)=\ln|x|\cdot\cos\frac{\pi}{2}x<0$，与函数图象符合，

所以选项 B 错误．故选：D.

专题3：单调性问题

1. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（　　）

A. $(0,2)$　　B. $[0,1)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $(0,1]$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore f(2-x)=f(x)$，即 $\ln(2-x)+\ln[a-(2-x)]=\ln x+\ln(a-x)$，

即 $\ln(x+a-2)+\ln(2-x)=\ln x+\ln(a-x)$，

$\therefore a=2$.

$\therefore f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln x(2-x)$，$0<x<2$.

由于 $y=x(2-x)=-(x-1)^2+1$ 为开口向下的抛物线，其对称轴为 $x=1$，定义域为 $(0,2)$，

$\therefore$ 它的递增区间为 $(0,1]$，

由复合函数的单调性知，

$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的单调递增区间为 $(0,1]$，故选：D.

2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 D 内的某个区间 I 上是增函数，且 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 I 上也是增函数，则称 $y=f(x)$ 是 I 上的“完美函数”，已知 $g(x)=e^x+x-\ln x+1$，若函数 $g(x)$ 是区间 $\left[\dfrac{m}{2},+\infty\right)$ 上的“完美函数”，则正整数 m 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because g(x)=e^x+x-\ln x+1$，$x>0$，

$\therefore g'(x)=e^x+1-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1>0$，

$\therefore$ 可以得出：$g(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是单调递增 .

$\because G(x)=\dfrac{e^x+x-\ln x+1}{x}$，

$\therefore G'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+\ln x-2}{x^2}$，$x>0$，

设 $m(x)=xe^x-e^x-2+\ln x$，

$m'(x)=xe^x+\dfrac{1}{x}>0$，$m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\sqrt{e}-2-\ln 2<0$，$m(1)=e-e-2+0=-2<0$，

$m\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-2+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$，

$\therefore$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上，有 $G'(x)>0$ 成立，

$\therefore$ 函数 $G(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上是单调递增函数，

综合判断：$g(x)=e^x+x-\ln x+1$，与 $G(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上都是单调递增函数，

$g(x)=e^x+x-\ln x+1$，与 $G(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上不是都为单调递增函数，

$\because$ 函数 $g(x)$ 是区间 $\left[\frac{m}{2},+\infty\right)$ 上的"完美函数"，

$\therefore m\geqslant 3$，

即整数 m 最小值为 3. 故选：C.

3. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $(-2,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 由函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+a$，即 $a\geqslant -2\mathrm{e}^{2x}$，$x\in(0,+\infty)$，

由 $\mathrm{e}^{2x}>0$，则 $-2\mathrm{e}^{2x}<-2$，

则 $a\geqslant -2$，故选：C.

4. 若函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $[k-1,k+1]$ 内不是单调函数，则实数 k 的取值范围是 (　　)

A. $[1,2)$　　B. $(1,2)$　　C. $\left[1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

【答案】 D

【解析】 因为 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，又 $f'(x)=4x-\frac{1}{x}$，

由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$

据题意，$\begin{cases}k-1<\frac{1}{2}<k+1\\k-1>0\end{cases}$，解得：$1<k<\frac{3}{2}$，故选：$D$.

5. 若函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-2,+\infty)$　　C. $\left(-2,-\frac{1}{8}\right)$　　D. $\left[-\frac{1}{8},+\infty\right)$

【答案】 B

【解析】 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+1}{x}$，$2ax^2+1>0$ 在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 内有解，

所以 $a>\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_{\min}$，由于 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$，所以 $x^2\in\left(\frac{1}{4},4\right)$，

$\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\in\left(-2,-\frac{1}{8}\right)$，所以 $a>-2$，故选：B.

6. 若函数 $f(x)=\ln x+(x-b)^2(b\in R)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上存在单调递增区间，则实数 b 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right)$　　C. $\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上存在单调增区间，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上存在子区间使得不等式 $f'(x)>0$ 成立.

$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+2(x-b)\right]=\frac{2x^2-2bx+1}{x}$,

设 $h(x)=2x^2-2bx+1$,则 $h(2)>0$ 或 $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$,

即 $8-4b+1>0$ 或 $\frac{1}{2}-b+1>0$,

得 $b<\frac{9}{4}$. 故选:B.

7. 设 $1<x<2$,则 $\frac{\ln x}{x}$、$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$、$\frac{\ln x^2}{x^2}$ 的大小关系是 ( )

A. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln x^2}{x^2}$ B. $\frac{\ln x}{x}<\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x^2}{x^2}$

C. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x^2}{x^2}<\frac{\ln x}{x}$ D. $\frac{\ln x^2}{x^2}<\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}$

【答案】 A

【解析】 令 $f(x)=x-\ln x(1<x<2)$,则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$,

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ $(1<x<2)$ 为增函数,$\therefore f(x)>f(1)=1>0$,

$\therefore x>\ln x>0$ $\therefore 0<\frac{\ln x}{x}<1$, $\therefore \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}$,

又 $\frac{\ln x^2}{x^2}-\frac{\ln x}{x}=\frac{2\ln x-x\ln x}{x^2}=\frac{(2-x)\ln x}{x^2}>0$,

$\therefore \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln x^2}{x^2}$,故选:$A$.

8. 已知函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,且当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=\left|\frac{\ln x}{x}\right|$. 若 $a=f\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$, $b=f(2)$, $c=f\left(\frac{2}{3}\right)$,则 a, b, c 的大小关系是 ( )

A. $b>a>c$ B. $a>b>c$ C. $a>c>b$ D. $c>b>a$

【答案】 D

【解析】 由函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,可知 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,即 $f(x)$ 为偶函数,

因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=\left|\frac{\ln x}{x}\right|=\frac{|\ln x|}{x}=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x>1\\ \frac{-\ln x}{x}, & 0<x<1\end{cases}$,

则 $a=f\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)=f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)=\frac{\ln\frac{\mathrm{e}}{2}}{2}$ $\qquad b=f(2)=\frac{\ln 2}{2}$

$c=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-\ln\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{-3\ln\frac{2}{3}}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{2}=\frac{\ln\frac{27}{8}}{2}$,

因为 $\frac{\mathrm{e}}{2}<2<\frac{27}{8}$,所以 $\ln\frac{\mathrm{e}}{2}<\ln 2<\ln\frac{27}{8}$,

所以 $a<b<c$. 故选:D.

9. 下列命题为真命题的个数是 ( )

①$\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{e}}}>2$；②$\ln 2>\frac{2}{3}$；③$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{1}{\mathrm{e}}$；④$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln\pi}{\pi}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 D

【解析】 对于①，设$f(x)=\mathrm{e}\ln x-x$，$x>0$，$\therefore f'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}-1=\frac{\mathrm{e}-x}{x}$，

当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

$\therefore f(x)<f(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e}=0$，$\therefore f(2)=\mathrm{e}\ln 2-2<f(\mathrm{e})=0$，即$2>\mathrm{e}\ln 2$，$\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{e}}}>2$，故①正确；

对于②，$\because 8>\mathrm{e}^2\therefore\ln 8>\ln\mathrm{e}^2.\therefore 3\ln 2>2$，$\ln 2>\frac{2}{3}$；因此正确，

对于③，设$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

$\because\mathrm{e}<\pi$，$\therefore g(\mathrm{e})>g(\pi)$，即$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{1}{\mathrm{e}}$；故③正确.

对于④，$\because 2^{\pi}<\pi^2$，$\therefore\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln\pi}{\pi}$.，④正确；

正确的命题的个数为4个，故选：D.

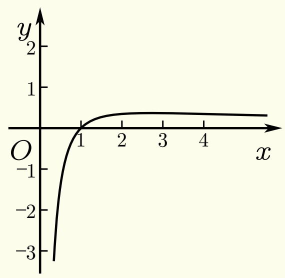
10. 下列命题为真命题的个数是　　(　　)

①$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$；　②$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{e}}}$；　③$2^{\sqrt{15}}<15$；　④$3\mathrm{e}\ln 2<4\sqrt{2}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】 构造函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，导数为$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，



当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，

可得$x=\mathrm{e}$处$f(x)$取得最大值$\frac{1}{\mathrm{e}}$，

$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow 2\ln\sqrt{3}<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 2}{2}$，

由$\sqrt{3}<2<\mathrm{e}$可得$f(\sqrt{3})<f(2)$，故①正确；

$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{e}}}\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，由$\sqrt{\mathrm{e}}<\sqrt{\pi}<\mathrm{e}$，可得$f(\sqrt{\mathrm{e}})<f(\sqrt{\pi})$，故②错误；

$2^{\sqrt{15}}<15\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，由$\mathrm{e}-2<\sqrt{15}-\mathrm{e}$，可得$f(2)<f(\sqrt{15})$，故③正确；

因为$2\sqrt{2}>\mathrm{e}$，$f(2\sqrt{2})<f(\mathrm{e})$，即$\frac{\ln 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，即$\frac{3\ln\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，则$3\mathrm{e}\ln 2<4\sqrt{2}$，故④正确.

故选：C.

11. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x-a\mathrm{e}^x(a\in R)$，若$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则实数$a$的取值范围是______.

【答案】 $(-\infty,1]$

【解析】 根据题意，函数$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x-a\mathrm{e}^x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{\mathrm{e}^x}{x}-a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left(\ln x+\frac{1}{x}-a\right)$，

设$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

易得在区间 $(0,1)$ 上，$g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，

在区间 $(1,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有最小值 $g(1)=1$，没有最大值，

若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-ae^x=\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}-a\right)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

即 $g(x)-a\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\leqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，必有 $a\leqslant g(x)_{\min}=1$，

故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$；故答案为：$(-\infty,1]$.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}-2, & x\leqslant 0\\ 2ax-1, & x>0\end{cases}(a>0)$，对于下列命题：

(1) 函数 $f(x)$ 的最小值是 -1；

(2) 函数 $f(x)$ 在 R 上是单调函数；

(3) 若 $f(x)>0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 $a>1$，

其中真命题的序号是 ______.

【答案】 (1)

【解析】 对于 (1)，由图只需说明在点 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 的最小值是 -1；故正确；

对于 (2)，由图象说明函函数 $f(x)$ 在 R 上不是单调函数；故错；

对于 (3) 由图象说明函函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是单调增函数，$f(x)_{\min}>0$ 即可，

即 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqslant 0$ 解，得 a 的取值范围是 $a\geqslant 1$；故错；答案为：(1)

13. 已知函数 $f(x)=\ln x+(x-a)^2(a\in R)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 ________

【答案】 $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right)$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上存在单调增区间，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上存在子区间使得不等式 $f'(x)>0$ 成立.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2(x-a)]=\dfrac{2x^2-2ax+1}{x}$，

设 $h(x)=2x^2-2ax+1$，则 $h(2)>0$ 或 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，

即 $8-4a+1>0$ 或 $\dfrac{1}{2}-a+1>0$，

得 $a<\dfrac{9}{4}$ 故答案为：$\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right)$.

14. 设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{\mathrm{e}^x}(a\in R)$，$f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数，则 a 的取值范围是 __________.

【答案】 $\left[-\dfrac{9}{2},+\infty\right)$

【解析】 $f'(x)=\dfrac{-3x^2+(6-a)x+a}{\mathrm{e}^x}$，令 $g(x)=-3x^2+(6-a)x+a$，

由 $g(x)=0$,解得 $x_1=\dfrac{6-a-\sqrt{a^2+36}}{6}$, $x_2=\dfrac{6-a+\sqrt{a^2+36}}{6}$.

当 $x<x_1$ 时, $g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$ 为减函数;

当 $x_1<x<x_2$ 时, $g(x)>0$,即 $f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$ 为增函数;

当 $x>x_2$ 时, $g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$ 为减函数.

由 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数,可知: $x_2=\dfrac{6-a+\sqrt{a^2+36}}{6}\leqslant 3$,解得 $a\geqslant -\dfrac{9}{2}$.

因此 a 的取值范围为: $\left[-\dfrac{9}{2},+\infty\right)$.

解法二:由 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数, $\therefore f'(x)\leqslant 0$,

可得 $a\geqslant\dfrac{-3x^2+6x}{x-1}$,在 $[3,+\infty)$ 上恒成立.

令 $u(x)=\dfrac{-3x^2+6x}{x-1}$, $u'(x)=\dfrac{-3[(x-1)^2+1]}{(x-1)^2}<0$,

$\therefore u(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore a\geqslant u(3)=-\dfrac{9}{2}$. 因此 a 的取值范围为: $\left[-\dfrac{9}{2},+\infty\right)$.

专题 4：函数的极值问题

1. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x-3)-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，则 k 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,\mathrm{e})$　　B. $[0,\mathrm{e}]\cup\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right\}$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(0,2]$

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x-3)-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，

$f'(x)=\mathrm{e}^x(x-2)-kx^2+2kx=(x-2)(\mathrm{e}^x-kx)$，

若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x-3)-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，$f'(x)=0$ 只有一个实数解，则 $\mathrm{e}^x-kx\geqslant 0$，

从而得到 $\mathrm{e}^x\geqslant kx$，当 $k=0$ 时，成立．

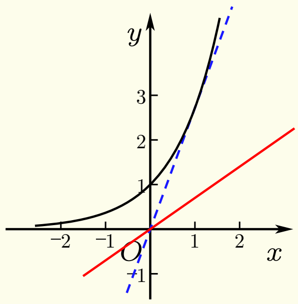
当 $k\neq 0$ 时，设 $u(x)=\mathrm{e}^x$，$v(x)=kx$，

如图，当两函数相切时，$k=\mathrm{e}$，此时得到 k 的最大值，但 $k<0$ 时不成立，

故 k 的取值范围为 $(0,\mathrm{e}]$，

又 $f'(2)=0$，当 $x=2$ 时，由 $\mathrm{e}^2-2k=0$，得 $k=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2$，此时 $f(x)$ 只有一个极值点．

综上，k 的取值范围为 $[0,\mathrm{e}]\cup\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right\}$. 故选：$B$.



2. 已知函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-k\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)$，若 $x=1$ 是函的 $f(x)$ 的唯一一个极值点，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,\mathrm{e}]$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{0\}$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{0,\mathrm{e}\}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-k\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)$，$x\neq 0$，

$\therefore f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}-k\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{(x-1)(xe^x-k)}{x^3}$，

$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点 $\therefore x=1$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根．

$\therefore xe^x-k=0$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 无变号零点，

令 $g(x)=xe^x-k$，$g'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$，

令 $g'(x)>0$，解得：$x>-1$，令 $g'(x)<0$，解得：$x<-1$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 递减，在 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 递增，

$g(x)$ 的最小值为 $g(-1)=-\frac{1}{e}-k\geqslant 0$，解得：$k\leqslant -\frac{1}{e}$，

又 $k=0$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>1$，令 $f'(x)<0$，解得：$x<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

$x=1$ 是函的 $f(x)$ 的唯一一个极值点，符合题意，

综上所述，$k\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right]\cup\{0\}$. 故选：$C$.

3. 已知函数 $f(x)=e^x(x^2-4x-4)+\frac{1}{2}k(x^2+4x)$，$x=-2$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点，则实数 k 的取值范围为 (　　)

A. $[-e^2,+\infty)$　　B. $[-e^3,+\infty)$　　C. $[e^2,+\infty)$　　D. $[e^3,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 由题可知，$f'(x)=e^x(x^2-4x-4+2x-4)+\frac{1}{2}k(2x+4)=(x+2)[e^x(x-4)+k]$，

$\because x=-2$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点，$\therefore e^x(x-4)+k\geqslant 0$ 恒成立，即 $-k\leqslant e^x(x-4)$，

令 $g(x)=e^x(x-4)$，则 $g'(x)=e^x(x-3)$，

当 $x<3$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>3$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(3)=-e^3$，

$\therefore -k\leqslant -e^3$，即 $k\geqslant e^3$. 故选：D.

4. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 (　　)

A. $f(x_1)<\frac{3+2\ln 2}{4}$　　B. $f(x_1)<-\frac{1+2\ln 2}{4}$

C. $f(x_1)>\frac{1+2\ln 2}{4}$　　D. $f(x_1)>-\frac{3+2\ln 2}{4}$

【答案】 D

【解析】 由题意，$f(x)=x^2-2x+a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-2x+a}{x}$；

$\because f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，$\therefore f'(x)=0$ 有两个不同的正实根 x_1,x_2，

$\because 2x^2-2x+a=0$ 的判别式 $\triangle=4-8a>0$，解得 $a<\frac{1}{2}$，

$\therefore x_1+x_2=1$，$x_1\cdot x_2=\frac{a}{2}>0$ $\therefore 0<a<\frac{1}{2}$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，

$\because 0<x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=1$ $\therefore 0<x_1<\frac{1}{2}$，$a=2x_1-2x_1^2$，

$\therefore f(x_1)=x^2-2x_1+(2x_1-2x_1^2)\ln x_1$.

令 $g(t)=t^2-2t+(2t-2t^2)\ln t$，其中 $0<t<\frac{1}{2}$，

则 $g'(t)=2(1-2t)\ln t$. 当 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(t)<0$，

$\therefore g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上是减函数．$\therefore g(t)>g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3+2\ln 2}{4}$，

故 $f(x_1)=g(x_1)>-\frac{3+2\ln 2}{4}$，故选：$D$.

5. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+1+a\ln x$ 有两个极值点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，则 ( )

A. $f(x_2)<-\frac{1+2\ln 2}{4}$　　B. $f(x_2)<\frac{1-2\ln 2}{4}$

C. $f(x_2)>\frac{1+2\ln 2}{4}$　　D. $f(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$

【答案】 D

【解析】 由题意，$f(x)=x^2-2x+1+a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-2x+a}{x}$；

$\because f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，$\therefore f'(x)=0$ 有两个不同的正实根 x_1, x_2，

$\because 0<x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=1$，$\therefore \frac{1}{2}<x_2<1$，$a=2x_2-2x_2^2$，

$\therefore f(x_2)=x_2^2-2x_2+1+(2x_2-2x_2^2)\ln x_2$.

令 $g(t)=t^2-2t+1+(2t-2t^2)\ln t$，其中 $\frac{1}{2}<t<1$，

则 $g'(t)=2(1-2t)\ln t$. 当 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$g'(t)>0$，

$\therefore g(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上是增函数．$\therefore g(t)>g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-2\ln 2}{4}$.

故 $f(x_2)=g(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$. 故选：$D$.

6. 已知 t 为常数，函数 $f(x)=(x-1)^2+t\ln x$ 有两个极值点 a、$b(a<b)$，则 ( )

A. $f(b)>\frac{1-2\ln 2}{4}$　B. $f(b)<\frac{1-2\ln 2}{4}$　C. $f(b)>\frac{1+2\ln 2}{4}$　D. $f(b)<\frac{1-3\ln 2}{4}$

【答案】 A

【解析】 $f'(x)=2(x-1)+\frac{t}{x}=\frac{2x^2-2x+t}{x}$，$(x>0)$，

令 $g(x)=2x^2-2x+t$，对称轴 $x=\frac{1}{2}$，开口向上，

由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个相异实根 $a, b(a<b)$，

则 $\frac{1}{2}<b<1$，$2b^2-2b+t=0$，故 $t=-2b^2+2b$，

故 $f(b)=(b-1)^2+t\ln b=b^2-2(b^2-b)\ln b$，

故 $f'(b)=-2(2b-1)\ln b>0$，$\left(\frac{1}{2}<b<1\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 递增，

故 $\frac{1-2\ln 2}{4}=f\left(\frac{1}{2}\right)<f(b)<f(1)=0$，故选：$A$.

7. 若函数 $y=ae^x+3x$ 在 R 上有小于零的极值点，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-3,+\infty)$　B. $(-\infty,-3)$　C. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

【答案】 B

【解析】 $y=ae^x+3x$，求导，$y'=ae^x+3$，

由若函数 $y=ae^x+3x$ 在 R 上有小于零的极值点，

则 $y'=ae^x+3=0$ 有负根，则 $a\neq 0$，则 $e^x=-\frac{3}{a}$ 在 y 轴的左侧有交点，

$\therefore 0<-\frac{3}{a}<1$，解得：$a<-3$，实数 a 的取值范围 $(-\infty,-3)$ 故选：B.

8. 若函数 $f(x)=e^x-ax-b$ 在 R 上有小于 0 的极值点，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(1,+\infty)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=e^x-ax-b$ 在 R 上有小于 0 的极值点，

令 $f'(x)=e^x-a=0$，则 $a>0$，此方程存在小于 0 的解．

解得 $x=\ln a<0$，$\therefore a<1$.

$\therefore 0<a<1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,1)$. 故选：B.

9. 已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D. $(0,1)$

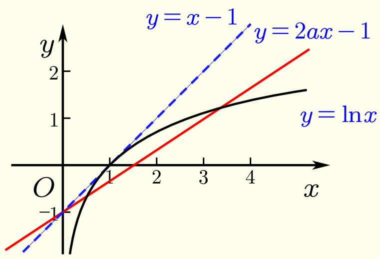
【解析】 由题意，$y'=\ln x+1-2ax$

令 $f'(x)=\ln x-2ax+1=0$ 得 $\ln x=2ax-1$，

函数 $y=x\ln x-ax^2$ 有两个极值点，等价于 $f'(x)=\ln x-2ax+1$ 有两个零点，

等价于函数 $y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，

在同一个坐标系中作出它们的图象（如图）



当 $a=\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=2ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象相切，

由图可知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点．

则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 故选：$C$.

10. 已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}ax^2-x+3a^3-4a^2-a+2(a\in R)$ 存在两个极值点．则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{e},e\right)$

【答案】 B

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x-ax$，

故函数 $f(x)$ 有两个极值点等价于其导函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点．

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\ln x$，显然只有 1 个零点 $x_0=1$，舍去．

当 $a\neq0$ 时，令 $h(x)=\ln x-ax$，那么 $h'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

若 $a<0$，则当 $x>0$ 时 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 无两个零点．

若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{1}{a}$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$. 又 $h(1)=-a<0$，当 $x\to 0$ 时 $\to-\infty$，

故若有两个零点，则 $h\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1>0$，得 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$. 故选：B.

11. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-4ax)$ 存在两个极值点，则实数 a 的取值范围为 ( )

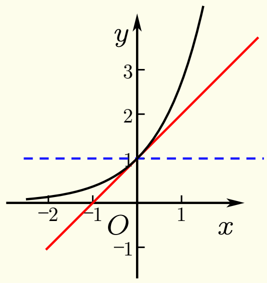
A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(0,1)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(1,+\infty)$

【解析】 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-4ax)$，$f'(x)=2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2ax-2a)$，

若 $f(x)$ 存在 2 个极值点，则方程 $\mathrm{e}^x=2a(x+1)$ 有 2 个根，

则函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=2a(x+1)$ 的图象有 2 个交点，

画出函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=2a(x+1)$ 的图象，如图示：



若 $a<0$，显然 1 个交点，不合题意，若 $a>0$，设直线 $y=2a(x+1)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 相切时切点是 (x_0,e^{x_0})，

则 $2a=\mathrm{e}^{x_0}$，则 $\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}x_0+\mathrm{e}^{x_0}$，解得：$x_0=0$，故切点是 $(0,1)$，

故 $2a>1$，解得：$a>\frac{1}{2}$，故选：C.

12. 若函数 $f(x)=\frac{ax^2}{2}-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有极大值，则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 $f'(x)=ax-(1+2a)+\frac{2}{x}=\frac{ax^2-(2a+1)x+2}{x}$，$(a>0,x>0)$

若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 有极大值，则 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 先大于 0，再小于 0，

则 $\begin{cases}f'\left(\frac{1}{2}\right)>0\\ f'(1)<0\end{cases}$，解得：$1<a<2$，故选：$C$.

13. 已知 $f(x)=\frac{a}{2}x^2-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $(3,4)$ 有极小值，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(4^{-1},3^{-1})$　　B. $(3,4)$　　C. $(3^{-1},4)$　　D. $(4^{-1},3)$

【答案】 A

【解析】 $f'(x)=ax-(1+2a)+\frac{2}{x}=\frac{(x-2)(ax-1)}{x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{a}$，$\because f(x)$ 在区间 $(3,4)$ 有极小值，

$\therefore 3<\frac{1}{a}<4$，$\therefore \frac{1}{4}<a<\frac{1}{3}$，故选：$A$.

14. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+(4a+2)x-a(a+2)\ln x$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则 a 的取值范围是

( )

A. $(0,1)$　　B. $(-2,0)\cup(0,1)$

C. $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　D. $(-2,1)$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+(4a+2)x-a(a+2)\ln x$ 的导数为

$$f'(x)=-3x+(4a+2)-\frac{a(a+2)}{x}=\frac{-3x^2+(4a+2)x-a(a+2)}{x},$$

令 $g(x)=-3x^2+(4a+2)x-a(a+2)$，由题意可得，$g(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有解 .

若 $g(x)=0$ 只有一解，

则有 $g(0)g(1)<0$，即 $-a(a+2)(-a^2+2a-1)<0$，解得 $-2<a<0$；

若 $g(x)=0$ 有两解，

则 $\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)<0 \\ (4a+2)^2-12a(a+2)>0 \\ 0<\frac{2a+1}{3}<1 \end{cases}$ 即有 $\begin{cases} a>0 \text{ 或 } a<-2 \\ a\neq 1 \\ a\neq 1 \\ -\frac{1}{2}<a<1 \end{cases}$，解得 $0<a<1$.

当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x$ 在 $x=\frac{2}{3}$ 处取得极大值，成立 .

综上可得 a 的取值范围是 $(-2,1)$. 故选：D.

15. 已知函数 $f(x)$，对 $\forall\, a,b,c\in R$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为一个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为“三角形函数”，已知函数 $f(x)=m\cos^2x+m\sin x+3$ 是“三角形函数”，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{6}{7},\frac{12}{13}\right)$　　B. $\left[-2,\frac{12}{13}\right]$　　C. $\left[0,\frac{12}{13}\right]$　　D. $(-2,2)$

【答案】 A

【解析】 若 $f(x)=m\cos^2x+m\sin x+3$ 是“三角形函数，则 $\begin{cases} f(x)_{\min}>0 \\ 2f(x)_{\min}>f(x)_{\max} \end{cases}$，

$\because f(x)=m\cos^2x+m\sin x+3=-m\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}m+3$，

当 $m>0$ 时，$f(x)_{\min}=f(-1)=-m+3$，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}m+3$，

则 $\begin{cases} -m+3>0 \\ \frac{5}{4}m+3<2(-m+3) \end{cases}$，解得 $0<m<\frac{12}{13}$，

当 $m=0$ 时，$f(a)=f(b)=f(c)=3$，符合题意，

当 $m<0$ 时，$f(x)_{\max}f(-1)=-m+3$，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}m+3$，

则 $\begin{cases} \frac{5}{4}m+3>0 \\ 2\left(\frac{5}{4}m+3\right)>-m+3 \end{cases}$，解得 $-\frac{6}{7}<m<0$，

综上所述 m 的取值范围为 $\left(-\frac{6}{7},\frac{12}{13}\right)$，故选：$A$.

16. 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=(x-2a)(x^2+a^2x+2a^3)$ 的极小值点，则实数 a 的取值范围是 ________ .

【答案】 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

【解析】 $f(x)=(x-2a)(x^2+a^2x+2a^3)=x^3+(a^2-2a)x^2-4a^4$，

故 $f'(x)=3x^2+2(a^2-2a)x$，

$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，

则 $x<0$ 时，$f'(x)=3x^2+2(a^2-2a)x<0$ 恒成立，

即 $2(a^2-2a)>0$，解得：$a>2$ 或 $a<0$，

故答案为：$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

17. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\dfrac{k}{2}x^2+kx(k>0)$ 的极小值点，则实数 k 的取值范围是 __________ .

【答案】 $(0,\mathrm{e})$

【解析】 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-kx+k$，若 $x=1$ 是函数的极小值点，

则 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$x>1$ 时，$f'(x)>0$，

即 $(x-1)(\mathrm{e}^x-k)<0$，$x<1$，即 $0<k<\mathrm{e}^x<\mathrm{e}$ 故答案为：$(0,\mathrm{e})$.

18. 若函数 $f(x)$ 在区间 A 上，对 $\forall\, a,b,c\in A$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为一个三角形的三边长，则称函数 $f(x)$ 为"三角形函数". 已知函数 $f(x)=x\ln x+m$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}\right]$ 上是"三角形函数"，则实数 m 的取值范围为 ____________ .

【答案】 $\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

【解析】 若 $f(x)$ 为"区域 D 上的三角形函数".

则在区间 D 上，函数的最大值 M 和最小值 m 应满足：$M<2m$，

$\because$ 函数 $f(x)=x\ln x+m$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}\right]$ 上是"三角形函数"，$f'(x)=\ln x+1$，

当 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 递减；当 $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 递增；

故当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 取最小值 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+m$，

又由 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+m$，$f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}+m$，

故当 $x=\mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值 $\mathrm{e}+m$，

$\therefore 0<\mathrm{e}+m<2\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+m\right)$，解得：$m\in\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$，故答案为：$\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

专题5:函数的最值

1. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-3}$, $g(x)=\frac{1}{2}+\ln\frac{x}{2}$,若 $f(m)=g(n)$ 成立,则 $n-m$ 的最小值为 ( )

A. $1+\ln2$　　B. $\ln2$　　C. $2\ln2$　　D. $\ln2-1$

【答案】 D

【解析】 令 $t=f(m)=g(n)$,则 $\mathrm{e}^{m-3}=t$, $\frac{1}{2}+\ln\frac{n}{2}=t$,

$\therefore m=3+\ln t$, $n=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}$,即 $n-m=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-3-\ln t$,

若 $h(t)=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-3-\ln t$,则 $h'(t)=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t}(t>0)$,

$\therefore h'(t)=0$,有 $t=\frac{1}{2}$,

当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时, $h'(t)<0$, $h(t)$ 单调递减;当 $t>\frac{1}{2}$ 时, $h'(t)>0$, $h(t)$ 单调递增;

$\therefore h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln2-1$,即 $n-m$ 的最小值为 $\ln2-1$. 故选: D.

2. 已知函数 $f(x)=x+\ln(x-1)$, $g(x)=x\ln x$,若 $f(x_1)=1+2\ln t$, $g(x_2)=t^2$,则 $(x_1x_2-x_2)\ln t$ 的最小值为 ( ).

A. $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$　　B. $\frac{2}{\mathrm{e}}$　　C. $-\frac{1}{2\mathrm{e}}$　　D. $-\frac{1}{\mathrm{e}}$

【答案】 C

【解析】 由题意, $f(x_1)=x_1+\ln(x_1-1)=1+2\ln t$,得 $x_1-1+\ln(x_1-1)=\ln t^2$,

$\therefore \ln[(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1-1}]=\ln t^2$,即 $t^2=(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1-1}>0$,

又 $g(x_2)=x_2\ln x_2=t^2$,得 $t^2=\mathrm{e}^{\ln x_2}\cdot\ln x_2>0$

$\because y=x\cdot\mathrm{e}^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 综上知: $\ln x_2=x_1-1$,

$\therefore (x_1x_2-x_2)\ln t=x_2\cdot\ln x_2\cdot\ln t=t^2\cdot\ln t$,

令 $h(t)=t^2\cdot\ln t$, $(t>0)$,则 $h'(t)=2t\ln t+t$

$\therefore h'(t)>0$,得 $t>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$; $h'(t)<0$,得 $0<t<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$;

故 $h(t)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

$\therefore h(t)_{\min}=h\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$,故选: C

3. 若对任意 $x\in(0,+\infty)$,不等式 $2\mathrm{e}^{2x}-a\ln a-a\ln x\geqslant0$ 恒成立,则实数 a 的最大值为 ( )

A. $\sqrt{\mathrm{e}}$　　B. e　　C. $2\mathrm{e}$　　D. e^2

【答案】 C

【解析】 令 $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}-a\ln a-a\ln x$, $x\in(0,+\infty)$,所以 $f'(x)=4\mathrm{e}^{2x}-\frac{a}{x}$,

因为需要保证 $\ln a$ 有意义,所以 $a>0$,所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

因为当 $x\to0$ 时, $f'(x)<0$,且 $f'(a)=4\mathrm{e}^{2a}-1>0$,

所以 $\exists x_0\in(0,a)$,使得 $f'(x_0)=0$,

并且当 $x\in(0,x_0)$ 时, $f'(x)<0$;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=2e^{2x_0}-a\ln a-a\ln x_0$，且 $f'(x_0)=4e^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，

所以 $a=4x_0e^{2x_0}$，$\ln a=\ln 4+\ln x_0+2x_0$，

所以 $f(x)_{\min}=2e^{2x_0}-a\ln a-a\ln x_0$

$=2e^{2x_0}-4x_0e^{2x_0}(\ln 4+\ln x_0+2x_0)-4x_0e^{2x_0}\ln x_0$

$=2e^{2x_0}(1-2x_0\ln 4-4x_0\ln x_0-4x_0^2)$

$=2e^{2x_0}[(1-2x_0)(1+2x_0)-2x_0(\ln x_0^2+\ln 4)\geqslant 0$

所以 $(1-2x_0)(1+2x_0)-2x_0(\ln x_0^2+\ln 4)\geqslant 0$，

考虑函数 $h(x)=(1-2x)(1+2x)-2x(\ln x^2+\ln 4)=1-4x^2-2x\ln x^2-2x\ln 4$，

其中 $x\in(0,+\infty)$，

根据复合函数单调性可得函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以解 $h(x)\geqslant 0$ 得到 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，所以 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，

因为 $a=4x_0e^{2x_0}$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $a\leqslant 4\times\dfrac{1}{2}\cdot e^{2\times\frac{1}{2}}=2e$，

所以 a 的最大值为 $2e$. 故选：C

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=xe^{-x}$，若存在 $x_1\in(0,+\infty)$，$x_2\in R$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$ 成立，则 $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3e^k$ 的最小值为 ( )

A. $-\dfrac{1}{e^2}$ B. $-\dfrac{4}{e^2}$ C. $-\dfrac{9}{e^3}$ D. $-\dfrac{27}{e^3}$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0，e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e，+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，又 $f(1)=0$，所以 $x\in(0，1)$ 时，$f(x)<0$；

同时 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\ln e^x}{e^x}=f(e^x)$，若存在 $x_1\in(0,+\infty)$，$x_2\in R$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$ 成立，

则 $0<x_1<1$ 且 $f(x_1)=g(x_2)=f(e^{x_2})$，所以 $x_1=e^{x_2}$，即 $x_2=\ln x_1$，又 $k=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$，所以 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{\ln x_1}{x_1}=k$，

故 $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3e^k=k^3e^k$，令 $h(k)=k^3e^k$，$k<0$，则 $h'(k)=(3k^2+k^3)e^k=k^2(k+3)e^k$，

令 $h'(k)<0$，解得 $k<-3$，令 $h'(k)>0$，解得 $-3<k<0$，

$\therefore h(k)$ 在 $(-\infty，-3)$ 单调递减，在 $(-3，0)$ 单调递增，

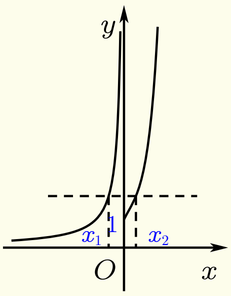
$\therefore h(k)_{\min}=h(-3)=-\dfrac{27}{e^3}$. 故选：$D$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0\\ e^{2x}, & x\geqslant 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)-a=0(a\in R)$ 恰有两个不等实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 $e^{x_2-x_1}$ 的最小值为 ( )

A. $\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}+\sqrt{e}$ C. $\sqrt{2}e$ D. $\sqrt{2e}$

【答案】 D

【解析】 【解析】作函数 $f(x)$ 的大致图象如下，结合图象易知 $a\geqslant 1$，



使得 $-\dfrac{1}{x_1}=\mathrm{e}^{2x_2}=a$，$x_1=-\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{1}{2}\ln a$，

故 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}\ln a+\dfrac{1}{a}$，

令 $h(a)=\dfrac{1}{2}\ln a+\dfrac{1}{a}(a\geqslant 1)$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{a-2}{2a^2}$，令 $h'(a)=0$，则 $a=2$，

当 $1\leqslant a<2$ 时，$h'(a)<0$，当 $a>2$ 时，$h(a)>0$，

故 $h(a)$ 在 $[1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(a)\geqslant h(2)=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}$，$\therefore \mathrm{e}^{x_2-x_1}\geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2\mathrm{e}}$，故选：$D$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-ax+\ln x$

(1)$a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $a\in\left[1,\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{2}\right]$，求 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$ 的取值范围．

【答案】 (1) 当 $x=1$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得极小值 $\mathrm{e}-1$，无极大值 (2)$g(a)\in[\ln 2-1,\mathrm{e}-1]$

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-x+\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}(\mathrm{e}^x-x)$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-x$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上，$h(x)>h(0)=1$，即 $\mathrm{e}^x>x$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，经检验，在 $(0,1)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得极小值 $\mathrm{e}-1$，无极大值；

(2)$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}-a+\dfrac{1}{x}(x>0)$，令 $p(x)=f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}-a+\dfrac{1}{x}(x>0)$，

则 $p'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)-x}{x^3}(x>0)$，

由 (1) 知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$\mathrm{e}^x>x$，$\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)-x>x(x^2-2x+2)-x=x(x-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore p'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore f'(x)$ 在定义域上单调递增，

$\because a\in\left[1,\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{2}\right]$，

$\therefore f'(1)=-a+1\leqslant 0$，$f'(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-a+\dfrac{1}{2}\geqslant 0$，

$\therefore$ 方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解，

设方程 $f'(x)=0$ 的解为 x_0, 则在 $(0,x_0)$ 上 $f'(x)<0$, 在 $(x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, 且 $1\leqslant x_0\leqslant 2$,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $g(a)=f(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}-ax_0+\ln x_0$,

由 $f'(x)=0$ 得，$a=\dfrac{e^{x_0}(x_0-1)}{x_0^2}+\dfrac{1}{x_0}$ 代入 $g(a)$ 得，$g(a)=\dfrac{e^{x_0}(2-x_0)}{x_0}-1+\ln x_0$，$x_0\in[1,2]$,

令 $\varphi(x)=\dfrac{e^x(2-x)}{x}-1+\ln x$，$x\in[1,2]$, 则 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x(2x-x^2-2)+x}{x^2}$,

$\because -x^2+2x-2=-(x-1)^2-1\leqslant -1$,

$\therefore e^x(-x^2+2x-2)+x\leqslant x-e^x<0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 上为减函数，$\therefore \varphi(x)\in[\varphi(2),\varphi(1)]$,

$\therefore g(a)\in[\ln 2-1,e-1]$.

7. 已知函数 $f(x)=e^x-x+\dfrac{t}{2}x^2(t\in R$，e 为自然对数的底数)，且 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 e，函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b(a\in R,b\in R)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$，求 $\dfrac{b(a+1)}{2}$ 的最大值.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$，单调增区间为 $(0,+\infty)$，$f(x)_{极小值}=f(0)=1$，无极大值.

(2) $\dfrac{(a+1)b}{2}$ 的最大值为 $\dfrac{e}{4}$.

【解析】 (1) 由已知得 $f'(x)=e^x-1+tx$，$f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 e，

所以 $f'(1)=e-1+t=e$，从而 $t=1$，$f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$.

因为 $f'(x)=e^x+x-1$，$f'(x)=e^x+x-1$ 在 R 上递增，且 $f'(0)=0$，

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；$x>0$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$，单调增区间为 $(0,+\infty)$，

所以 $f(x)_{极小值}=f(0)=1$，无极大值.

(2) $f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^2+ax+b \Leftrightarrow e^x-(a+1)x-b\geqslant 0$

令 $h(x)=e^x-(a+1)x-b$，得 $h'(x)=e^x-(a+1)$，

①当 $a+1<0$ 时，$h'(x)>0\Leftrightarrow y=h(x)$ 在 R 上单调递增，

当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，与 $h(x)\geqslant 0$ 相矛盾；

②当 $a+1=0$ 时，$h(x)=e^x-b\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant 0$，此时 $\dfrac{b(a+1)}{2}=0$；

③当 $a+1>0$ 时，

$h'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln(a+1)$，$h'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln(a+1)$ 得，

所以在 $(-\infty,\ln(a+1))$，$h(x)$ 为减函数，在 $(\ln(a+1),+\infty)$，$h(x)$ 为增函数.

当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant 0$，

即 $(a+1)-(a+1)\ln(a+1)\geqslant b$，

所以 $(a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$(其中 $a+1>0$).

令 $F(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$，则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$，

$\therefore F'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{\mathrm{e}}$，$F'(x)<0\Leftrightarrow x>\sqrt{\mathrm{e}}$，

所以在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$，$F(x)$ 为增函数，在 $(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$，$h(x)$ 为减函数 .

当 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，$F(x)_{\max}=\frac{\mathrm{e}}{2}$，即：当 $a=\sqrt{\mathrm{e}}-1$ 时，$(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{\mathrm{e}}{2}$，

所以 $\frac{(a+1)b}{2}$ 的最大值为 $\frac{\mathrm{e}}{4}$.

综上所述：$\frac{(a+1)b}{2}$ 的最大值为 $\frac{\mathrm{e}}{4}$.

8. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x+1(a\in R)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，记函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 的最大值为 M. 最小值为 m，求 $M-m$ 的取值范围 .

【答案】 (1) 当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(a,+\infty)$，减区间为 $(0,a)$.

(2)$M-m$ 的取值范围为 $[(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2,1)$

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 可得 $x>a$；令 $f'(x)<0$ 可得 $0<x<a$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(a,+\infty)$，减区间为 $(0,a)$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；

当 $a>0$ 时， 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(a,+\infty)$，减区间为 $(0,a)$.

(2) 当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，由 (1) 可得函数 $f(x)$ 在区间 $[1,a)$ 单调递减，在区间 $(a,\mathrm{e}]$ 单调递增 .

$\therefore m=f(a)=a-a\ln a+1$，$f(1)=2$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-a+1$.

由 $f(\mathrm{e})-f(1)=\mathrm{e}-1-a$.

①当 $1<a<\mathrm{e}-1$ 时，$M=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-a+1$，

有 $M-m=(\mathrm{e}-a+1)-(a-a\ln a+1)=a\ln a-2a+\mathrm{e}$.

记 $g(x)=x\ln x-2x+\mathrm{e}(1<x<\mathrm{e}-1)$，则 $g'(x)=\ln x-1<0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e}-1)$ 单调递减，$\therefore g(\mathrm{e}-1)<g(x)<g(1)$，

即 $(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2<g(x)<\mathrm{e}-2$.

此时 $M-m$ 的取值范围为 $((\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2,\mathrm{e}-2)$.

②当 $\mathrm{e}-1\leqslant a<\mathrm{e}$ 时，$M=f(1)=2$，有 $M-m=2-(a-a\ln a+1)=a\ln a-a+1$.

记 $h(x)=x\ln x-x+1(\mathrm{e}-1\leqslant x<\mathrm{e})$，则 $h'(x)=\ln x>0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(\mathrm{e}-1,\mathrm{e})$ 单调递增，$\therefore h(\mathrm{e}-1)<h(x)<h(\mathrm{e})$，

即 $(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2\leqslant h(x)<\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=1$.

此时 $M-m$ 的取值范围为 $[(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2,1)$.

综上，$M-m$ 的取值范围为 $[(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}-1)-\mathrm{e}+2,1)$.

9. 已知函数 $f(x)=x^2-ax+2\ln x(a\in R)$ 两个极值 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 点 .

(1) 当 $a=5$ 时，求 $f(x_2)-f(x_1)$；

(2) 当 $a \geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 时，求 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值 .

【答案】 (1)$f(x_2)-f(x_1)=-\frac{15}{4}+4\ln 2$ (2)$f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2$

【解析】 (1)$f'(x)=2x-a+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-ax+2}{x}\ (x>0)$

当 $a=5$ 时，$f'(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}(x>0)$

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$；由 $f'(x)<0$，得 $\frac{1}{2}<x<2$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 及 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上单调递减，

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(4-10+2\ln 2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+2\ln\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}+4\ln 2$

(2)$f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 是 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+2}{x}=0$ 即方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=\frac{a}{2}$，$x_1x_2=1$

又 $2x_1^2-ax_1+2=0$，$2x_2^2-ax_2+2=0$ $\therefore ax_1=2x_1^2+2$，$ax_2=2x_2^2+2$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-ax_2+2\ln x_2)-(x_1^2-ax_1+2\ln x_1)$

$=[x_2^2-(2x_2^2+2)+2\ln x_2]-[x_1^2-(2x_1^2+2)+2\ln x_1]$

$=x_1^2-x_2^2+2\ln x_2-2\ln x_1$

$=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}+2\ln\frac{x_2}{x_1}$

$=\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}+2\ln\frac{x_2}{x_1}\left(\frac{x_2}{x_1}>1\right)$

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$h(t)=\frac{1}{t}-t+2\ln t$，则

$h'(t)=-\frac{1}{t^2}-1+\frac{2}{t}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$

$\because a\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ $\therefore x_1+x_2=\frac{a}{2}\geqslant\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

$\therefore \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}\geqslant\left(\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^2$ 即 $\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{x_1x_2}\geqslant \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}+2$

$\therefore \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$ 即 $\frac{1}{t}+t\geqslant\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\therefore (t-\mathrm{e})\left(t-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\geqslant 0$ 又 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$ $\therefore t\geqslant\mathrm{e}$

$\because h(t)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减

$\therefore h(t)$ 的最大值为 $h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2$ $\therefore f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+a$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 对任意的 $x>0$，不等式 $f(x)\leqslant \mathrm{e}^x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1)$f(x)_{\max}=0$ (2)$a\leqslant 1$

【解析】【解析】(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1$

则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，

$\because x>0$，$\therefore 0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；

$x>1$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，在 $(1,+\infty)$ 上为减函数

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=0$

(2) $\because$ 对任意的 $x>0$，不等式 $f(x)\leqslant e^x$ 恒成立，

$\therefore a\leqslant\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $F(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$，则 $F'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$

令 $g(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $g'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

又 $g(1)=e>0$，$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，

$\therefore\exists x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

$\therefore 0<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，

$\therefore F'(x)<0$，$\therefore F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

$x>x_0$ 时，$g(x)>0$，

$\therefore F'(x)<0$，$\therefore F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)_{\min}=F(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$

由 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$ 可得

$x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)e^{\ln\frac{1}{x_0}}$

令 $h(x)=xe^x$，则 $h(x_0)=h\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$

又 $h'(x)=(x+1)e^x>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，$\therefore\ln x_0=-x_0$，$\therefore e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0e^{x_0}=1$，

$\therefore F(x)_{\min}=F(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{1+x_0-1}{x_0}=1$，$\therefore a\leqslant 1$，

综上所述，满足条件的 a 的取值范围是 $a\leqslant 1$

11. 已知函数 $f(x)=xe^x$(其中 e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 求证：$f(x)>e^x+\ln x-\frac{1}{2}$.

【答案】 (1) $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$ (2) 见解析

【解析】 (1) 因为 $f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x$

当 $x<-1$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x<0$，$f(x)$ 单调递减

当 $x>-1$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x>0$，$f(x)$ 单调递增

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\dfrac{1}{e}$

(2) 证明：要证 $f(x)>e^x+\ln x-\dfrac{1}{2}$，

只需证明：$(x-1)e^x-\ln x+\dfrac{1}{2}>0$ 对于 $x>0$ 恒成立，

令 $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+\dfrac{1}{2}$，则 $g'(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，

当 $x>0$ 时，令 $h(x)=g'(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数

又因为 $g'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}\left[e^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]<0$，$g'(1)=e-1>0$

所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ 使得 $g'(x_0)=0$

由 $g'(x_0)=x_0e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{x_0^2e^{x_0}-1}{x_0}=0$

得 $x_0^2e^{x_0}=1$ 即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0^2}$ 即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0^2}$ 即 $-2\ln x_0=x_0$

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}<0$，$g(x)$ 单调递减

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}>0$，$g(x)$ 单调递增

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln x_0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x_0-1}{x_0^2}+\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x_0^3+x_0^2+2x_0-2}{2x_0^2}$，

令 $\varphi(x)=x^3+x^2+2x-2\left(\dfrac{2}{3}<x<1\right)$，

则 $\varphi'(x)=3x^2+2x+2=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}>0$

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x_0)>\varphi\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{27}>0$，

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=\dfrac{\varphi(x_0)}{2x_0^2}>0$，所以 $(x-1)e^x-\ln x+\dfrac{1}{2}>0$，

即 $f(x)>e^x+\ln x-\dfrac{1}{2}$.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2-x+(1+b)\ln x(a、b\in R)$.

(1) 当 $a=1$，$b=-4$ 时，求 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $b=-2$，$x\geqslant 1$ 时，求 $g(x)=|f(x)|$ 的最小值 .

【答案】 (1)$f(x)$ 单调递增区间为 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ (2)$g(x)_{\min}=\begin{cases}1-a, & a\leqslant 0\\ 0, & 0<a<1\\ a-1, & a\geqslant 1\end{cases}$

【解析】 【解析】(1) 当 $a=1$，$b=-4$ 时，$f(x)=x^2-x-3\ln x(x\in(0,+\infty))$.

$f'(x)=2x-1-\dfrac{3}{x}=\dfrac{2x^2-x-3}{x}=\dfrac{(2x-3)(x+1)}{x}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{3}{2}$，或 $x=-1$(舍去).

$\because$ 当 $x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)$ 单调递增区间为 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

(2)$g(x)=|ax^2-x-\ln x|$.

设 $\varphi(x)=ax^2-x-\ln x(x\geqslant1)$，$\varphi'(x)=2ax-1-\frac{1}{x}$，

1) 当 $a\leqslant0$ 时，$\because\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $\varphi(1)=a-1<0$，

$\therefore g(x)=-\varphi(x)$，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1-a$.

2) 当 $a>0$ 时，$\varphi'(x)=\frac{2ax^2-x-1}{x}$，

设 $t(x)=2ax^2-x-1$，$\because\Delta=1+8a>0$，$\therefore t(x)=0$ 有两根 x_1，x_2.

$\because x_1+x_2=\frac{1}{2a}>0$，$x_1x_2=-\frac{1}{2a}<0$，不妨令 $x_1<0<x_2$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_2)$ 时，$t(x)<0$，即 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$t(x)>0$，即 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增 .

①当 $t(1)=2a-2\geqslant0$，即 $a\geqslant1$ 时，$x_2\leqslant1$，$\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增 .

又 $\because\varphi(1)=a-1\geqslant0$，$\therefore g(x)=\varphi(x)$，

$\therefore g(x)_{\min}=\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=a-1$.

②当 $t(1)<0$，即 $0<a<1$ 时，$x_2>1$，$\varphi(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增 .

又 $\because\varphi(1)=a-1<0$，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_2)=ax^2-x_2-\ln x_2$，

$\varphi\left(\frac{2}{a}\right)=a\cdot\frac{4}{a^2}-\frac{2}{a}-\ln\frac{2}{a}=\frac{2}{a}-\ln\frac{2}{a}>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(x_2,\frac{2}{a}\right)\subseteq[1,+\infty)$ 使得 $\varphi(x_2)=0$，

$\therefore g(x)_{\min}=|\varphi(x_0)|=0$.

综上可得 $g(x)_{\min}=\begin{cases}1-a, & a\leqslant0\\ 0, & 0<a<1\\ a-1, & a\geqslant1\end{cases}$

13. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x+a)^2+b\ln x$，$a,b\in R$.

(1) 若直线 $y=ax$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 a^2b 的最大值；

(2) 设 $b=1$，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$，求 $\frac{f(x_2)}{x_1}$ 的取值范围 .

【答案】 (1)a^2b 的最大值是 0　　(2)$\frac{f(x_2)}{x_1}$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 (1) 因为 $f'(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$，又因为 $y=ax$ 是曲线的切线，即 $\frac{x_0^2+ax_0+b}{x_0}=a$

故 $b=-x_0^2$，因为 $y_0=\frac{1}{2}(x_0+a)^2+b\ln x_0=ax_0$，

即 $a^2=-(x_0^2+2b\ln x_0)=x_0^2(2\ln x_0-1)\geqslant0$，故 $x_0\geqslant\sqrt{\mathrm{e}}$，

所以 $a^2b=x_0^4(1-2\ln x_0)=g(x_0)$，即 $g'(x_0)=2x_0^3(1-4\ln x_0)<0$

所以 $g(x_0)$ 单调递减，故 $g(x_0)_{\max}=g(\sqrt{e})=0$，

综上，a^2b 的最大值是 0.

(2) 因为 $f'(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$，所以 x_1，x_2 是 $x^2+ax+b=0$ 的两根，

即 $\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1\cdot x_2=1\end{cases}$，故 $a=-x_2-\dfrac{1}{x_2}$，

所以 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}=\dfrac{\frac{1}{2}(x_2+a)^2+\ln x_2}{\frac{1}{x_2}}=\dfrac{1}{2x_2}+x_2\ln x_2$，

因为 $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}>1$，令 $g(x_2)=\dfrac{1}{2x_2}+x_2\ln x_2$，

即 $g'(x_2)=\dfrac{-1}{2x_2}+\ln x_2+1$ 单调递减，且 $g'(x_2)>g'(1)>0$，

所以 $g(x_2)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，故 $g(x_2)>g(1)=\dfrac{1}{2}$，

综上，$\dfrac{f(x_2)}{x_1}$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

14. 已知函数 $f(x)=ae^x-x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 .

【答案】 (1) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 无极值，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极小值 $1+\ln a$，无极大值；

(2) 当 $a\leqslant\dfrac{1}{e-1}$ 时，$f(x)$ 有最大值 a；当 $a>\dfrac{1}{e-1}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $ae-1$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 R，

$f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 R 上是减函数，无极值；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>-\ln a$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上是减函数，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上是增函数，

所以当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 有极小值，$f(-\ln a)=1+\ln a$，无极大值，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 无极值，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极小值 $1+\ln a$，无极大值；

(2) ①当 $a\leqslant 0$ 时，由 (1) 知 $f(x)$ 在 R 上是减函数，

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(0)=a$；

②当 $a>0$ 时，由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上是减函数，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上是增函数，

(i) 当 $-\ln a\leqslant 0$，即 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(1)=ae-1$；

(*ii*) 当 $0<-\ln a<1$ 即 $\dfrac{1}{e}<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,-\ln a)$ 上是减函数，在 $[-\ln a,1]$ 上是增函数 .

若 $f(0)\geqslant f(1)$，即 $\dfrac{1}{e}<a\leqslant\dfrac{1}{e-1}$ 时，$f(x)$ 有最大值 a；

若 $f(0)<f(1)$，即 $\dfrac{1}{e-1}<a<1$ 时，$f(x)$ 有最大值 $ae-1$；

(iii) 当 $-\ln a\geqslant 1$ 即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(0)=a$，

综上所述，当 $a \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}-1}$ 时，$f(x)$ 有最大值 a；

当 $a > \frac{1}{\mathrm{e}-1}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $a\mathrm{e}-1$.

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.

(1) 当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

(2) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in R)$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值 .

【答案】 (1) 证明见解析 (2)$M(a)$ 取最小值时 a 的值为 -3

【解析】 【解析】(1) 证明：欲证 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$，只需证 $-6\leqslant f(x)-x\leqslant 0$，

令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$，$x\in[-2,4]$，则 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x\left(x-\frac{8}{3}\right)$，

可知 $g'(x)$ 在 $[-2,0)$ 为正，在 $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ 为负，在 $\left(\frac{8}{3},4\right]$ 为正，

$\therefore g(x)$ 在 $[-2,0)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{8}{3},4\right]$ 上单调递增，

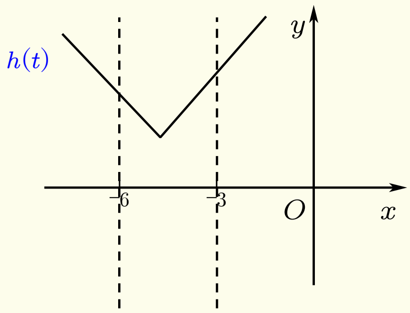
又 $g(-2)=-6$，$g(0)=0$，$g\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{64}{27}>-6$，$g(4)=0$，$\therefore -6\leqslant g(x)\leqslant 0$，

$\therefore x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

(2) 由 (1) 可得，$F(x)=|f(x)-(x+a)|=|f(x)-x-a|=|g(x)-a|$，

$\because$ 在 $[-2,4]$ 上，$-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，

令 $t=g(x)$，$h(t)=|t-a|$，则问题转化为当 $t\in[-6,0]$ 时，$h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题了，



①当 $a<-3$ 时，$M(a)=h(0)=|a|=-a$，此时 $-a>3$；

②当 $a>-3$ 时，$M(a)=h(-6)=|-6-a|=|6+a|$，$6+a>3$；

③当 $a=-3$ 时，$M(a)=h(0)=h(-6)=3$，

综上，当 $M(a)$ 取最小值时 a 的值为 -3.

专题6:三次函数

1. 已知 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$ 在 $x=-1$ 时有极值0,则 $a-b=$ ( )

A. -7　　B. -2　　C. -7 和 -2　　D. 以上答案都不对

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$,

$\therefore f'(x)=3x^2+6ax+b$,

又 $\because$ 函数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$ 在 $x=-1$ 处有极值0,

$\therefore \begin{cases}3-6a+b=0\\-1+3a-b+a^2=0\end{cases}$, $\therefore \begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}$,

当 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ 时,$f'(x)=3x^2+6ax+b=3(x+1)^2=0$,方程有两个相等的实数根,不满足题意;

当 $\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}$ 时,$f'(x)=3x^2+6ax+b=3(x+1)(x+3)=0$,方程有两个不等的实数根,满足题意;

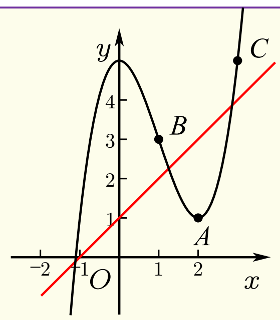
$\therefore a-b=-7$ 故选:A.

2. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+5$, $g(x)=m(x+1)\ (m\in R)$,若存在唯一的正整数 x_0,使得 $f(x_0)<g(x_0)$,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left[0,\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

【答案】 C

【解析】 函数的导数 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$,



由 $f'(x)>0$ 得 $x>2$ 或 $x<0$,此时为增函数,

由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2$,此时函数为减函数,

即当 $x=0$ 时,函数取得极大值,当 $x=2$ 时函数取得极小值,

当 $m\leqslant 0$ 时,不满足条件.

当 $m>0$ 时,$f(2)=1$, $f(1)=3$, $f(3)=5$,

若存在唯一的正整数 x_0,使得 $f(x_0)<g(x_0)$,

则唯一的正整数 $x_0=2$,

则满足 $\begin{cases}g(2)>f(2)=1\\g(3)\leqslant f(3)=5\\g(1)\leqslant f(1)=3\end{cases}$,即 $\begin{cases}3m>1\\4m\leqslant 5\\2m\leqslant 3\end{cases}$,得 $\begin{cases}m>\frac{1}{3}\\m\leqslant\frac{5}{4}\\m\leqslant\frac{3}{2}\end{cases}$,得 $\frac{1}{3}<m\leqslant\frac{5}{4}$,

则实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$. 故选:$C$.

3. 设函数 $f(x)=x^3-3x^2-ax+5-a$,若存在唯一的正整数 x_0,使得 $f(x_0)<0$,则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$

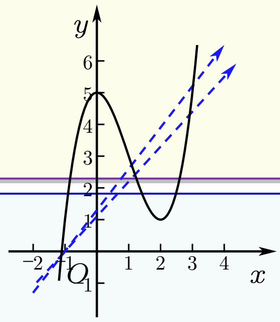
【答案】 B.

【解析】 设 $g(x)=x^3-3x^2+5$, $h(x)=a(x+1)$,

两个函数图象如图:要使存在唯一的正整数 x_0,

使得 $f(x_0)<0$，只要 $\begin{cases}g(1)\geqslant h(1)\\ g(2)<h(2)\\ g(3)\geqslant h(3)\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-3+5\geqslant 2a\\ 8-12+5<3a\\ 27-27+5\geqslant 4a\end{cases}$，

解得 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{5}{4}$；故选：$B$



4. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2-x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　　B. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

C. $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

【答案】 B

【解析】 由 $f(x)=-x^3+ax^2-x-1$，得到 $f'(x)=-3x^2+2ax-1$，

因为函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数，

所以 $f'(x)=-3x^2+2ax-1\leqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒成立，

则 $\triangle=4a^2-12\leqslant 0\Rightarrow -\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，

所以实数 a 的取值范围是：$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

故选：B.

5. 若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上有极值点，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　B. $\left[2,\frac{5}{2}\right)$　　C. $\left(2,\frac{10}{3}\right)$　　D. $\left[2,\frac{10}{3}\right)$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$，$\therefore f'(x)=x^2-ax+1$，

若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上有极值点，

则 $f'(x)=x^2-ax+1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 内有零点

由 $x^2-ax+1=0$ 可得 $a=x+\frac{1}{x}$

$\because x\in\left(\frac{1}{2},3\right)$，$\therefore 2\leqslant a<\frac{10}{3}$，

当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 的导函数等于零时值只有 1，可是两边的单调性相同，所以 a 不能等于 2.

故选：C.

6. 若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，则 $\frac{b}{a}$ 的值为 (　　)

A. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$，$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$，

又 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，

$\therefore f'(1)=3+2a+b=0$，$f(1)=1+a+b-a^2-7a=10$，

$\therefore a^2+8a+12=0$，

$\therefore a=-2$，$b=1$ 或 $a=-6$，$b=9$.

当 $a=-2, b=1$ 时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，

当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，与题意不符；

当 $a=-6, b=9$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $<x<3$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，符合题意；

则 $\frac{b}{a}=-\frac{9}{-6}=-\frac{3}{2}$，故选：$C$.

7. 如果函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间 $(1,4)$ 上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a\leqslant 5$　　B. $5\leqslant a\leqslant 7$　　C. $a\geqslant 7$　　D. $a\leqslant 5$ 或 $a\geqslant 7$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$

$\therefore f'(x)=x^2-ax+(a-1)=(x-1)[x-(a-1)]$

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 区间 $(1,4)$ 上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore 4\leqslant a-1\leqslant 6 \therefore 5\leqslant a\leqslant 7$ 故选：B.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上既有极大值又有极小值，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　D. $\left(2,\frac{10}{3}\right)$

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$，求导 $f'(x)=x^2-ax+1$，

由 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上既有极大值又有极小值，则 $f'(x)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 内应有两个不同实数根 .

$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f'(3)>0 \\ \frac{1}{2}<\frac{1}{a}<3 \\ f'\left(\frac{1}{a}\right)<0 \end{cases}$，解得：$2<a<\frac{5}{2}$，实数 a 的取值范围 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$，故选：$C$.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x(a\geqslant 0)$ 在区间 $(0,1)$ 上不是单调函数，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,2)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x \therefore f'(x)=ax^2-x-1$

$\because$ 函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x(a\geqslant 0)$ 在区间 $(0,1)$ 上不是单调函数

$\therefore f'(x)=ax^2-x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 上有根

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$x=-1$ 不满足条件

当 $a>0$ 时，$\because f'(0)=-1<0$，$\therefore f'(1)=a-2>0$，

$\therefore a>2$ 故选：D.

10. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+2(m-1)x$ 在 $(0,4)$ 上无极值，则 $m=$ ______.

【答案】 3

【解析】 函数 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上无极值即导函数 $f'(x)$ 在 $(0,4)$ 上无根 .

$f'(x)=x^2-(m+1)x+2(m-1)$ 在 $(0,4)$ 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$ ①；

当 $m-1>2$ 时，①式解为 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant m-1$；显然 $x\in(0,4)$ 时，①式不成立；

当 $m-1<2$ 时，①式解为 $x\leqslant m-1$ 或 $x>2$；显然 $x\in(0,4)$ 时，①式不成立；

当 $m-1=2$ 时，①式解为 $x=2$，$m=3$. 故答案为：3.

11. 设函数 $f(x)=x^3+(1+a)x^2+ax$ 有两个不同的极值点 x_1，x_2，且对不等式 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 __________ .

【答案】 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$

【解析】 【解析】因 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$，故得不等式 $x_1^3+x_2^3+(1+a)\left(x_1^2+x_2^2\right)+a(x_1+x_2)\leqslant 0$.

即 $(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]+(1+a)\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+a(x_1+x_2)\leqslant 0$.

由于 $f'(x)=3x^2+2(1+a)x+a$.

令 $f'(x)=0$ 得方程 $3x^2+2(1+a)x+a=0$.

$\triangle=4(a^2-a+1)\geqslant 4a>0$，$x_1+x_2=-\frac{2}{3}(1+a)$，$x_1x_2=\frac{a}{3}$，

代入前面不等式，并化简得 $(1+a)(2a^2-5a+2)\geqslant 0$.

解不等式得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$，

因此，实数 a 的取值范围是 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$. 故答案为：$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$.

12. 若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是 __________ .

【答案】 $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$，$\therefore f'(x)=x^2-ax+1$，

若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上递减，故 $x^2-ax+1\leqslant 0$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 恒成立，

即 $a\geqslant x+\frac{1}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 恒成立，

令 $g(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in\left(\frac{1}{2},3\right)$，$g'(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$，

令 $g'(x)>0$，解得：$x>1$，令 $g'(x)<0$，解得：$x<1$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 递减，在 $(1,3)$ 递增，而 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，$g(3)=\frac{10}{3}$，

故 $a\geqslant\frac{10}{3}$ 故答案为：$\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$.

13. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{2}{3}$ 在区间 $(a,a+5)$ 上存在最小值，则实数 a 的取值范围是 _________ .

【答案】 $[-3,0)$

【解析】 由题意，$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$，

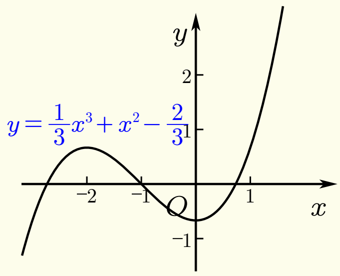
故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 上是增函数，

在 $(-2,0)$ 上是减函数，作其图象如右图，

令 $\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$ 得，$x=0$ 或 $x=-3$；

则结合图象可知，

$\begin{cases}-3\leqslant a<0\\ a+5>0\end{cases}$；解得，$a\in[-3,0)$；故答案为：$[-3,0)$



14. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+1$，$a\in R$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内是减函数，则实数 a 的取值范围是 ______ .

【答案】 $a\leqslant -1$

【解析】 ∵ 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+1$，

∴ $f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$，

若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内是减函数，则此时 $f'(x)<0$ 恒成立，

则 $\begin{cases}f'(1)\leqslant 0\\ f'(-1)\leqslant 0\end{cases}$，则 $\begin{cases}0\leqslant 0\\ -2(-1-a)\leqslant 0\end{cases}$，

即 $1+a\leqslant 0$，$a\leqslant -1$，故答案为：$a\leqslant -1$；

专题 7：零点问题

1. 设函数 $f(x)=x^2-2ex-\frac{\ln x}{x}+a$（其中 e 为自然对数的底数，若函数 $f(x)$ 至少存在一个零点，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $\left(0,e^2-\frac{1}{e}\right]$　　B. $\left(0,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　C. $\left[e^2-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right]$

【答案】 D

【解析】 令 $f(x)=x^2-2ex-\frac{\ln x}{x}+a=0$，则 $a=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}(x>0)$，

设 $h(x)=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}$，令 $h_1(x)=-x^2+2ex$，$h_2(x)=\frac{\ln x}{x}$，

$\therefore h_2'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，发现函数 $h_1(x)$，$h_2(x)$ 在 $(0,e)$ 上都是单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上都是单调递减，

$\therefore$ 函数 $h(x)=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，

故当 $x=e$ 时，得 $h(x)_{\max}=e^2+\frac{1}{e}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 至少存在一个零点需满足 $a\leqslant h(x)_{\max}$，

即 $a\leqslant e^2+\frac{1}{e}$. 故选：$D$.

2. 设函数 $f(x)=x^3-2ex^2+mx-\ln x$，记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，若函数 $g(x)$ 至少存在一个零点，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　B. $\left(0,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　C. $\left(e^2+\frac{1}{e},+\infty\right]$　　D. $\left(-e^2-\frac{1}{e},e^2+\frac{1}{e}\right]$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x)=x^3-2ex^2+mx-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 至少存在一个零点可化为

函数 $f(x)=x^3-2ex^2+mx-\ln x$ 至少有一个零点；

即方程 $x^3-2ex^2+mx-\ln x=0$ 有解，

则 $m=\frac{-x^3+2ex^2+\ln x}{x}=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}$，

$m'=-2x+2e+\frac{1-\ln x}{x^2}=-2(x-e)+\frac{1-\ln x}{x^2}$；

故当 $x\in(0,e)$ 时，$m'>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$m'<0$；

则 $m=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，

在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

故 $m\leqslant -e^2+2\cdot e\cdot e+\frac{1}{e}=e^2+\frac{1}{e}$；

又 $\because$ 当 $x_+\to 0$ 时，$m=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}\to-\infty$，

故 $m\leqslant e^2+\frac{1}{e}$；故选：$A$.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{me^x}{2}$ 与函数 $g(x)=-2x^2-x+1$ 的图象有两个不同的交点，则实数 m 取值范围为 （　　）

A. $[0,1)$　　B. $[0,2)\cup\left\{-\frac{18}{e^2}\right\}$　　C. $(0,2)\cup\left\{-\frac{18}{e^2}\right\}$　　D. $[0,2\sqrt{e})\cup\left\{-\frac{18}{e^2}\right\}$

【答案】 D

【解析】 由题意得：$\frac{me^x}{2}=-2x^2-x+1$，$\therefore m=\frac{-4x^2-2x+2}{e^x}$，

问题转化为函数 $y=m$ 的图象和函数 $h(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{e^x}$ 的图象有 2 个交点，

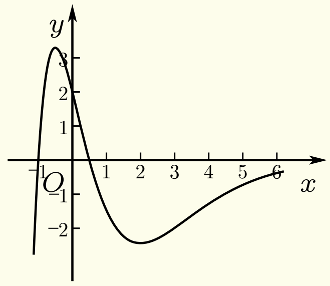
$h'(x)=\frac{2(2x+1)(x-2)}{e^x}$，

故函数 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上递增，

在 $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ 单调递减，且 $x\to+\infty$ 时，

$h(x)\to0$，$h\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$，$h(2)=-\frac{18}{e^2}$，

作出函数 $h(x)$ 的图象，如图所示：



观察图象得：函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有 2 个不同的交点时，

实数 $m\in[0,2\sqrt{e})\cup\left\{-\frac{18}{e^2}\right\}$，故选：$D$.

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且对任意 $x\in R$ 都满足 $f(1+x)=f(1-x)$，当 $x\leqslant1$ 时，

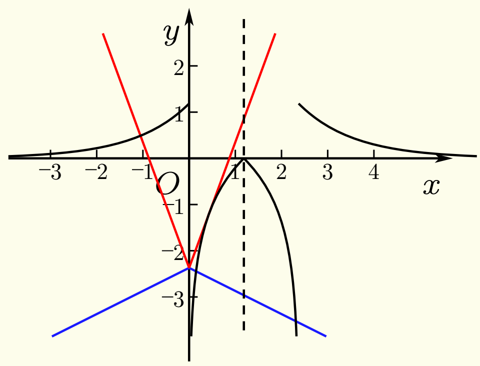
$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant1\\ e^x, & x\leqslant0\end{cases}$.（其中 e 为自然对数的底数），若函数 $g(x)=m|x|-2$ 与 $y=f(x)$ 的图象恰有两个交点，则实数 m 的取值范围是　（　　）

A. $m\leqslant0$ 或 $m=e$　　B. $0<m\leqslant\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{2}<m<e$　　D. $m>e$

【答案】 A

【解析】 由函数 $f(1+x)=f(1-x)$ 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

如图所示：



由于 $y=f(x)$ 和函数 $y=g(x)$ 的图象只有两个交点，

设 $y=\ln x$，$x\in(0,1)$ 图象上的切点 $(x_0,\ln x_0)$，

所以 $y'=\frac{1}{x}$，则 $k_{切}=\frac{1}{x_0}$，

所以曲线的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

把 $(0,-2)$ 代入可得 $x_0=\frac{1}{e}$，

则 $k_{切}=\frac{1}{x_0}=e$，结合图象，

要使图象有两个交点，则 $m\leqslant0$ 或 $m=e$. 故选：A.

5. 定义：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在 x_1，$x_2(a<x_1<x_2<b)$，满足 $f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(x_2)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个双中值函数，已知函数 $f(x)=x^3-\frac{6}{5}x^2$ 是区间 $[0,t]$ 上的双中值函数，则实数 t 的取值范围是　（　　）

A. $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$　　C. $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$　　D. $\left(1,\frac{6}{5}\right)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=x^3-\frac{6}{5}x^2$，$\therefore f'(x)=3x^2-\frac{12}{5}x$，

$\because$ 函数 $f(x)=x^3-\frac{6}{5}x^2$ 是区间 $[0,t]$ 上的双中值函数，

$\therefore$ 区间 $[0,t]$ 上存在 $x_1,x_2(0<x_1<x_2<t)$，

满足 $f'(x_1)=f'(x_2)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$，即方程 $3x^2-\frac{12}{5}x=t^2-\frac{6}{5}t$ 在区间 $[0,t]$ 有两个解，

令 $g(x)=3x^2-\frac{12}{5}x-t^2+\frac{6}{5}t$，对称轴 $x=-\frac{-\frac{12}{5}}{6}=\frac{2}{5}>0$，

则 $\begin{cases}\triangle=\left(-\frac{12}{5}\right)^2-12\left(-t^2+\frac{6}{5}t\right)>0\\ g(0)=-t^2+\frac{6}{5}t>0\\ g(t)=3t^2-\frac{12}{5}t-t^2+\frac{6}{5}t>0\end{cases}$，解得 $\frac{3}{5}<t<\frac{6}{5}$.

$\therefore$ 实数 t 的取值范围是 $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$. 故选：$A$.

6. 定义：如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内给定区间 $[a,b]$ 上存在 $(a<x_0<b)$，满足 $f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的“平均值函数”，x_0 是它的一个均值点．则下列叙述正确的个数是 (　　)

①$y=x^2$ 是区间 $[-1,1]$ 上的平均值函数，0 是它的均值点；

②函数 $f(x)=-x^2+4x$ 在区间 $[0,9]$ 上是平均值函数，它的均值点是 5；

③函数 $f(x)=\log_2x$ 在区间 $[a,b]$（其中 $b>a>0$）上都是平均值函数；

④若函数 $f(x)=-x^2+mx+1$ 是区间 $[-1,1]$ 上的平均值函数，则实数 m 的取值范围是 $(0,2)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】 根据题意，依次分析题目中的四个结论：

对于①，若 $y=x^2$ 是区间 $[-1,1]$ 上的平均值函数，设其均值点为 n，

则有 $f(n)=n^2=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}-0$，解可得 $n=0$，即 0 是它的均值点，①正确；

对于②，若函数 $f(x)=-x^2+4x$ 在区间 $[0,9]$ 上是平均值函数，设其均值点为 n，

则有 $f(n)=-n^2+4n=\frac{f(9)-f(0)}{9-0}=-5$，解可得 $n=5$ 或 -1（舍）即 5 是它的均值点，②正确，

对于③，函数 $f(x)=\log_2x$ 在区间 $[a,b]$ 都是平均值函数，则 $\log_2x=\frac{\log_2b-\log_2a}{b-a}$ 恒成立，明显错误，③错误；

对于④，若函数 $f(x)=-x^2+mx+1$ 是区间 $[-1,1]$ 上的平均值函数，

则关于 x 的方程 $-x^2+mx+1=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$ 在 $(-1,1)$ 内有实数根，

而 $-x^2+mx+1=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}\Rightarrow x^2-mx+m-1=0$，解得 $x=m-1$，$x=1$（舍），

必有 $x=m-1$ 必为均值点，即 $-1<m-1<1\Rightarrow 0<m<2$，即实数 m 的取值范围是 $(0,2)$，④正确；

其中①②④正确；故选：C.

7. 若存在正实数 m，使得关于 x 的方程 $x+a(2x+2m-4ex)[\ln(x+m)-\ln x]=0$ 有两个不同的根，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

【答案】 D

【解析】 【解析】由题意得 $-\frac{1}{2a}=\left(1+\frac{m}{x}-2\mathrm{e}\right)\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)=(t-2\mathrm{e})\ln t$，$\left(t=\frac{m}{x}+1>1\right)$，

令 $f(t)=(t-2\mathrm{e})\ln t$，$(t>1)$，

则 $f'(t)=\ln t+1-\frac{2\mathrm{e}}{t}$，$f''(t)=\frac{1}{t}+\frac{2\mathrm{e}}{t^2}>0$，

当 $t>\mathrm{e}$ 时，$f'(t)>f'(\mathrm{e})=0$，

当 $1<t<\mathrm{e}$ 时，$f'(t)<f'(\mathrm{e})=0$，

$\therefore f(t)\geqslant f(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$，$\therefore -\frac{1}{2a}>-\mathrm{e}$，

而 $t\to1$ 时，$f(t)\to0$，则要满足 $-\mathrm{e}<-\frac{1}{2a}<0$，

解得：$a>\frac{1}{2\mathrm{e}}$，故选：D.

8. 已知函数 $u(x)=(2\mathrm{e}-1)x-m$，$v(x)=\ln(x+m)-\ln x$ 若存在 m，使得关于 x 的方程 $2a\cdot u(x)\cdot v(x)=x$ 有解，其中 e 为自然对数的底数则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $\left(0,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$　　D. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

【答案】 D

【解析】 【解析】由 $2a\cdot u(x)\cdot v(x)=x$ 可得 $[2a(2\mathrm{e}-1)x-2am]\cdot\ln\frac{x+m}{x}-x=0$，

即 $2a\left[(2\mathrm{e}-1)-\frac{m}{x}\right]\cdot\ln\frac{x+m}{x}-1=0$，即 $2a\left(2\mathrm{e}-\frac{x+m}{x}\right)\cdot\ln\frac{x+m}{x}-1=0$，

令 $\frac{x+m}{x}=t$，则方程 $(2\mathrm{e}-t)\ln t=\frac{1}{2a}$ 有解.

设 $f(t)=(2\mathrm{e}-t)\ln t$，则 $f'(t)=-\ln t+\frac{2\mathrm{e}-t}{t}=-\ln t+\frac{2\mathrm{e}}{t}-1$，

显然 $f'(t)$ 为减函数，又 $f'(\mathrm{e})=0$，

$\therefore$ 当 $0<t<\mathrm{e}$ 时，$f'(t)>0$，当 $t>\mathrm{e}$ 时，$f'(t)<0$，

$\therefore f(t)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(t)$ 的最大值为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，

$\therefore \frac{1}{2a}\leqslant\mathrm{e}$，解得 $a<0$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}$. 故选：$D$.

9. 若关于 x 的方程 $\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<0<x_2<x_3$，其中 $m\in R$，e 为自然对数的底数，则 $\left(\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}+1\right)^2\left(\frac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}+1\right)\left(\frac{x_3}{\mathrm{e}^{x_3}}+1\right)$ 的值为 ( )

A. $1+m$　　B. e　　C. $m-1$　　D. 1

【答案】 D

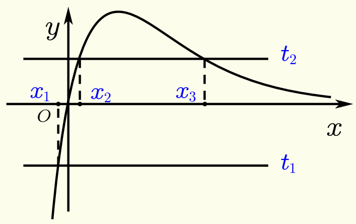
【解析】 由方程 $\frac{x}{e^x}+\frac{e^x}{x+e^x}+m=0\Rightarrow\frac{x}{e^x}+\frac{1}{\frac{x}{e^x}+1}+m=0$，

令 $\frac{x}{e^x}=t$，则有 $t+\frac{1}{t+1}+m=0\Rightarrow t^2+(m+1)t+1+m=0$，

令函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，

其图象如下，



要使关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x}+\frac{e^x}{x+e^x}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<0<x_2<x_3$

结合图象可得关于 t 的方程 $t^2+(m+1)t+1+m=0$ 一定有两个实根 t_1，t_2，$(t_1<0<t_2)$

且 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=t_1$，$\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{x_3}{e^{x_3}}=t_2$，

$\therefore\left(\frac{x_1}{e^{x_1}}+1\right)^2\left(\frac{x_2}{e^{x_2}}+1\right)\left(\frac{x_3}{e^{x_3}}+1\right)=[(t_1+1)(t_2+1)]^2$.

$(t_1+1)(t_2+1)=t_1t_2+(t_1+t_2)+1=(1+m)-(1+m)+1=1$.

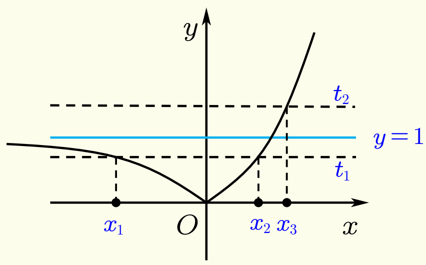
$\therefore\left(\frac{x_1}{e^{x_1}}+1\right)^2\left(\frac{x_2}{e^{x_2}}+1\right)\left(\frac{x_3}{e^{x_3}}+1\right)=[(t_1+1)(t_2+1)]^2=1$. 故选：$D$.

10. 若关于 x 的方程 $|e^x-1|+\frac{2}{|e^x-1|+1}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1、x_2、x_3，$(x_1<0<x_2<x_3)$ 其中 $m\in R$，$e=2.71828\cdots$，则 $(|e^{x_1}-1|+1)\cdot(|e^{x_2}-1|+1)\cdot(|e^{x_3}-1|+1)^2$ 的值为 (　　)

A. e　　B. 4　　C. $m-1$　　D. $m+1$

【答案】 B

【解析】 令 $t=|e^x-1|$，函数 $y=|e^x-1|$ 的图象如下：



方程 $|e^x-1|+\frac{2}{|e^x-1|+1}+m=0\Rightarrow t+\frac{2}{t+1}+m=0$. 即 $t^2+(m+1)t+2+m=0$，

要使方程 $|e^x-1|+\frac{2}{|e^x-1|+1}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1、x_2、x_3，$(x_1<0<x_2<x_3)$，

则方程 $t^2+(m+1)t+2+m=0$ 一定有两个实根 t_1，t_2，

可验证 $t=0$ 或 1 不符合题意，

所以方程 $t^2+(m+1)t+2+m=0$ 一定有两个实根 t_1，t_2，且 $0<t_1<1<t_2$.

且 $|e^{x_1}-1|=|e^{x_2}-1|=t_1$，$|e^{x_3}-1|=t_2$，

则 $(|e^{x_1}-1|+1)\cdot(|e^{x_2}-1|+1)\cdot(|e^{x_3}-1|+1)^2=[(t_1+1)(t_2+1)]^2$.

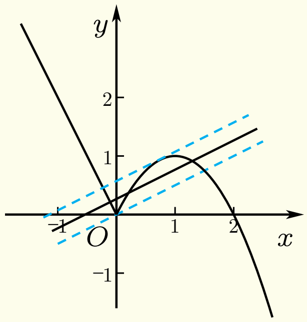
$(t_1+1)(t_2+1)=t_1t_2+(t_1+t_2)+1=(2+m)-(1+m)+1=2$.

则 $(|e^{x_1}-1|+1)\cdot(|e^{x_2}-1|+1)\cdot(|e^{x_3}-1|+1)^2=[(t_1+1)(t_2+1)]^2=4$，故选：$B$.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ -x^2+2x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}x+m$ 恰有三个不相等的实数解，则 m 的取值范围是 (　　)

A. $\left[0,\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[0,\frac{9}{16}\right]$　　D. $\left(0,\frac{9}{16}\right)$

【解析】 函数 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ -x^2+2x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象如下图所示：



若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}x+m$ 恰有三个不相等的实数解，

则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 有三个交点，

当直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 经过原点时，$m=0$，

由 $y=-x^2+2x$ 的导数 $y'=-2x+2=\frac{1}{2}$ 得：$x=\frac{3}{4}$，

当直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 与 $y=-x^2+2x$ 相切时，切点坐标为：$\left(\frac{3}{4},\frac{15}{16}\right)$，

当直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 经过 $\left(\frac{3}{4},\frac{15}{16}\right)$ 时，$m=\frac{9}{16}$，

故 $m\in\left(0,\frac{9}{16}\right)$，故选：$D$.

12. 已知函数 $f(x)=(3x+1)e^{x+1}+mx(m\geqslant -4e)$，若有且仅有两个整数使得 $f(x)\leqslant 0$，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{5}{e},2\right]$　　B. $\left[-\frac{5}{2e},-\frac{8}{3e^2}\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{8}{3e^2}\right)$　　D. $\left[-4e,-\frac{5}{2e}\right)$

【解析】 由 $f(x)\leqslant 0$ 得 $(3x+1)e^{x+1}+mx\leqslant 0$，即 $mx\leqslant -(3x+1)e^{x+1}$，

设 $g(x)=mx$，$h(x)=-(3x+1)e^{x+1}$，

$h'(x)=-(3e^{x+1}+(3x+1)e^{x+1})=-(3x+4)e^{x+1}$，

由 $h'(x)>0$ 得 $-(3x+4)>0$，即 $x<-\frac{4}{3}$，由 $h'(x)<0$ 得 $-(3x+4)<0$，即 $x>-\frac{4}{3}$，

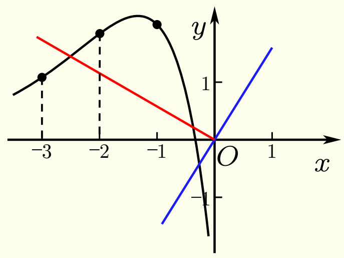
即当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值，

当 $m\geqslant 0$ 时，满足 $g(x)\leqslant h(x)$ 的整数解超过 2 个，不满足条件 .

当 $m<0$ 时，要使 $g(x)\leqslant h(x)$ 的整数解只有 2 个，

则满足$\begin{cases}h(-2)\geqslant g(-2)\\h(-3)<g(-3)\end{cases}$，即$\begin{cases}5e^{-1}\geqslant -2m\\8e^{-2}<-3m\end{cases}$，即$\begin{cases}m\geqslant -\dfrac{5}{2e}\\m<-\dfrac{8}{3e^2}\end{cases}$，即$-\dfrac{5}{2e}\leqslant m<-\dfrac{8}{3e^2}$，

即实数m的取值范围是$\left[-\dfrac{5}{2e},-\dfrac{8}{3e^2}\right)$，故选：$B$.



13. 已知函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}$，$a$是常数，且$a\geqslant 1$.

(Ⅰ)讨论$f(x)$零点的个数；

(Ⅱ)证明：$\dfrac{2}{2n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{3}{3n+1}$，$n\in N^+$.

【答案】 见解析

【解析】 (Ⅰ)$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a^2}{(x+a)^2}=\dfrac{x(x-a^2+2a)}{(x+1)(x+a)^2}$，

解$f'(x)=0$得$x=0$，或$x=a^2-2a$

①$a=1$时，$f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$，若$x\in(-1,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)>f(0)=0$，

若$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)>f(0)=0$.$f(x)$有一个零点，

②$1<a<2$时，$-1<a^2-2a<0$，

x	$(-1,a^2-2a)$	a^2-2a	$(a^2-2a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$f(x)$在区间$(a^2-2a,+\infty)$有一个零点$x=0$，

$f(a^2-2a)>f(0)=0$，又$-\dfrac{ax}{x+a}=\dfrac{a^2}{x+a}-a\leqslant\dfrac{a^2}{a-1}-a=\dfrac{a}{a-1}$，

任取$t\in\left(-1,e^{\frac{a}{1-a}}-1\right)$，$f(t)<\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a}{a-1}=0$，

$f(x)$在区间(t,a^2-2a)有一个零点，从而$f(x)$有两个零点，

③$a=2$时，$f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，有一个零点$x=0$，

④$a>2$时，$a^2-2a>0$，

x	$(-1,0)$	0	$(0,a^2-2a)$	a^2-2a	$(a^2-2a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$f(x)$在区间$(-1,a^2-2a)$有一个零点$x=0$，在区间$(a^2-2a,+\infty)$有一个零点，从而$f(x)$有两个零点，

(Ⅱ)证明：取$a=2$，由(1)知$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$在$(-1,+\infty)$上单调递增，

取 $x=\frac{1}{n}(n\in N^*)$，则 $f\left(\frac{1}{n}\right)>f(0)=0$，化简得 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2}{2n+1}$，

取 $a=\frac{3}{2}$，由 (1) 知 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{3x}{2x+3}$ 在区间 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 上单调递减，

取 $x=-\frac{1}{n+1}\in\left(-\frac{3}{4},0\right)(n\in N^*)$，由 $f(x)>f(0)$ 得 $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{-\frac{3}{n+1}}{2\left(-\frac{1}{n+1}\right)+3}$，

即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{3}{3n+1}(n\in N^*)$，

综上，$\frac{2}{2n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{3}{3n+1}$，$n\in N^*$

14. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 单调减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 是减函数，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是增函数；

(2) $a\in(0,1)$

【解析】 (1) 由 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$，求导 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-1$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2\mathrm{e}^x-1<0$，$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，

当 $a>0$ 时，$f'(x)=(2\mathrm{e}^x+1)(ae^x-1)=2a\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{a}\right)$，

令 $f'(x)=0$，解得：$x=\ln\frac{1}{a}$，

当 $f'(x)>0$，解得：$x>\ln\frac{1}{a}$，当 $f'(x)<0$，解得：$x<\ln\frac{1}{a}$，

$\therefore x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增；

当 $a<0$ 时，$f'(x)=2a\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{a}\right)<0$，恒成立，

$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，

综上可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 单调减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 是减函数，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是增函数；

(2) ①若 $a\leqslant 0$ 时，由 (1) 可知：$f(x)$ 最多有一个零点，

当 $a>0$ 时，$f(x)=ae^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$，

当 $x\to-\infty$ 时，$\mathrm{e}^{2x}\to 0$，$\mathrm{e}^x\to 0$，

$\therefore$ 当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

当 $x\to\infty$，$\mathrm{e}^{2x}\to+\infty$，且远远大于 e^x 和 x，

$\therefore$ 当 $x\to\infty$，$f(x)\to+\infty$，

$\therefore$ 函数有两个零点，$f(x)$ 的最小值小于 0 即可，

由 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 是减函数，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=a\times\left(\frac{1}{a^2}\right)+(a-2)\times\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$，

$\therefore 1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$，即 $\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1>0$，

设 $t=\dfrac{1}{a}$，则 $g(t)=\ln t+t-1$，$(t>0)$，求导 $g'(t)=\dfrac{1}{t}+1$，由 $g(1)=0$，

$\therefore t=\dfrac{1}{a}>1$，解得：$0<a<1$，$\therefore a$ 的取值范围 $(0,1)$.

方法二：(1) 由 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，求导 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2e^x-1<0$，

$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，

当 $a>0$ 时，$f'(x)=(2e^x+1)(ae^x-1)=2a\left(e^x+\dfrac{1}{2}\right)\left(e^x-\dfrac{1}{a}\right)$，

令 $f'(x)=0$，解得：$x=-\ln a$，当 $f'(x)>0$，解得：$x>-\ln a$，当 $f'(x)<0$，解得：$x<-\ln a$，

$\therefore x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(-\ln a,+\infty)$ 单调递增；

当 $a<0$ 时，$f'(x)=2a\left(e^x+\dfrac{1}{2}\right)\left(e^x-\dfrac{1}{a}\right)<0$，恒成立，

$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，

综上可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 单调减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 是减函数，在 $(-\ln a,+\infty)$ 是增函数；

(2) ①若 $a\leqslant 0$ 时，由 (1) 可知：$f(x)$ 最多有一个零点，

②当 $a>0$ 时，由 (1) 可知：当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}$，

当 $a=1$，时，$f(-\ln a)=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点，

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，由 $1-\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}>0$，即 $f(-\ln a)>0$，

故 $f(x)$ 没有零点，

当 $a\in(0,1)$ 时，$1-\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}<0$，$f(-\ln a)<0$，

由 $f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>-2e^{-2}+2>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点，

假设存在正整数 n_0，满足 $n_0>\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$，

则 $f(n_0)=e^{n_0}(ae^{n_0}+a-2)-n_0>e^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$，

由 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)>-\ln a$，因此在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点 .

$\therefore a$ 的取值范围 $(0,1)$.

15. 已知函数 $f(x)=(ex-e)e^x+ax^2$，$a\in R$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .

【答案】 (Ⅰ) 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,\ln(-2a)-1)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln(-2a)-1,+\infty)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

(Ⅱ) $a>0$

【解析】 (Ⅰ) 由题 $f'(x)=x(e^{x+1}+2a)$，$x\in R$，

(1) 当 $a\geqslant 0$ 时，$e^{x+1}+2a>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

(2) 当 $-\frac{e}{2}<a<0$ 时，$\ln(-2a)-1<0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,\ln(-2a)-1)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\ln(-2a)-1,0)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

(3) 当 $a=-\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)\geqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

(4) 当 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$\ln(-2a)-1>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,\ln(-2a)-1)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln(-2a)-1,+\infty)$ 时，$f'(x)=x(e^{x+1}+2a)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

(Ⅱ) 当 $a=0$ 时，$f(x)=(ex-e)e^{x}$，有唯一零点 $x=1$，不符合题意；

由 (Ⅰ) 知：

①当 $a>0$ 时，故 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

且 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(0)=-e<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 必有两个零点；

②当 $-\frac{e}{2}<a<0$ 时，故 $x\in(-\infty,\ln(-2a)-1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

$x\in(\ln(-2a)-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

又 $\because f(\ln(-2a)-1)=-2a(\ln(-2a)-1)+a(\ln(-2a)-1)^2<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 至多有一个零点；

③当 $a=-\frac{e}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，函数 $f(x)$ 至多有一个零点；

④当 $a<-\frac{e}{2}$ 时，故 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，$x\in(0,\ln(-2a)-1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$x\in(\ln(-2a)-1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

又 $f(0)=-e<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 至多有一个零点；

综上所述：当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点．

16. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^2$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

【答案】 (Ⅱ) $(0,+\infty)$

【解析】 (Ⅰ) 由 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^2$，

可得 $f'(x)=(x-1)e^{x}+2a(x-1)=(x-1)(e^{x}+2a)$，

①当 $a\geqslant 0$ 时，由 $f'(x)>0$，可得 $x>1$；由 $f'(x)<0$，可得 $x<1$，

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递减；在 $(1,+\infty)$ 递增 (如下左图)；

②当 $a<0$ 时，(如下右图) 若 $a=-\frac{e}{2}$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即有 $f(x)$ 在 R 上递增；

若 $a<-\frac{e}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，可得 $x<1$ 或 $x>\ln(-2a)$；

由 $f'(x)<0$，可得 $1<x<\ln(-2a)$.

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(\ln(-2a),+\infty)$ 递增；在 $(1,\ln(-2a))$ 递减；

若 $-\frac{e}{2}<a<0$，由 $f'(x)>0$，可得 $x<\ln(-2a)$ 或 $x>1$；

由 $f'(x)<0$，可得 $\ln(-2a)<x<1$.

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$，$(1,+\infty)$ 递增；在 $(\ln(-2a),1)$ 递减；

(Ⅱ)①由(Ⅰ)可得当 $a>0$ 时，

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递减；在 $(1,+\infty)$ 递增，

且 $f(1)=-e<0$，$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$；

当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)>0$ 或找到一个 $x<1$ 使得 $f(x)>0$ 对于 $a>0$ 恒成立，

$f(x)$ 有两个零点；

②当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$，所以 $f(x)$ 只有一个零点 $x=2$；

③当 $a<0$ 时，

若 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 递减，

在 $(-\infty,1)$，$(\ln(-2a),+\infty)$ 递增，

又当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点；

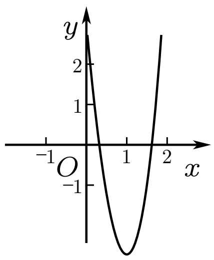
当 $a\geqslant-\frac{e}{2}$ 时，在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 单调增，在 $(1,+\infty)$ 单调增，

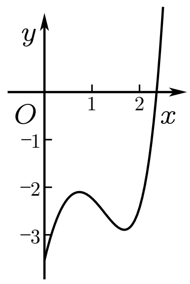
在 $(\ln(-2a),1)$ 单调减，

只有 $f(\ln(-2a))$ 等于 0 才有两个零点，

而当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)<0$，所以只有一个零点不符题意．

综上可得，$f(x)$ 有两个零点时，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.





17. 已知函数 $f(x)=e^x[ax^2+(a-2)]-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

【解析】 (1)$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=(ae^2-1)(2e^x+1)$，

①若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递减．

②若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得，$x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增．

(2) 若 $a\leqslant0$，$f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

若 $a>0$，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a$.

①当 $a=1$ 时，$f(-\ln a)=0$，$f(x)$ 只有一个零点；

②当 $a>1$ 时，$f(-\ln a)>0$，$f(x)$ 没有零点；

③当 $a<1$ 时，$f(-\ln a)<0$. 又 $f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点 .

设整数 N 满足 $N>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$，则 $f(N)=e^{N}(ae^{N}+a-2)-N>e^{N}-N>2^{N}-N>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点 .

综上，a 的取值范围是 $(0,1)$.

18. 已知函数 $f(x)=x^{3}+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$

(i) 当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

(*ii*) 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数 .

【解析】 (i)$f'(x)=3x^{2}+a$.

设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $P(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，

$\therefore\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0\\3x_0^2+a=0\end{cases}$，解得 $x_0=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{3}{4}$.

因此当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

(*ii*) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，$\therefore$ 函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}<0$，

故 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时无零点 .

当 $x=1$ 时，若 $a\geqslant-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\geqslant0$，

$\therefore h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点；

若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}<0$，$\therefore h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，

故 $x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的零点；

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，因此只考虑 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的零点个数即可 .

①当 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)=3x^{2}+a$ 在 $(0,1)$ 内无零点，因此 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调，

而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，$\therefore$ 当 $a\leqslant-3$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有一个零点，

当 $a\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点 .

②当 $-3<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$ 内单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{-a}{3}},1\right)$ 内单调递增，故当 $x=\sqrt{\frac{-a}{3}}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}}+\frac{1}{4}$.

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点 .

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点 .

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，

$\therefore$ 当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点 .

当 $-3<a\leqslant-\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点 .

综上可得：$a<-\frac{5}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 有一个零点．

当 $a>-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有一个零点；

当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 有三个零点．

19. 已知函数 $f(x)=-x^2+a-\frac{1}{4x}(a\in R)$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1) 当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线，

(2) 用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，设函数 $h(x)=\max\{xf(x),xg(x)\}\ (x>0)$，当 $0<a<3$ 时，讨论 $h(x)$ 零点的个数．

【解析】 (1) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切与点 $(x_0,0)$，则 $\begin{cases}f(x_0)=0\\f'(x_0)=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-x_0^2+a-\frac{1}{4x_0}=0\\-2x_0^2+\frac{1}{4x_0^2}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}\\a=\frac{3}{4}\end{cases}$，

$\therefore$ 当 $a=\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线．

(2) 令 $f_1(x)=xf(x)=-x^2+ax-\frac{1}{4}$，$g_1(x)=xg(x)=\ln x(x>0)$，则

$h(x)=\max\{f_1(x),g_1(x)\}$，$f'_1(x)=-3x^2+a$，

由 $f'_1(x)=0$，得 $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 时，$f'_1(x)>0$，$f_1(x)$ 为增函数；

当 $x\in\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 时，$f'_1(x)$ 为减函数，

$\because 0<a<3$，$\therefore 0<\sqrt{\frac{a}{3}}<1$，

①当 $f_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)<0$，即 $0<a<\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有一个零点；

②当 $f_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

③当 $\begin{cases}f_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0\\f_1(x)<0\end{cases}$，即 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点；

④当 $\begin{cases}f_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0\\f_1(x)=0\end{cases}$，即 $a=\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

⑤当 $\begin{cases}f_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0\\f_1(1)>0\end{cases}$，即 $\frac{5}{4}<a<3$ 时，$h(x)$ 有一个零点，

综上，$0<a<\frac{3}{4}$ 或 $\frac{5}{4}<a<3$ 时，$h(x)$ 有一个零点；

当 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

当 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$，$h(x)$ 有三个零点．

20. 已知函数 $f(x)=-x^2+a-\frac{1}{4x}$.

(1) 当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

(2) 设函数 $g(x)=xf(x)$，讨论 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上零点的个数 .

【解析】 (1)$f(x)=-x^2+a-\frac{1}{4x}$ 的导数为 $f'(x)=-2x+\frac{1}{4x^2}$，

设切点为 $(x_0, 0)$，可得 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，

即 $-x_0^2+a-\frac{1}{4x_0}=0$，$-2x_0+\frac{1}{4x_0^2}=0$，

解得 $x_0=\frac{1}{2}$，$a=\frac{3}{4}$；

(2)$g(x)=xf(x)=-x^3+ax-\frac{1}{4}$，$g'(x)=-3x^2+a$，$0<x<1$，

当 $a\geqslant 3$ 时，$g'(x)=-3x^2+a>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，可得

$g(0)=-\frac{1}{4}<0$，$g(1)=a-\frac{5}{4}>0$，$g(x)$ 有一个零点；

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$g(0)<0$，$g(1)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点；

当 $0<a<3$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 递增，在 $\left(\sqrt{\frac{a}{3}},1\right)$ 递减，

可得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 的最大值为 $g\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-\frac{1}{4}$，

①若 $g\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)<0$，即 $0<a<\frac{3}{4}$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点；

②若 $g\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=\frac{3}{4}$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点；

③若 $g\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0$，即 $\frac{3}{4}<a<3$，$g(0)<0$，$g(1)=a-\frac{5}{4}$，

当 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 有两个零点；

当 $\frac{5}{4}\leqslant a<3$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点；

综上可得，$a<\frac{3}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点；

当 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a\geqslant\frac{5}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点；

当 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 有两个零点 .

21. 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\sin x$，若 $h(x)=g(x)(f(x)-2x)$ 且 $y=h(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .

【解析】 (1) $\because f'(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+1}{x^2}$，$x>0$，$\triangle=a^2-8$，

①当 $\triangle=a^2-8\leqslant 0$ 即 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

②当 $\triangle=a^2-8>0$ 时，即 $a>2\sqrt{2}$ 或 $a<-2\sqrt{2}$ 时，方程 $2x^2-ax+1=0$ 的两根分布为 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，

(i) 当 $a>2\sqrt{2}$ 时，$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，

结合二次函数的性质可知，$x\in\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

$x\in\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

当$x\in\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

$(ii)a<-2\sqrt{2}$时，$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，

结合二次函数的性质可知，$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

(2) 因为$g(x)=e^x-\sin x$，则$g'(x)=e^x-\cos x$，

当$x>0$时，$e^x>1$，$\cos x\leqslant 1$，则$g'(x)=e^x-\cos x>0$，

即$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增且$g(0)=1>0$，

故$g(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点，

因为$h(x)=g(x)(f(x)-2x)=-g(x)\left(\dfrac{1}{x}+a\ln x\right)$有两个零点，

所以$F(x)=\dfrac{1}{x}+a\ln x$在$x>0$时有两个零点，

$\because F'(x)=\dfrac{ax-1}{x^2}$，$x>0$，

当$a\leqslant 0$时，$F'(x)<0$，故$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，最多1个零点，不合题意；

当$a>0$时，易得，函数$F(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

又$x\to 0$时，$F(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$F(x)\to+\infty$，

故$F\left(\dfrac{1}{a}\right)=a-a\ln a<0$，解可得，$a>e$.

综上可得，a的范围$(e,+\infty)$.

22. 已知函数$f(x)=ae^x-\ln(x+1)+\ln a-1$.

(1) 若$a=1$，求函数$f(x)$的极值；

(2) 若函数$f(x)$有且仅有两个零点，求a的取值范围.

【解析】 (1) 当$a=1$时，$f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$，$x>-1$，

显然$f'(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增，且$f'(0)=0$，

$\therefore$当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极小值$f(0)=0$，无极大值.

(2) 函数$f(x)$有两个零点，即$f(x)=0$有两个解，即$ae^x+\ln(ae^x)=\ln(x+1)+(x+1)$有两个解，

设$h(t)=t+\ln t$，则$h'(t)=1+\dfrac{1}{t}>0$，$h(t)$单调递增，

$\therefore ae^x=x+1(x>-1)$有两个解，即$a=\dfrac{x+1}{e^x}(x>-1)$有两个解.

令$s(x)=\dfrac{x+1}{e^x}(x\geqslant-1)$，则$s'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，

当$x\in(-1,0)$时，$s'(x)>0$，$s(x)$单调递增；当$x\in(0,+\infty)$时，$s'(x)<0$，$s(x)$单调递减.

$\because s(-1)=0$，$s(0)=1$，当$x>0$时$s(x)>0$，

$\therefore 0<a<1$.

专题8：恒成立与存在性问题

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left[-\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

【答案】 D

【解析】 设 $g(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)$，$y=ax-a$，

由题意知存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=ax-a$ 的下方，

$\because g'(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)+2\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}(2x+1)$，

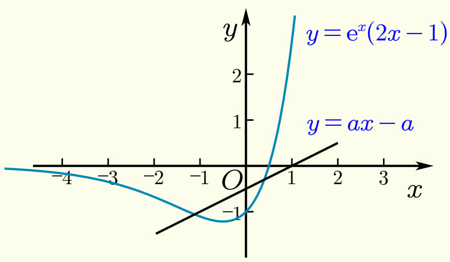
$\therefore$ 当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取最小值 $-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

当 $x=0$ 时，$g(0)=-1$，当 $x=1$ 时，$g(1)=\mathrm{e}>0$，

直线 $y=ax-a$ 恒过定点 $(1,0)$ 且斜率为 a，

故 $-a>g(0)=-1$ 且 $g(-1)=-3\mathrm{e}^{-1}\geqslant -a-a$，解得 $\frac{3}{2\mathrm{e}}\leqslant a<1$ 故选：D.



2. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在两个整数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 都小于0，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left[\frac{5}{3\mathrm{e}^{2}},\frac{3}{2\mathrm{e}}\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2\mathrm{e}},\frac{3}{2\mathrm{e}}\right)$　　C. $\left[\frac{5}{3\mathrm{e}^{2}},1\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，

设 $g(x)=\mathrm{e}^{x}(2x-1)$，$y=ax-a$，

$\because$ 存在两个整数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 都小于0，

$\therefore$ 存在两个整数 x_1，x_2，使得 $g(x)$ 在直线 $y=ax-a$ 的下方，

$\because g'(x)=\mathrm{e}^{x}(2x+1)$，

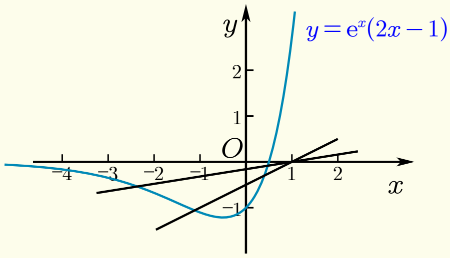
$\therefore$ 当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$[g(x)]_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 当 $x=0$ 时，$g(0)=-1$，$g(1)=\mathrm{e}>0$，

直线 $y=ax-a$ 恒过 $(1,0)$，斜率为 a，故 $-a>g(0)=-1$，

且 $g(-1)=-3\mathrm{e}^{-1}<-a-a$，解得 $a<\frac{3}{2\mathrm{e}}$.$g(-2)\geqslant -2a-a$，解得 $a\geqslant\frac{5}{3\mathrm{e}^{2}}$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[\frac{5}{3\mathrm{e}^{2}},\frac{3}{2\mathrm{e}}\right)$. 故选：$A$.



3. 已知函数 $f(x)=(x^2-a)\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$　　B. $(-1,0)$　　C. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $(-1,+\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 曲线 $y=f(x)$ 上存在不同的两点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，

$\therefore f'(x)=2x\ln x+x-\frac{a}{x}=0$ 有两个不同的解，

即得 $a=2x^2\ln x+x^2$ 有两个不同的解，

设 $y=2x^2\ln x+x^2$，则 $y'=4x\ln x+4x$，

$\therefore 0<x<\frac{1}{e}$，$y'<0$，函数递减，$x>\frac{1}{e}$，$y'>0$，函数递增，

$\therefore x=\frac{1}{e}$ 时，函数取得极小值 $-e^{-2}$，$x\to+\infty$，$y\to+\infty$，

$\therefore -e^{-2}<a<0$，故选：A.

4. 已知函数 $f(x)=x\left(a-\frac{1}{e^x}\right)$，曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-e^2,+\infty)$　　B. $(-e^2,0)$　　C. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 曲线 $y=f(x)$ 上存在不同的两点，

使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，

$\therefore f'(x)=a+(x-1)e^{-x}=0$ 有两个不同的解，

即得 $a=(1-x)e^{-x}$ 有两个不同的解，

设 $y=(1-x)e^{-x}$，则 $y'=(x-2)e^{-x}$，

$\therefore x<2$，$y'<0$，函数递减，$x>2$，$y'>0$，函数递增，

$\therefore x=2$ 时，函数取得极小值 $-e^{-2}$，$x\to+\infty$，$y\to0$，

$\therefore 0>a>-e^{-2}$. 故选：D.

5. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2(a>0)$，若对任意两个不等的正实数 x_1，x_2 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geqslant2$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ( )

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,1)$

【答案】 B

【解析】 设对任意两个不等的正实数 $x_1>x_2$ 都有 >2 恒成立，则 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 2x_1-2x_2$，

$\therefore f(x_1)-2x_1\geqslant f(x_2)-2x_2$,

令 $g(x)=f(x)-2x=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x$,则 $g(x_1)\geqslant g(x_2)$,所以函数 $g(x)$ 是增函数,

$g'(x)=\frac{a}{x}+x-2\geqslant 0(x>0)$ 恒成立,

$\therefore a\geqslant 2x-x^2$ 恒成立,$\because 2x-x^2=-(x-1)^2+1$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$g(x)=2x-x^2$ 取得最大值 $g(1)=1$,

$\therefore a\geqslant 1$.

即 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$ 故选:B.

6. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2$,若对任意两个不等的正实数 x_1,x_2 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[0,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

【答案】 A

【解析】 对任意两个不等的正实数 x_1,x_2,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立

则当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立

$f'(x)=\frac{a}{x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立则 $a>(-x^2)_{\max}$

而 $-x^2<0$,则 $a\geqslant 0$ 故选:A.

7. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$,若对 $\forall p$,$q\in(0,1)$,且 $p\neq q$,有 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>2$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,18)$　　B. $(-\infty,18]$　　C. $[18,+\infty)$　　D. $(18,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 因为 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$,所以 $f(x+1)=a\ln[(x+1)+1]-(x+1)^2$,

所以 $f'(x+1)=\frac{a}{x+2}-2(x+1)$.

因为 p,$q\in(0,1)$,且 $p\neq q$,所以 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>2$ 恒成立 $\Leftrightarrow \frac{f(p+1)-f(q+1)}{(p+1)-(q+1)}>2$ 恒成立

$\Leftrightarrow f'(x+1)\geqslant 2$ 恒成立,即 $\frac{a}{x+2}-2(x+1)\geqslant 2(0<x<1)$ 恒成立,

所以 $a>2(x+2)^2(0<x<1)$ 恒成立,

又因为 $x\in(0,1)$ 时,$8<2(x+2)^2<18$,所以 $a\geqslant 18$. 故选:C.

8. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2$,在区间 $(0,1)$ 内任取两个数 p,q,且 $p\neq q$,不等式 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>3$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[8,+\infty)$　　B. $(3,8]$　　C. $[15,+\infty)$　　D. $[8,15]$

【答案】 C

【解析】 【解析】由函数 $f(x)=a\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2$,

$\therefore f(x+1)=a\ln[(x+1)+1]-\frac{1}{2}(x+1)^2=a\ln(x+2)-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$

$\therefore f'(x+1)=\frac{a}{x+2}-x-1$,

$\because p,q\in(0,1)$,且 $p\neq q$,

不等式 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>3$ 恒成立等价式 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{(p+1)-(q+1)}>3$ 恒成立,

转化为 $f'(x+1)>3$ 恒成立,即 $\frac{a}{x+2}-x-1>3,(0<x<1)$ 恒成立,

整理可得:$a>x^2+6x+8$,$\because 0<x<1$,

$\therefore$ 函数 $y=x^2+6x+8=(x+3)^2-1$ 在 $(0,1)$ 是递增函数.

$\therefore y_{\max}<15$　故得 $a\geqslant 15$. 故选:C.

9. 设函数 $f(x)=e^x(x^3-3x+3)-ae^x-x(x\geqslant -2)$,若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 有解,则实数 a 的最小值为 (　　)

A. $\frac{2}{e}-1$　　B. $2-\frac{2}{e}$　　C. $1-\frac{1}{e}$　　D. $1+2e^2$

【答案】 C

【解析】 $f(x)\leqslant 0$ 可化为

$e^x(x^3-3x+3)-ae^x-x\leqslant 0$,即 $a\geqslant x^3-3x+3-\frac{x}{e^x}$,

令 $F(x)=x^3-3x+3-\frac{x}{e^x}$,则 $F'(x)=3x^2-3+\frac{x-1}{e^x}=(x-1)(3x+3+e^{-x})$,

令 $G(x)=3x+3+e^{-x}$,则 $G'(x)=3-e^{-x}$,

故当 $e^{-x}=3$,即 $x=-\ln 3$ 时,

$G(x)=3x+3+e^{-x}$ 有最小值 $G(-\ln 3)=-3\ln 3+6=3(2-\ln 3)>0$,

故当 $x\in[-2,1)$ 时,$F'(x)<0$,$x\in(1,+\infty)$ 时,$F'(x)>0$;

故 $F(x)$ 有最小值 $F(1)=1-3+3-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}$;

故实数 a 的最小值为 $1-\frac{1}{e}$. 故选:C.

10. 设函数 $f(x)=x(\ln x)^3-(3x+1)\ln x+(3-a)x$,若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 有解,则实数 a 的最小值为 (　　)

A. $\frac{2}{e}-1$　　B. $2-\frac{2}{e}$　　C. $1+2e^2$　　D. $1-\frac{1}{e}$

【答案】 D

【解析】 【解析】若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 有解,则 $a\geqslant(\ln x)^3-\left(3+\frac{1}{x}\right)\ln x+3$ 有解,

令 $g(x)=(\ln x)^3-\left(3+\frac{1}{x}\right)\ln x+3$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)\left[3(\ln x+1)+\frac{1}{x}\right]$,

令 $h(x)=3(\ln x+1)+\frac{1}{x}$,则 $h'(x)=\frac{3x-1}{x^2}$,

令 $h'(x)>0$,解得:$x>\frac{1}{3}$,令 $h'(x)<0$,解得:$0<x<\frac{1}{3}$,

故 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 递减,在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$,

故 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{3}\right)=3(2-\ln 3)>0$,故 $h(x)>0$,

令 $g'(x)>0$，即 $\ln x-1>0$，解得：$x>e$，令 $g'(x)<0$，即 $\ln x-1<0$，解得：$0<x<e$，

故 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 递减，在 $(e,+\infty)$ 递增，

故 $g(x)_{\min}=g(e)=1-\dfrac{1}{e}$，故 a 的最小值是 $1-\dfrac{1}{e}$，故选：D.

11. 设函数 $f(x)=e^x\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+2\right)-2ae^x-x$，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有解，则实数 a 的最小值为 ( )

A. $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{e}$　　B. $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{e}$　　C. $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2e}$　　D. $-1-\dfrac{1}{e}$

【答案】 C

【解析】 $f(x)=e^x\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+2\right)-2ae^x-x\leqslant 0$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有解

$\Leftrightarrow 2ae^x\geqslant e^x\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+2\right)-x$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有解

$\Leftrightarrow 2a\geqslant\left[\dfrac{e^x\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2\right)-x}{e^x}\right]_{\min}(x\geqslant -2)$.

令 $g(x)=\dfrac{e^x\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2\right)-x}{e^x}=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+2-\dfrac{x}{e^x}$，

则 $g'(x)=3x^2+3x-6-\dfrac{1-x}{e^x}=(x-1)\left(3x+6+\dfrac{1}{e^x}\right)$，

$\because x\in[-2,+\infty)$，

$\therefore$ 当 $x\in[-2,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $[-2,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得极小值 $g(1)=1+\dfrac{3}{2}-6+2-\dfrac{1}{e}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{e}$，也是最小值，

$\therefore 2a\geqslant -\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{e}$，$\therefore a\geqslant -\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2e}$. 故选：$C$.

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+(x-b)^2}{x}(b\in R)$，若存在 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使得 $f(x)>-x\cdot f'(x)$，则实数 b 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-\sqrt{2})$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right)$　　D. $(-\infty,3)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)=\dfrac{\ln x+(x-b)^2}{x}$，$x>0$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{1+2x(x-b)-\ln x-(x-b)^2}{x^2}$，$\therefore f(x)+xf'(x)=\dfrac{1+2x(x-b)}{x}$，

$\because$ 存在 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使得 $f(x)+xf'(x)>0$，

$\therefore 1+2x(x-b)>0$ $\therefore b<x+\dfrac{1}{2x}$，

设 $g(x)=x+\dfrac{1}{2x}$，$\therefore b<g(x)_{\max}$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$，

当 $g'(x)=0$ 时，解得：$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，当 $g'(x)>0$ 时，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 2$ 时，函数单调递增，

当 $g'(x)<0$ 时，即 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，函数单调递减，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，函数 $g(x)$ 取最大值，最大值为 $g(2)=\frac{9}{4}$，$\therefore b<\frac{9}{4}$，故选：C.

13. 已知 $f(x)=xe^x$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若存在 x_1，$x_2\in R$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　C. $(0,\mathrm{e})$　　D. $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$

【答案】 B

【解析】 $\exists x_1$，$x_2\in R$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，等价于 $f(x)_{\min}\leqslant g(x)_{\max}$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(1+x)\mathrm{e}^x$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$；

当 $x=-1$ 时 $g(x)$ 取得最大值为 $g(x)_{\max}=g(-1)=a$，

所以 $-\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant a$，即实数 a 的取值范围是 $a\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}$，故选：$B$.

14. 设过曲线 $g(x)=ax+2\cos x$ 上任意一点处的切线为 l_1，总存在过曲线 $f(x)=-\mathrm{e}^x-x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1/\!/l_2$，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty]$　　C. $(-\infty,-3]$　　D. $(-\infty,-3)$

【答案】 D

【解析】 设 $g(x)=ax+2\cos x$ 上为 $(x_1,g(x_1))$，$f(x)$ 上切点为 $(x_2,f(x_2))$，

依题得 $\forall x_1\in R$，$\exists x_2\in R$，有 $a-2\sin x_1=-\mathrm{e}^{x_1}-1$，$[a-2,a+2]\subseteq(-\infty,-1)$

易得 $a<-3$. 故选：D.

15. 设函数 $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$，$g(x)=xe^x$，若对任意 x_1，$x_2\in(0,\mathrm{e}]$，不等式 $\frac{g(x_1)}{k+1}\leqslant\frac{f(x_2)}{k}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{4}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　B. $(\mathrm{e},4]$　　C. $\left(0,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{4-\mathrm{e}}\right]$　　D. $\left(0,\frac{4}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}-4}\right]$

【答案】 D

【解析】 对任意 x_1，$x_2\in(0,\mathrm{e}]$，不等式 $\frac{g(x_1)}{k+1}\leqslant\frac{f(x_2)}{k}$ 恒成立，

等价于 $\left(\frac{g(x_1)}{k+1}\right)_{\max}\leqslant\left(\frac{f(x_2)}{k}\right)_{\min}$ 恒成立，

$\because f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立，$\therefore\left(\frac{f(x_2)}{k}\right)_{\min}=\frac{4}{k}$；

又 $g(x)=xe^x$，$\therefore g'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x>0$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上恒成立，则 $\left(\frac{g(x_1)}{k+1}\right)_{\max}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{k+1}$，

$\therefore\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{k+1}\leqslant\frac{4}{k}$，又 $k>0$，解得 $0<k\leqslant\frac{4}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}-4}$.

$\therefore$ 正数 k 的取值范围为 $\left(0,\frac{4}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}-4}\right]$. 故选：$D$.

16. 设 e 表示自然对数的底数，函数 $f(x)=\frac{(\mathrm{e}^x-a)^2}{4}+(x-a)^2(a\in R)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{5}$ 有解，

则实数 a 的值为 ______.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 $f(x)=\frac{(e^x-a)^2}{4}+(x-a)^2(a\in R)$,

若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{5}$ 有解,即为 $\sqrt{f(x)}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$ 有解,

由 $y=\sqrt{\left(\frac{e^x}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+(x-a)^2}$,可得函数 y 的几何意义为点 $\left(x,\frac{e^x}{2}\right)$ 和点 $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ 的距离,

由于两点在曲线 $y=\frac{e^x}{2}$ 和直线 $x-2y=0$ 运动,

当直线 $x-2y+t=0$ 与曲线相切,设切点为 $\left(m,\frac{e^m}{2}\right)$,

可得切线的斜率为 $\frac{e^m}{2}=\frac{1}{2}$,解得 $m=0$,

则切点为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,可得切点到直线 $x-2y=0$ 的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

可得 $\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$ 有解,且等号成立,

由 $x-2y=0$ 和 $y=-2x+\frac{1}{2}$ 联立,可得交点为 $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$,

即有 $a=\frac{1}{5}$,故答案为: $\frac{1}{5}$.

17. 已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2+x$,若对任意两个不等的正实数 x_1, x_2,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}<1$ 恒成立,则 a 的取值范围是 ________ .

【答案】 $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$

【解析】 设 $x_1>x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)<x_1^2-x_2^2$, $\therefore f(x_1)-x_1^2<f(x_2)-x_2^2$,

令 $g(x)=f(x)-x^2=a\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$,

$\therefore g(x_1)<g(x_2)$, $\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g'(x)=\frac{a}{x}-x+1\leqslant 0$, $\therefore a\leqslant x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 时, $(x^2-x)_{\min}=-\frac{1}{4}$, $\therefore a\leqslant-\frac{1}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$.

18. (1) 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$,其中 $a<1$,若存在唯一的整数 x_0,使得 $f(x_0)<0$,则 a 的取值范围是 ____________ .

(2) 已知 $f(x)=xe^x$, $g(x)=-(x+1)^2+a$,若 $\exists\, x_1$, $x_2\in R$,使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立,则实数 a 的取值范围 ______________ .

【答案】 (1) $\left[\frac{3}{2e},1\right)$; (2) $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$,其中 $a<1$,

设 $g(x)=e^x(2x-1)$, $y=ax-a$,

$\because$ 存在唯一的整数 x_0,使得 $f(x_0)<0$, $\therefore$ 存在唯一的整数 x_0,使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=ax-a$ 的下方,

$\because g'(x)=e^x(2x+1)$，$\therefore$ 当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$[g(x)]_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$.

当 $x=0$ 时，$g(0)=-1$，$g(1)=e>0$，

直线 $y=ax-a$ 恒过 $(1,0)$，斜率为 a，故 $-a>g(0)=-1$，

且 $g(-1)=-3e^{-1}\geqslant -a-a$，解得 $a\geqslant\frac{3}{2e}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2e},1\right)$.

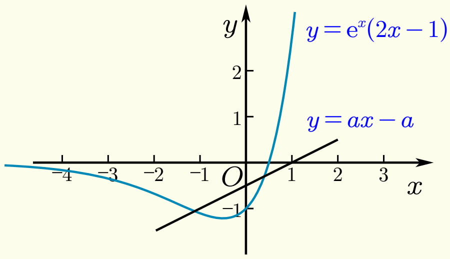
(2) $\exists x_1, x_2\in R$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，等价于 $f(x)_{\min}\leqslant g(x)_{\max}$，

$\because f(x)=-xe^x$，$\therefore f'(x)=(1+x)e^x$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；$x>-1$ 时，$f'(x)>0$. $\therefore x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{e}$.

$\because g(x)=(x+1)^2+a$，$\therefore g(x)_{\max}=a$.

$\therefore -\frac{1}{e}\leqslant a$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.



19. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $c^2x^2-(cx+1)\ln x+cx\geqslant 0$ 恒成立，则实数 c 的取值范围是 ________.

【答案】 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\cup\{-e\}$

【解析】 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $c^2x^2-(cx+1)\ln x+cx\geqslant 0$ 恒成立，

即 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(xc-\ln x)(xc+1)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\begin{cases}c\geqslant\frac{\ln x}{x}\\c\geqslant-\frac{1}{x}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c\leqslant\frac{\ln x}{x}\\c\leqslant-\frac{1}{x}\end{cases}$，

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<e$，令 $f'(x)<0$，解得：$x>e$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 递增，在 $(e,+\infty)$ 递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$，而 $y=-\frac{1}{x}<0$，

又当 $x=\frac{1}{e}$ 时，$(xc-\ln x)(xc+1)=\left(\frac{c}{e}+1\right)^2\geqslant 0$ 符合条件，$\therefore c=-e$，

故 $c\geqslant\frac{1}{e}$，或 $c=-e$，

20. 若关于 x 的不等式 $(ax+1)(e^x-aex)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ________.

【答案】 $[0,1]$

【解析】 【解析】当 $a=0$ 时，不等式 $(ax+1)(e^x-aex)\geqslant 0$ 即为 $e^x>0$ 显然成立；

当 $a>0$ 时，$x>0$，$ax+1>0$，只要 $e^x-aex\geqslant 0$，

即有 $ae\leqslant\left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减．

即有 $x=1$ 处取得最小值，且为 e，

则 $ae\leqslant e$，解得 $0<a\leqslant 1$；

当 $a<0$ 时，$x>0$，$e^x-aex>0$，

只要 $ax+1\geqslant 0$ 恒成立，由于 $ax+1\leqslant 1$，则 $a<0$ 不恒成立．

综上可得 a 的范围是 $[0,1]$.

21. 关于 x 的不等式 $(ax-1)(\ln x+ax)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ____________ .

【答案】 $a\leqslant -\frac{1}{e}$ 或 $a=e$

【解析】 【解析】$a<0$，则 $\ln x+ax\leqslant 0$，令 $y=\ln x+ax$，则 $y'=\frac{1}{x}+a$，

$\therefore 0<x<-\frac{1}{a}$ 时，$y'>0$，$x>-\frac{1}{a}$ 时，$y'<0$

$\therefore x=-\frac{1}{a}$ 时，函数取得最大值 $\ln\left(-\frac{1}{a}\right)-1$，

$\because \ln x+ax\leqslant 0$，

$\therefore \ln\left(-\frac{1}{a}\right)-1\leqslant 0$，$\therefore a\leqslant -\frac{1}{e}$；

$a=0$ 时，则 $\ln x\leqslant 0$，在 $(0,+\infty)$ 上不恒成立，不合题意；

$a>0$ 时，$\begin{cases}ax-1\geqslant 0\\ \ln x+ax\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax-1\leqslant 0\\ \ln x+ax\leqslant 0\end{cases}$，$a=e$，

综上，$a\leqslant -\frac{1}{e}$ 或 $a=e$.

22. 已知关于 x 的不等式 $ax^3+x^2+x\leqslant \ln x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ____________ .

【答案】 $(-\infty,-1]$.

【解析】 当 $a\geqslant 0$ 时，取 $x=1$，则 $ax^3+x^2+x=a+2>2$，$\ln x+\frac{1}{x}=1$，

不等式 $ax^3+x^2+x\leqslant \ln x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒成立，

$\therefore a<0$.

①当 $a\leqslant -1$ 时，$ax^3+x^2+x\leqslant -x^3+x^2+x$，

令 $g(x)=-x^3+x^2+x$，

$g'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极大值也是最大值为 $g(1)=1$.

又 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值也是最小值为 $f(1)=\ln 1+1=g(1)$.

$\therefore f(x)\geqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

②当 $a\in(-1,0)$ 时，取 $x=1$，则 $ax^3+x^2+x=a+2>1$，$\ln x+\dfrac{1}{x}=1$，

不等式 $ax^3+x^2+x\leqslant\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒成立．

综上，$a\leqslant-1$.

23. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a<0)$，$g(x)=\dfrac{4}{x}$，若对任意 x_1，$x_2\in(0,1]$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|g(x_1)-g(x_2)|$ 成立，则实数 a 的取值范围为 ________．

【答案】 $[-3,0)$

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则当 $a<0$ 时，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x}>0$ 恒成立，

此时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

又函数 $g(x)=\dfrac{4}{x}$，在 $(0,1]$ 上是减函数

不妨设 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant1$，

则 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_2)-f(x_1)$，$|g(x_1)-g(x_2)|=\dfrac{4}{x_1}-\dfrac{4}{x_2}$，

则不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|g(x_1)-g(x_2)|$ 等价为 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant4\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$，

即 $f(x_2)+\dfrac{4}{x_2}\leqslant f(x_1)+\dfrac{4}{x_1}$

设 $h(x)=f(x)+\dfrac{4}{x}=x-1-a\ln x+\dfrac{4}{x}$，

则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant4\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$，等价于函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数

$\because h'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-ax-4}{x^2}$，

$\therefore x^2-ax-4\leqslant0$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，

即 $a\geqslant x-\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，即 a 不小于 $y=x-\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,1]$ 内的最大值．

而函数 $y=x-\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,1]$ 是增函数，$\therefore y=x-\dfrac{4}{x}$ 的最大值为 -3

$\therefore a\geqslant-3$，又 $a<0$，$\therefore a\in[-3,0)$. 故答案为：$[-3,0)$.

24. 若 $f(x)=x-1-a\ln x$，$g(x)=\dfrac{ex}{e^x}$，$a<0$，且对任意 x_1，$x_2\in[3,4]$ $(x_1\neq x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\left|\dfrac{1}{g(x_1)}-\dfrac{1}{g(x_2)}\right|$ 的恒成立，则实数 a 的取值范围为 ________．

【答案】 $\left[3-\dfrac{2}{3}e^2,0\right)$

【解析】 易知 $f(x)$，$\dfrac{1}{g(x)}$ 在 $x\in[3,4]$ 上均为增函数，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|<\left|\dfrac{1}{g(x_1)}-\dfrac{1}{g(x_2)}\right|$ 等价于 $f(x_2)-f(x_1)<\dfrac{1}{g(x_2)}-\dfrac{1}{g(x_1)}$，

即 $f(x_2)-\dfrac{1}{g(x_2)}<f(x_1)-\dfrac{1}{g(x_1)}$；

令 $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{g(x)}=x-1-a\ln x-\dfrac{e^x}{ex}$，则 $h(x)$ 在 $x\in[3,4]$ 为减函数，

则 $h(x)'=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{e^x(x-1)}{ex^2}\leqslant0$ 在 $x\in(3,4)$ 上恒成立，

$\therefore a \geqslant x-\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}, x \in [3,4]$ 恒成立；

令 $u(x)=x-\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}, x \in [3,4]$，

$\therefore u'(x)=1-\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}(x-1)}{x^2}=1-\mathrm{e}^{x-1}\left[\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right], x \in [3,4]$，

$\therefore u(x)$ 为减函数，$\therefore u(x)$ 在 $x \in [3,4]$ 的最大值为 $u(3)=3-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^2$；

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[3-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^2, 0\right)$.

25. 设过曲线 $f(x)=-\mathrm{e}^x-x+3a$ 上任意一点处的切线为 l_1，总存在过曲线 $g(x)=(x-1)a+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1 \perp l_2$，则实数 a 的取值范围为 ＿＿＿＿＿＿.

【答案】 $[-1, 2]$.

【解析】 由 $f(x)=-\mathrm{e}^x-x$，得 $f'(x)=-\mathrm{e}^x-1$，

$\because \mathrm{e}^x+1>1$，$\therefore \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \in (0,1)$，

由 $g(x)=(x-1)a+2\cos x$，得 $g'(x)=a-2\sin x$，

又 $-2\sin x \in [-2, 2]$，$\therefore a-2\sin x \in [-2+a, 2+a]$，

要使过曲线 $f(x)=-\mathrm{e}^x-x+3a$ 上任意一点的切线为 l_1，

总存在过曲线 $g(x)=a(x-1)+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1 \perp l_2$，

则 $\begin{cases} a-2 \leqslant 0 \\ a+2 \geqslant 1 \end{cases}$，解得 $-1 \leqslant a \leqslant 2$. 即 a 的取值范围为 $[-1, 2]$，

26. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2x^2+1}{x}$，$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2x}{\mathrm{e}^x}$，对任意 x_1、$x_2 \in (0,+\infty)$，不等式 $\dfrac{f(x_1)}{k+1} \geqslant \dfrac{g(x_2)}{k}$，恒成立，则正数 k 的取值范围是 ＿＿＿＿＿＿.

【答案】 $k \geqslant 1$.

【解析】 $\because$ 当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^2x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^2x \cdot \dfrac{1}{x}}=2\mathrm{e}$，

$\therefore x_1 \in (0,+\infty)$ 时，函数 $f(x_1)$ 有最小值 $2\mathrm{e}$，

$\because g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2x}{\mathrm{e}^x}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2(1-x)}{\mathrm{e}^x}$，

当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，则函数在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore x=1$ 时，函数 $g(x)$ 有最大值 $g(1)=\mathrm{e}$，

则有 x_1、$x_2 \in (0,+\infty)$，$f(x_1)_{\min}=2\mathrm{e}>g(x_2)_{\max}=\mathrm{e}$，

$\because$ 不等式 $\dfrac{f(x_1)}{k+1} \geqslant \dfrac{g(x_2)}{k}$ 恒成立且 $k>0$，

$\therefore \dfrac{\mathrm{e}}{k} \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{k+1}$，$\therefore k \geqslant 1$

27. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a \in R)$，$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，当 $a<0$ 时，且对任意的 x_1，$x_2 \in [4, 5]$ $(x_1 \neq x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ＿＿＿＿＿＿.

【答案】 $4-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^4 \leqslant a<0$

【解析】 当 $a<0$ 时，$f'(x)=1-\frac{a}{x}>0$ 在 $x\in[4,5]$ 上恒成立，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $x\in[4,5]$ 上单调递增，

$g(x)=\frac{e^x}{x}$，$\because g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$ 在 $x\in[4,5]$ 上恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $[4,5]$ 上为增函数.

当 $a<0$ 时，且对任意的 $x_1,x_2\in[4,5]$ $(x_1\neq x_2)$，

$|f(x_1)-f(x_2)|<|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立，

即 $f(x_2)-g(x_2)<f(x_1)-g(x_1)$ 在 $x\in[4,5]$ 上恒成立.

设 $F(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x-1-\frac{e^x}{x}$，则 $F(x)$ 在 $x\in[4,5]$ 上为减函数.

$F'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{e^x(x-1)}{x^2}\leqslant 0$ 在 $x\in[4,5]$ 上恒成立，化为 $a\geqslant x-e^x+\frac{e^x}{x}$ 恒成立.

设 $H(x)=x-e^x+\frac{e^x}{x}$，

$\because H'(x)=1-e^x+\frac{e^x(x-1)}{x^2}=1-e^x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1-e^x\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$，$x\in[4,5]$.

$\therefore e^x\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>\frac{3}{4}e^3>1$，$x\in[4,5]$.

$\therefore H'(x)<0$ 在 $x\in[4,5]$ 上恒成立，即 $H(x)$ 为减函数.

$\therefore H(x)$ 在 $x\in[4,5]$ 上的最大值为 $H(4)=4-e^4+\frac{1}{4}e^4=4-\frac{3}{4}e^4$.

$\therefore 4-\frac{3}{4}e^4\leqslant a<0$.

专题9：构造函数解不等式

1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)\ (x\in R)$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$
C. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 由题意设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$\because$ 当 $x>0$ 时，有 $xf'(x)-f(x)>0$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore g(-x)=g(x)$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数，

$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，由 $f(-1)=0$ 得，$g(-1)=0$，

$\because$ 不等式 $f(x)>0\Leftrightarrow x\cdot g(x)>0$，

$\therefore \begin{cases}x>0\\ g(x)>g(1)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ g(x)<g(-1)\end{cases}$，即有 $x>1$ 或 $-1<x<0$，

$\therefore$ 使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$，故选：D.

2. 函数 $f(x)$ 的定义域是 R，$f(0)=2$，对任意 $x\in R$，$f(x)+f'(x)<1$，则不等式 $e^xf(x)>e^x+1$ 的解集为（　　）

A. $\{x|x>0\}$
B. $\{x|x<0\}$
C. $\{x|x<-1$，或 $x>1\}$
D. $\{x|x<-1$，或 $0<x<1\}$

【答案】 B

【解析】 令 $g(x)=e^xf(x)-e^x-1$，则 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)-1]$，

$\because f(x)+f'(x)<1$，$\therefore f(x)+f'(x)-1<0$，

$\therefore g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 R 上单调递减，

又 $f(0)=2$，$\therefore g(0)=e^0f(0)-e^0-1=2-1-1=0$，

故当 $x<0$ 时，$g(x)>g(0)$，即 $e^xf(x)-e^x-1>0$，整理得 $e^xf(x)>e^x+1$，

$\therefore e^xf(x)>e^x+1$ 的解集为 $(-\infty,0)$. 故选：B.

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>x-1$，则不等式 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2-x+1$ 的解集为（　　）

A. $\{x|-2<x<2\}$
B. $\{x|x>2\}$
C. $\{x|x<2\}$
D. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

【答案】 C

【解析】 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+x$，对 $g(x)$ 求导，得 $g'(x)=f'(x)-x+1$，

$\because f'(x)>x-1$，$\therefore g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 R 上为增函数.

不等式 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2-x+1$ 可化为 $f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+x<1$，即 $g(x)<g(2)$，

由 $g(x)$ 单调递增得 $x<2$，所以不等式的解集为 $\{x|x<2\}$. 故选：C.

4. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, e^4)$ D. $(e^4, +\infty)$

【答案】 B

【解析】【解析】设 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 则 $h'(x)=\dfrac{e^x(f'(x)-f(x))}{(e^x)^2}$,

$\because f'(x)<f(x)$，$\therefore h'(x)<0$.

所以函数 $h(x)$ 是 R 上的减函数，

$\because$ 函数 $f(x+2)$ 是偶函数，$\therefore$ 函数 $f(-x+2)=f(x+2)$，

$\therefore$ 函数关于 $x=2$ 对称，$\therefore f(0)=f(4)=1$，

原不等式等价为 $h(x)<1$，

$\therefore$ 不等式 $f(x)<e^x$ 等价 $h(x)<1 \Leftrightarrow h(x)<h(0)$，

$\dfrac{f(x)}{e^x}<1=\dfrac{f(0)}{e^0}$. $\because h(x)$ 在 R 上单调递减，$\therefore x>0$. 故选：B.

5. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)=f(x-2)$，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为 ( )

A. $(0,+\infty)$ B. $(1,+\infty)$ C. $(4,+\infty)$ D. $(-2,+\infty)$

【答案】 A

【解析】 可设函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,

由 $f'(x)<f(x)$，可得 $g'(x)<0$，即有 $g(x)$ 在 R 上递减，

$f(x+2)=f(x-2)$，$f(4)=1$，可得 $f(0)=f(4)=1$，$g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$，

由 $f(x)<e^x$ 即为 $\dfrac{f(x)}{e^x}<1$，可得 $g(x)<g(0)$，

由 $g(x)$ 在 R 上递减，可得 $x>0$.

则所求不等式的解集为 $(0,+\infty)$. 故选：A.

6. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则不等式 $f(x)>\dfrac{3}{e^x}+1$（e 为自然对数的底数）的解集为 ( )

A. $(0,+\infty)$ B. $(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$

C. $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ D. $(3,+\infty)$

【答案】 A

【解析】 不等式 $f(x)>\dfrac{3}{e^x}+1$ 可化为 $e^xf(x)-e^x-3>0$；

令 $F(x)=e^xf(x)-e^x-3$，则 $F'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-e^x=e^x(f(x)+f'(x)-1)$；

$\because f(x)+f'(x)>1$，$\therefore e^x(f(x)+f'(x)-1)>0$；

故 $F(x)=e^xf(x)-e^x-3$ 在 R 上是增函数，

又 $\because F(0)=1\times4-1-3=0$；故当 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$；

故 $e^x f(x)-e^x-3>0$ 的解集为 $(0,+\infty)$；

即不等式 $f(x)>\dfrac{3}{e^x}+1$（e 为自然对数的底数）的解集为 $(0,+\infty)$；故选：A.

7. 已知函数 $f(x)$ 对定义域 R 内的任意 x 都有 $f(x)=f(4-x)$，且当 $x\neq 2$ 时其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)>2f'(x)$ 若 $2<a<4$ 则 ( )

A. $f(2^a)<f(3)<f(\log_2 a)$　　B. $f(\log_2 a)<f(3)<f(2^a)<f(3)<f(2^a)$

C. $f(3)<f(\log_2 a)<f(2^a)$　　D. $f(\log_2^a)<f(2^a)<f(3)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 对定义域 R 内的任意 x 都有 $f(x)=f(4-x)$，

$\therefore f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称；

又当 $x\neq 2$ 时其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)>2f'(x)\Leftrightarrow f'(x)(x-2)>0$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的单调递增；

同理可得，当 $x<2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 单调递减；

$\because 2<a<4$，$\therefore 1<\log_2 a<2$，

$\therefore 2<4-\log_2 a<3$，又 $4<2^a<16$，$f(\log_2 a)=f(4-\log_2 a)$，

$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的单调递增；$\therefore f(\log_2 a)<f(3)<f(2^a)$. 故选：$B$.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式不成立的是 ( )

A. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(0)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $f(0)<2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x-f(x)\cos'(x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}[(f'(x)\cos x+f(x)\sin x]$，

$\because$ 对任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$，

$\therefore g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

则② $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)<g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}<\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，

$\therefore \dfrac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}<\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，即 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right))<f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，故 B 正确；

③ $g(0)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\dfrac{f(0)}{\cos 0}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}}$，$\therefore f(0)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故 C 正确；

④ $g(0)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\dfrac{f(0)}{\cos 0}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}$，$\therefore f(0)<2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 D 正确；

由排除法，故选：A.

9. 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是（　　）

A. $2f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f(0)$　　B. $f(0)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $f(-1)>f(1)$　　D. $f(1)>f(0)\cos 1$

【解析】 函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$

$\therefore$ 令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，则 $h'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{(\cos x)^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

$h(1)>h(0)$，即 $\dfrac{f(1)}{\cos 1}>\dfrac{f(0)}{\cos 0}$，$\therefore \cos 1>0$

$\therefore f(1)>f(0)\cos 1$，故 D 正确

同理可检验 A，B，C 三个选项是错误的故选：D.

10. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对 $\forall x\in R$，都有 $2f'(x)>f(x)$ 成立，若 $f(\ln 4)=2$，则不等式 $f(x)>e^{\frac{x}{2}}$ 的解是（　　）

A. $x>1$　　B. $0<x<1$　　C. $x>\ln 4$　　D. $0<x<\ln 4$

【答案】 C

【解析】 $\because\forall x\in R$，都有 $2f'(x)>f(x)$ 成立，

$\therefore f'(x)-\frac{1}{2}f(x)>0$，于是有 $\left(\dfrac{f(x)}{e^{\frac{x}{2}}}\right)'>0$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$，则有 $g(x)$ 在 R 上单调递增，

$\because$ 不等式 $f(x)>e^{\frac{x}{2}}$，$\therefore g(x)>1$，

$\because f(\ln 4)=2$，$\therefore g(\ln 4)=1$，$\therefore x>\ln 4$，故选：C.

11. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，对 $\forall x\in R$，都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，若 $f(2)=e^2$，则不等式 $f(x)>e^x$ 的解是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,\ln 2)$

【答案】 A

【解析】 $\because\forall x\in R$，都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，

$\therefore f'(x)-f(x)>0$，于是有 $\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'>0$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则有 $g(x)$ 在 R 上单调递增，

$\because$ 不等式 $f(x)>e^x$，$\therefore g(x)>1$，

$\because f(2)=e^2$，$\therefore g(2)=\dfrac{f(2)}{e^2}=1$，

$\therefore x>2$，故选：A.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(2)=0$，当 $x>0$ 时，有 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立，则不等式 $xf(x)$

>0 的解集是 ( )

A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

【答案】 B

【解析】 【解析】$f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为偶函数；

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；

$\because x>0$ 时，$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立；$\therefore x>0$ 时，$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'<0$ 恒成立；

$\therefore \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

由 $xf(x)>0$ 得：$\dfrac{f(x)}{x}>0$；

$\because f(2)=0$，$\therefore f(-2)=0$；

$\therefore$ ① $x>0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(2)}{2}$；$\therefore 0<x<2$；

② $x<0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(-2)}{-2}$；$\therefore -2<x<0$；

综上得，不等式 $xf(x)>0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(0,2)$. 故选：B.

13. 已知一函数满足 $x>0$ 时，有 $g'(x)=2x^2>\dfrac{g(x)}{x}$，则下列结论一定成立的是 ( )

A. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\leqslant 3$ B. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\geqslant 2$ C. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)<4$ D. $\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\geqslant 4$

【答案】 B

【解析】 $\because x>0$ 时，有 $g'(x)=2x^2>\dfrac{g(x)}{x}$，

$\therefore g(x)=\dfrac{2}{3}x^3+c$，$\therefore 2x^3>\dfrac{2}{3}x^3+c$，$\therefore c<\dfrac{4}{3}x^3$，

$\because x>0$，$\therefore c\leqslant 0$

$\therefore g(2)=\dfrac{16}{3}+c$，$g(1)=\dfrac{2}{3}+c$，

$\therefore \dfrac{g(2)}{2}=\dfrac{\frac{16}{3}+c}{2}=\dfrac{8}{3}+\dfrac{c}{2}$，

$\therefore \dfrac{g(2)}{2}-g(1)=2-\dfrac{c}{2}\geqslant 2$ 故选：B.

14. 定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 使不等式 $2f(x)<xf'(x)<3f(x)$ 恒成立，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则 ( )

A. $8<\dfrac{f(2)}{f(1)}<16$ B. $4<\dfrac{f(2)}{f(1)}<8$ C. $3<\dfrac{f(2)}{f(1)}<4$ D. $2<\dfrac{f(2)}{f(1)}<3$

【答案】 B

【解析】 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x^3-3x^2f(x)}{x^6}=\dfrac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}$，

$\because xf'(x)<3f(x)$，即 $xf'(x)-3f(x)<0$，

$\therefore g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即有 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，可得

$g(2)<g(1)$，即 $\dfrac{f(2)}{8}<\dfrac{f(1)}{1}$，

由 $2f(x)<3f(x)$，可得 $f(x)>0$，则 $\dfrac{f(2)}{f(1)}<8$；

令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，$h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x^2-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，

$\because xf'(x)>2f(x)$，即 $xf'(x)-2f(x)>0$，

$\therefore h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即有 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，可得

$h(2)>h(1)$，即 $\dfrac{f(2)}{4}>f(1)$，则 $\dfrac{f(2)}{f(1)}>4$.

即有 $4<\dfrac{f(2)}{f(1)}<8$. 故选：B.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图象关于 y 轴对称，且当 $x<0$ 时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ 恒成立，设 $a>1$，则 $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}$，$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})$，$(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$ 的大小关系为 ( )

A. $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

B. $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

C. $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

D. $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ 恒成立，$\therefore xf'(x)<f(x)$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

$\because f(-x)=f(x)$，$\therefore g(-x)=-g(x)$，

$\therefore g(x)$ 为奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

$\because$ 比较 $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}$，$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})$，$(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$ 的大小，

$\therefore \dfrac{4af(a+1)}{a+1}=4ag(a+1)$，

$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})=4ag(2\sqrt{a})$，

$(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)=4ag\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$，

$\because a>1$，

$\therefore a+1-2\sqrt{a}=(\sqrt{a}-1)^2>0$，

$\therefore a+1>2\sqrt{a}$，$a+1>\dfrac{4a}{a+1}$，且 $\dfrac{4a}{a+1}<2\sqrt{a}$，

$\therefore a+1>2\sqrt{a}>\dfrac{4a}{a+1}$，

$\therefore g(a+1)<g(2\sqrt{a})<g\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$，

$\therefore 4ag(a+1)<4ag(2\sqrt{a})<4ag\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$，

即 $\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<(a+1)f\left(\dfrac{4a}{a+1}\right)$. 故选：$B$.

16. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $xf'(x)<2f(x)$ 成立，则 (　　)

A. $2f(\sqrt{3})>3f(\sqrt{2})$　B. $2f(1)<3f(\sqrt{2})$　C. $4f(\sqrt{3})<3f(2)$　D. $4f(1)>f(2)$

【答案】 D

【解析】 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，

则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，

$\because xf'(x)<2f(x)$，$\therefore \forall x\in(0,+\infty)$，$g'(x)<0$ 恒成立

$\therefore g(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$\therefore g(1)>g(2)$，即 $4f(1)>f(2)$ 故选：D.

17. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)<xf'(x)<2f(x)-x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则下列不等式中，一定成立的是 (　　)

A. $\dfrac{f(2)}{3}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{f(2)}{2}$　B. $\dfrac{f(2)}{4}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{f(2)}{2}$

C. $\dfrac{3f(2)}{8}<f(1)<\dfrac{f(2)}{3}+\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{f(2)}{4}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{3f(2)}{8}$

【答案】 B

【解析】 设 $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x^2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\dfrac{[f'(x)-1]x^2-2x[f(x)-x]}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)+x}{x^3}$，

$h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

因为 $f(x)<xf'(x)<2f(x)-x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $g'(x)<0$，$h'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(1)>g(2)$，$h(1)<h(2)$，

即 $\dfrac{f(1)-1}{1^2}>\dfrac{f(2)-2}{2^2}$，$\dfrac{f(1)}{1}<\dfrac{f(2)}{2}$，即 $\dfrac{f(2)}{4}+\dfrac{1}{2}<f(1)<\dfrac{f(2)}{2}$，故选：$B$.

18. 若 $a=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{4}}$，$b=\left(\dfrac{7}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$，$c=\log_2\dfrac{7}{8}$，定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的大小顺序为 (　　)

A. $f(b)<f(a)<f(c)$　B. $f(c)>f(b)>f(a)$　C. $f(c)>f(a)>f(b)$　D. $f(b)>f(c)>f(a)$

【答案】 B

【解析】 根据题意，函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，

又由 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为减函数，

则函数 $f(x)$ 在 R 上为减函数，

$c=\log_2\frac{7}{8}<0$，$a=\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{1}{4}}$，而 $b=\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$，则 $a>b>0$，

故 $f(c)>f(b)>f(a)$. 故选：B.

19. 设定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足，对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<1$，且 $f(3)=3$，则不等式 $\frac{f(x)}{x}>1$ 的解集为 ( )

A. $(-3,0)\cup(0,3)$
B. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$
C. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$
D. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

【答案】 A

【解析】 设 $x_2>x_1$，且 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，

由题意 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<1$，可得函数 $F(x)=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调性递减，

$f(3)=3$，可得 $F(3)=0$，

那么不等式 $\frac{f(x)}{x}>1$，即求 $\frac{F(x)}{x}>0$ 的解集，

$f(x)$ 是 R 上的奇函数，

$\therefore F(-x)=f(-x)+x=-(f(x)-x)=-F(x)$，$\therefore F(-3)=0$，

当 $-3<x<0$ 时，$F(x)<0$，可得 $\frac{F(x)}{x}>0$ 成立；

当 $0<x<3$ 时，$F(x)>0$，可得 $\frac{F(x)}{x}>0$ 成立；

综上可得不等式 $\frac{f(x)}{x}>1$ 的解集为 $(-3,0)\cup(0,3)$. 故选：A.

20. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且有 $3f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $(x+2015)^3f(x+2015)+27f(-3)>0$ 的解集是 ________.

【答案】 $(-2018,-2015)$.

【解析】 根据题意，令 $g(x)=x^3f(x)$，

其导函数为 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^2[3f(x)+xf'(x)]$，

$\because x\in(-\infty,0)$ 时，$3f(x)+xf'(x)>0$，$\therefore g(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

又不等式 $(x+2015)^3f(x+2015)+27f(-3)>0$ 可化为

$(x+2015)^3f(x+2015)>(-3)^3f(-3)$，即 $g(x+2015)>g(-3)$，

$\therefore 0>x+2015>-3$；解得 $-2015>x>-2018$，

$\therefore$ 该不等式的解集是为 $(-2018,-2015)$.

21. 设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$，$\forall x\in R$，有 $f(-x)+f(x)=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)<x$，若 $f(4-m)-f(m)\geqslant 8-4m$，则实数 m 的取值范围是 ________.

【答案】 $[2,+\infty)$

【解析】 令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，$\because g(-x)+g(x)=f(-x)-\frac{1}{2}x^2+f(x)-\frac{1}{2}x^2=0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为奇函数 .

$\because x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=f'(x)-x<0$，

故函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是减函数，

由 $f(0)=0$，可得 $g(x)$ 在 R 上是减函数，

$\therefore f(4-m)-f(m)=g(4-m)+\frac{1}{2}(4-m)^2-g(m)-\frac{1}{2}m^2=g(4-m)-g(m)+8-4m\geqslant 8-4m$，

$\therefore g(4-m)\geqslant g(m)$，

$\therefore 4-m\leqslant m$，解得：$m\geqslant 2$，

22. 已知定义在 R 上函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)<-2$，则不等式 $f(\ln x)>5-2\ln x$ 的解集为 ____________ .

【答案】 故答案为：$(0,e^2)$.

【解析】 设 $t=\ln x$，

则不等式 $f(\ln x)>5-2\ln x$ 等价为 $f(t)>5-2t$，

设 $g(x)=f(x)+2x-5$，则 $g'(x)=f'(x)+2$，

$\because f(x)$ 的导函数 $f'(x)<-2$，

$\therefore g'(x)=f'(x)+2<0$，此时函数单调递减，

$\because f(2)=1$，$\therefore g(2)=f(2)+4-5=5-5=0$，

则当 $0<x<2$ 时，$g(x)>g(2)=0$，

即 $g(x)>0$，则此时 $g(x)=f(x)+2x-5>0$，

即不等式 $f(x)>-2x+5$ 的解为 $x<2$，

即 $f(t)>5-2t$ 的解为 $t<2$，

由 $\ln x<2$，解得 $0<x<e^2$，

即不等式 $f(\ln x)>5-2\ln x$ 的解集为 $(0,e^2)$，

23. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)<1$，$f(0)=4$，则不等式 $e^x[f(x)-1]>3$(e 为自然对数的底数) 的解集为 ____________ .

【答案】 $(-\infty,0)$

【解析】 设 $g(x)=e^xf(x)-e^x$，$(x\in R)$，

则 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)-1]$，

$\because f(x)+f'(x)<1$，$\therefore f(x)+f'(x)-1<0$，

$\therefore g'(x)<0$，$\therefore y=g(x)$ 在定义域上单调递减，

$\because e^xf(x)>e^x+3$，$\therefore g(x)>3$，

又 $\because g(0)==e^0f(0)-e^0=4-1=3$，

$\therefore g(x)<g(0)$，$\therefore x<0$ 故答案为：$(-\infty,0)$.

24. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)>1-f'(x)$，$f(0)=0$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则不等式 $e^xf(x)>e^x-1$(其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ____________.

【答案】 $(0,+\infty)$.

【解析】 设 $g(x)=e^xf(x)-e^x$，$(x\in R)$；

则 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)-1]$；

$\because f'(x)>1-f(x)$；$\therefore f(x)+f'(x)-1>0$；

$\therefore g'(x)>0$；$\therefore y=g(x)$在定义域上单调递增；

$\because e^x f(x)>e^x-1$；$\therefore g(x)>-1$；

又$\because g(0)=e^0 f(0)-e^0=-1$；$\therefore g(x)>g(0)$；

$\therefore x>0$；$\therefore$不等式的解集为$(0,+\infty)$.

25. 函数$f(x)$，$g(x)$ $(g(x)\neq 0)$分别是定义在R上的奇函数和偶函数，当$x<0$时，$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，$f(-3)=0$，则不等式$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$的解集为____________

【答案】 $(-3，0)\cup(3，+\infty)$.

【解析】 ①令$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\because$当$x<0$时，$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，

$\therefore F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，$\therefore$函数$F(x)$在$x<0$时单调递减；

$\because f(-3)=0$，$\therefore F(-3)=0$.

$\therefore F(x)<0$的解集为$(-3,0)$.

②$\because f(x)$，$g(x)$ $(g(x)\neq 0)$分别是定义在R上的奇函数和偶函数，

$\therefore F(-x)=\dfrac{f(-x)}{g(-x)}=-\dfrac{f(x)}{g(x)}=-F(x)$，

$\therefore F(x)$是R上的奇函数，$\therefore$当$x>0$时，$F(x)<0$的解集为$(3,+\infty)$.

综上可得：不等式$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$的解集为$(-3，0)\cup(3，+\infty)$.

26. 设$f(x)$是定义在R上的奇函数，且$f(-1)=0$，若不等式$\dfrac{x_1 f(x_1)-x_2 f(x_2)}{x_1-x_2}<0$对区间$(-\infty,0)$内任意两个不相等的实数$x_1$，$x_2$都成立，则不等式$xf(2x)<0$解集是_____________.

【答案】 $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【解析】 $\because \dfrac{x_1 f(x_1)-x_2 f(x_2)}{x_1-x_2}<0$对区间$(-\infty,0)$内任意两个不相等的实数$x_1$，$x_2$都成立，

$\therefore$函数$g(x)=xf(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

又$f(x)$为奇函数，$\therefore g(x)=xf(x)$为偶函数，

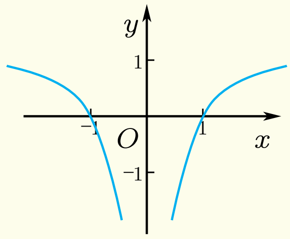
$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$g(-1)=g(1)=0$，

作出$g(x)$的草图如图所示：

$xf(2x)<0$即$2xf(2x)<0$，$g(2x)<0$，

由图象得，$-1<2x<0$或$0<2x<1$，解得$-\dfrac{1}{2}<x<0$或$0<x<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$不等式$xf(2x)<0$解集是$\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$，



y
1
−1
O
1
x
−1

专题10：有关距离问题

1. 设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为 ( )

A. $1-\ln2$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln2)$　　C. $1+\ln2$　　D. $\sqrt{2}(1+\ln2)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，图象关于 $y=x$ 对称，

函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P\left(x,\frac{1}{2}e^x\right)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$，

设 $g(x)=\frac{1}{2}e^x-x(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$，

由 $g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant \ln2$，由 $g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1<0$ 可得 $0<x<\ln2$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 单调递减，在 $[\ln2,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 当 $x=\ln2$ 时，函数 $g(x)_{\min}=1-\ln2$，$d_{\min}=\frac{1-\ln2}{\sqrt{2}}$，

由图象关于 $y=x$ 对称得：$|PQ|$ 最小值为 $2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln2)$. 故选：$B$.

2. 设点 P 在曲线 $y=e^{2x}$ 上，点 Q 在曲线 $y=\frac{1}{2}\ln x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln2)$　　C. $\sqrt{2}(1+\ln2)$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\ln2)$

【答案】 D

【解析】 $y=e^{2x}$ 与 $y=\frac{1}{2}\ln x$ 互为反函数，它们图象关于直线 $y=x$ 对称；

又 $y'=2e^{2x}$，由直线的斜率 $k=2e^{2x_0}=1$，得 $x_0=-\frac{1}{2}\ln2$，

$y_0=e^{2x_0}=\frac{1}{2}$，

所以切线方程为 $x-y+\frac{1}{2}+\ln2=0$，

则原点到切线的距离为 $d=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\ln2)$，

$|PQ|$ 的最小值为 $2d=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\ln2)$. 故选：$D$.

3. 设点 P 在曲线 $y=x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{1-\ln2}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)$　　C. $\frac{1+\ln2}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}(1+\ln2)}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，图象关于 $y=x$ 对称

函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上点 $P\left(x,\frac{1}{2}e^x\right)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{|\frac{1}{2}e^x-x|}{\sqrt{2}}$

设 $g(x)=\frac{1}{2}e^x-x(x>0)$ 则 $g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$

由 $g'(x)\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant \ln2$，由 $g'(x)<0$ 可得 $0<x<\ln2$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 单调递减，在 $[\ln2,+\infty)$ 单调递增

$\therefore$ 当 $x=\ln 2$ 时，函数 $g(x)_{\min}=1-\ln 2$

$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln 2)$　故选：B.

4. 设动直线 $x=m$ 与函数 $f(x)=x^3$，$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M、N，则 $|MN|$ 的最小值为　(　　)

A. $\dfrac{1}{3}(1+\ln 3)$　　B. $\dfrac{1}{3}\ln 3$　　C. $\dfrac{1}{3}(1-\ln 3)$　　D. $\ln 3-1$

【答案】 A

【解析】 画图可以看到 $|MN|$ 就是两条曲线间的垂直距离 .

设 $F(x)=f(x)-g(x)=x^3-\ln x$，求导得：$F'(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}$.

令 $F'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$；令 $F'(x)<0$ 得 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$，

所以当 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 时，$F(x)$ 有最小值为 $F\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 3=\dfrac{1}{3}(1+\ln 3)$，

故选：A.

5. 设动直线 $x=m$ 与函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M，N，则 $|MN|$ 最小值的区间为　(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　B. $(1,2)$　　C. $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$

【答案】 C

【解析】 画图可以看到 $|MN|$ 就是两条曲线间的垂直距离 .

设 $F(x)=f(x)-g(x)=e^x-\ln x$，

求导得：$F'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}.F'(1)=e-1>0$，$F'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，

所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $F(x_0)=0$，

$x\in(0,x_0)$，$F'(x)<0$，函数是减函数，$x\in(x_0,+\infty)F'(x)>0$，函数是增函数，

所以函数的最小值在 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $F(1)$ 之间 .

$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\ln\dfrac{1}{2}=\sqrt{e}+\ln 2$，

$F(1)=e$，故选：C.

6. 已知直线 $y=a$ 分别与函数 $y=e^{x+1}$ 和 $y=\sqrt{x-1}$ 交于 A，B 两点，则 A，B 之间的最短距离是　(　　)

A. $\dfrac{3-\ln 2}{2}$　　B. $\dfrac{5-\ln 2}{2}$　　C. $\dfrac{3+\ln 2}{2}$　　D. $\dfrac{5+\ln 2}{2}$

【答案】 D

【解析】 已知直线 $y=a$ 分别与函数 $y=e^{x+1}$ 和 $y=\sqrt{x-1}$ 交于 A，B 两点

$\therefore e^{x+1}=a>0\Rightarrow x=\ln a-1$；

$\sqrt{x-1}=a\Rightarrow x=a^2+1$；

$\therefore AB$ 两点之间的距离为：$a^2+1-\ln a+1=a^2-\ln a+2$

令 $h(a)=a^2-\ln a+2$

$h'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$，由 $h'(a)=0$，得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(a)<0$，$h(a)$ 单调递减；当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(a)>0$，$h(a)$ 单调递增；

$\therefore h(a)\geqslant h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5+\ln 2}{2}$ 故选：D.

7. 若实数 a，b，c，d 满足 $|b+a^2-4\ln a|+|2c-d+2|=0$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ( )

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】 C

【解析】 $\because |b+a^2-4\ln a|+|2c-d+2|=0$，$\therefore b=4\ln a-a^2$，$d=2c+2$，

分别令 $y=f(x)=4\ln x-x^2$，$y=g(x)=2x+2$，

转化为两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的点之间的距离的最小值，

$f'(x)=\frac{4}{x}-2x$，设与直线 $y=2x+2$ 平行且与曲线 $f(x)$ 相切的切点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $\frac{4}{x_0}-2x_0=2$，$x_0>0$，解得 $x_0=1$，可得切点 $P(1,-1)$，

切点 $P(1,-1)$ 到直线 $y=2x+2$ 的距离 $d=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

$\therefore (a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值 $=d^2=5$. 故选：C.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{2}x-1, & x>0\end{cases}$，若 $m<n$ 且 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的最小值为 ( )

A. $2\ln 2-1$ B. $2-\ln 2$ C. $1+\ln 2$ D. 2

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{2}x-1, & x>0\end{cases}$，若 $m<n$ 且 $f(m)=f(n)$，

即有 $m\leqslant 0$，$n>0$，可得 $e^m-1=\frac{1}{2}n-1$，可得 $n=2e^m$，

$n-m=2e^m-m$，

设 $g(m)=2e^m-m$，$g'(m)=2e^m-1$，

即 $-\ln 2<m<0$ 时，$g'(m)>0$，$g(m)$ 递增；$m<-\ln 2$ 时，$g'(m)<0$，$g(m)$ 递减，

可得 $g(m)$ 在 $m=-\ln 2$ 处取得极小值，且为最小值 $1+\ln 2$. 故选：C.

9. 已知函数 $f(x)=x^3+\sin x$，$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & x<0\\ \ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(g(x))+m=0$ 有两个不等实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 x_2-x_1 的最小值是 ( )

A. 2 B. $3-\ln 2$ C. $4-2\ln 2$ D. $3-2\ln 2$

【答案】 D

【解析】 $f(x)=x^3+\sin x$ 的定义域为 R，

且 $f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)=-(x^3+\sin x)=-f(x)$，

可得 $f(x)$ 为奇函数，

$f'(x)=3x^2+\cos x$，$f''(x)=6x-\sin x$，$f'''(x)=6+\cos x$，

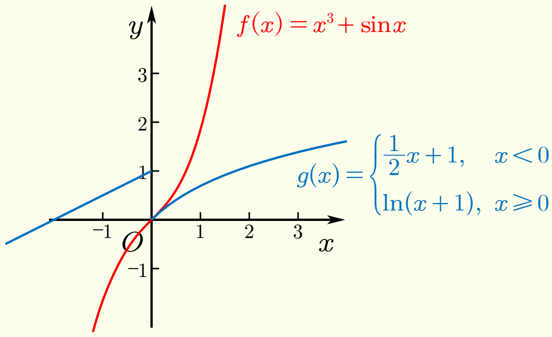
当 $x>0$ 时，$6+\cos x>0$，$f''(x)$ 递增，可得 $6x-\sin x>0$，

$f'(x)$ 递增，可得 $3x^2+\cos x>1>0$，

即 $f(x)$ 在 $x>0$ 递增，进而 $f(x)$ 在 R 上递增，

作出 $y=f(x)$ 的图象；

作出 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1, & x<0\\ \ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象．



设 $t=g(x)$，由 $f(g(x))+m=0$，

可得 $-m=f(t)$，即有 $0\leqslant t<1$，

且 $1+\dfrac{1}{2}x_1=\ln(1+x_2)$，

可得 $x_1=2(\ln(1+x_2)-1)$，

则 $x_2-x_1=2+x_2-2\ln(1+x_2)$，$e-1>x_2\geqslant 0$，

由 $h(x)=2+x-2\ln(1+x)$ 的导数为 $h'(x)=1-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{x-1}{1+x}$，

当 $x>1$ 时，$h(x)$ 递增，$-1<x<1$ 时，$h(x)$ 递减，

可得 $x=1$ 处 $h(x)$ 取得极小值，且为最小值，

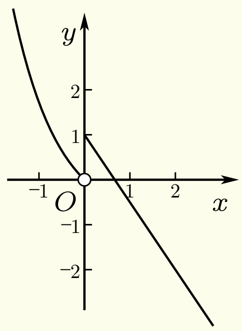
则 x_2-x_1 的最小值是 $3-2\ln 2$. 故选：D.

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+1, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}$，若 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_2-x_1 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\dfrac{2}{3},\ln 2\right]$　　B. $\left(\dfrac{2}{3},\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\right]$　　C. $\left[\ln 2,\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\right]$　　D. $\left(\ln 2,\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

【答案】 B

【解析】 作出函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+1, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}$ 的图象，



$x_1<x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，可得 $0\leqslant x_2<\dfrac{2}{3}$，

$1-\dfrac{3}{2}x_2=e^{-x_1}-1$，即为 $-x_1=\ln\left(2-\dfrac{3}{2}x_2\right)$，

$x_2-x_1=x_2+\ln\left(2-\dfrac{3}{2}x_2\right)$，

可令 $g(x)=x+\ln\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)$，$0\leqslant x<\dfrac{2}{3}$，

$g'(x)=1+\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{2-\dfrac{3}{2}x}=\dfrac{3x-1}{3x-4}$，

当 $0\leqslant x<\dfrac{1}{3}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

可得 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处取得极小值，且为最小值 $\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{3}{2}$；

$g(0)=\ln 2$，$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，由 $\dfrac{2}{3}<\ln 2$，

可得 x_2-x_1 的取值范围是 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{3}{2}\right]$. 故选：$B$.

11. 已知点 M 在曲线 $y=3\ln x-x^2$ 上，点 N 在直线 $x-y+2=0$ 上，则 $|MN|$ 的最小值为 ________.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 当点 M 是曲线的切线中与直线 $y=x+2$ 平行的直线的切点时，$|MN|$ 取得最小.

故令 $y'=-2x+\dfrac{3}{x}=1$ 解得，$x=1$，故点 M 的坐标为 $(1,-1)$，

故点 M 到直线 $y=x+2$ 的最小值为 $\dfrac{|1+2+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

12. 已知直线 $y=b$ 与函数 $f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=ax+\ln x$ 分别交于 A，B 两点，若 AB 的最小值为 2，则 $a+b=$ ___________.

【答案】 2

【解析】 设 $A(x_1,b)$，$B(x_2,b)$，可设 $x_1<x_2$，

则 $2x_1+3=ax_2+\ln x_2=b$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{2}(ax_2+\ln x_2-3)$，

$\therefore |AB|=x_2-x_1=\left(1-\dfrac{1}{2}a\right)x_2-\dfrac{1}{2}\ln x_2+\dfrac{3}{2}$，

令 $y=\left(1-\dfrac{1}{2}a\right)x-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{3}{2}$，

则 $y'=1-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2-a)x-1}{2x}(x>0)$，

由 $|AB|$ 的最小值为 2，可得 $2-a>0$，

函数在 $\left(0,\dfrac{1}{2-a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2-a},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore x=\dfrac{1}{2-a}$ 时，函数 y 取得极小值，且为最小值 2，

即有 $\left(1-\dfrac{1}{2}a\right)\cdot\dfrac{1}{2-a}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{3}{2}=2$，解得 $a=1$，

由 $x_2=1$，则 $b=ax_2+\ln x_2=1+\ln 1=1$，

可得 $a+b=2$. 故答案为：2.

13. 若实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{2a^2-\ln a}{b}=\dfrac{3c-2}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 _________.

【答案】 $\dfrac{1}{10}$

【解析】 $\because$ 实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{2a^2-\ln a}{b}=\dfrac{3c-2}{d}=1$

可得 $b=-\ln a+2a^2$，$d=3c-2$，

分别令 $y=f(x)=-\ln x+2x^2$，$y=g(x)=3x-2$，

转化为两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的点之间的距离的最小值，

$f'(x)=-\dfrac{1}{x}+4x$，设与直线 $y=3x-2$ 平行且与曲线 $f(x)$ 相切的切点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $-\dfrac{1}{x_0}+4x_0=3$，$x_0>0$，解得 $x_0=1$，可得切点 $P(1,2)$，

切点 $P(1,2)$ 到直线 $y=3x-2$ 的距离 $d=\dfrac{|3-2-2|}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

$\therefore (a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $d^2=\dfrac{1}{10}$..

14. 若实数 a、b、c、d 满足 $\dfrac{a^2-2\ln a}{b}=\dfrac{3c-4}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ______.

【答案】 $\dfrac{2(\ln2-1)^2}{5}$

【解析】 $\because \dfrac{a^2-2\ln a}{b}=\dfrac{3c-4}{d}=1$，

$\therefore$ 点 $P(a,b)$ 是曲线 $f(x)=x^2-2\ln x(x>0)$ 上的点，$Q(c,d)$ 是直线 $y=3x-4$ 上的点，

$\therefore |PQ|^2=(a-c)^2+(b-d)^2$.

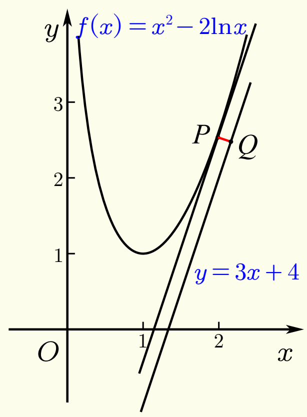
要使 $|PQ|^2$ 最小，当且仅当过曲线 $y=x^2-2\ln x$ 上的点 $P(a,b)$ 且与线 $y=3x-4$ 平行时 .

$\because f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}(x>0)$，

由 $f'(x)>0$ 得，$x>1$；由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，为 1.

作图如下：



$\because f'(x)|_{x=a}=2a-\dfrac{2}{a}$，直线 $y=3x-4$ 的斜率 $k=3$，

$\therefore 2a-\dfrac{2}{a}=3$，

$\therefore a=2$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$(由于 $a>0$，故舍去).

$\therefore b=2^2-2\ln2=4-2\ln2$.

设点 $P(2,4-2\ln2)$ 到直线 $y=3x-4$ 的距离为 d，

则 $d^2=\dfrac{|6-(4-2\ln2)-4|^2}{(\sqrt{10})^2}=\dfrac{2(\ln2-1)^2}{5}$.

$\because |PQ|^2\geqslant d^2=\dfrac{2(\ln2-1)^2}{5}$，

$\therefore (a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $\dfrac{2(\ln2-1)^2}{5}$.

15. 已知实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{a-2e^a}{b}=\dfrac{1-c}{d-1}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 __________ .

【答案】 8

【解析】 ∵实数 a，b，c，d 满足 $\dfrac{a-2e^a}{b}=\dfrac{1-c}{d-1}=1$，

∴ $b=a-2e^a$，$d-1=1-c$，

∴点 (a,b) 在曲线 $y=x-2e^x$ 上，点 (c,d) 在曲线 $y=2-x$ 上，

$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的几何意义就是曲线 $y=x-2e^x$ 到曲线 $y=2-x$ 上点的距离最小值的平方 .

考查曲线 $y=x-2e^x$ 上和直线 $y=2-x$ 平行的切线，

∵ $y'=1-2e^x$，求出 $y=x-2e^x$ 上和直线 $y=2-x$ 平行的切线方程，

∴令 $y'=1-2e^x=-1$，

解得 $x=0$，∴切点为 $(0,-2)$，

该切点到直线 $y=2-x$ 的距离 $d=\dfrac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$ 就是所要求的两曲线间的最小距离，

故 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $d^2=8$.

专题11：参数的值或范围问题

1. 已知函数 $f(x)=x-\ln x$，$g(x)=x^2-ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ $(t>0)$ 上的最小值 $m(t)$；

(2) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$，$A(x_1,h(x_1))$，$B(x_2,h(x_2))$ $(x_1\neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图象上任意两点，且满足 $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，求实数 a 的取值范围；

(3) 若 $\exists x\in(0,1]$，使 $f(x)\geqslant\dfrac{a-g(x)}{x}$ 成立，求实数 a 的最大值.

【答案】 (1) 当 $0<t<1$ 时，$m(t)=1$；当 $t\geqslant1$ 时，$m(t)=t-\ln t$.

(2) $a\leqslant2\sqrt{2}-2$；

(3) 实数 a 的最大值为1

【解析】 (1) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，

当 $t\geqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，$f(x)$ 的最小值为 $f(t)=t-\ln t$---------------------------(1分)

当 $0<t<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(t,1)$ 上为减函数，在区间 $(1,t+1)$ 上为增函数，$f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$.

综上，当 $0<t<1$ 时，$m(t)=1$；当 $t\geqslant1$ 时，$m(t)=t-\ln t$. --(3分)

(2) $h(x)=x^2-(a+1)x+\ln x$，对于任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不妨取 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，

则由 $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，可得 $h(x_1)-h(x_2)<x_1-x_2$，

变形得 $h(x_1)-x_1<h(x_2)-x_2$ 恒成立，---(5分)

令 $F(x)=h(x)-x=x^2-(a+2)x+\ln x$，

则 $F(x)=x^2-(a+2)x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $F'(x)=2x-(a+2)+\dfrac{1}{x}\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，---(7分)

$\therefore 2x+\dfrac{1}{x}\geqslant(a+2)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立.

$\because 2x+\dfrac{1}{x}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取"="，

$\therefore a\leqslant2\sqrt{2}-2$；--(10分)

(3) $\because f(x)\geqslant\dfrac{a-g(x)}{x}$，$\therefore a(x+1)\leqslant2x^2-x\ln x$.

$\because x\in(0,1]$，$\therefore x+1\in(1,2]$，

$\therefore \exists x\in(0,1]$ 使得 $a\leqslant\dfrac{2x^2-x\ln x}{x+1}$ 成立.

令 $t(x)=\dfrac{2x^2-x\ln x}{x+1}$，则 $t'(x)=\dfrac{2x^2+3x-\ln x-1}{(x+1)^2}$，--------------------------------------(12分)

令 $y=2x^2+3x-\ln x-1$，则由 $y'=\dfrac{(x+1)(4x-1)}{x}=0$，可得 $x=\dfrac{1}{4}$ 或 $x=-1$(舍).

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 时，$y'<0$，则 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 上单调递减；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ 时，$y'>0$，则 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增.

$\therefore y>\ln4-\dfrac{1}{8}>0$，$\therefore t'(x)>0$ 在 $x\in(0,1]$ 上恒成立.

$\therefore t(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增 . 则 $a\leqslant t(1)$，即 $a\leqslant 1$. ----------(15 分)

$\therefore$ 实数 a 的最大值为 1. ----------(16 分)

2. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=-x^2+ax-3$.

(I) 求 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ $(t>0)$ 上的最小值；

(II) 若存在 $x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$(e 是常数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$) 使不等式 $2f(x)\geqslant g(x)$ 成立，求实数 a 的取值范围；

(III) 证明对一切 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $\ln x>\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{2}{ex}$ 成立 .

【答案】 (I) $f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{\mathrm{e}},0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}\\ t\ln t\cdot t\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$； (II) $a\leqslant-2+\frac{1}{\mathrm{e}}+3\mathrm{e}$; (III) 详见解析

【解析】 (I)$f'(x)=\ln x+1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增 .

① $0<t<t+2<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$t$ 无解；

② $0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}<t+2<\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$；

③ $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant t<t+2$，即 $t\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(t)=t\ln t$；

$\therefore f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{\mathrm{e}},0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}\\ t\ln t\cdot t\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$.

(II) 由题意知 $2x\ln x\geqslant-x^2+ax-3$，则 $a\leqslant 2\ln x+x+\frac{3}{x}$，

设 $h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，

$x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$x\in[1,\mathrm{e}]$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\max}=\max\left\{h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right),h(\mathrm{e})\right\}$

因为存在 $x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$，$2f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，所以 $a\leqslant h(x)_{\max}$；

因为 $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-2+\frac{1}{\mathrm{e}}+3\mathrm{e}$，$h(\mathrm{e})=2+\mathrm{e}+\frac{3}{\mathrm{e}}$，

所以 $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)>h(\mathrm{e})$，

所以 $a\leqslant-2+\frac{1}{\mathrm{e}}+3\mathrm{e}$；

(III) 问题等价于证明 $\mathrm{l}x\ln x>\frac{x}{\mathrm{e}^x}-\frac{2}{\mathrm{e}}(x\in(0,+\infty))$，

由 (I) 知 $f(x)=x\ln x(x\in(0,+\infty))$ 的最小值是 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$，当且仅当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时取到

设 $m(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}-\frac{2}{\mathrm{e}}(x\in(0,+\infty))$，则 $m'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，$\therefore m(x)_{\max}=m(1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

当且仅当 $x=1$ 时取到，从而对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\ln x>\frac{x}{\mathrm{e}^x}-\frac{2}{\mathrm{e}}$ 成立 .

3. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=-x^2+ax-2$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ $(t>0)$ 上的最小值；

（Ⅱ）若函数 $y=f(x)+g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 且 $x_2-x_1>\ln2$，求实数 a 的取值范围．

【答案】（Ⅰ）$f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{e},0<t<\frac{1}{e}\\ t\ln t,t\geqslant\frac{1}{e}\end{cases}$；　（Ⅱ）$a>\frac{2}{3}\ln2-\ln\left(\frac{\ln2}{3}\right)-1$

【解析】（Ⅰ）由 $f'(x)=\ln x+1=0$，可得 $x=\frac{1}{e}$，

∴①$0<t<\frac{1}{e}$，时，函数 $f(x)$ 在 $\left(t,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},t+2\right)$ 上单调递增，

∴函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ $(t>0)$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，

②当 $t\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上单调递增，

∴$f(x)_{\min}=f(t)=t\ln t$，

∴$f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{e},0<t<\frac{1}{e}\\ t\ln t,t\geqslant\frac{1}{e}\end{cases}$；

（Ⅱ）$y=f(x)+g(x)=x\ln x-x^2+ax-2$，则 $y'=\ln x-2x+1+a$

题意即为 $y'=\ln x-2x+1+a=0$ 有两个不同的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

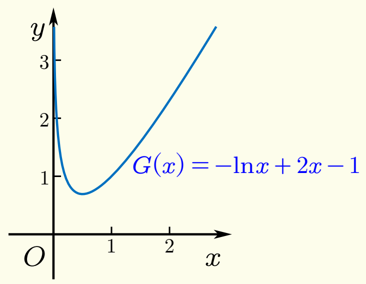
即 $a=-\ln x+2x-1$ 有两个不同的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

等价于直线 $y=a$ 与函数 $G(x)=-\ln x+2x-1$ 的图象有两个不同的交点

∵$G'(x)=-\frac{1}{x}+2$，∴$G(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

画出函数图象的大致形状（如右图），

由图象知，当 $a>G(x)_{\min}=G\left(\frac{1}{2}\right))=\ln2$ 时，x_1,x_2 存在，且 x_2-x_1 的值随着 a 的增大而增大而当 $x_2-x_1=\ln2$ 时，由题意 $\begin{cases}\ln x_1-2x_1+1+a=0\\ \ln x_2-2x_2+1+a=0\end{cases}$，



两式相减可得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=2(x_1-x_2)=-2\ln2$

∴$x_2=4x_1$ 代入上述方程可得 $x_2=4x_1=\frac{4}{3}\ln2$，

此时 $a=\frac{2}{3}\ln2-\ln\left(\frac{\ln2}{3}\right)-1$，

所以，实数 a 的取值范围为 $a>\frac{2}{3}\ln2-\ln\left(\frac{\ln2}{3}\right)-1$；

4. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-bx+1$（b 为常数）．

(1) 函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与函数 $g(x)$ 的图象相切，求实数 b 的值；

(2) 若 $b=0$，$h(x)=f(x)-g(x)$，$\exists\, x_1$、$x_2[1,2]$ 使得 $h(x_1)-h(x_2)\geqslant M$ 成立，求满足上述条件的最大整数 M；

(3) 当 $b\geqslant2$ 时，若对于区间 $[1,2]$ 内的任意两个不相等的实数 x_1,x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$ 成立，求 b 的取值范围．

【答案】(1)$b=1$ 或 -3;(2) 满足条件的最大整数是 $M=0$;(3)$b=2$

【解析】(1)∵$f(x)=\ln x$，∴$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，

∴函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，--(2 分)

$\because$ 直线 $y=x-1$ 与函数 $g(x)$ 的图象相切，由 $\begin{cases} y=x-1 \\ y=\frac{1}{2}x^2-bx+1 \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2(b+1)x+4=0$，

则 $\triangle=4(b+1)^2-16=0$，解得 $b=1$ 或 -3 --(4 分)

(2) 当 $b=0$ 时，$\because h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2-1(x\in[1,2])$，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$，--(5 分)

当 $x\in(1,2]$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

$h(x)_{\max}=h(1)=-\frac{3}{2}$，$h(x)_{\min}=h(2)=\ln 2-3$，------------------------------------(7 分)

则 $[h(x_1)-h(x_2)]_{\max}=h(x)_{\max}-h(x)_{\min}=\frac{3}{2}-\ln 2$，

$\therefore M\leqslant\frac{3}{2}-\ln 2<1$，故满足条件的最大整数是 $M=0$. ---------------------------(9 分)

(3) 不妨设 $x_1>x_2$，$\because$ 函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,2]$ 上是增函数，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\because$ 函数 $g(x)$ 图象的对称轴为 $x=b$，且 $b\geqslant 2$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，

$\therefore g(x_1)<g(x_2)$，--(10 分)

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$ 等价于 $f(x_1)-f(x_2)>g(x_2)-g(x_1)$，

即 $f(x_1)+g(x_1)>f(x_2)+g(x_2)$，--(11 分)

等价于 $\varphi(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx+1$ 在区间 $[1,2]$ 上是增函数，

等价于 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+x+b\geqslant 0$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立，---------------------------(12 分)

等价于 $b\leqslant x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立，

$\therefore b\leqslant 2$，又 $b\geqslant 2$，$\therefore b=2$. ---(14 分)

5. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$，$g(x)=\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$，其中 $a\in R$，$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数 .

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $x>1$ 时，$g(x)>0$；

(3) 确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立 .

【答案】 (1) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty\right)$ 上为增函数；

(2) 详见解析；(3) $a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 (I) 由 $f(x)=ax^2-a-\ln x$，得 $f'(x)=2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 成立，则 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2a}}=\pm\frac{\sqrt{2a}}{2a}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty\right)$ 上为增函数；

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty\right)$ 上为增函数；

（Ⅱ）证明：要证 $g(x)>0(x>1)$，即 $\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}>0$，

即证 $\frac{1}{x}>\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$，也就是证 $\frac{\mathrm{e}^x}{x}>\mathrm{e}$，

令 $h(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$，

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(1)=\mathrm{e}$，

即当 $x>1$ 时，$h(x)>\mathrm{e}$，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$g(x)>0$；

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，

当 $a\leqslant 0$，$x>1$ 时，$f(x)=a(x^2-1)-\ln x<0$，

故当 $f(x)>g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立时，必有 $a>0$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{\sqrt{2a}}>1$，

由（Ⅰ）有 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)<f(1)=0$，而 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，

$\therefore$ 此时 $f(x)>g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内不恒成立；

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，令 $h(x)=f(x)-g(x)\ (x\geqslant 1)$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\mathrm{e}^{1-x}$

$>x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^3-2x+1}{x^2}>\frac{x^2-2x+1}{x^2}>0$，

因此 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\because h(1)=0$，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)>0$，

即 $f(x)>g(x)$ 恒成立，

综上，$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

6. 已知函数 $f(x)=x+a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直．

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-bx$，若函数 $g(x)$ 存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围；

（Ⅲ）设 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\geqslant\frac{7}{2}$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值．

【答案】 (1)$a=1$　　(2)$b\in(3,+\infty)$　　(3)$\frac{15}{8}-2\ln 2$

【解析】（Ⅰ）根据题意，$f(x)=x+a\ln x$，则 $f'(x)=1+\frac{a}{x}$，

又由切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，则有 $k=f'(1)=1+a=2$，即 $a=1$，

（Ⅱ）根据题意，$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-bx$，则 $g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-(b-1)x$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}+x-(b-1)=\frac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，

由题知 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

$\because x>0\ \therefore$ 设 $\phi(x)=x^2-(b-1)x+1$，

而 $\phi(0)=1>0$，所以要使 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，则只需 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{2}>0\\ \triangle=(b-1)^2-4>0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}b>1\\ b>3\text{ 或 }b<-1\end{cases}$，所以 b 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

(Ⅲ) $\because g'(x)=\dfrac{1}{x}+x-(b-1)=\dfrac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x^2-(b-1)x+1=0$，

$\because x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，则 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是 $x^2-(b-1)x+1=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=b-1$，$x_1x_2=1$，

$g(x_1)-g(x_2)=\left[\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2-(b-1)x_1\right]-\left[\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2-(b-1)x_2\right]$

$=\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)=\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}\right)=\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $g(x_1)-g(x_2)=h(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，

$\because 0<x_1<x_2\ \therefore t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，

又 $b\geqslant\dfrac{7}{2}$，所以 $b-1\geqslant\dfrac{5}{2}$，所以 $(b-1)^2=(x_1+x_2)^2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=t+\dfrac{1}{t}+2\geqslant\dfrac{25}{4}$，

整理有 $4t^2-17t+4\geqslant0$，解得 $-\dfrac{1}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{4}$，

$\therefore t\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$，

而 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)=-\dfrac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，所以 $h(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$ 单调递减，

则有 $h(t)\geqslant h\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{8}-2\ln2$；

故 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值是 $\dfrac{15}{8}-2\ln2$.

7. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{a+1}{2}x^2+1$

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 上的最值

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(3) 当 $-1<a<0$ 时，有 $f(x)>1+\dfrac{2}{a}\ln(-a)$ 恒成立，求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $f(x)_{\max}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，$f(x)_{\min}=\dfrac{5}{4}$

(2) 当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\dfrac{-a}{a+1}},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{-a}{a+1}}\right)$ 上单调递减 .

当 $a\leqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

(3) $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1,0\right)$

【解析】 (1) 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{x^2}{4}+1$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{-1}{2x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x^2-1}{2x}$.

$\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore$ 由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 上的最值只可能在 $f(1)$，$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$f(\mathrm{e})$ 取到，

而 $f(1)=\frac{5}{4}$，$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4\mathrm{e}^2}$，$f(\mathrm{e})=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{5}{4}$.

(2)$f'(x)=\frac{(a+1)x^2+a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

①当 $a+1\leqslant 0$，即 $a\leqslant -1$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

②当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

③当 $-1<a<0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x^2>\frac{-a}{a+1}$，$\therefore x>\sqrt{\frac{-a}{a+1}}$ 或 $x<-\sqrt{\frac{-a}{a+1}}$（舍去）

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{-a}{a+1}},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\sqrt{\frac{-a}{a+1}}\right)$ 上单调递减；

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{-a}{a+1}},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\sqrt{\frac{-a}{a+1}}\right)$ 上单调递减.

当 $a\leqslant -1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

(3) 由 (2) 知，当 $-1<a<0$ 时，$f_{\min}(x)=f\left(\sqrt{\frac{-a}{a+1}}\right)$

即原不等式等价于 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{a+1}}\right)>1+\frac{a}{2}\ln(-a)$，

即 $a\ln\sqrt{\frac{-a}{a+1}}+\frac{a+1}{2}\cdot\frac{-a}{a+1}+1>1+\frac{a}{2}\ln(-a)$ 整理得 $\ln(a+1)>-1$

$\therefore a>\frac{1}{\mathrm{e}}-1$，

又 $\because -1<a<0$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1,0\right)$.

8. 已知函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 的图象在点 $x=\mathrm{e}$（e 为自然对数的底数）处的切线的斜率为 3.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)\leqslant kx^2$ 对任意 $x>0$ 成立，求实数 k 的取值范围；

（Ⅲ）当 $n>m>1(m,n\in N^*)$ 时，证明：$\frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}}>\frac{m}{n}$.

【答案】 (1)$a=1$; (2)$k\geqslant 1$; (3) 详见解析

【解析】 （Ⅰ）求导数，得 $f'(x)=a+\ln x+1$.

由已知，得 $f'(\mathrm{e})=3$，即 $a+\ln\mathrm{e}+1=3$

$\therefore a=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 $f(x)=x+x\ln x$，

$\therefore f(x)\leqslant kx^2$ 对任意 $x>0$ 成立 $\Leftrightarrow k\geqslant\frac{1+\ln x}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立，

令 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则问题转化为求 $g(x)$ 的最大值.

求导数，得 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数；

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数.

故 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $g(1)=1$.

$\therefore k\geqslant 1$ 即为所求.

(Ⅲ) 证明：令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$，则 $h'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)2}$.

由 (Ⅱ)，知 $x\geqslant 1+\ln x(x>0)$，$\therefore h'(x)\geqslant 0$，

$\therefore h(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数.

$\because n>m>1$，$\therefore h(n)>h(m)$，即 $\frac{n\ln n}{n-1}>\frac{m\ln m}{m-1}$，

$\therefore mn\ln n-n\ln n>mn\ln m-m\ln m$，

即 $mn\ln n+m\ln m>mn\ln m+n\ln n$，

即 $\ln n^{mn}+\ln m^{m}>\ln m^{mn}+\ln n^{n}$，

即 $\ln(mn^{n})^{m}>\ln(\mathrm{nm}^{m})^{n}$，

$\therefore (mn^{n})^{m}>(\mathrm{nm}^{m})^{n}$，

$\therefore \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}}>\frac{m}{n}$.

9. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，其中 $a>0$. 设 $g(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，

(1) 求 a 的值；

(2) 对任意 $x_1>x_2>0$，$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3) 讨论方程 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)$ 在 $[1,+\infty)$ 上根的个数.

【答案】 (1)$a=1$　　(2)$m\geqslant\frac{1}{4}$　　(3)$m\geqslant 1$ 时有一个根，$m<1$ 时无根

【解析】 (1)$f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$.$f'(x)=1-\frac{1}{x+a}=\frac{x+a-1}{x+a}$.

由 $f'(x)=0$，解得 $x=1-a>-a$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-a,1-a)$	$1-a$	$(1-a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	减函数	极小值	增函数

因此，$f(x)$ 在 $x=1-a$ 处取得最小值，

故由题意 $f(1-a)=1-a=0$，所以 $a=1$.

(2) 由 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<1$ 知 $g(x_1)-x_1<g(x_2)-x_2$ 对 $x_1>x_2>0$ 恒成立

即 $h(x)=g(x)-x=\ln x-x+\frac{m}{x}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数.

$h'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{m}{x^2}\leqslant 0$ 对 $(0,+\infty)$ 恒成立，$m\geqslant x-x^2$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

$(x-x^2)_{\max}=\frac{1}{4}$，$\therefore m\geqslant\frac{1}{4}$

(3) 由题意知 $\ln x+\frac{m}{x}=x$，$\frac{m}{x}=x-\ln x(x\geqslant 1)$

由图象知 $m\geqslant 1$ 时有一个根，$m<1$ 时无根 .

或 $m=x^2-x\ln x$，$(x^2-x\ln x)'=2x-\ln x-1$，$x\geqslant 1$，

又可求得 $x\geqslant 1$ 时 $(2x-\ln x-1)_{\min}=1>0$，

$\therefore x^2-x\ln x$ 在 $x\geqslant 1$ 时单调递增 .$x\geqslant 1$ 时，$x^2-x\ln x\geqslant 1$，$m\geqslant 1$ 时有一个根，$m<1$ 时无根 .

10. 设函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

(Ⅰ) 讨论：$f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) 若 $a\leqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

若 $a>0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减

(2)a 的取值范围为 $(0,1)$

【解析】 (Ⅰ)$f(x)=\ln x+a(1-x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

(Ⅱ)，由 (Ⅰ) 知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最大值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 取得最大值，最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$，

$\because f\left(\frac{1}{a}\right)>2a-2$，$\therefore \ln a+a-1<0$，

令 $g(a)=\ln a+a-1$，

$\because g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g(1)=0$，

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$g(a)<0$，当 $a>1$ 时，$g(a)>0$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,1)$.

专题 12 : 分离参数法

1. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ae^{-x}$，若 $f'(x)\geqslant 2\sqrt{3}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ________.

【答案】 $a\geqslant 3$

【解析】 首先转化不等式，$f'(x)=\mathrm{e}^x+ae^{-x}$，即 $\mathrm{e}^x+\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}\geqslant 2\sqrt{3}$ 恒成立，观察不等式 a 与 e^x 便于分离，考虑利用参变分离法，使 a,x 分居不等式两侧，$a\geqslant-(\mathrm{e}^x)^2+2\sqrt{3}\mathrm{e}^x$，若不等式恒成立，只需 $a\geqslant(-(\mathrm{e}^x)^2+2\sqrt{3}\mathrm{e}^x)_{\max}$，令 $g(x)=-(\mathrm{e}^x)^2+2\sqrt{3}\mathrm{e}^x=-(\mathrm{e}^x-\sqrt{3})^2+3$（解析式可看做关于 e^x 的二次函数，故配方求最值）$g(x)_{\max}=3$，

所以 $a\geqslant 3$

2. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$，若 $f(x)<x^2$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 ________.

【答案】 $a\geqslant-1$

【解析】 恒成立的不等式为 $\ln x-\dfrac{a}{x}<x^2$，便于参数分离，所以考虑尝试参变分离法

$\ln x-\dfrac{a}{x}<x^2\Leftrightarrow x\ln x-a<x^3\Leftrightarrow a>x\ln x-x^3$，其中 $x\in(1,+\infty)$

$\therefore$ 只需要 $a>(x\ln x-x^3)_{\max}$，令 $g(x)=x\ln x-x^3$

$g'(x)=1+\ln x-3x^2$

$g'(1)=-2$，$g''(x)=\dfrac{1}{x}-6x=\dfrac{1-6x^2}{x}<0$，

$\therefore g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$\therefore g'(x)<g'(1)<0\Rightarrow g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减

$\therefore g(x)<g(1)=-1$

$\therefore a\geqslant-1$

3. 若对任意 $x\in R$，不等式 $3x^2-2ax\geqslant|x|-\dfrac{3}{4}$ 恒成立，则实数 a 的范围是 ________.

【答案】 $-1\leqslant a\leqslant 1$

【解析】 $3x^2-2ax\geqslant|x|-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 2ax\leqslant 3x^2-|x|+\dfrac{3}{4}$，

当 $x>0$ 时，$2a\leqslant\left(3x-1+\dfrac{3}{4x}\right)_{\min}$，

而 $3x-1+\dfrac{3}{4x}=3x+\dfrac{3}{4x}-1\geqslant 2\sqrt{3x\cdot\dfrac{3}{4x}}-1=2$

$\therefore 2a\leqslant 2\Rightarrow a\leqslant 1$；

当 $x=0$ 时，不等式恒成立；

当 $x<0$ 时，$2a\geqslant\left(3x+1+\dfrac{3}{4x}\right)_{\max}$，

而 $3x+1+\dfrac{3}{4x}=1-\left(-3x+-\dfrac{3}{4x}\right)\leqslant-2$

$\therefore 2a\geqslant-2\Rightarrow a\geqslant-1$

综上所述：$-1\leqslant a\leqslant 1$

4. 设函数 $f(x)=x^2-1$，对任意的 $x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，$f\left(\dfrac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 ________.

【答案】 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

【解析】 先将不等式进行化简可得：

$\left(\frac{x}{m}\right)^2-1-4m^2(x^2-1)\leqslant(x-1)^2-1+4(m^2-1)$，

即 $\left(\frac{1}{m^2}-4m^2\right)x^2\leqslant x^2-2x-3$，不等式两边同时除以 x^2，可得：

$\left(\frac{1}{m^2}-4m^2\right)\leqslant\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2}\right)_{\min}$，

令 $g(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2}=-3\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x}+1$，$\frac{1}{x}\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$，最小值为 $g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{3}$，

$\therefore\frac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\frac{5}{3}\Rightarrow 12m^4-5m^2-3\geqslant 0$

即 $(3m^2+1)(4m^2-3)\geqslant 0$

解得：$m\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

5. 若不等式 $x^2+2+|x^3-2x|\geqslant ax$ 对 $x\in(0,4)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 __________.

【答案】 $a\leqslant 2\sqrt{2}$

【解析】 $x^2+2+|x^3-2x|\geqslant ax\Rightarrow a\leqslant\left(\frac{x^2+2+|x^3-2x|}{x}\right)_{\min}$，

令 $f(x)=\frac{x^2+2+|x^3-2x|}{x}$，对绝对值内部进行符号讨论，即 $f(x)=x+\frac{2}{x}+|x^2-2|=\begin{cases}x+\frac{2}{x}+x^2-2, & \sqrt{2}<x<4\\ x+\frac{2}{x}+2-x^2, & 0<x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$，而 $y=x+\frac{2}{x}+x^2-2$ 在 $(\sqrt{2},4)$ 单调递增，$y=x+\frac{2}{x}+2-x^2$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 单调递减，$\therefore$ 可求出 $f(x)_{\min}=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$\therefore a\leqslant 2\sqrt{2}$

6. 设正数 $f(x)=\frac{e^2x^2+1}{x}$，$g(x)=\frac{e^2x}{e^x}$，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不等式 $\frac{g(x_1)}{k}\leqslant\frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是 __________.

【答案】 $k\geqslant 1$

【解析】 先将 k 放置不等号一侧，可得 $g(x_1)\leqslant\frac{kf(x_2)}{k+1}$，

所以 $\frac{kf(x_2)}{k+1}\geqslant[g(x_1)]_{\max}$，先求出 $g(x)$ 的最大值，

由 $g'(x)=e^2\cdot(1-x)e^{-x}$，可得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减.

故 $g(x)_{\max}=g(1)=e$，所以若原不等式恒成立，只需 $\frac{kf(x_2)}{k+1}\geqslant e$，

不等式中只含 k,x_1，可以考虑再进行一次参变分离，$\frac{kf(x_2)}{k+1}\geqslant e\Rightarrow e\cdot\frac{k+1}{k}\leqslant f(x_2)$，

则只需 $e\cdot\frac{k+1}{k}\leqslant[f(x_2)]_{\min}$，

$f(x)=\frac{e^2x^2+1}{x}=e^2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{e^2x\cdot\frac{1}{x}}=2e$，$[f(x_2)]_{\min}=2e$

所以 $e\cdot\frac{k+1}{k}\leqslant 2e$ 解得：$k\geqslant 1$

7. 已知函数 $f(x)=ax^2-(2a+1)x+\ln x$，$a\in R$，$g(x)=e^x-x-1$，若对于任意的 $x_1\in(0,+\infty)$，$x_2\in R$，不等式 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】 $a\in[-1,0]$

【解析】 $\because f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 恒成立 $\therefore$ 只需 $f(x_1)\leqslant g(x)_{\min}$

由 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ 得：$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令 $g'(x)>0$ 解得：$x>0$

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=0$

$\therefore \forall x_1\in(0,+\infty)$，$ax_1^2-(2a+1)x_1+\ln x_1\leqslant 0$ 恒成立

即只需 $f(x)_{\max}\leqslant 0$

$$f'(x)=2ax-2a-1+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}$$

当 $a>0$ 时，令 $x=\dfrac{2a+1}{a}$

则 $f\left(\dfrac{2a+1}{a}\right)=\ln\left(\dfrac{2a+1}{a}\right)=\ln\left(2+\dfrac{1}{a}\right)>0$，与 $f(x)\leqslant 0$ 矛盾

当 $a\leqslant 0$ 时，$2ax-1<0$ $\therefore f'(x)>0$ 解得 $x<1$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=a-(2a+1)=-a-1$

$\therefore -a-1\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant -1$

综上所述：$a\in[-1,0]$

8. 若不等式 $x+2\sqrt{2xy}\leqslant a(x+y)$ 对任意正数 x,y 恒成立，则正数 a 的最小值是 ( )

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$

【答案】 B

【解析】 本题无论分离 x 还是分离 y 都相对困难，所以考虑将 x,y 归至不等号的一侧，致力于去求 x,y 表达式的最值：$x+2\sqrt{2xy}\leqslant a(x+y)\Rightarrow a\geqslant\left(\dfrac{x+2\sqrt{2xy}}{x+y}\right)_{\max}$，从 $2\sqrt{2xy}$ 入手考虑使用均值不等式：

$2\sqrt{2xy}=2\sqrt{x\cdot 2y}\leqslant x+2y\Rightarrow \dfrac{x+2\sqrt{2xy}}{x+y}\leqslant\dfrac{x+(x+2y)}{x+y}=2$，所以 $a\geqslant 2$

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，如果当 $x\geqslant 1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围 .

【答案】 $k\leqslant 2$

【解析】 $\because x\geqslant 1$ $\therefore \dfrac{1+\ln x}{x}\geqslant\dfrac{k}{x+1}\Leftrightarrow k\leqslant\dfrac{(x+1)(1+\ln x)}{x}$

即只需要 $k\leqslant\left(\dfrac{(x+1)(1+\ln x)}{x}\right)_{\min}$

设 $g(x)=\dfrac{(x+1)(1+\ln x)}{x}$

$$\therefore g'(x)=\frac{[(x+1)(1+\ln x)]'x-(x+1)(1+\ln x)}{x^2}=\frac{x-\ln x}{x^2}$$

令 $h(x)=x-\ln x$ （分子的符号无法直接判断，所以考虑再构造函数进行分析）

$\therefore h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ $\because x\geqslant 1$ $\therefore h'(x)\geqslant 0$

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增 $\therefore h(x)\geqslant h(1)=1>0$

$\therefore g'(x)>0$ $\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增 $\therefore g(x)_{\min}=g(1)=2$

$\therefore k \leqslant 2$

10. 已知函数 $f(x)=x+x\ln x$, 若 $k\in Z$, 且 $k<\dfrac{f(x)}{x-1}$ 对任意 $x>1$ 恒成立, 则 k 的最大值为____________.

【答案】 3

【解析】 $k<\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$, $\therefore k<\left(\dfrac{x+x\ln x}{x-1}\right)_{\min}$,

令 $g(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$, 则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,

考虑分子 $h(x)=x-\ln x-2$, $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

$\because h(3)=1-\ln 3<0, h(4)=2-\ln 2>0$

$\therefore \exists b\in(3,4)$, 使得 $h(b)=0$.

$\therefore x\in(1,b), h(x)<0\Rightarrow g'(x)<0$, 同理, $x\in(b,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1,b)$ 单调递减, 在 $(b,+\infty)$ 单调递增.

$g(x)_{\min}=g(b)=\dfrac{b+b\ln b}{b-1}$,

因为 $h(b)=0$ 即 $b-\ln b-2=0\Rightarrow \ln b=b-2$,

$\therefore g(b)=\dfrac{b+b(b-2)}{b-1}=b\in(3,4)$

$\therefore k<b\ k_{\max}=3$

11. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x(a<0)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $a=-\dfrac{1}{2}$, 且关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+b$ 在 $[1,4]$ 上恰有两个不等的实根, 求实数 b 的取值范围

【答案】 (1)a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$;(2)$b\in\left(\ln 2-2,-\dfrac{5}{4}\right]$

【解析】 (1) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$,

$\therefore f'(x)=-\dfrac{ax^2+2x-1}{x}(x>0)$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增,

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立,

则 $a\leqslant\dfrac{1-2x}{x^2}=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1$ 在 $x>0$ 时恒成立,

即 $a\leqslant\left[\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1\right]_{\min}(x>0)$,

当 $x=1$ 时, $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1$ 取最小值 -1,

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

(2) 当 $a=-\dfrac{1}{2}$, 由 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+b$ 得 $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\ln x-b=0$ 在 $[1,4]$ 上有两个不同的实根,

设 $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\ln x$, $x\in[1,4]$,

$\therefore g'(x)=\dfrac{(x-2)(x-1)}{2x}$,

$\therefore x\in[1,2)$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(2,4]$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\ln2-2$，$g(1)=-\dfrac{5}{4}$，$g(4)=2\ln2-2$，$g(1)-g(4)=\dfrac{3}{4}-2\ln2=\dfrac{1}{4}(3-4\ln4)<0$，

$\therefore g(1)<g(4)$

$\therefore b\in\left(\ln2-2,-\dfrac{5}{4}\right]$.

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}+a(x-\ln x)$.(e 为自然对数的底数)

(Ⅰ) 当 $a>0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上有三个不同的极值点，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (Ⅰ) 单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$　　(Ⅱ) $a\in(-2\sqrt{e},-e)$

【解析】 (Ⅰ) 易知，函数的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(e^x+ax)(x-1)}{x^2}$，

当 $a>0$ 时，对于 $\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x+ax>0$ 恒成立，

所以 若 $x>1$，$f'(x)>0$，若 $0<x<1$，$f'(x)<0$，

所以单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$；

(Ⅱ) 由条件可知 $f'(x)=0$ 在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上有三个不同的根，

即 $e^x+ax=0$ 在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 有两个不同的根，

令 $g(x)=a=-\dfrac{e^x}{x}$，$g'(x)=-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

$x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时单调递增，$x\in(1,2)$ 时单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=-e$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{e}$，$g(2)=-\dfrac{1}{2}e^2$，

$\because -2\sqrt{e}-\left(-\dfrac{1}{2}e^2\right)>0$，

$\therefore -2\sqrt{e}<a<-e$.

13. 已知函数 $f(x)=e^x+ax-a$，$g(x)=2xe^x$.

(Ⅰ) 讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 若不等式 $f(x)>g(x)$ 有唯一正整数解，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) ①当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

②当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增；在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减

(2) $\left(3e^2,\dfrac{5e^3}{2}\right]$

【解析】 (Ⅰ) $f'(x)=e^x+a$

①当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

②当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(-a)$.

此时，当 $x\in(\ln(-a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-\infty,\ln(-a))$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

(Ⅱ) 由 $f(x)>g(x)$ 得：$a(x-1)>e^x(2x-1)$

当 $x=1$ 时，不等式显然不成立，又 x 为正整数，

所以 $x>1$，$a>\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$，

记 $\varphi(x)=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x x(2x-3)}{(x-1)^2}$，

$\therefore \varphi(x)$ 在区间 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

且 $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}<a$，所以 $\begin{cases}\varphi(2)<a\\ \varphi(3)\geqslant a\end{cases}$，

解得 $3e^2<a\leqslant\dfrac{5e^3}{2}$，

综上所述，a 的取值范围为：$\left(3e^2,\dfrac{5e^3}{2}\right]$

14. 已知函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $a\in(0,2)$，对于任意 x_1，$x_2\in[-4,0]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<4e^{-2}+me^a$ 恒成立，求 m 的取值范围．

【答案】 (1) ①当 $a<-2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$ 上单调递增；在 $(a,-2)$ 上函数单调递减；

②当 $a=-2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a>-2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减；

(2) $m>\dfrac{1+e^2}{e^3}$

【解析】 (1) 函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$. 可得 $f'(x)=(x+2)(x-a)e^x$

①若 $a<-2$ 时，$x\in(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$ 时，$(x+2)(x-a)e^x>0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上，$(x+2)(x-a)e^x<0$，函数是单调递减；

② $a=-2$ 时，$(x+2)(x-a)e^x\geqslant 0$，恒成立，则 $(-\infty,+\infty)$ 在上单调递增；

③若 $a>-2$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(a,+\infty)$ 上，$(x+2)(x-a)e^x>0$，函数是单调递增，

在 $(-2,a)$ 上，$(x+2)(x-a)e^x<0$，函数是单调递减；

(2) 由 (1) 知，当 $a\in(0,2)$ 时，$f(x)$ 在 $(-4,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,0)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=(a+4)e^{-2}$，$f(-4)=(3a+16)e^{-4}>-a=f(0)$，

故 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}=|f(-2)-f(0)|=(a+4)e^{-2}+a=a(e^{-2}+1)+4e^{-2}$，

$|f(x_1)-f(x_2)|<4e^{-2}+me^a$ 恒成立，即 $a(e^{-2}+1)+4e^{-2}<4e^{-2}+me^a$ 恒成立

即 $m>\dfrac{a}{e^a}(e^{-2}+1)$ 恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，$x\in(0,2)$，可得 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，函数是增函数，$x\in(1,2)$ 时，函数是减函数，

易知 $g(x)$ 在其定义域上有最大值 $g(1)=\dfrac{1}{e}$，

所以 $m>\dfrac{1+e^2}{e^3}$.

15. 已知函数 $f(x)=x-ae^x+b$，其中 a，$b\in R$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $a=1$，$k\in R$，若存在 $b\in[0,2]$，对于任意的实数 $x\in[0,1]$，恒有 $f(x)\geqslant ke^x-xe^x-1$ 成立，求 k

的最大值；.

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

(2) k 取得最大值为 $\frac{4}{\mathrm{e}}$.

【解析】 (1) 由题意得，$f(x)=1-ae^{x}$

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，故函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $1-ae^{x}=0$, 得 $x=\ln\frac{1}{a}$,

所以函数在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

(2) 不等式 $f(x)\geqslant ke^{x}-xe^{x}-1\Leftrightarrow k\leqslant \mathrm{e}^{-x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+x+b+1]$

记 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+b+1]$, $x\in[1,\mathrm{e}]$,

则 $g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 其中 $f(x)=x-\mathrm{e}^{x}+b$

由 (1) 知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(0)=b-1$,

1° 若 $0<b<1$, 则 $f(0)=b-1\leqslant 0$, $g'(x)\geqslant 0$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

$\therefore k\leqslant g_{\min}(x)=g(0)=b$,

$\therefore k\leqslant b\leqslant 1$.

2° 若 $\begin{cases}f(0)>0\\f(1)\geqslant 0\end{cases}$, 即 $b\geqslant \mathrm{e}-1$ 时，$g'(x)\leqslant 0$,

$\therefore g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，

$\therefore k\leqslant g_{\min}(x)=g(1)=\frac{b+2}{\mathrm{e}}$,

$\therefore k\leqslant\frac{4}{\mathrm{e}}$;

3° 当 $1<b<\mathrm{e}-1$ 时，此时 $f(0)f(1)<0$ 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内递减，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 内有唯一零点，记为 x_0,

$\therefore g(x)$ 在区间 $[0,x_0]$ 上单调递减，在区间 $[x_0,1]$ 上单调递增，

$\therefore k\leqslant g(x_0)$, $b=\mathrm{e}^{x_0}-x_0$

$\therefore k\leqslant x_0+\mathrm{e}^{-x_0}$ 令 $y=x_0+\mathrm{e}^{-x_0}$, $x_0\in(0,1]$,

$\therefore y'=1-\mathrm{e}^{-x_0}$ $\therefore k<1+\frac{1}{\mathrm{e},}$

综上，当 $b=2$ 时，k 取得最大值为 $\frac{4}{\mathrm{e}}$.

16. 已知函数 $f(x)=\ln x-x+a+1$. 若存在 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 $[0,+\infty)$

【解析】 存在 $x\in(0,+\infty)$，使得不等式 $f(x)\geqslant 0$ 成立，

即为 $a\geqslant x-\ln x-1$ 的最小值，

令 $m(x)=x-\ln x-1$, $(x>0)$,

则 $m'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当 $x\in(0,1)$ 时，$m'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，

$\therefore m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $x=1$ 为 $m(x)$ 的极小值点，且为最小值点

而 $m(1)=0$，$\therefore a\geqslant 0$.

故实数 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

17. 已知函数 $f(x)=x^2-(a+2)x+a\ln x$，$a\in R$

(I) 若 $a=-2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(II) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的单调性；

(III) 若存在 $x\in[1,\mathrm{e}]$，使得 $f(x)\leqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1)$y=1$

(2) 当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调增；

当 $2<a<2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 上单调减；在 $\left(\frac{a}{2},\mathrm{e}\right)$ 上单调增；

当 $a\geqslant 2\mathrm{e}$ 时 ,$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调减；

(3)$[-1,+\infty)$

【解析】 (Ⅰ)$a=-2$ 时，$f(x)=x^2-2\ln x$，

$\therefore f'(x)=2x-\frac{2}{x}$，$\therefore f'(1)=0$，

$\because f(1)=1$ $\therefore$ 所求切线方程为 $y=1$，

(Ⅱ)$f'(x)=2x-(a+2)+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$，$x\in[1,\mathrm{e}]$

当即 $a\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，此时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调增；

当 $1<\frac{a}{2}<\mathrm{e}$ 即 $2<a<2\mathrm{e}$ 时，$x\in\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 上单调减；

$x\in\left(\frac{a}{2},\mathrm{e}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\mathrm{e}\right)$ 上单调增；

当 $\frac{a}{2}\geqslant\mathrm{e}$ 即 $a\geqslant 2\mathrm{e}$ 时 $x\in[1,\mathrm{e}]$，$f'(x)\leqslant 0$，此时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调减；

(Ⅲ) 方法一：当 $a\leqslant 2$ 时，$\because f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-a-1$，$\therefore -1\leqslant a\leqslant 2$

当 $2<a<2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 上单调减，在 $\left(\frac{a}{2},\mathrm{e}\right)$ 上单调增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}-a+a\ln\frac{a}{2}=a\left(\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{4}-1\right)$，

$\because 2<a<2\mathrm{e}$，$\therefore 0<\ln\frac{a}{2}<1$，$\frac{3}{2}<\frac{a}{4}+1<\frac{\mathrm{e}}{2}+1$，

$\therefore f\left(\frac{a}{2}\right)=a\left(\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{4}-1\right)<0$，

$\therefore 2<a<2\mathrm{e}$，

当 $a\geqslant 2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调减；

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-(a+2)\mathrm{e}+a$，

$\because a\geqslant 2\mathrm{e}>\frac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，$\therefore f(\mathrm{e})<0$，$\therefore a\geqslant 2\mathrm{e}$

综上，$a\geqslant -1$；

方法二：不等式 $f(x)\leqslant 0$，可化为 $a(x-\ln x)\geqslant x^2-2x$，

$\because x\in[1,\mathrm{e}]$，$\therefore \ln x\leqslant 1\leqslant x$ 且等号不能同时取，

$\therefore \ln x<x$，即 $x-\ln x>0$

因而 $a\geqslant\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}(x\in[1,\mathrm{e}])$

令 $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}(x\in[1,\mathrm{e}])$，又 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

当 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 时，$x-1\geqslant 0$，$\ln x\leqslant 1$，$x+2-2\ln x>0$

从而 $g'(x)\geqslant 0$，（仅当 $x=1$ 时取等号），$\therefore g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上为增函数，

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=-1$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $[-1,+\infty)$

专题13:数形结合法

1. 已知不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 在 $x\in(1,2)$ 上恒成立,则实数 a 的取值范围是 ___________ .

【答案】 $1<a\leqslant 2$

【解析】 思路:本题难于进行参变分离,考虑数形结合解决,先作出 $y=(x-1)^2$ 的图像,观察图像可得:若要使不等式成立,则 $y=\log_a x$ 的图像应在 $y=(x-1)^2$ 的上方,所以应为单增的对数函数,即 $a>1$,另一方面,观察图像可得:若要保证在 $x\in(1,2)$ 时不等式成立,只需保证在 $x=2$ 时,$(x-1)^2<\log_a x$ 即可,代入 $x=2$ 可得:$1\leqslant\log_a 2\Rightarrow a\leqslant 2$,综上可得:$1<a\leqslant 2$

2. 若不等式 $\log_a x>\sin 2x(a>0,a\neq 1)$ 对于任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 都成立,则实数 a 的取值范围是 ___________ .

【答案】 $a\in\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

【解析】 思路:本题选择数形结合,可先作出 $y=\sin 2x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的图像,a 扮演的角色为对数的底数,决定函数的增减,根据不等关系可得 $0<a<1$,

观察图像进一步可得只需 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$\log_a x\geqslant\sin 2x$,

即 $\log_a\frac{\pi}{4}>\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow a>\frac{\pi}{4}$,所以 $a\in\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

3. 若不等式 $x+|x-2c|>1$ 对任意 $x\in R$ 恒成立,求 c 的取值范围 ___________ .

【答案】 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 思路:恒成立不等式变形为 $|x-2c|>1-x$,

即 $y=|x-2c|$ 的图像在 $y=1-x$ 图像的上方即可,

先作出 $y=1-x$ 的图像,对于 $y=|x-2c|$,可看作 $y=|x|$ 经过平移得到,

而平移的距离与 c 的取值有关 . 通过观察图像,可得只需 $2c>1$,解得:$c>\frac{1}{2}$

4. 若 $|p|\leqslant 2$, 不等式 $x^2+px+1>2p+x$ 恒成立 , 则 x 的取值范围是 _________.

【答案】 $x<-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $x>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

【解析】 思路:本题中已知 p 的范围求 x 的范围,故构造函数时可看作关于 p 的函数,恒成立不等式变形为 $(x-2)p+x^2-x+1>0$, 设 $f(x)=(x-2)p+x^2-x+1(-2\leqslant p\leqslant 2)$, 即关于 p 的一次函数,由图像可得:无论直线方向如何,若要 $f(x)>0$,只需在端点处函数值均大于 0 即可,即 $\begin{cases}f(2)>0\\f(-2)>0\end{cases}$, 解得:$x<-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $x>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

5. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$,若对任意的 $x\in[m,m+1]$,都有 $f(x)<0$ 成立,则实数 m 的取值范围是 ___________________.

【答案】 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

【解析】 思路:恒成立的不等式为 $x^2+mx-1<0$,如果进行参变分离,虽可解决问题,但是因为 x 所在区间含参,m 的取值将决定分离时不等号方向是否改变,需要进行分类讨论,较为麻烦 . 换一个角度观察到 $f(x)$ 是开口向上的抛物线,若要 $f(x)<0$,只需端点处函数值小于零即可 (无论对称轴是否在

区间内),所以只需 $\begin{cases} f(m)=2m^2-1<0 \\ f(m+1)=2m^2+3m<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3}{2}<m<0 \end{cases}$,解得 $m\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

6. 已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$,设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A,若 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是________________.

【答案】 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<0$

【解析】 思路:首先理解条件 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$,即 $\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 时,不等式 $f(x+a)<f(x)$ 恒成立,

可判断出函数 $f(x)$ 为奇函数,故先作出 $x>0$ 的图像,即 $y=ax^2+x$,

参数 a 的符号决定开口方向与对称轴.

故分类讨论:当 $a>0$ 时,$y=ax^2+x$ 单调递增,且 $f(x+a)$ 为 $f(x)$ 向左平移 a 个单位,

观察图像可得不存在满足条件的 a,

当 $a<0$ 时,$y=ax^2+x$ 开口向下,且 $f(x+a)$ 为 $f(x)$ 向右平移 $|a|$ 个单位,

观察可得只需 $x=\frac{1}{2},x=-\frac{1}{2}$,$f(x+a)<f(x)$,

即可保证 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,$f(x+a)$ 的图像始终在 $f(x)$ 的下方.

$\therefore \begin{cases} f\left(a+\frac{1}{2}\right)<f(x) \\ f\left(a-\frac{1}{2}\right)<f(x) \end{cases}$ 解得:$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<0$;

当 $a=0$ 时,代入验证不符题意.

7. 已知函数 $f(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax+\ln x$. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,不等式 $f(x)<0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是____________.

【答案】 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

【解析】 思路:所证不等式可转化为 $\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax<-\ln x$,作出 $y=-\ln x$ 的图像,

当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时 a 的取值决定 $y=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax$ 的开口,

观察可得 $a-\frac{1}{2}<0$,且 $x=1$ 时,$\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax\leqslant-\ln x$ 即可,

$\therefore \begin{cases} a-\frac{1}{2}<0 \\ a-\frac{1}{2}-2a\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant a<\frac{1}{2}$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,不等式为 $\ln x-x<0$,可证明其成立

8. 设 $a\in R$,若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1][x^2-ax-1]\geqslant 0$,则 $a=$____________.

【答案】 答案:$a=\frac{3}{2}$

【解析】 思路:本题如果考虑常规思路,让两个因式同号去解 a 的值(或范围),则不可避免较复杂的分类讨论,所以可以考虑利用图像辅助解决.

将两个因式设为函数:$f(x)=(a-1)x-1$,$g(x)=x^2-ax-1$,

则在图像上要求这两个函数同时在 x 轴的上方与下方.

这两个函数在图像上有公共定点 $(0,-1)$，且 $g(x)$ 为开口向上的抛物线．

所以 $f(x)$ 的斜率必大于 0，即 $a>1$，

通过观察图像可得：$f(x)$ 与 $g(x)$ 与 x 轴的交点必须重合．

$f(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a-1}$，所以 $g\left(\frac{1}{a-1}\right)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-a\cdot\frac{1}{a-1}-1=0$，

解得：$a=0$（舍）或 $a=\frac{3}{2}$

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3, & x\leqslant 0\\ -x^2-2x+3, & x>0\end{cases}$，不等式 $f(x+a)>f(2a-x)$ 在 $[a,a+1]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是　　　　(　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(0,2)$　　D. $(-2,0)$

【答案】 A

【解析】 思路：本题有两个难点，一是所给区间含参，一个是 $(x+a)$ 与 $(2a-x)$ 很难确定其范围，从而 $f(x+a)$ 与 $f(2a-x)$ 无法化成解析式．但由于所给不等式可视为两个函数值的大小，且分段函数图像易于作出，所以考虑作出 $f(x)$ 图像，看是否存在解题的突破口．

通过图像可以看出虽然 $f(x)$ 是分段函数，但是图像连续且单调递减．

所以 $f(x)$ 是 R 上的减函数．那么无论 $(x+a)$ 与 $(2a-x)$ 位于哪个区间，

由 $f(x+a)>f(2a-x)$ 及单调性均可得到：

只需 $x+a<2a-x\Rightarrow a>2x$，所以 $a>(2x)_{\max}=2(a+1)$，解得 $a<-2$

答案：A

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$，若 $\forall x\in R$，$f(x-1)\leqslant f(x)$，则实数 a 的取值范围是____________________．

【答案】 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$

【解析】 思路：$f(x)$ 是奇函数且在 $x>0$ 时是分段函数（以 $a^2,2a^2$ 为界），且形式比较复杂，恒成立的不等式 $f(x-1)\leqslant f(x)$ 较难转化为具体的不等式，所以不优先考虑参变分离或是最值法．

从数形结合的角度来看，一方面 $f(x)$ 的图像比较容易作出，另一方面 $f(x-1)$ 可看作是 $f(x)$ 的图像向右平移一个单位所得，相当于也有具体的图像．所以考虑利用图像寻找 a 满足的条件．

先将 $f(x)$ 写为分段函数形式：$f(x)=\begin{cases}x-3a^2,x\geqslant 2a^2\\ -a^2,a^2\leqslant x<2a^2\\ -x,0<x<a^2\end{cases}$，作出正半轴图像后再根据奇函数特点，关于原点对称作出 x 负半轴图像．

$f(x-1)\leqslant f(x)$ 恒成立，意味着 $f(x)$ 的图像向右平移一个单位后，其图像恒在 $f(x)$ 的下方．

通过观察可得在平移一个单位至少要平移 $6a^2$ 个长度，

所以可得：$6a^2\leqslant 1\Rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{6}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{6}$

专题14：构造函数

1. 已知函数$f(x)=mx-a\ln x-m$，$g(x)=\dfrac{ex}{e^x}$，其中m，a均为实数．

(1) 求$g(x)$的极值；

(2) 设$m=1$，$a<0$，若对任意的x_1，$x_2\in[3,4]$ $(x_1\neq x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\dfrac{1}{g(x_2)}-\dfrac{1}{g(x_1)}\right|$恒成立，求$a$的最小值；

(3) 设$a=2$，若对任意给定的$x_0\in(0,e]$，在区间$(0,e]$上总存在t_1、$t_2(t_1\neq t_2)$，使得$f(t_1)=f(t_2)=g(x_0)$成立，求m的取值范围．

【答案】 (1)$g(x)$极大值是1，无极小值;(2)a的最小值为：$3-\dfrac{2}{3}e^2$;(3)$\left[\dfrac{3}{e-1},+\infty\right)$

【解析】 (1)$g'(x)=\dfrac{e(1-x)}{e^x}$，令$\dfrac{e(1-x)}{e^x}=0$，解得$x=1$，

$\because e^x>0$，$\therefore x\in(-\infty,1)$时，$g'(x)>0$；$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

根据极大值的定义知：$g(x)$极大值是$g(1)=1$，无极小值．

(2) 当$m=1$，$a<0$时，$f(x)=x-a\ln x-1$，所以在$[3,4]$上$f'(x)=\dfrac{x-a}{x}>0$，

所以$f(x)$在$[3,4]$上是增函数．

设$h(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{e^x}{ex}$，所以在$[3,4]$上$h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{ex^2}>0$，所以$h(x)$在$[3,4]$上为增函数．

设$x_2>x_1$，则$|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\dfrac{1}{g(x_2)}-\dfrac{1}{g(x_1)}\right|$恒成立，变成$f(x_2)-f(x_1)<\dfrac{1}{g(x_2)}-\dfrac{1}{g(x_1)}$恒成立，

即：$f(x_2)-f(x_1)<h(x_2)-h(x_1)$恒成立，即：$f(x_2)-h(x_2)<f(x_1)-h(x_1)$.

设$u(x)=f(x)-h(x)=x-a\ln x-1-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{e^x}{x}$，则$u(x)$在$[3,4]$上为减函数．

$\therefore u'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\leqslant 0$在$[3,4]$上恒成立．

$\therefore a\geqslant x-e^{x-1}+\dfrac{e^{x-1}}{x}$恒成立．设$v(x)=x--e^{x-1}+\dfrac{e^{x-1}}{x}$，

所以$v'(x)=1-e^{x-1}+\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}=1-e^{x-1}\left[\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]$，

因为$x\in[3,4]$，所以$e^{x-1}\left[\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]>\dfrac{3}{4}e^2$，所以$v'(x)<0$，所以$v(x)$为减函数．

$\therefore v(x)$在$[3,4]$上的最大值为$v(3)=3-\dfrac{2}{3}e^2$.

$\therefore a\geqslant 3-\dfrac{2}{3}e^2$，$\therefore a$的最小值为：$3-\dfrac{2}{3}e^2$.

(3) 由(1)知$g(x)$在$(0,1]$上单调递增，在$(1,e]$单调单调递减，

又$g(0)=0$，$g(e)=\dfrac{e^2}{e^e}$，所以$g(x)$的值域是$(0,1]$.

$\because f(x)=mx-2\ln x-m$；

$\therefore$当$m=0$时，$f(x)=-2\ln x$，在$(0,e]$为减函数，

由题意知，$f(x)$在$(0,e]$不是单调函数；故$m=0$不合题意；

当$m\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{m\left(x-\dfrac{2}{m}\right)}{x}$，由于$f(x)$在$(0,e]$上不单调，所以$0<\dfrac{2}{m}<e$，即$m>\dfrac{2}{e}$；①

此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{m}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{2}{m},\mathrm{e}\right]$ 递增；

$\therefore f(\mathrm{e})\geqslant 1$，即 $me-2-m\geqslant 1$，解得 $m\geqslant\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}$；②

所以由①②，得 $m\geqslant\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}$；

$\because 1\in(0,\mathrm{e}]$，$\therefore f\left(\dfrac{2}{m}\right)\leqslant f(1)=0$ 满足条件 .

下证存在 $t\in\left(0,\dfrac{2}{m}\right]$ 使得 $f(t)\geqslant 1$；

取 $t=\mathrm{e}^{-m}$，先证 $\mathrm{e}^{-m}<\dfrac{2}{m}$，即证 $2\mathrm{e}^{m}-m>0$；③

设 $w(x)=2\mathrm{e}^{x}-x$，则 $w'(x)=2\mathrm{e}^{x}-1>0$ 在 $\left[\dfrac{3}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$ 时恒成立；

$\therefore w(x)$ 在 $\left[\dfrac{3}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$ 上递增，$\therefore w(x)\geqslant w\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}\right)>0$，所以③成立；

再证 $f(\mathrm{e}^{-m})\geqslant 1$；

$\because f(\mathrm{e}^{-m})=me^{-m}+m>m\geqslant\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}>1$，$\therefore m\geqslant\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}$ 时，命题成立 .

所以 m 的取值范围是：$\left[\dfrac{3}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$.

2. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\ln(x+a)$.

(1) 当 $a=1$ 时：

①求 $f(x)$ 的图象在点 $(0,1)$ 处的切线方程；②当 $x\geqslant 0$ 时，求证：$f(x)\geqslant(x+1)^2+x$.

(2) 若存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使得 $f(x_0)<2\ln(x_0+a)+x_0^2$ 成立，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) ① $y=3x+1$；②见解析；(2) $(\mathrm{e},+\infty)$.

【解析】 (1)$a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\ln(x+1)$，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{x+1}$，

①可得 $f(0)=1$，$f'(0)=2+1=3$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3x+1$；

②证明：设 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+\ln(x+1)-(x+1)^2-x(x\geqslant 0)$，

$F'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{x+1}-2(x+1)-1$

$F''(x)=4\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-2=\left[\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]+2(\mathrm{e}^{2x}-1)+\mathrm{e}^{2x}>0,(x\geqslant 0)$，

所以，$F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，所以 $F'(x)\geqslant F'(0)=0$，

所以，$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$，

即有当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant(x+1)^2+x$；

(2) 存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使得 $f(x0)<2\ln(x0+a)+x02$ 成立

$\Leftrightarrow$ 存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使得 $\mathrm{e}2x0-\ln(x_0+a)-x_0^2<0$，

设 $u(x)=\mathrm{e}^{2x}-\ln(x+a)-x^2$，

$u'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{x+a}-2x$，$u''(x)=4\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{(x+a)^2}-2>0$，

可得 $u'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增，即有 $u'(x)\geqslant u'(0)=2-\dfrac{1}{a}$，

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$u'(0)=2-\dfrac{1}{a}\geqslant 0$，可得 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增，

则 $u(x)_{\min}=u(0)=1-\ln a<0$，解得 $a>\mathrm{e}$；

②当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$\ln(x+a)<\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$，设 $h(x)=x-\frac{1}{2}-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$，$(x>0)$，

$h'(x)=1-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$，另 $h'(x)>0$ 可得 $x>\frac{1}{2}$，$h'(x)<0$ 可得 $0<x<\frac{1}{2}$，

则 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增．

则 $h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

设 $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-x^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)$，$(x>0)$，$g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2x-1$，$g''(x)=4\mathrm{e}^{2x}-2>4-2>0$，

可得 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，即有 $g'(x)>g'(0)=1>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

则 $g(x)>g(0)>0$，

则 $\mathrm{e}^{2x}-x^2>x-\frac{1}{2}>\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)>\ln(x+a)$，

则当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>2\ln(x+a)+x^2$ 恒成立，不合题意．

综上可得，a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

3. 已知函数 $f(x)=2x-\frac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ) 当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 设 $g(x)=f(x)-x+2a\ln x$，且 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，其中 $x_1<x_2$，若 $g(x_1)-g(x_2)>t$ 恒成立，求 t 的取值范围．

【答案】 (Ⅰ)$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.(Ⅱ)$t\leqslant 0$.

【解析】 (Ⅰ) 易求 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$，$a=3$，

$f(x)=2x-\frac{1}{x}-3\ln x$，

$\therefore f'(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x^2}$，

$\therefore f'(x)>0$，解得：$0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$，$f'(x)<0$ 解得：$\frac{1}{2}<x<1$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(Ⅱ) 由题意知 $g(x)=x-\frac{1}{x}+a\ln x(x\in(0,+\infty))$，

$\therefore g'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{x^2+ax+1}{x^2}$，

令 $g'(x)=0$，则 $x^2+ax+1=0$，由 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，

$\begin{cases}a^2-4>0\\x_1+x_2=-a\\x_1x_2=1>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a<-2\\x_2=\dfrac{1}{x_1}\\a=-(x_1+x_2)\end{cases}$，

又因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1\in(0,1)$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)=g(x_1)-g\left(\frac{1}{x_1}\right)$

$=x_1-\frac{1}{x_1}+a\ln x_1-\left(\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln\frac{1}{x_1}\right)$

$=2\left(x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)+2\ln x_1$

$=2\left(x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)-2\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)\ln x_1$,

令 $h(x)=2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$, $x\in(0,1)$,

$\therefore h'(x)=2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]$

$=\dfrac{2(1+x)(1-x)\ln x}{x^2}$,

因为 $x\in(0,1)$, $\therefore h'(x)<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,1$ 单调递减，故 $h(x)>h(1)=0$,

综上所述 $t\leqslant 0$.

4. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$($a$ 为常数) 有两个极值点 .

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2，若不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求 λ 的最小值 .

【答案】 (1)$a\in(4,+\infty)$;　　　(2)$\ln 4-3$

【解析】 (1) 由题设知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{x}$ 且 $f'(x)=0$ 有两个不同的正根，即 $x^2-ax+a=0$ 两个不同的正根 x_1, x_2, $(x_1<x_2)$

则 $\begin{cases}\triangle=a^2-4a>0\\ a>0\\ a>0\end{cases}$, $\therefore a>4$,

又当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1, x_2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_2, +\infty)$ 时，$f'(x)>0$,

$\therefore x_1$, x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，符合题意，$\therefore a>4$;

(2)$f(x_1)+f(x_2)=a\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2-ax_1+a\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2-ax_2=a\left(\ln a-\dfrac{1}{2}a-1\right)$,

$\therefore \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1$,

令 $y=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1$，则 $y'=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}$,

$\because a>4$, $\therefore y'<0$,

$\therefore y=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore y<\ln 4-3$,

$\because$ 不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，$x_1+x_2>0$,

$\therefore$ 是 λ 的最小值 $\ln 4-3$.

5. 记 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值 . 如 $\max\{3, \sqrt{10}\}=\sqrt{10}$. 已知函数 $f(x)=\max\{x^2-1, 2\ln x\}$, $g(x)=\max\{x+\ln x, ax^2+x\}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ 上的值域；

(2) 试探讨是否存在实数 a，使得 $g(x)<\dfrac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由 .

【答案】 (1)$\left[-\frac{3}{4},3\right]$; (2)$\left(\frac{\ln2-1}{4},0\right]$

【解析】 (1) 由题意设 $F(x)=x^2-1-2\ln x$,则 $F'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$,

所以 $x>1$ 时,$F(x)$ 递增,$0<x<1$ 时 $F(x)$ 递减,

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=0$,所以 $F(x)\geqslant0$ 即 $x^2-1>2\ln x$,

所以 $f(x)=x^2-1$,其在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值为 $x=2$ 时函数值 3,$x=\frac{1}{2}$ 取最小值为 $-\frac{3}{4}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的值域 $\left[-\frac{3}{4},3\right]$;

(2) ①当 $a\leqslant0$ 时,因为 $x\in(1,+\infty)$,所以 $x+\ln x-(ax^2+x)=\ln x-ax^2>0$,

所以 $x+\ln x>ax^2+x$,所以 $g(x)=x+\ln x$,当 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,

则 $\ln x-\frac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,设 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$,

令 $h'(x)>0$ 得 $1<x<2$,$h(x)$ 递增,令 $h'(x)<0$ 得 $x>2$,$h(x)$ 递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(2)=\ln2-1$,所以 $a>\frac{\ln2-1}{4}$,又 $a\leqslant0$,所以 $a\in\left(\frac{\ln2-1}{4},0\right]$.

②当 $a>0$ 时,由①知 $x+\ln x<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,

若 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,则 $ax^2+x<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,

即 $2ax^2-x-8a<0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,显然不成立,

即 $a>0$ 时,不满足 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立;

综上,存在实数 a 使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$,

对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,a 的取值范围是 $\left(\frac{\ln2-1}{4},0\right]$.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=a\ln x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $6x-2y-5=0$,求实数 a 的值;

(2) 设 $h(x)=f(x)+g(x)$,若对任意两个不等的正数 x_1, x_2,都有 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1)$a=-2$, (2)$[1,+\infty)$

【解析】 (1)$y=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$ 的导数为 $y'=x-\frac{a}{x}$,

曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $k=1-a$,

由切线的方程为 $6x-2y-5=0$,可得 $1-a=3$,

解得 $a=-2$;

(2)$h(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$,

对任意两个不等的正数 x_1, x_2,都有 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立,即 $\frac{[h(x_1)-2x_1]-[h(x_2)-2x_2]}{x_1-x_2}>0$,

令 $m(x)=h(x)-2x$,则 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增,

故 $m'(x)=h'(x)-2=x+\frac{a}{x}-2\geqslant0$ 恒成立,即 $a\geqslant x(2-x)$ 恒成立,

因为 $x(2-x)=-(x-1)^2+1\leqslant 1$，所以 $a\geqslant 1$，

即 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

7. 已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+x$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 证明当 $a\geqslant 2$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)<\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+ax-1$ 恒成立；

(Ⅲ) 若正实数 x_1，x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$，证明 $x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【答案】 (Ⅰ) $f(x)$ 的单调减区间为 $(1,+\infty)$，函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,1)$;

(Ⅱ)、(Ⅲ) 详见解析

【解析】 (Ⅰ) $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}(x>0)$，

由 $f'(x)<0$，得 $2x^2-x-1>0$，又 $x>0$，所以 $x>1$.

所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(1,+\infty)$，函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,1)$.

(Ⅱ) 令 $g(x)=f(x)-\left[\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+ax-1\right]=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x+1$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-ax+(1-a)=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}=-\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x+1)}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$. 因为 $a\geqslant 2$，

所以当 $x=\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$.

因此函数 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 是增函数，在 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是减函数 .

故函数 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{2}a\times\left(\frac{1}{a}\right)^2+(1-a)\times\left(\frac{1}{a}\right)+1=\frac{1}{2a}-\ln a$.

令 $h(a)=\left(\frac{1}{2a}\right)-\ln a$，因为 $h(2)=\frac{1}{4}-\ln 2<0$，

又因为 $h(a)$ 在 $a\in(0,+\infty)$ 是减函数 .

所以当 $a\geqslant 2$ 时，$h(a)<0$，

即对于任意正数 x 总有 $g(x)<0$.

所以关于 x 的不等式 $f(x)<\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+ax-1$ 恒成立 .

(Ⅲ) 由 $f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$，

即 $\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$，

从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2-\ln(x_1\cdot x_2)$.

令 $t=x_1\cdot x_2$，则由 $\varphi(t)=t-\ln t$ 得，$\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}$.

可知，$\varphi(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增 .

所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=1$，所以 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant 1$，

又 $x_1+x_2>0$，因此 $x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 成立 .

8. 设 $a\in Z$，已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(Ⅰ) 求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

（Ⅲ）求证：存在大于 0 的常数 A，使得对于任意的正整数 p,q，且 $\frac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，满足 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\frac{1}{Aq^4}$.

【答案】（Ⅰ）$g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$

（Ⅱ）（Ⅲ）详见解析

【解析】（Ⅰ）由 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$，可得 $g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，

进而可得 $g'(x)=24x^2+18x-6$. 令 $g'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=\frac{1}{4}$.

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	↗	↘	↗

所以，$g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$.

（Ⅱ）证明：由 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，得 $h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，

$h(x_0)=g(x_0)(m-x_0)-f(m)$.

令函数 $H_1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则 $H'_1(x)=g'(x)(x-x_0)$.

由（Ⅰ）知，当 $x\in[1,2]$ 时，$g'(x)>0$，

故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H'_1(x)<0$，$H_1(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H'_1(x)>0$，$H_1(x)$ 单调递增 .

因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_1(x)>H_1(x_0)=-f(x_0)=0$，可得 $H_1(m)>0$ 即 $h(m)>0$，

令函数 $H_2(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则 $H'_2(x)=g(x_0)-g(x)$.

由（Ⅰ）知，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H'_2(x)>0$，$H_2(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H'_2(x)<0$，$H_2(x)$ 单调递减 .

因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_2(x)<H_2(x_0)=0$，

可得得 $H_2(m)<0$，即 $h(x_0)<0$，.

所以，$h(m)h(x_0)<0$.

（Ⅲ）对于任意的正整数 p,q，且 $\frac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，

令 $m=\frac{p}{q}$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$.

由（Ⅱ）知，当 $m\in[1,x_0)$ 时，$h(x)$ 在区间 (m,x_0) 内有零点；

当 $m\in(x_0,2]$ 时，$h(x)$ 在区间 (x_0,m) 内有零点 .

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个零点，不妨设为 x_1，

则 $h(x_1)=g(x_1)\left(\frac{p}{q}-x_0\right)-f\left(\frac{p}{q}\right)=0$.

由（Ⅰ）知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $0<g(1)<g(x_1)<g(2)$，

于是 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{g(x_1)}\right|\geqslant\frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{g(2)}=\frac{|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|}{g(2)q^4}$.

因为当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点，而 $\frac{p}{q}\neq x_0$，故 $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$.

又因为 p，q，a 均为整数，

所以 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|$ 是正整数，

从而 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|\geqslant 1$.

所以 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\frac{1}{g(2)q^4}$.

所以，只要取 $A=g(2)$，就有 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\frac{1}{Aq^4}$.

专题15：不等式放缩法

1. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a(x+1)\,(x\geqslant 1)$，$g(x)=(x-1)\ln x$，其中 e 为自然对数的底数．

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 若在 (1) 的条件下，当 a 取最大值时，求证：$f(x)\geqslant g(x)$.

【答案】 (1)$a\leqslant\frac{1}{2}$;(2) 详见解析

【解析】 (1) 法一：(分类讨论法). 因为 $x\geqslant 1$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a$.

①当 $a\leqslant 1$ 时，$\mathrm{e}^{x-1}\geqslant 1$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a\geqslant 0$，

故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1-2a\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

②当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1+\ln a$，

若 $x\in(1,1+\ln a)$，$f'(x)<0$；若 $x\in(1+\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,1+\ln a)$ 上单减，在 $(1+\ln a,+\infty)$ 上单增；

所以 $f(x)_{\min}=f(1+\ln a)=\mathrm{e}^{\ln a}-a(2+\ln a)\geqslant 0$，

解得 $0<a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，此时 a 无解，

综上可得 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

法二：(分离参数法).$f(x)\geqslant 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x+1}\geqslant a$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立．

令 $h(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{xe^{x-1}}{(x+1)^2}>0(x\geqslant 1)$，

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单增，

故 $h(x)_{\min}=h(1)=\frac{1}{2}$，所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

(2) 证明：由题意可知，$a=\frac{1}{2}$.

要证 $f(x)\geqslant g(x)\Leftrightarrow\mathrm{e}^{x-1}-\frac{x+1}{2}\geqslant(x-1)\ln x(x\geqslant 1)$，(*)

先证明：$x\geqslant 1$ 时，$\ln x\leqslant x-1$.

令 $h(x)=\ln x-x+1$, 则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单减，

所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$，所以 $\ln x\leqslant x-1$.

所以要证明 (*) 式成立，只需要证明 $\mathrm{e}^{x-1}-\frac{x+1}{2}\geqslant(x-1)^2(x\geqslant 1)$.(**) $\cdots$(8 分)

令 $k(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{x+1}{2}-(x-1)^2$，则 $k'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}-2(x-1)=\mathrm{e}^{x-1}-2x+\frac{3}{2}$，$k''(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2$，

令 $k''(x)=0\Rightarrow x=1+\ln 2$

又 $k''(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则在 $[1,1+\ln 2]$ 上，$k''(x)\leqslant 0$，

在 $[1+\ln 2,+\infty)$，$k''(x)>0$.

所以，$k'(x)$ 在 $[1,1+\ln 2]$ 上单减，在 $[1+\ln 2,+\infty)$ 上单增，

所以 $k'(x)\geqslant k'(1+\ln 2)=\frac{3}{2}-\ln 4=\ln\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{4}>0$，

所以 $k(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $k(x)\geqslant k(1)=0$.

所以 (**) 成立，也即是 (*) 式成立. 故 $f(x)\geqslant g(x)$.

2. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}$，$g(x)=x\ln x-x^{2}+(\mathrm{e}-1)x+1$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值：

(3) 证明：当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant f(x)$.

【答案】 (1)$a=1$，$b=\mathrm{e}-2$；(2) 1;(3) 详见解析

【解析】 (1) $\because f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}$，$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^{x}-2ax$，

$\therefore f'(1)=\mathrm{e}-2a=b$，$f(1)=\mathrm{e}-a=b+1$，

$\therefore a=1$，$b=\mathrm{e}-2$.

(2) 由 (1) 得：$f(x)=\mathrm{e}^{x}-x^{2}$，$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^{x}-2x$，$[f'(x)]'=\mathrm{e}^{x}-2$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 上递减，在 $(\ln2,+\infty)$ 上递增.

$\therefore f'(x)\geqslant f'(\ln2)=2-2\ln2>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 1.

(3) 证明：$\because f(0)=0$，由 (2) 得 $f(x)$ 过 $(1,\mathrm{e}-1)$

且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$，

故可猜测 $x>0$，$x\neq1$ 时，$f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$ 的上方，

下面证明当 $x>0$ 时，$f(x)>(\mathrm{e}-2)x+1$

设 $h(x)=f(x)-(\mathrm{e}-2)x-1$，$x>0$，$\therefore h'(x)=\mathrm{e}^{x}-2x-\mathrm{e}+2$，$[h'(x)]'=\mathrm{e}^{x}-2$，

由 (2) 知：$h'(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 上递减，在 $(\ln2,+\infty)$ 上递增，

$\because h'(0)=3->0$，$h'(1)=0$，$0<\ln2<1$，$\therefore h'(\ln2)<0$，

$\therefore$ 存在 $x_{0}\in(0,1)$，使得 $h'(x)=0$，

$\therefore x\in(0,x_{0})\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；$x\in(x_{0},1)$ 时，$h'(x)<0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,x_{0})$ 上递增，在 $(x_{0},1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

又 $h(0)=h(1)=0$，

$\therefore h(x)\geqslant0$ 当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

故 $\dfrac{\mathrm{e}^{x}+(\mathrm{e}-2)x-1}{x}\geqslant x$，$x>0$，

令 $\varphi(x)=\ln x+1-x$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，

$\therefore x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，$\therefore \varphi(x)\leqslant\varphi(1)=0$，

$\therefore \ln x+1-x\leqslant0$，即 $x\geqslant1+\ln x$.

$\therefore \dfrac{\mathrm{e}^{x}+(\mathrm{e}-2)x-1}{x}\geqslant x\geqslant1+\ln x$，

$\therefore \mathrm{e}^{x}+(2-\mathrm{e})x-1\geqslant x\ln x+x$，

即 $e^x+(1-e)x-x\ln x-1\geqslant 0$ 成立，

$\therefore x>0$ 时，$g(x)\leqslant f(x)\Leftrightarrow x\ln x-x^2+(e-1)x+1\leqslant e^x-x^2\Leftrightarrow e^x+(1-e)x-x\ln x-1\geqslant 0$，

综上所述，$x>0$ 时，$g(x)\leqslant f(x)$.

3. 已知函数 $f(x)=4e^{x-1}+ax^2$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求实数 a、b 的值；

(2)$x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，证明：曲线 $y=f(x)$ 的图象恒在切线 $y=bx+1$ 的上方；

(3) 证明不等式：$4xe^{x-1}-x^2-3x-2\ln x\geqslant 0$.

【答案】 (1)$a=-1$，$b=2$;(2)(3) 详见解析

【解析】 (1)$f'(x)=4e^{x-1}+2ax$，由曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx+1$，

由 $f'(1)=4+2a=b$，$f(1)=4+a=b+1$，

解得 $a=-1$，$b=2$；

(2) 由题意只需证：当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$4e^{x-1}-x^2>2x+1$ ，

设 $g(x)=4e^{x-1}-x^2-2x-1$，则 $g'(x)=4e^{x-1}-2x-2$，$g''(x)=4e^{x-1}-2$，

易知 $g''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；且 $g''(1)=2>0$，$g''(0)=\dfrac{4}{e}-2<0$，

$\therefore$ 必定存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g''(x_0)=0$，

则 $g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，其中 $g'(0)=\dfrac{4}{e}-2<0$，$g'(1)=0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=0$，即当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$g(x)>0$ 成立；

所以当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 的图象在切线 $y=bx+1$ 的上方；

(3) 要证：$4xe^{x-1}-x^3-3x-2\ln x\geqslant 0$，只需证 $4e^{x-1}-x^2-3-\dfrac{2\ln x}{x}\geqslant 0$，

由 (2) 知 $x>0$ 时，$4e^{x-1}-x^2\geqslant 2x+1$，

故只需证 $2x+1\geqslant 3+\dfrac{2\ln x}{x}$，即证 $x^2-x-\ln x\geqslant 0$，

设 $\varphi(x)=x^2-x-\ln x$，则 $\varphi'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore \varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$；

即不等式：$4xe^{x-1}-x^3-3x-2\ln x\geqslant 0$ 成立.

4. 已知 $f(x)=e^x-ax^2$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值；

(3) 证明：当 $x>0$ 时，$e^x+(1-e)x-x\ln x-1\geqslant 0$.

【答案】 (1)$a=1$，$b=e-2$; (2)$f(x)_{\max}=e-1$;(3) 详见解析.

【解析】 (1)$f'(x)=e^x-2ax$，

$\therefore f'(1)=e-2a=b$，$f(1)=e-a=b+1$，

解得：$a=1$，$b=e-2$；

(2) 由 (1) 得：$f(x)=e^x-x^2$，$f'(x)=e^x-2x$，$f''(x)=e^x-2$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 递增，

$\therefore f'(x)\geqslant f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 递增，

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\mathrm{e}-1$；

(3) $\because f(0)=1$，由 (2) 得 $f(x)$ 过 $(1,\mathrm{e}-1)$，

且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$，

故可猜测 $x>0$，$x\neq 1$ 时，$f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$ 的上方，

下面证明 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(\mathrm{e}-2)x+1$，

设 $g(x)=f(x)-(\mathrm{e}-2)x-1$，$x>0$，

$g'(x)=\mathrm{e}^x-2x-(\mathrm{e}-2)$，$g''(x)=\mathrm{e}^x-2$，

由 (2) 得：$g'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 递增，

$\because g'(0)=3-\mathrm{e}>0$，$g'(1)=0$，$0<\ln 2<1$，

$\therefore g'(\ln 2)<0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x)=0$，

$\therefore x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递增，在 $(x_0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

又 $g(0)=g(1)=0$，$\therefore g(x)\geqslant 0$ 当且仅当 $x=1$ 时取“=”，

故 $\dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\geqslant x$，$x>0$，

由 (2) 得：$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，故 $x\geqslant\ln(x+1)$，

$\therefore x-1\geqslant\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”，

$\therefore \dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\geqslant x\geqslant\ln x+1$，

即 $\dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\geqslant\ln x+1$，

$\therefore \mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1\geqslant x\ln x+x$，

即 $\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-x\ln x-1\geqslant 0$ 成立，

当且仅当 $x=1$ 时“=”成立．

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+2\ln x,a\in R$，已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值．

(1) 求实数 a 的值；

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$（其中 e 是自然对数的底数）时，证明：$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}-x)(\mathrm{e}+x-6)+4}\geqslant x^4$；

(3) 证明：对任意的 $n>1$，$n\in N^*$，不等式 $\ln\dfrac{2^n}{n!}<\dfrac{1}{12}n^3-\dfrac{5}{8}n^2+\dfrac{31}{24}n$ 恒成立．

【答案】 (1) $a=-3$；(2)(3) 详见解析．

【解析】 (1) 由题意函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+2\ln x,a\in R$，已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值，

所以 $f'(1)=0\therefore 1+a+2=0$ 解得：$a=-3$.

(2) $\because f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+2\ln x,a\in R$，$(x>0)$

$\therefore f'(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}(x>0)$，

由 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}>0$ 解得：$x>2$ 或 $0<x<1$，

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}<0$ 解得：$1<x<2$，

$\because x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)(2,\mathrm{e}).(2,\mathrm{e})$，单调的减区间为 $(1,2)$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 时，$f(x)$ 的极大值 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$，又 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}+2$，

$f(\mathrm{e})-f(1)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}-3)^2>0$

$\therefore$ 当 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 时，$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}+2$

$\therefore \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}+2\geqslant f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+2\ln x$

即：$\mathrm{e}^2-6\mathrm{e}+4\geqslant x^2-6x+4\ln x$

即：$\mathrm{e}^2-x^2+6x-6\mathrm{e}+4\geqslant 4\ln x\Rightarrow(\mathrm{e}-x)(\mathrm{e}+x-6)+4\geqslant 4\ln x$

$\therefore \mathrm{e}^{(\mathrm{e}-x)(\mathrm{e}+x-6)+4}\geqslant \mathrm{e}^{\ln x^4}$

$\therefore \mathrm{e}^{(\mathrm{e}-x)(\mathrm{e}+x-6)+4}\geqslant x^4$；

(3) $\because f'(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x}(x>1)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,2)$，单调递增区间为 $(2,\mathrm{e})$，

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最小值 $2\ln 2-4$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+2\ln x\geqslant 2\ln 2-4(x>1)$

即：$\dfrac{1}{2}x^2-3x+4\geqslant 2lb2-2\ln x(x>1)$

$\therefore \ln 2-\ln x\leqslant\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+2(x>1)$，

$\because \ln 2-\ln 2\leqslant\dfrac{1}{4}\times 2^2-\dfrac{3}{2}\times 2+2$

$\ln 2-\ln 3\leqslant\dfrac{1}{4}\times 3^2-\dfrac{3}{2}\times 3+2$

$\cdots$

$\ln 2-\ln n\leqslant\dfrac{1}{4}n^2-\dfrac{3}{2}n+2$

由于以上各式并不都能取等号，所以把以上各式相加，变形得：

$n\ln 2-\ln(1\times 2\times\cdots\times n)<\dfrac{1}{4}(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\dfrac{3}{2}(1+2+\cdots+n)+2(n-1)+\ln 2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\text{即：}\ln\frac{2^n}{n!}&<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n+\ln 2-\frac{3}{4}\\&<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n\left(\because \ln 2-\frac{3}{4}<0\right)\\&=\frac{1}{12}n^3-\frac{5}{8}n^2+\frac{31}{24}n\end{aligned}$$

$\therefore$ 对于任意 $n>1,n\in N^+$，不等式 $\ln\dfrac{2^n}{n!}<\dfrac{1}{12}n^3-\dfrac{5}{8}n^2+\dfrac{31}{24}n$ 恒成立.

专题16：卡根法专题

1. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2$，$a\in R$

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间，

(Ⅱ) 若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant(a-1)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值.

【答案】 (Ⅱ) 2

【解析】 (Ⅰ) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-ax=\dfrac{1-ax^2}{x}$，

$a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

$a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，令 $f'(x)<0$，解得：$x>\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$ 递增，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 递减；

(Ⅱ) $f(x)\leqslant(a-1)x-1$ 恒成立，可得 $\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+x\leqslant ax-1$ 恒成立，

等价为 $a\geqslant\dfrac{\ln x+x+1}{\dfrac{1}{2}x^2+x}$ 在 $x>0$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+x+1}{\dfrac{1}{2}x^2+x}$，只需 $a\geqslant g(x)_{\max}$，

$g'(x)=\dfrac{(x+1)\left(-\dfrac{1}{2}x-\ln x\right)}{\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)^2}$，令 $g'(x)=0$，可得 $-\dfrac{1}{2}x-\ln x=0$，

设 $h(x)=-\dfrac{1}{2}x-\ln x$，$h'(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}<0$，

$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，设 $h(x)=0$ 的根为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)>0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

$g(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 递增，在 $x\in(x_0,+\infty)$ 递减，

即有 $g(x)_{\max}=g(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0+1}{\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

由 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{1}{4}>0$，$h(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，则 $\dfrac{1}{2}<x_0<1$，

此时 $1<\dfrac{1}{x_0}<2$，即 $g(x)_{\max}\in(1,2)$，

即 $a\geqslant 2$，

则有整数 a 的最小值为 2.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-x$，$g(x)=\ln x$.

(Ⅰ) 求函数 $y=xg(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，求 $y=f[xg(x)+t]$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值（结果用 t 表示）；

(Ⅲ) 关于 x 的不等式 $g(x)-\dfrac{a}{2}f(x)\leqslant\left(\dfrac{3}{2}a-1\right)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值.

【答案】 (Ⅰ) $y=xg(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 递增；(Ⅱ) t^2-t；(Ⅲ) 1

【解析】 (Ⅰ) $y=xg(x)=x\ln x$，$y'=\ln x+1$，

令 $y'>0$，解得：$x>\frac{1}{e}$，令 $y'<0$，解得：$0<x<\frac{1}{e}$，

故函数 $y=xg(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 递增；

(Ⅱ) 函数 $y=f[xg(x)+t]=(x\ln x)^2+(2t-1)(x\ln x)+t^2-t$，$x\in[1,e]$，

令 $u=x\ln x$，由 (Ⅰ) 得：$u=x\ln x$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，

所以 $0\leqslant u\leqslant e$，$y=h(u)=u^2+(2t-1)u+t^2-t$，

$h(u)$ 的图象的对称轴 $u=-t+\frac{1}{2}$，若 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

则 $-\frac{1}{2}\leqslant -t+\frac{1}{2}\leqslant 0$，

$h(u)$ 在 $[0,e]$ 上递增，$h(u)_{\min}=h(0)=t^2-t$，

即 $y=f[xg(x)+t]$ 在 $x\in[1,e]$ 上的最小值是 t^2-t；

(Ⅲ) 由 $g(x)-\frac{a}{2}f(x)\leqslant\left(\frac{3}{2}a-1\right)x-1$ 恒成立，

化为：$a>\frac{2\ln x+2x+2}{x^2+2x}=m(x)$，

只需 $a>m(x)_{\max}$，$x>0$.

$m'(x)=\frac{2(x+1)(1-\ln x)}{(x^2+2x)^2}$，

令 $m'(x)>0$，解得 $0<x<e$，此时函数 $m(x)$ 单调递增；

令 $m'(x)<0$，解得 $e<x$，此时函数 $m(x)$ 单调递减．

$\therefore$ 当 $x=e$ 时，函数 $m(x)$ 取得极大值即最大值，$m(e)=\frac{2}{e}$，

$\therefore a>\frac{2}{e}$．$\therefore$ 整数 a 的最小值为 1.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+bx$，曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$.

(1) 求实数 a，b 的值；

(2) 如果不等式 $f'(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 恒成立，求整数 k 的最大值．

【答案】 (1)$a=0$，$b=1$;(2) 3

【解析】 (1) $\because f(x)=\ln x-ax^2+bx$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-2x+b$，

由题意可得，$\begin{cases}f(1)=1\\f'(1)=2\end{cases}$，

解可得，$a=0$，$b=1$，

(2) 由 (I) 可得 $f(x)=\ln x+x$，$f'(x)=\frac{1}{x}+1$，

由 $f'(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 恒成立可得，$k<\frac{x+1}{x}[1+\ln(x+1)]$，

令 $g(x)=\frac{x+1}{x}[1+\ln(x+1)]$，

则 $g'(x)=\frac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$，

令 $h(x)=x-1-\ln(x+1)$，

则 $h'(x)=\dfrac{x}{x+1}>0$，

$\therefore h(x)$ 单调递增，而 $h(2)<0$，$h(3)>0$，

所以 $h(x)$ 有唯一的实数根 $x_0\in(2,3)$，且 $0=x_0-\ln(x_0+1)$，

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{1+x_0}{x_0}[1+\ln(1+x_0)]=1+x_0\in(3,4)$，

$\therefore k\leqslant 3$，$k\in z$，

故 k 的最大值 3.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+x\ln x$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $3x-y-2=0$.

(Ⅰ) 求实数 a、b 的值；

(Ⅱ) 设 $g(x)=x^2-x$，若 $k\in Z$，且 $k(x-2)<f(x)-g(x)$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，求 k 的最大值 .

【答案】 (Ⅰ)$a=1$，$b=0$；(Ⅱ) 4

【解析】 (Ⅰ)$f'(x)=2ax+b+\ln x$，

故 $2a+b+1=3$ 且 $a+b=1$，解得：$a=1$，$b=0$；

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 得：$k<\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=\dfrac{x+x\ln x}{x-2}$ 对任意 $x>2$ 恒成立，

设 $h(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-2}(x>2)$，则 $h'(x)=\dfrac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$，

令 $m(x)=x-4-2\ln x$，$(x>2)$，则 $m'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}>0$，

故函数 $m(x)$ 为 $(2,+\infty)$ 上的增函数，

$\because m(8)=4-2\ln 8<0$，$m(10)=6-2\ln 10>0$，

故 $m(x)$ 在 $(8,10)$ 上有唯一零点 x_0，即 $x_0-4-2\ln x_0=0$ 成立，

故 $x_0-4-2\ln x_0=0$，

当 $2<x<x_0$ 时，$m(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$x_0<x$ 时，$m(x)>0$，即 $h'(x)>0$，

故 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0\left(1+\dfrac{x_0-4}{2}\right)}{x_0-1}=\dfrac{x_0}{2}$，

故 $k<\dfrac{x_0}{2}$，$\because x_0\in(8,10)$，$\therefore\dfrac{x_0}{2}\in(4,5)$，

$\because k\in Z$，

故 k 的最大值是 4.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$h(x)=ax(a\in R)$.

(Ⅰ) 函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象无公共点，试求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ) 是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f(x)+\dfrac{m}{x}$ 的图象在 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图象的下方？若存在，请求出最大整数 m 的值；若不存在，请说明理由 .

(参考数据：$\ln 2=0.6931$，$\ln 3=1.0986$，$\sqrt{e}=1.6487$，$\sqrt{[3]}e=1.3956$).

【答案】 $(I)a>\dfrac{1}{e}$；$(II)1$

【解析】 (I) 设 $y=$——x 与 $f(x)$ 的图象相切，切点为 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}=k\\ \ln x_0=y_0\\ y_0=kx_0\end{cases}$，解得 $x_0=\mathrm{e}$，$k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象无公共点，$\therefore a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(II) 假设存在实数 m 满足题意，

则不等式 $\ln x+\dfrac{m}{x}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立 .

即 $m<\mathrm{e}^x-x\ln x$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立 .

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-1$，

$h''(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，

$\because h''(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $h''\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$，$h''(1)=\mathrm{e}-1>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $h''(x_0)=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，$\therefore x_0=-\ln x_0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},x_0\right)$ 时，$h'(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)$ 单调递增，

$\therefore h'(x)$ 的最小值 $h'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\dfrac{1}{x_0}-1\geqslant 2-1=1>0$，

$\therefore h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递增 .

$\therefore m\leqslant h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\ln 2=1.99525$，

$\therefore$ 存在实数 m 满足题意，且最大整数 m 的值为 1.

6. 已知函数 $f(x)=\ln x+(1-a)x^3+bx$，$g(x)=xe^x-b(a,b\in R$，e 为自然对数的底数)，且 $f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程为 $y=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1\right)x$

(I) 求实数 a，b 的值；

(II) 求证：$f(x)\leqslant g(x)$

【答案】 (I)$a=b=1$；(II) 详见解析 .

【解析】 (I) $\because f'(x)=\dfrac{1}{x}+3(1-a)x^2+b$，

$\therefore f'(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+3(1-a)\mathrm{e}^2+b$，且 $f(\mathrm{e})=1+(1-a)\mathrm{e}^3+be$，

又 $f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程为 $y=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1\right)x$，

$\therefore$ 切点为 $(\mathrm{e},1+\mathrm{e})$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}}+3(1-a)\mathrm{e}^2+b=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1\\ 1+(1-a)\mathrm{e}^3+be=1+\mathrm{e}\end{cases}$，

解得：$a=b=1$；

(II) 证明：由 (I) 可知 $f(x)=\ln x+x$，$g(x)=xe^x-1$，且 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

令 $F(x)=f(x)-g(x)=\ln x+x-xe^x+1$，

则 $F'(x)=\dfrac{1}{x}+1-\mathrm{e}^x-xe^x=\dfrac{1+x}{x}-(x+1)\mathrm{e}^x=(x+1)\left(\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^x\right)$，

令 $G(x)=\frac{1}{x}-e^{x}$，可知 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $G\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>\frac{1}{2}$，$G(1)=1-e<0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $G(x_0)=0$，即 $\frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G(x)>0$，$\therefore F'(x)>0$，则 $F(x)$ 为增函数；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$G(x)<0$，$\therefore F'(x)<0$，则 $F(x)$ 为减函数 .

$\therefore F(x)\leqslant F(x_0)=\ln x_0+x_0-x_0e^{x_0}+1$，

又 $\because \frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，$\therefore \frac{1}{x_0}=e^{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0$，

$\therefore F(x_0)=0$，即 $F(x)\leqslant 0$，

$\therefore f(x)\leqslant g(x)$.

7. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$h(x)=ax(a\in R)$.

(1) 函数 $f(x)$ 的图象与 $h(x)$ 的图象无公共点，求实数 a 的取值范围；

(2) 是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f(x)+\frac{m}{x}$ 的图象在 $g(x)=\frac{ex}{x}$ 的图象的下方？若存在，求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由 .$\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1.99\right)$

【答案】 (1)$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$;(2)　1

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 无公共点，

等价于方程 $\frac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解 ----------(2 分)

令 $t(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $t'(x)=0$，得 $x=e$

因为 $x=e$ 是唯一的极大值点，故 $t_{max}=t(e)=\frac{1}{e}$ ----------(4 分)

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$t'(x)$	$+$	0	$-$
$t(x)$	增	极大值	减

故要使方程 $\frac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解，当且仅当 $a>\frac{1}{e}$

故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ ----------(5 分)

(2) 假设存在实数 m 满足题意，则不等式 $\ln x+\frac{m}{x}<\frac{e^{x}}{x}$ 对 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立 .

即 $m<e^{x}-x\ln x$ 对 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立 . ----------(6 分)

令 $r(x)=e^{x}-x\ln x$，则 $r'(x)=e^{x}-\ln x-1$，

令 $\varphi(x)=e^{x}-\ln x-1$，则 $\varphi'(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$， ----------(7 分)

$\because \varphi'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$\varphi'(1)=e-1>0$，

且 $\varphi'(x)$ 的图象在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上连续，

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $x_0=-\ln x_0$， ----------(9 分)

$\therefore$ 当 $x\in\left(\frac{1}{2},x_0\right)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增，

则 $\varphi(x)$ 取到最小值 $\varphi(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\frac{1}{x_0}-1\geqslant 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}-1=1>0$，

$\therefore r'(x)>0$，即 $r(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递增．--(11 分)

$m\leqslant r\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln 2=1.99525$，

$\therefore$ 存在实数 m 满足题意，且最大整数 m 的值为 1．--(12 分)

专题17:数列不等式

1. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=-\frac{a}{2}x^2-x$，(其中 $a\in R$，e为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$).

(1) 令 $h(x)=f(x)+g'(x)$，若 $h(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 a 的值；

(2) 在(1)的条件下，设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n<m$，求 m 的最小值.

【答案】 (1) 1;(2) 2

【解析】 (1) 因为 $g'(x)=-ax-1$，所以 $h(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$，

由 $h(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，即 $h(x)_{\min}\geqslant 0$，

由 $h'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

(i) 当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$，$h(x)$ 的单调递增区间为 R，

所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，所以不满足题意.

(ii) 当 $a>0$ 时，由 $h'(x)=\mathrm{e}^x-a=0$，得 $x=\ln a$，

$x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$h'(x)<0$，$x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(\ln a)=a-a\ln a-1$.

设 $\varphi(a)=a-a\ln a-1$，所以 $\varphi(a)\geqslant 0$，① 因为 $\varphi'(a)=-\ln a$，

令 $\varphi'(a)=-\ln a=0$，得 $a=1$，

所以 $\varphi(a)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(a)\leqslant\varphi(1)=0$，②

由①②得 $\varphi(a)=0$，则 $a=1$.

(2) 由(1)知 $\mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$，即 $1+x\leqslant\mathrm{e}^x$，

令 $x=-\frac{k}{n}(n\in N^*,k=0,1,2,3,\cdots,n-1)$，则 $0<1-\frac{k}{n}\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}$，

所以 $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{\left(-\frac{k}{n}\right)^n}=-\mathrm{e}^{-k}$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n$

$\leqslant\mathrm{e}^{-(n-1)}+\mathrm{e}^{-(n-2)}+\cdots+\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1}+1$

$=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}<\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}$

$=1+\frac{1}{\mathrm{e}-1}<2$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n<2$，又 $\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{3}{3}\right)^3>1$，

所以 m 的最小值为2.

2. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，求 m 的最小值.

【答案】 (1) 1;(2)3

【解析】 (1) 因为函数 $f(x)=x-1-a\ln x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$，且 $f(1)=0$.

所以当 $a\leqslant 0$ 时 $f'(x)>0$ 恒成立，此时 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，这与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；

当 $a>0$ 时令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，

所以 $y=f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)_{\min}=f(a)$，

若 $a\neq 1$，则 $f(a)<f(1)=0$，从而与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；

所以 $a=1$；

(2) 由 (1) 可知当 $a=1$ 时 $f(x)=x-1-\ln x\geqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，

所以 $\ln(x+1)\leqslant x$ 当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^{\underline{\quad}}}\right)<\dfrac{1}{2^{\underline{\quad}}}$，$\underline{\qquad}\in N^{*}$.

$\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$，

即 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$；

因为 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$ 成立，

当 $n=3$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)=\dfrac{135}{64}>2$，

所以 m 的最小值为 3.

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+a$(其中 $a\in R$，e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$).

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 设 t 为整数，对于任意正整数 n，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<t$，求 t 的最小值 .

【答案】 (1)$[-1,+\infty)$;(2) 2

【解析】 【解析】(1) 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+a(x\in R)$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>0$； 令 $f'(x)<0$，得 $x<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=\mathrm{e}^0-0+a=1+a$.

由 $f(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，得 $f(x)_{\min}\geqslant 0$，即 $1+a\geqslant 0$，所以 $a\geqslant -1$，

即实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2) 由 (1) 知 $\mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$，即 $1+x\leqslant \mathrm{e}^x$，

令 $x=-\dfrac{k}{n}(n\in N^{*})$，$k=0,1,2,\cdots,n-1)$，则 $0<1-\dfrac{k}{n}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}$，

所以 $\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^n\leqslant\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{-k}$，

$\therefore\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-(n-1)}+\mathrm{e}^{-(n-2)}+\cdots+\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{0}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}<\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=$

$\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}<2$，

所以 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<2$，

又 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(\dfrac{3}{3}\right)^3>1$，

所以 t 的最小值为 2.

4. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-ax+2$.

(1) 当 $a=1$ 时，求在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 在定义域上具有单调性，求实数 a 的取值范围；

(3) 求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\ln(n+1)$，$n\in N^*$.

【答案】 (1) $y=x$;(2)$a\leqslant 2$;(3) 详见解析

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x-x+2$，$(x>0)$，

$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，$f(1)=1$，

所以求在 $x=1$ 处的切线方程为：$y=x$.

(2)$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1-a$，$(x>0)$.

(i) 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递减时，

即 $a\geqslant \ln x+\frac{x+1}{x}$ 时，令 $g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$，

当 $x>e^a$ 时，$g'(x)>0$，不成立；

(ii) 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增时，$a\leqslant \ln x+\frac{x+1}{x}$；

令 $g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$，

则 $g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，$x>0$；

则函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

所以 $g(x)\geqslant 2$，故 $a\leqslant 2$.

(3) 由 (ii) 得当 $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

由 $f(x)>f(1)$，$x>1$ 得 $(x+1)\ln x-2x+2>0$，

即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上总成立，

令 $x=\frac{n+1}{n}$ 得 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{2\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}{\frac{n+1}{n}+1}$，

化简得：$\ln(n+1)-\ln n>\frac{2}{2n+1}$，

所以 $\ln 2-\ln 1>\frac{2}{2+1}$，

$\ln 3-\ln 2>\frac{2}{5+1}$，$\cdots$，

$\ln(n+1)-\ln n>\frac{2}{2n+1}$，

累加得 $\ln(n+1)-\ln 1>\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{2n+1}$，

即 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\ln(n+1)$，$n\in N^*$ 命题得证 .

5. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$,$g(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+2}(a\in R)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值；

(2) 若对 $\forall x>0$，$f(x)+g(x)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\ln(n+1)\ (n\in N^{*})$.

【答案】 (1)$f(x)$ 的增区间为 $(-1,0)$，减区间为 $(0,+\infty)$，$f(x)_{\max}=f(0)=0$，无最小值 .

(2)$[2,+\infty)$;(3) 详见解析 .

【解析】 (1)$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\cdot f'(x)>0\Leftrightarrow -1<x<0;f'(x)<0\Leftrightarrow x>0$，

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-1,0)$，减区间为 $(0,+\infty)$，

$f(x)_{\max}=f(0)=0$，无最小值 .

(2) $\forall x>0,f(x)+g(x)>1\Leftrightarrow\forall x>0,\ln(1+x)-x+\frac{x^2+2x+a}{x+2}>1$

$\Leftrightarrow\forall x>0,\ln(1+x)+\frac{a}{x+2}>1\Leftrightarrow\forall x>0,a>(x+2)[1-\ln(1+x)]$，

令 $h(x)=(x+2)[1-\ln(1+x)]$.

则 $h'(x)=1-\ln(1+x)-\frac{x+2}{x+1}=-\ln(1+x)-\frac{1}{x+1}$.

当 $x>0$ 时，显然 $h'(x)=-\ln(1+x)-\frac{1}{x+1}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数 .

所以当 $x>0$ 时，$h(x)<h(0)=2$.

所以，a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

(3) 由 (2) 知，当 $a=2$，$x>0$ 时，$\ln(1+x)+\frac{2}{x+2}>1$，即 $\ln(1+x)>\frac{x}{x+2}(*)$.

在 $(*)$ 式中，令 $x=\frac{1}{k}(k\in N^{*})$，得 $\ln\frac{k+1}{k}>\frac{\frac{1}{k}}{2+\frac{1}{k}}$，即 $\ln\frac{k+1}{k}>\frac{1}{2k+1}$，

依次令 $k=1,2,3,\cdots n$，

得 $\ln\frac{2}{1}>\frac{1}{3},\ln\frac{3}{2}>\frac{1}{5},\ln\frac{4}{3}>\frac{1}{7},\cdots,\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2n+1}$.

将这 n 个式子左右两边分别相加，

得 $\ln(n+1)>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$.

6. 已知函数 $f(x)=a(x^2-1)-\ln x$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>\frac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}$.

【答案】 (1)$a=\frac{1}{8}$;(2)$a\geqslant\frac{1}{2}$;(3) 见解析

【解析】 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax-\frac{1}{x}$，

$\because f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，$\therefore f'(2)=0$，即 $a=\frac{1}{8}$，

此时，经验证 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 $a=\frac{1}{8}$.

(2) $\because f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}$,

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$f(x)<f(1)=0$ 矛盾 .

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2ax^2-1}{x}$,

令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$；$f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

(i) 当 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}>1$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$x\in\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 递减，

$\therefore f(x)<f(1)=0$ 矛盾 .

(ii) 当 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\leqslant 1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$x\in[1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 递增，

$\therefore f(x)\geqslant f(1)=0$ 满足题意 .

综上，$a\geqslant\dfrac{1}{2}$.

(3) 证明：由 (2) 知令 $a=\dfrac{1}{2}$，

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\dfrac{1}{2}(x^2-1)-\ln x\geqslant 0$，(当且仅当 $x=1$ 时取“=”)

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$\dfrac{1}{\ln x}>\dfrac{2}{x^2-1}$.

即当 $x=2,3,4,\cdots,n$，有：

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>2\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}.$$

7. 已知函数 $f(x)=a(x^2-x)-\ln x(a\in R)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极值，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{n-1}{n}$.

【答案】 (1)1;(2)$a\geqslant 1$;(3) 见解析 .

【解析】 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=2ax-a-\dfrac{1}{x}$,

$\because y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，

$\therefore f'(1)=0$，即 $a=1$，

此时，经验证 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 $a=1$，

(2) ①当 $a=0$ 时，$f(x)=-\ln x$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 0$，故不满足题意，

②当 $a<0$ 时，$f(x)=a(x^2-x)-\ln x$，

$\because f(2)=2a-\ln 2<0$，故不满足题意

③当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2ax^2-ax-1}{x}$，

$\because \triangle=a^2+8a>0$ 恒成立，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2+8a}}{4a}<0$，（舍去），$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}$，

(i) 当 $\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}\leqslant 1$ 时，即 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调性递增

$\therefore f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(1)=0$，满足题意，

(ii) 当 $\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}>1$ 时，即 $0<a<1$ 时，

$\therefore x\in\left(1,\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 递减，

$\therefore f(x)<f(1)=0$，矛盾 .

综上，$f(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，$a\geqslant 1$，

(3) 证明：由 (1) 知令 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-x-\ln x$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$x^2-x-\ln x>0$，即 $\dfrac{1}{\ln x}>\dfrac{1}{x(x-1)}$，

令 $x=n$，

则 $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，

$\therefore \dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$.

8. 已知函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}(a>0)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，试比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 $f(0)$ 的大小；

(3) 证明：$e^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!\,(n\geqslant 2,n\in N)$.

【答案】 (1)$f(x)$ 的极小值为 $f(2)=\ln 2-1$，没有极大值；

(2)$f(x_1)+f(x_2)>f(0)$;(3) 见解析 .

【解析】 (1)$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\dfrac{2x}{x+2}$，定义域 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{2}x>0\\ x+2\neq 0\end{cases}$ 解得 $x>-2$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{(x+2)^2}$，即有 $(-2,2)$ 递减，$(2,+\infty)$ 递增，

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=\ln 2-1$，没有极大值 .

(2)$f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}(a>0)$，$x>-\dfrac{1}{a}$，

$f'(x)=\dfrac{a}{1+ax}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{ax^2-4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2}$

由于 $\dfrac{1}{2}<a<1$，则 $a(1-a)\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，$-\dfrac{1}{a}<-\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$

$ax^2-4(1-a)=0$，解得 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，

$f(x_1)+f(x_2)=\ln[1+2\sqrt{a(1-a)}]+\ln[1-2\sqrt{a(1-a)}]-\dfrac{4\sqrt{1-a}}{2\sqrt{1-a}+2\sqrt{a}}-\dfrac{-4\sqrt{1-a}}{-2\sqrt{1-a}+2\sqrt{a}}$

即 $f(x_1)+f(x_2)=\ln[(1-2a)^2]+\dfrac{4-4a}{2a-1}=\ln[(1-2a)^2]+\dfrac{2}{2a-1}-2$

设 $t=2a-1$，当 $\dfrac{1}{2}<a<1$，$0<t<1$，则设 $f(x_1)+f(x_2)=g(t)=\ln t^2+\dfrac{2}{t}-2$，

当 $0<t<1$ 时，$g(t)=2\ln t+\dfrac{2}{t}-2$，

$g'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2(t-1)}{t^2}<0$

$g(t)$ 在 $0<t<1$ 上递减，$g(t)>g(1)=0$，即 $f(x_1)+f(x_2)>f(0)=0$ 恒成立，

综上述 $f(x_1)+f(x_2)>f(0)$；

(3) 证明：当 $0<t<1$ 时，$g(t)=2\ln t+\dfrac{2}{t}-2>0$ 恒成立，即 $\ln t+\dfrac{1}{t}-1>0$ 恒成立，

设 $t=\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in N)$，即 $\ln\dfrac{1}{n}+n-1>0$，即有 $n-1>\ln n$，

即有 $1>\ln 2$，$2>\ln 3$，$3>\ln 4$，$\cdots$，$n-1>\ln n$，

即有 $1+2+3+\cdots+(n-1)>\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln n=\ln(2\times 3\times 4\times\cdots\times n)=\ln(n!)$，

则 $\dfrac{n(n-1)}{2}>\ln(n!)$，

故 $e^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!\,(n\geqslant 2,n\in N)$.

9. 已知函数 $f(x)=(a-1)\ln(e^x+a^2-a-2)$ (a 为常数) 是实数集 R 上的增函数，对任意的 $x\in R$，有 $f(x)+f(-x)=0$，函数，函数 $g(x)=\ln[f(x)+1]$.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 若对任意的 $x>0$，$g(x)<px$ 恒成立，求实数 p 的取值范围；

(3) 求证：当 $n\in N^*$ 时，$g(n)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

【答案】 (1)2;(2)$[1,+\infty)$;(3) 见解析 .

【解析】 【解析】(1) $\because f(x)$ 对任意的 $x\in R$，都有 $f(x)+f(-x)=0$，

$\therefore f(x)$ 是 R 上的奇函数，

$\therefore f(0)=(a-1)\ln(1+a^2-a-2)=0$

即 $a^2-a-2=0$ 或 $a-1=0$ $\therefore a=-1$ 或 $a=2$ 或 $a=1$，

$\because f(x)$ 是实数集 R 上的增函数，

$\therefore a=2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=x$，函数 $g(x)=\ln[f(x)+1]=\ln(x+1)$，

设 $h(x)=g(x)-px=\ln(x+1)-px(x>0)$，

则 $g(x)<px$ 恒成立 $\Leftrightarrow h(x)<0$ 恒成立，又 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-p(x>0)$

①若 $p\geqslant 1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-p<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

因此 $h(x)<h(0)=0$ 恒成立，

②若 $p\in(0,1)$，则令 $h'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1-p}{p}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1-p}{p}\right)$ 是，$h(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，不成立

故实数 p 的取值范围 $[1,+\infty)$

(3) 证明：由第 (2) 小题可知，

当 $p=1$ 时，$\ln(x+1)<x(x>0)$ 恒成立，

故当 $x>0$，$\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)<\frac{1}{x}$ 也恒成立，

$\therefore \ln2<1$，$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，$\ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$，$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$

将各不等式相加得

$\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

故 $g(n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}++\frac{1}{n}$

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+b+(x\in R)$，且 $f(0)=1$.

(1) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴交于点 B，且 $A(1,f(1))$，求 $d(a)=|AB|^2$ 在 $a\in[c,+\infty)$ 的最小值；

(3) 若 $a=-\frac{1}{2}$，$M_n=f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots+\frac{1}{n}f(n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，$a_n=\frac{2n-1}{6M_n}(n\in N^*)$，$S_n=a_1+a_3+\cdots+a_n$，求证：$S_n<\frac{3}{4}$.

【答案】 (1)$a\geqslant 0$;

(2) 当 $c<-3$ 时，$d(a)$ 的最小值为 1; 当 $c\geqslant -3$ 时，$d(a)$ 的最大值为 $d(c)=(c+3)^2+1$

(3) 见解析 .

【解析】 (1) 由 $f(0)=1$，得 $b=1$，这时 $f(x)=x^3+ax+1$，$f'(x)=3x^2+a\geqslant 0$ 恒成立

$\therefore a\geqslant -3x^2$ 得 $a\geqslant 0$

(2) $\because f(1)=1+a+1=2+a$，即 $A(1,2+a)$，而 $x=1$ 时，$f'(1)=3+a$

故在 $x=1$ 处 $f(x)$ 的切线方程为 $y-(2+a)=(a+3)(x-1)$

当 $x=0$ 时，$y=-1$，即 $B(0,-1)$

$\therefore d(a)=|AB|^2=1+(a+3)^2$，$a\in[c,+\infty)$

当 $c<-3$ 时，$d(a)$ 的最小值为 1

当 $c\geqslant -3$ 时，$d(a)$ 的最大值为 $d(c)=(c+3)^2+1$

(3) 证明：$a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x+1$，故 $\frac{1}{x}[f(x)-1]=x^2-\frac{1}{2}$

$M_n=f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots+\frac{1}{n}f(n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{1}[f(1)-1]+\frac{1}{2}[f(2)-1]+\cdots+\frac{1}{n}[f(n)-1]$

$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{n}{2}=\frac{n}{6}(n+2)(2n-1)$

故 $a_n=\frac{2n-1}{6M_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$S_n=a_1+a_3+\cdots+a_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$

11. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ) 若方程 $f(x)=0$ 有两根 x_1，x_2，求 a 的取值范围；

(Ⅱ) 在 (Ⅰ) 的前提下，设 $x_1<x_2$，求证：$\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；

(Ⅲ) 若不等式 $f(x)\geqslant a$ 恒成立，求证：$\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<a+\dfrac{1}{e-a}(n\in N^*)$.

【答案】 (1)$0<a<\dfrac{1}{e}$;(2)(3) 见解析 .

【解析】 (Ⅰ) 由 $f(x)=ax-\ln x=0$，有 $a=\dfrac{\ln x}{x}$，

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，由 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$，--(1 分)

$g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(e)=\dfrac{1}{e}$，$f(1)=0$. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$. ----------------------------(2 分)

故若方程 $f(x)=0$ 有两根，则 $0<a<\dfrac{1}{e}$. ---(3 分)

(Ⅱ) 证明：若方程 $f(x)=0$ 有两根 x_1，x_2，则 $0<a<\dfrac{1}{e}$，$1<x_1<e<x_2$.

假设对于任意的 $0<a_2<a_1<\dfrac{1}{e}$. 记 $g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=a_1$，

由上可知 $1<\alpha_1<e<\alpha_2$；

记 $g(\beta_1)=g(\beta_2)=a_2$，由上可知 $1<\beta_1<e<\beta_2$. ---(5 分)

因为 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

故由 $a_1>a_2$ 可知 $\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$. 又因为 $1<\alpha_1<e<\alpha_2$，$1<\beta_1<e<\beta_2$，

所以 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}<\dfrac{\beta_2}{\alpha_1}<\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$，故 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大 . ---(8 分)

(Ⅲ) 依题意，$ax-\ln x\geqslant a$ 恒成立，记 $h(x)=ax-a-\ln x$，则 $h'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$.

①当 $a<0$ 时，$h'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $h(x)=ax-a-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，又因为 $h(1)=0$，所以 $h(x)=ax-a-\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上函数值小于零，不符合题意，舍去 . --------------------(9 分)

②当 $a>0$ 时，$h'(x)=\dfrac{ax-1}{x}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$.

	$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$	$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$
$h'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$	小于 0	大于 0
$h(x)=ax-a-\ln x$	单调递减	单调递增

由上表可知 $h(x)=ax-a-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的 $h_{\min}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-a+\ln a\geqslant 0$. ----------------(10 分)

记 $k(a)=1-a+\ln a$，由 $k'(a)=-1+\dfrac{1}{a}$ 可知，$k(a)=1-a+\ln a$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，故 $k(a)\leqslant k(1)=0$，综上 $k(a)=1-a+\ln a=0$，即 $a=1$. ---(11 分)

由 $\ln x\leqslant x-1$ 可得 $\ln\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant\dfrac{k}{n}-1(k\leqslant n)$，两边乘以 n 可得 $n\ln\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant k-n$，即 $\left(\dfrac{k}{n}\right)^n\leqslant e^{k-n}$.

则 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(\dfrac{3}{n}\right)^n+\cdots\left(\dfrac{n}{n}\right)^n\leqslant e^{1-n}+e^{2-n}+e^{3-n}+\cdots+e^0=\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}<\dfrac{1}{1-e^{-1}}=\dfrac{e}{e-1}$. (12 分)

12. 已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)$ 有 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\dfrac{1}{x}+3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设函数 $g(x)=\sqrt{f^2(x)-2x}(x>0)$，直线 $y=\sqrt{2}n-x(n\in N^*)$ 分别与函数 $y=g(x)$，$y=g^{-1}(x)$ 交于

A_n、B_n 两点 $(n\in N^*)$. 设 $a_n=|A_nB_n|$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 .

①求 a_n，并证明 $S_{n-1}^2=S_n^2-\dfrac{2S_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}(n\geqslant 2)$；

②求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n^2>2\left(\dfrac{S_2}{2}+\dfrac{S_3}{3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n}\right)$.

【答案】 (1) $f(x)=x+1$;(2) ① $a_n=\dfrac{1}{n}$;

【解析】 (1) $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\dfrac{1}{x}+3$ 故 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{2}{x}+x+3$，

两式联立可得 $f(x)=x+1$.

(2) 由 (1) 可得 $g(x)=\sqrt{(x+1)^2-2x}=\sqrt{x^2+1}$，

联立 $\begin{cases}y=\sqrt{x^2+1}\\ y=\sqrt{2}n-x\end{cases}$，

得交点 $A_n\left(\dfrac{2n^2-1}{2\sqrt{2}n},\dfrac{2n^2+1}{2\sqrt{2}n}\right)$, 由此得 $B_n\left(\dfrac{2n^2+1}{2\sqrt{2}n},\dfrac{2n^2-1}{2\sqrt{2}n}\right)$，

所以 $a_n=|A_nB_n|=\sqrt{\left(\dfrac{2n^2-1}{2\sqrt{2}n}-\dfrac{2n^2+1}{2\sqrt{2}n}\right)^2+\left(\dfrac{2n^2+1}{2\sqrt{2}n}-\dfrac{2n^2-1}{2\sqrt{2}n}\right)^2}=\dfrac{1}{n}$，

$\because S_n-\dfrac{1}{n}=S_{n-1}$

$\therefore S_{n-1}^2=S_n^2-\dfrac{2S_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$，

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时 ,$S_n^2-S_{n-1}^2=\dfrac{2S_n}{n}-\dfrac{1}{n^2}$，

$S_{n-1}^2-S_{n-2}^2=\dfrac{2S_{n-1}}{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)^2}$，$\cdots$ $S_2^2-S_1^2=\dfrac{2S_2}{n}-\dfrac{1}{2^2}$，

累加得：$S_n^2=2\left(\dfrac{S_2}{2}+\dfrac{S_3}{3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n}\right)+1-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

又 $\because 1-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)>1-\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n-1)}\right]$

$=1-\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}>0$

$\therefore S_n^2>2\left(\dfrac{S_2}{2}+\dfrac{S_3}{3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n}\right)$

13. 已知函数 $f(x)=a\ln x-ax+1(a\in R$ 且 $a\neq 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求证：$\dfrac{\ln 2}{2}\times\dfrac{\ln 3}{3}\times\dfrac{\ln 4}{4}\times\cdots\times\dfrac{\ln n}{n}<\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

【解析】 (1) $\because f(x)=a\ln x-ax+1$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{a}{x}-a=\dfrac{a(1-x)}{x}$，

①当 $a>0$ 时，若 $0<x<1$，则 $f'(x)>0$，若 $x>1$，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间 $(0,1)$，单调递减区间 $(1,+\infty)$；

②当 $a<0$ 时，若 $0<x<1$，则 $f'(x)<0$，若 $x>1$，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间 $(0,1)$，单调递增区间 $(1,+\infty)$；

(2) 令 $a=1$，则 $f(x)=\ln x-x+1$，

所以 $f(1)=0$，

由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，故 $f(x)\leqslant f(1)$，(当 $x=1$ 时取等号)，

所以 $\ln x-x+1<0$，即 $\ln x<x-1$，

从而有 $0<\ln n<n-1$，$(n\geqslant 2,n\in N^*)$

即 $\frac{\ln n}{n}<\frac{n-1}{n}(n\geqslant 2,n\in N^*)$，

$\therefore \frac{\ln 2}{2}\times\frac{\ln 3}{3}\times\frac{\ln 4}{4}\times\cdots\times\frac{\ln n}{n}<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

14. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1(a\in R)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 若对一切实数 $x\in R$，都有 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围 .

(III) 求证：$\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n<\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，$n\in N^*$.

【答案】 (I) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增；

(II) $a=1$;(3) 见解析 .

【解析】 (I) 由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，显然 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a\geqslant 0$；

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$，显然当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$；

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增；

(II) 由 (I) 问知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 递增，且 $f(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}+a-1<0$，不合题意，舍去 .

当 $a>0$ 时，由 (I) 知，当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$

所以当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 有极小值也是最小值，即 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a-1$，

依题意 $a-a\ln a-1\geqslant 0$，$\cdots$ ①

①式可化为 $1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}\geqslant\ln a$，

而由超越不等式知：$\frac{a-1}{a}\leqslant\ln a\leqslant a-1,a>0(a=1$ 时取到等号)，

所以比较上下两式可以发现 $\frac{a-1}{a}=\ln a$，即 $a-a\ln a-1=0(a=1$ 时取到等号)，

下面给出其证明：

令 $g(a)=a-a\ln a-1$，$a>0$，则 $g'(a)=-\ln a$，

于是 $g'(a)=0$ 时，$a=1$，

同理知当 $a=1$ 时，$g(a)$ 有极大值也是最大值，

所以 $g(a)\leqslant g(1)=0\cdots$ ②

比较①②式可得，$g(a)=0$，即 $a=1$ 为所求 .

(III) 由 (II) 知对 $\forall x\in R$，有 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，

于是令 $x=-\frac{i}{n}$,$n\in N_+$,$\mathrm{i}\in N$,$\mathrm{i}\leqslant n$，则有 $\mathrm{e}^{-\frac{i}{n}}\geqslant 1-\frac{i}{n}=\frac{n-i}{n}\geqslant 0$

即有 $\mathrm{e}^{-i}\geqslant\left(\frac{n-i}{n}\right)^n$，即 $\frac{(n-i)^n}{n^n}\leqslant\mathrm{e}^{-i}$(当且仅当 $\mathrm{i}=0$ 时取等号)

所以有 $\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n<\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$

即 $\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n<\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}<\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$,即证.

15. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}(a\neq 0)$.

(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时,令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}(x>0)$,求函数 $g(x)$ 在 $[m,m+1]\,(m>0)$ 上的最小值;

(2) 若对于一切 $x\in R$,$f(x)-x-1\geqslant 0$ 恒成立,求 a 的取值集合;

(3) 求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(\sqrt{\mathrm{e}})^i}<\frac{4}{\mathrm{e}}$.

【答案】 (1) $g(x)_{\min}=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}, & 0<m\leqslant 1\\ \frac{\mathrm{e}}{2}, & 1<m<2\\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}}{m}, & m\geqslant 2\end{cases}$; (2) $\{1\}$; (3) 见解析.

【解析】 (1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x}$,则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}{x^2}$.

当 $\frac{x}{2}-1>0$,即 $x>2$ 时,$g'(x)>0$;

当 $\frac{x}{2}-1<0$ 且 $x\neq 0$,即 $x<2$ 或 $0<x<2$ 时,$g'(x)<0$.

则 $g(x)$ 的增区间为 $(2,+\infty)$,减区间为 $(-\infty,0)$,$(0,2)$.

因为 $m>0$,所以 $m+1>1$,

①当 $m+1\leqslant 2$,即 $0<m\leqslant 1$ 时,$g(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调递减,

所以 $g(x)_{\min}=g(m+1)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}$

②当 $m<2<m+1$,即 $1<m<2$ 时,$g(x)$ 在 $[m,2]$ 上单调递减,

在 $[2,m+1]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{\mathrm{e}}{2}$

③当 $m\geqslant 2$ 时,$g(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(m)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}}{m}$.

综上,$g(x)_{\min}=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}, & 0<m\leqslant 1\\ \frac{\mathrm{e}}{2}, & 1<m<2;\\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}}{m}, & m\geqslant 2\end{cases}$

(2) 设 $h(x)=f(x)-x-1=\mathrm{e}^{ax}-x-1$

若 $a<0$,则对一切 $x>0$,$h(x)<0$ 这与题设矛盾.

又 $a\neq 0$,故 $a>0$. 而 $h'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-1$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$,

当 $x<\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;

当 $x>\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

故当 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时,$h(x)$ 取最小值 $h\left(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}-1$.

于是对一切 $x\in R$,$h(x)\geqslant 0$ 恒成立,当且仅当 $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}-1\geqslant 0$ ①

令 $\varphi(x)=t-t\ln t-1$，则 $\varphi'(x)=-\ln t$

当 $0<t<1$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增；

当 $t>1$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减，

故当 $t=1$ 时，$\varphi(t)$ 取最大值 $\varphi(1)=0$，

因此，当且仅当 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，①式成立．

综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$.

(3) 证明：由 (2) 可知，当 $x>0$ 时，$g(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\geqslant\frac{e}{2}$，

所以 $\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\leqslant\frac{2}{e}(x>0)$，

可得 $\frac{1}{n(\sqrt{e})^n}=\frac{n}{n^2(\sqrt{e})^n}\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2}{e}$

于是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(\sqrt{e})^i}=\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{2(\sqrt{e})^2}+\cdots+\frac{1}{n(\sqrt{e})^n}$

$\leqslant\frac{2}{e}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

$<\frac{2}{e}\left[1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$

$=\frac{2}{e}\left[2-\frac{1}{n}\right]<\frac{4}{e}$.

16. 已知函数 $f(x)=e^{-x}(x^2+ax)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 2.

(Ⅰ) 求实数 a 的值；

(Ⅱ) 设 $g(x)=-x\left(x-t-\frac{3}{e}\right)(t\in R)$，若 $g(x)\geqslant f(x)$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立，求 t 的取值范围；

(Ⅲ) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$，

求证：当 $n\geqslant 2$，$n\in N$ 时 $f\left(\frac{a_1}{n}\right)+f\left(\frac{a_2}{n}\right)+L+f\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)<n\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{2e}\right)$（e 为自然对数的底数，$e\approx 2.71828$）.

【答案】 (Ⅰ)$a=2$；(Ⅱ)$t\geqslant 1$；(3) 见解析．

【解析】 (Ⅰ) $\because f(x)=e^{-x}(x^2+ax)$，

$\therefore f'(x)=-e^{-x}(x^2+ax)+e^{-x}(2x+a)=-e^{-x}(x^2+ax-2x-a)$；

则由题意得 $f'(0)=-(-a)=2$，故 $a=2$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知，$f(x)=e^{-x}(x^2+2x)$，由 $g(x)\geqslant f(x)$ 得，

$-x\left(x-t-\frac{3}{e}\right)\geqslant e^{-x}(x^2+2x)$，$x\in[0,1]$；

当 $x=0$ 时，该不等式成立；

当 $x\in(0,1]$ 时，不等式 $-x+t+\frac{3}{e}\geqslant e^{-x}(x+2)$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，

即 $t\geqslant\left[e^{-x}(x+2)+x-\frac{3}{e}\right]_{\max}$.

设 $h(x)=e^{-x}(x+2)+x-\frac{3}{e}$，$x\in(0,1]$，

$h'(x)=-e^{-x}(x+1)+1$，$h''(x)=x\cdot e^{-x}>0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递增，$\therefore h'(x)>h'(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递增，$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=1$，

$\therefore t\geqslant 1$.

(Ⅲ) 证明：$\because a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$，又 $a_1=1$，

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-1}=n$；

对 $n=1$ 也成立，$\therefore a_n=n$.

$\because$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(x^2-2)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，且 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

又 $\because \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)(1\leqslant \mathrm{i}\leqslant n-1,\mathrm{i}\in N)$ 表示长为 $f\left(\dfrac{i}{n}\right)$，宽为 $\dfrac{1}{n}$ 的小矩形的面积，

$\therefore \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)<\displaystyle\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}f(x)\mathrm{d}x,(1\leqslant \mathrm{i}\leqslant n-1,\mathrm{i}\in N)$，

$\therefore \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{a_1}{n}\right)+f\left(\dfrac{a_2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{a_{n-1}}{n}\right)\right]=\dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]<\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

又由 (Ⅱ)，取 $t=1$ 得 $f(x)\leqslant g(x)=-x^2+\left(1+\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)x$，

$\therefore \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$，

$\therefore \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]<\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$，

$\therefore f\left(\dfrac{a_1}{n}\right)+f\left(\dfrac{a_2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{a_{n-1}}{n}\right)<n\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}\right)$.

17. 已知函数 $f(x)=x^2+\ln(x-a)$，$a\in R$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 有两个不同的极值点，求 a 的取值范围；

(Ⅱ) 当 $a\leqslant -2$ 时，令 $g(a)$ 表示 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上的最大值，求 $g(a)$ 的表达式；

(Ⅲ) 求证：$\dfrac{3n^2+5n}{8n^2+24n+16}+\ln\sqrt{n+1}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，$n\in N^*$.

【答案】 (Ⅰ)$a<-\sqrt{2}$；(Ⅱ)$g(a)=1+\ln(-1-a)\ (a\leqslant -2)$；(Ⅲ) 见解析.

【解析】 (Ⅰ)$f'(x)=\dfrac{2x^2-2ax+1}{x-a}(x>a)$，$\therefore f(x)$ 有两个不同的极值点，

令 $h(x)=2x^2-2ax+1$，则 $h(x)$ 有两个大于 a 的零点，

$\therefore \begin{cases}\triangle=4a^2-8>0\\ h(a)>0\\ a<\dfrac{a}{2}\end{cases}$，$\therefore a<-\sqrt{2}$；

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(a,\dfrac{a-\sqrt{a^2-2}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-2}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-2}}{2}\right]$ 上单调递减，$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-2}}{2}<-1,\dfrac{a+\sqrt{a^2-2}}{2}<0,\right)$

注意到 $h(x)=2x^2-2ax+1$ 的对称轴 $x=\dfrac{a}{2}<-1$，$h(-1)=3+2a<0$，$h(0)=1>0$，

可推知 $-1<x_2<0$，

$\therefore$ 当 $x\in[-1,0]$ 时，$g(a)=f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(0)\}$

而 $f(0)=\ln(-a)$，$f(-1)=1+\ln(-1-a)$，

又若 $f(0)>f(-1)$，$a=-\dfrac{e}{e-1}>-2$，故 $f(0)>f(-1)$ 不成立

综上分析可知，$g(a)=f(-1)=1+\ln(-1-a)\ (a\leqslant -2)$

(Ⅲ) 证明：由 (2) 知，当 $a=-2$ 时，$x^2+\ln(x+2)\leqslant 1$

令 $x+2=\dfrac{n+1}{n}$，则 $x=-\dfrac{n-1}{n}\in(-1,0]$，$\therefore \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2+\ln\dfrac{n+1}{n}<1$，

$\therefore \ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}$，即 $\dfrac{1}{n^2}+\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{2}{n}$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+2)}+\sum\limits_{i=1}^{n}ln\dfrac{i+1}{i}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i^2}+\sum\limits_{i=1}^{n}ln\dfrac{i+1}{i}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{i}$

$\therefore \dfrac{3n^2+5n}{4n^2+12n+8}+\ln\sqrt{n+1}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{i}$，

$\therefore \dfrac{3n^2+5n}{8n^2+24n+16}+\ln\sqrt{n+1}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，$n\in N^*$.

18. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-1$，其中 $a>0$，

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的最小值；

(2) 求证：$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\geqslant n-\ln(n!)\ (n\in N^*)$.

【答案】 (1) $\dfrac{a}{e}$；(2) 见解析 .

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\because f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-1$，

$\therefore f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，

若 $0<a<e$，则当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(a,e]$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减，在区间 $(a,e]$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x=a$ 时，$f(x)$ 有最小值 $\ln a$；

若 $a\geqslant e$，则 $f'(x)<0$ 在区间 $(0,e]$ 上恒成立，$f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x=e$ 时，$f(x)$ 有最小值 $\dfrac{a}{e}$.

(2) 由 (1) 可知：当 $a=1$ 时，

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x-1$，

且 $f(x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即当 $x\geqslant 1$ 时，恒有 $\dfrac{1}{x}\geqslant 1-\ln x\cdots(*)$

取 $x=n$，$(n\in N^*)$. 得 $\dfrac{1}{n}\geqslant 1-\ln n$，

$\therefore 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\geqslant n-(\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n)=n-\ln(n!)\ (n\in N^*)$

专题18：极值点偏移问题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{a}-2\ln x(a\in R,a\neq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1x_2>\mathrm{e}$.

【解析】 (1)$f'(x)=\dfrac{2x}{a}-\dfrac{2}{x}$，$(x>0)$，

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{ax}$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>\sqrt{a}$，令 $f'(x)<0$，解得：$0<x<\sqrt{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上递减，在 $(\sqrt{a}，+\infty)$ 上递增；

综上：当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上递减，在 $(\sqrt{a}，+\infty)$ 上递增；

(2) 证明：若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

则 $\dfrac{x_1^2}{a}-2\ln x_1=0$ ①，$\dfrac{x_2^2}{a}-2\ln x_2=0$ ②，

①＋②得：$\dfrac{x_1^2+x_2^2}{a}=2(\ln x_1+\ln x_2)$，故 $a=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2\ln x_1+2\ln x_2}$，

①－②得：$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a}=2(\ln x_1-\ln x_2)$，故 $a=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{2(\ln x_1-\ln x_2)}$，

要证 $x_1x_2>\mathrm{e}$，即证 $\ln(x_1x_2)>\ln\mathrm{e}$，即证 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2a}>1$，

$x_1^2+x_2^2>2a$，$a<\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$，

即证 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{2(\ln x_1-\ln x_2)}<\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$，即证 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}>\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，$(x_1<x_2)$，

令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$，则 $t<1$，

$g(t)=\ln t-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=\ln t+\dfrac{2}{t^2+1}-1$，$(t<1)$，

则 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}=\dfrac{(t^2-1)^2}{t(t^2+1)^2}\leqslant 0$，

故 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

又 $g(1)=0$，故 $g(t)<g(1)=0$，

故 $\ln t<\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，故 $x_1x_2>\mathrm{e}$.

2. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 x_1，x_2，$(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

(i)$x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$；

(ii)$x_2-x_1>\dfrac{2\sqrt{1-ea}}{a}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 .

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=1-ax$，

所以在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 .

当 $a>0$ 时，在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上 $f(x)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上 $f(x)$ 单调递减 .

(2) 证明：(i) 由 (1) 可知，要使由函数 $f(x)$ 有两个零点，需 $a>0$，且 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，则 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

又 $x_1<x_2$，故 $0<x_1<\frac{1}{a}$，$x_2>\frac{1}{a}$，则 $\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$，

令 $g(x)=f\left(\frac{2}{a}-x\right)-f(x)\left(0<x<\frac{1}{a}\right)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{\frac{2}{a}-x}+a-\frac{1}{x}+a=\frac{-2(ax-1)^2}{ax\left(\frac{2}{a}-x\right)}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单减，

$\therefore g(x_1)>g\left(\frac{1}{a}\right)=0$，

又 $f(x_1)=0$，

$\therefore f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)=\ln\left(\frac{2}{a}-x_1\right)-a\left(\frac{2}{a}-x_1\right)-f(x_1)=g(x_1)>0$，

又 $f(x_2)=0$，

$\therefore x_2>\frac{2}{a}-x_1$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$；

(ii) 要证 $x_2-x_1>\frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，由 (1) 可知，只需证 $x_1+x_2+x_2-x_1>\frac{2}{a}+\frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，

即证 $x_2>\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a}>\frac{1}{a}$，

又 $f(x_2)=\ln x_2-ax_2=0$，

$\therefore$ 只需证 $f\left(\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a}\right)>0$，即证 $\ln\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a}-(1+\sqrt{1-ea})>0$，

令 $t=1+\sqrt{1-ea}$，则 $a=\frac{1-(t-1)^2}{\mathrm{e}}$，$\because 0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\therefore 1<t<2$，

所以上述不等式等价于 $\ln\frac{et}{1-(t-1)^2}-t>0$，即 $\ln\frac{\mathrm{e}}{2-t}-t>0$，亦即 $\ln(2-t)+t<1$，

令 $\varphi(t)=\ln(2-t)+t$，则 $\varphi'(t)=-\frac{1}{2-t}+1=\frac{1-t}{2-t}<0(t\in(1,2))$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即 $\varphi(t)<\varphi(1)=1$，即得证 .

3. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x-3$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$

(I) 求证：$0<a<\mathrm{e}^2$

(Ⅱ)求证：$x_1+x_2>2a$.

【解析】 证明：(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}$，

① $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

不可能有 2 个零点；

② $a>0$ 时，在区间 $(0,a)$ 上，$f'(x)<0$，在区间 $(a,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 递减，在区间 $(a,+\infty)$ 递增；

$f(x)$ 的最小值是 $f(a)=\ln a-2$，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

$\therefore$ 由题意得：有 $f(a)<0$，则 $0<a<e^2$；

(Ⅱ)要证 $x_1+x_2>2a$，只要证 $x_2>2a-x_1$，

易知 $x_2>a$，$2a-x_1>a$，

而 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 递增，

$\therefore$ 只要证明 $f(x_2)>f(2a-x_1)$，

即证 $f(x_2)>f(2a-x_1)$，

设函数 $g(x)=f(x)-f(2a-x)$，

则 $g(a)=0$，且区间 $(0,a)$ 上，

$g'(x)=f'(x)+f'(2a-x)=\dfrac{-4a(a-x)^2}{x^2(2a-x)^2}<0$，

即 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 递减，

$\therefore g(x_1)>g(a)=0$，

而 $g(x_1)=f(x_1)-f(2a-x_1)>0$，

$\therefore f(x_2)>f(2a-x_1)$ 成立，

$\therefore x_1+x_2>2a$.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}\ln x-3$ 有两个零点 x_1，x_2

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 求证：$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2a$.

【解析】 (1) 设 $t=\sqrt{x}$，$t>0$，

则 $y=\dfrac{a}{t}+\ln t-3=g(t)$，

$y'=-\dfrac{a}{t^2}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-a}{t^2}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$y'>0$ 恒成立，$g(t)$ 是增函数，成立；

当 $a>0$ 时，$g(t)$ 在 $(0,a)$ 是减函数，在 $(a,+\infty)$ 是增函数，

$g(t)_{\min}=g(a)=g(a)=1+\ln a-3<0$，

解得 $0<a<e^2$，

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,e^2)$.

证明：(2) 欲证 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2a$，即证 $t_1+t_2>2a$，

$\because 0<t_1<a$，$\therefore$ 即证 $t_2>2a-t_1>a$，

$\because y=\dfrac{a}{t}+\ln t-3$ 在 $(a,+\infty)$ 是增函数，

即证 $g(t_2)>g(2a-t_1)$，

$\because g(t_2)=g(t_1)$，$\therefore$ 即证 $g(t_1)>g(2a-t_1)$，

记 $G(t)=g(t)-g(2a-t)=\dfrac{a}{t}+\ln t-\dfrac{a}{2a-t}-\ln(2a-t)$，即证明 $G(t)>0$，$0<t<a$，$G(a)=0$.

$G'(a)=-\dfrac{a}{t^2}+\dfrac{1}{t}-\dfrac{a}{(2a-t)^2}+\dfrac{1}{2a-t}=\dfrac{-4a(t-a)^2}{t^2(2a-t)^2}<0$，

$\therefore$ 函数 $G(t)$ 在 $(0,a)$ 内单调递减，因此 $G(t)>G(a)=0$.

$\therefore$ 结论成立 .

5. 已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+(a-1)x+\ln x$，$a\in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(1-x)<f(1+x)$；

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，比较 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 0 的大小，并证明你的结论 .

【解析】 (1)$f'(x)=-ax+(a-1)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-(ax+1)(x-1)}{x}$，$(x>0)$.

① $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减；

② $a<0$ 时，$f'(x)=0$ 的两根为 $-\dfrac{1}{a}$，1

若 $-\dfrac{1}{a}=1$，即 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增；

若 $-\dfrac{1}{a}<1$. 即 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上递增，$\left(-\dfrac{1}{a},1\right)$ 上递减，$(1,+\infty)$ 上递增；

且 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1+\dfrac{1}{2a}+\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)<0$，故此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点 .

若 $-\dfrac{1}{a}>1$，即 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，$\left(1,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上递减，$\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上递增；

且 $f(1)=\dfrac{a}{2}-1<0$，故此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点 .

综上所述：$a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上递增，$\left(-\dfrac{1}{a},1\right)$ 上递减，$(1,+\infty)$ 上递增；

$a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增；

$-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，$\left(1,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上递减，$\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上递增；

$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减；

(2) 证明：$f(1-x)<f(1+x)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}a(1-x)^2+(a-1)(1-x)+\ln(1-x)<-\dfrac{1}{2}a(1+x)^2+(a-1)(1+x)+\ln(1+x)$

$\Leftrightarrow 2x+\ln(1-x)-\ln(1+x)<0$，

设 $g(x)=2x+\ln(1-x)-\ln(1+x)$，$x\in(0,1)$.

$\therefore g'(x)=2-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-2x^2}{1-x^2}<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)<g(0)=0$ 得证 .

(3) 由 (1) 知，函数 $f(x)$ 要有两个零点 x_1，x_2，则 $\begin{cases}a>0\\f(1)=\dfrac{a}{2}-1>0\end{cases}$，

$\therefore a>2$.

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

$\therefore$ 由 (2) 得 $f(2-x_2)=f(1+1-x_2)>f(x_2)=f(x_1)=0$.

$\therefore 2-x_2>x_1$，

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}<1$.

$\therefore f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$.

6. 已知函数 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$，其中 a 为常数 .

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2) 若 $g(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：无论实数 a 取什么值都有 $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}>g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\because g(x)=x^2+\ln(x+a)$，

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-a,+\infty)$

$\therefore g'(x)=2x+\dfrac{1}{x+a}$，

令 $2x+\dfrac{1}{x+a}>0$，

$2x^2+2ax+1>0$，

当 $4a^2-8\leqslant 0$ 时，即 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，即函数 $g(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 单调递增，

当 $4a^2-8>0$ 时，即 $a>\sqrt{2}$，或 $a<-\sqrt{2}$ 时，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$，或 $x=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}$，

①若 $a>\sqrt{2}$，

当 $g'(x)>0$ 时，即 $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$，或 $-a<x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}$，函数 $g(x)$ 单调递增，

当 $g'(x)<0$ 时，即 $\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}<x<\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$，函数 $g(x)$ 单调递减，

②若 $a<-\sqrt{2}$，$g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 单调递增，

综上所述：当 $a\leqslant\sqrt{2}$ 时，即函数 $g(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 单调递增，

当 $a>\sqrt{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2},+\infty\right)$ 或 $\left(-a,\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2},\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}\right)$ 上单调递减，

(2) 由 (1) 可知，当 $a>\sqrt{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2},+\infty\right)$ 或 $\left(-a,\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2},\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}\right)$ 上单调递减，

$x_1+x_2=-a$；$x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}=\dfrac{x_1^2+\ln(x_1+a)+x_2^2+\ln(x_2+a)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2$,

$g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=g\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a^2+\ln\dfrac{a}{2}$;

故 $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}-g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2\right)-\left(\dfrac{1}{4}a^2+\ln\dfrac{a}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{4}a^2-\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{1}{2}$;

令 $f(a)=\dfrac{1}{4}a^2-\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{1}{2}$,

则 $f'(a)=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-2}{2a}$,

$\because a>\sqrt{2}$, $\therefore \dfrac{a^2-2}{2a}>0$;

$\therefore f(a)=\dfrac{1}{4}a^2-\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{1}{2}$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上增函数,

且 $f(\sqrt{2})=0$,

故 $\dfrac{1}{4}a^2-\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{1}{2}>0$,

故无论实数 a 取什么值都有 $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}>g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{2}\ln x-1(m\in R)$ 的两个零点为 x_1, $x_2(x_1<x_2)$.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 求证: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

【解析】 (1)$f'(x)=\dfrac{x-2m}{2x^2}$.

①$m\leqslant0$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,不可能有两个零点;

②$m>0$, $f'(x)>0$ 可解得 $x>2m$, $f'(x)<0$ 可解得 $0<x<2m$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2m)$ 上单调递减,在 $(2m,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(2m)=\dfrac{1}{2}\ln2m-\dfrac{1}{2}$,

由题意, $\dfrac{1}{2}\ln2m-\dfrac{1}{2}<0$,

$\therefore 0<m<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$;

(2) 证明:令 $t=\dfrac{1}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=mt-\dfrac{1}{2}\ln t-1=0$,

由题意方程 $m=\dfrac{\ln t+2}{2t}$ 有两个根为 t_1, t_2,不妨设 $t_1=\dfrac{1}{x_1}$, $t_2=\dfrac{1}{x_2}$.

令 $h(t)=\dfrac{\ln t+2}{2t}$,则 $h'(t)=-\dfrac{\ln t+1}{2t^2}$,

令 $h'(t)>0$,可得 $0<t<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,函数单调递增; $h'(t)<0$,可得 $t>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,函数单调递减.

由题意, $t_1>\dfrac{1}{\mathrm{e}}>t_2>0$,

要证明 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{e}$，即证明 $t_1+t_2>\frac{2}{e}$，即证明 $h(t_1)<h\left(\frac{2}{e}-t_2\right)$.

令 $\varphi(x)=h(x)-h\left(\frac{2}{e}-x\right)$，

下面证明 $\varphi(x)<0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 恒成立，

$\varphi'(x)=\frac{-\ln x-1}{2x^2}+\frac{-\ln\left(\frac{2}{e}-x\right)-1}{2\left(\frac{2}{e}-x\right)^2}$，

$\because x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，

$\therefore -\ln x-1>0$，$x^2<\left(\frac{2}{e}-x\right)^2$，

$\therefore \varphi'(x)>\frac{-\ln x\left(-x+\frac{2}{e}\right)-2}{2\left(\frac{2}{e}-x\right)^2}>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上是增函数，

$\therefore \varphi(x)<\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=0$，

$\therefore$ 原不等式成立.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\ln(mx)-1(m>1)$ 有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

(Ⅰ) 求实数 m 的取值范围；

(Ⅱ) 证明：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{m}$.

【解析】 (I) 函数 $f(x)=\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\ln(mx)-1(m>1)$，

$\therefore f'(x)=-\frac{m}{x^2}+\frac{1}{2x}=\frac{x-2m}{2x^2}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2m)$ 单调递减，在 $(2m,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(2m)=\frac{m}{2m}+\frac{1}{2}\ln(2m^2)-1<0$，

$\therefore 2m^2<e$ 即 $1<m<\sqrt{\frac{e}{2}}$，

又 $f\left(2m-\frac{2}{m}\right)=\frac{m}{2m-\frac{2}{m}}+\frac{1}{2}\ln(2m^2-2)-1>\frac{1}{2-\frac{4}{e}}-1>0$，

$f(2m+e^2)=\frac{m}{2m+e^2}+\frac{1}{2}\ln(2m^2+me^2)-1>\frac{1}{2}\ln e^2-1=0$，

$\therefore 1<m<\sqrt{\frac{e}{2}}$ 满足函数 $f(x)$ 有两个零点；

(II) 证明：令 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=mx-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln m-1$，

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2m}\right)$ 递减，$\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$ 递增，

令 $G(x)=g\left(\frac{1}{2m}-x\right)-g\left(\frac{1}{2m}+x\right)$，$x\in\left(0,\frac{1}{2m}\right)$，

$\therefore G'(x)=g'\left(\frac{1}{2m}-x\right)-g'\left(\frac{1}{2m}+x\right)=-2m+\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4m^2}-x^2}=2m\left(\frac{1}{1-4m^2x^2}-1\right)>0$，

则 $G(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2m}\right)$ 递增,

$\therefore G(x)>G(0)=0$,即 $g\left(\dfrac{1}{2m}-x\right)>g\left(\dfrac{1}{2m}+x\right)$,

令 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=mx-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln m-1$ 的零点为 t_1, t_2, $\left(0<t_1<\dfrac{1}{2m}<t_2\right)$,

$t_1\in\left(0,\dfrac{1}{2m}\right)$, $\dfrac{1}{2m}-t_2\in\left(0,\dfrac{1}{2m}\right)$,

$\therefore g(t_1)=g(t_2)=g\left(\dfrac{1}{2m}-\left(\dfrac{1}{2m}-t_2\right)\right)>g\left(\dfrac{1}{2m}+\left(\dfrac{1}{2m}-t_2\right)\right)=g\left(\dfrac{1}{m}-t_2\right)$,

$\therefore t_1>\dfrac{1}{m}-t_2$,即 $t_1+t_2>\dfrac{1}{m}$,

所以 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{1}{m}$.

专题19：双变量问题

1. 已知函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+x+1(a>0)$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 是定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1，x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>5-2\ln 2$.

【答案】 (Ⅰ)$a\geqslant\frac{1}{8}$;(2) 见解析 .

【解析】 (Ⅰ)$\because f(x)=-\ln x-ax^2+x+1$，$\therefore f'(x)=-\frac{2ax^2-x+1}{x}$

令 $g(x)=2ax^2-x+1(x>0)$ 则 $\triangle=1-8a$

$\because a>0$，$\therefore$ 对称轴 $x=\frac{1}{4a}>0$

①当 $a\geqslant\frac{1}{8}$ 时，$\triangle\leqslant0$，$g(x)\geqslant0$，$\therefore f'(x)\leqslant0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减 .

②当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$\triangle>0$，

方程 $2ax^2-x+1=0$ 有两个不相等的正根 x_1，x_2

不妨设 $x_1<x_2$，则当 $x\in(0,x_1)\cup(x_2+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_1,x_2))$ 时，$f'(x)>0$，这时 $f(x)$ 不是单调函数 .

综上，a 的取值范围是 $a\geqslant\frac{1}{8}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，当 $a\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$，$f(x)$ 有极小值点 x_1 和极大值 x_2，且 $x_1+x_2=\frac{1}{2a}$，$x_1x_2=\frac{1}{2a}$，

$f(x_1)+f(x_2)=-\ln x_1-ax_1^2+x_1-\ln x_2-ax_2^2+x_2+2$

$=-(\ln x_1+\ln x_2)-\frac{1}{2}(x_1-1)-\frac{1}{2}(x_2-1)+(x_1+x_2)+2$

$=-\ln(x_1x_2)+\frac{1}{2}(x_1+x_2)+3=\ln(2a)+\frac{1}{4a}+3$，

令 $g(a)=\ln(2a)+\frac{1}{4a}+3,a\in\left(0,\frac{1}{8}\right]$，

则当 $a\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$ 时，$g'(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}=\frac{4a-1}{4a^2}<0$，

$\therefore g(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$ 单调递减，

所以 $g(a)>g\left(\frac{1}{8}\right)=5-2\ln 2$，故 $f(x_1)+f(x_2)>5-2\ln 2$.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x(a>0)$

(1) 若 $a=1$，求 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在定义域上是单调函数，求 a 的取值范围；

(3) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>-\frac{3+2\ln 2}{4}$.

【解析】 (1)$a=1,f(1)=-\frac{1}{2}$，函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x(a>0)$，

可得 $f'(x)=x-1+\frac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=1$，

$\therefore$ 切线方程为 $2x-2y-3=0$；

(2)$f'(x)=x-1+\frac{a}{x}$ 依题意有 $f'(x)\geqslant0$ 或 $f'(x)\leqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\leqslant -x^2+x$ 或 $a\geqslant -x^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

显然 $a\leqslant -x^2+x$ 不可能恒成立，

$\therefore a\geqslant -x^2+x$，

解得 $a\geqslant \dfrac{1}{4}$；

(3) 由 $f'(x)=x-1+\dfrac{a}{x}$，$f'(x)=0$ 得 $x^2-x+a=0$，即 x_1，x_2 是 $f'(x)=0$ 的两根，

$\therefore x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=a$，

$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2-x_1+a\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_2^2-x_2+a\ln x_2=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-x_1x_2+a\ln x_1x_2=\dfrac{1}{2}-1-a+a\ln a=-\dfrac{1}{2}-a+a\ln a$，

由已知 $a<\dfrac{1}{4}$，$\therefore -a>-\dfrac{1}{4}\ln a>\ln\dfrac{1}{4}=-2\ln 2$，

$\therefore a\ln a>-2a\ln 2>-\dfrac{\ln 2}{2}$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)>-\dfrac{3+2\ln 2}{4}$.

3. 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{a^4x}-x^2+ax(a>0)$.

(1) 若 $f(x)$ 在定义域上为单调函数，求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1，x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，求 $f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值 .

【解析】 (1)$f'(x)=-\dfrac{2x^2-ax+1}{x}(x>0,a>0)$

设 $g(x)=2x^2-ax+1$.

① $\triangle=a^2-8\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore f'(x)\leqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数；

② $\triangle>0$，即 $a>2\sqrt{2}$ 时，$g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两相异实根，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数，不合题意，

综上，$0<a\leqslant 2\sqrt{2}$；

(2) 由 (1) 知，x_1，x_2 为 $2x^2-ax+1=0$ 的两根，$x_1+x_2=\dfrac{a}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\ln\dfrac{1}{a^4x_1}-x_1^2+ax_1+\ln\dfrac{1}{a^4x_2}-x_2^2+ax_2=\ln 2-8\ln a+\dfrac{a^2}{4}+1$.

设 $h(a)=\ln 2-8\ln a+\dfrac{a^2}{4}+1$，则 $h'(a)=\dfrac{(a+4)(a-4)}{2a}$，

$\therefore h(a)$ 在 $(2\sqrt{2},4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(a)_{\min}=h(4)=5-15\ln 2$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值为 $5-15\ln 2$.

4. 已知函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$($a$ 为常数).

(1) 若 $f(x)$ 是定义域上的单调函数，求 a 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $|x_1-x_2|\leqslant 1$，求 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的取值范围 .

【解析】 (1) $\because f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax(x>0)$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-a=\dfrac{x^2-ax+2}{x}$，

设 $g(x)=x^2-ax+2$，$x\in(0,+\infty)$，

$\because f(x)$ 是定义域上的单调函数，函数 $g(x)$ 的图象为开口向上的抛物线，

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在定义域上恒成立，即 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

又二次函数图象的对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，且图象过定点 $(0,2)$，

$\therefore \dfrac{a}{2}\leqslant 0$ 或 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}>0\\ a^2-8\leqslant 0\end{cases}$，解得：$a\leqslant 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2\sqrt{2}]$；

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 满足 $x^2-ax+2=0$，

所以 $x_1\cdot x_2=2$，$x_1+x_2=a$，

不妨设 $0<x_1<\sqrt{2}<x_2$，则 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上是减函数，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)$

$=2\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2-ax_1-\left(2\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2-ax_2\right)$

$=\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+2\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=\dfrac{1}{2}x_2^2-\dfrac{2}{x_2^2}-2\ln x_2^2+2\ln 2$，

令 $t=x_2^2$，则 $t>2$，又 $|x_1-x_2|=x_2-\dfrac{2}{x_2}\leqslant 1$，

即 $x_2^2-x_2-2\leqslant 0$，解得 $\sqrt{2}<x_2\leqslant 2$，$\therefore 2<t=x_2^2\leqslant 4$.

设 $h(t)=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{2}{t}-2\ln t+2\ln 2(2<t\leqslant 4)$，

则 $h'(t)=\dfrac{(t-2)^2}{2t^2}>0$，$\therefore h(t)$ 在 $(2,4]$ 上单调递增，

$\because h(2)=0$，$h(4)=\dfrac{3}{2}-2\ln 2$，$\therefore h(t)\in\left(0,\dfrac{3}{2}-2\ln 2\right]$，

即 $|f(x_1)-f(x_2)|\in\left(0,\dfrac{3}{2}-2\ln 2\right]$，

所以 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{3}{2}-2\ln 2\right]$.

5. 已知函数 $f(x)=x^2-1+a\ln(1-x)$，$a\in R$.

(Ⅰ) 若函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$. 证明：$\dfrac{f(x_1)}{x_2}>\dfrac{f(x_2)}{x_1}$.

【答案】 (1)$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$;(2) 见解析

【解析】 (Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，求导：$f'(x)=2x-\dfrac{a}{1-x}=\dfrac{-2x^2+2x-a}{1-x}$，$x<1$，

令 $g(x)=-2x^2+2x-a$，则 $\triangle=4-4(-2)(-a)=4-8a$，

当 $4-8a\leqslant 0$ 时，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $-2x^2+2x-a\leqslant 0$ 恒成立，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调减函数，

当 $4-8a>0$ 时，即 $a<\frac{1}{2}$，则 $-2x^2+2x-a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，

当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_1,1)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，不符合题意，

综上可知：函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，则实数 a 的取值范围 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$；

(Ⅱ) 证明：由函数有两个极值点，则 $f'(x)=0$，在 $x<1$ 上有两个不等的实根，

即 $-2x^2+2x-a=0$，在 $x<1$ 有两个不等式的实根，x_1，x_2，

由 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=\frac{a}{2}\end{cases}$，且 $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

则 $\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{x_1^2-1+a\ln(1-x_1)}{x_2}=\frac{(x_1-1)(x_2+1)+2x_1x_2\ln(1-x_1)}{x_2}=-(1+x_1)+2x_1\ln(1-x_1)$，

同理可得：$\frac{f(x_2)}{x_1}=-(1+x_2)+2x_2\ln(1-x_2)$，

则 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}=(x_2-x_1)+2x_1\ln(1-x_1)-2x_2\ln(1-x_2)$，

$=2x_2-1+2(1-x_2)\ln x_2-2x_2\ln(1-x_2)$，

令 $g(x)=2x-1+2(1-x)\ln x-2x\ln(1-x)$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

求导，$g'(x)=-2\ln[x(1-x)]+\frac{2}{x}+\frac{2x}{1-x}$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

由 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $\frac{2}{x}+\frac{2x}{1-x}>0$，则 $g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，上单调递增，则 $g(x)>g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，则 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}>0$，

$\therefore\frac{f(x_1)}{x_2}>\frac{f(x_2)}{x_1}$ 成立．

6. 已知函数 $f(x)=\ln x$.

(1) 若曲线 $g(x)=f(x)+\frac{a}{x}-1$ 在点 $(2,g(2))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行，求实数 a 的值．

(2) 若 $h(x)=f(x)-\frac{b(x-1)}{x+1}$ 在定义域上是增函数，求实数 b 的取值范围．

(3) 设 m、$n\in R^*$，且 $m\neq n$，求证：$\frac{m-n}{m+n}<\left|\frac{\ln m-\ln n}{2}\right|$.

【答案】 (1)$a=4$;(2)$(-\infty,2]$;(3) 见解析

【解析】 (1)$g(x)=\ln x+\frac{a}{x}-1$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$

$g(x)$ 在点 $(2,g(2))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行，

$\therefore g'(2)=\frac{1}{2}-\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=4$

(2) 证：由 $h(x)=\ln x-\frac{b(x-1)}{x+1}$ 得：$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{b(x+1)-b(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-b)x+1}{x(x+1)^2}$

$\because h(x)$ 在定义域上是增函数，$\therefore h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立

$\therefore x^2+2(1-b)x+1>0$,即 $b<\dfrac{x^2+2x+1}{2x}$ 恒成立

$\because \dfrac{x^2+2x+1}{2x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}+1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2x}}+1=2$

当且仅当 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2x}, x=\dfrac{1}{2}$ 时,等号成立

$\therefore b\leqslant 2$,即 b 的取值范围是 $(-\infty, 2]$

(3) 证:不妨设 $m>n>0$,则 $\dfrac{m}{n}>1$

要证 $\dfrac{m-n}{m+n}<\left|\dfrac{\ln m-\ln n}{2}\right|$,即证 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{\ln m-\ln n}{2}$,即 $\dfrac{2\left(\dfrac{m}{n}-1\right)}{\dfrac{m}{n}+1}<\ln\dfrac{m}{n}$

设 $h(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$

由 (2) 知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,$\therefore h(x)>h(1)=0$

故 $\ln\dfrac{m}{n}-\dfrac{2\left(\dfrac{m}{n}-1\right)}{\dfrac{m}{n}+1}>0$, $\therefore \dfrac{m-n}{m+n}<\left|\dfrac{\ln m-\ln n}{2}\right|$ 成立

7. 已知函数 $\varphi(x)=\ln x$.

(1) 若曲线 $g(x)=\varphi(x)+\dfrac{a}{x}-1$ 在点 $(2, g(2))$ 处的切线与直线 $3x+y-1=0$ 平行,求 a 的值;

(2) 求证函数 $f(x)=\varphi(x)-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数;

(3) 设 $m, n\in R^{+}$,且 $m\neq n$,求证:$\dfrac{m-n}{m+n}<\left|\dfrac{\ln m-\ln n}{2}\right|$.

【答案】 (1)$a=14$;(2)(3) 见解析

【解析】 (1)$g(x)=\phi(x)+\dfrac{a}{x}-1=\ln x+\dfrac{a}{x}-1(x>0)$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}(x>0)$,

$\because$ 曲线 $g(x)=\phi(x)+\dfrac{a}{x}-1$ 在点 $(2, g(2))$ 处的切线与直线 $3x+y-1=0$ 平行,

$\therefore g'(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}=-3$,解得 $a=14$;

(2) 证明:$f(x)=\phi(x)-\dfrac{2(x-1)}{x+1}==\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>0)$,

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)=\phi(x)-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数;

(3) 不妨设 $m>n>0$,则 $\dfrac{m}{n}>1$,

要证 $\dfrac{m-n}{m+n}<\left|\dfrac{\ln m-\ln n}{2}\right|$,即证 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{\ln m-\ln n}{2}$,

只需证 $\dfrac{\dfrac{m}{n}-1}{\dfrac{m}{n}+1}<\dfrac{\ln\dfrac{m}{n}}{2}$,即证 $\ln\dfrac{m}{n}>\dfrac{2\left(\dfrac{m}{n}-1\right)}{\dfrac{m}{n}+1}$,

只需证 $\ln\dfrac{m}{n}-\dfrac{2\left(\dfrac{m}{n}-1\right)}{\dfrac{m}{n}+1}>0$,

设 $h(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，由 (2) 得，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调增函数，

$\because x>1$，$\therefore h(x)>h(1)=0$，即 $\ln\dfrac{m}{n}-\dfrac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}>0$，

即 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{\ln m-\ln n}{2}$.

$\therefore$ 不等式 $\dfrac{m-n}{m+n}<\left|\dfrac{\ln m-\ln n}{2}\right|$ 成立．

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $x+y+3=0$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅱ) 设 $g(x)=\ln x$，求证：$g(x)\geqslant f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立；

(Ⅲ) 已知 $0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

【答案】 (1) $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+1}$；(2)(3) 见解析

【解析】 (Ⅰ) 将 $x=-1$ 代入切线方程得 $y=-2$

$\therefore f(-1)=\dfrac{b-a}{1+1}=-2$，化简得 $b-a=-4$

$f'(x)=\dfrac{a(x^2+1)-(ax+b)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$，$f'(-1)=\dfrac{2a+2(b-a)}{4}=\dfrac{2b}{4}=\dfrac{b}{2}=-1$

解得：$a=2$，$b=-2$.

$\therefore f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+1}$.

(Ⅱ) 由已知得 $\ln x\geqslant\dfrac{2x-2}{x^2+1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立

化简 $(x^2+1)\ln x\geqslant 2x-2$

即 $x^2\ln x+\ln x-2x+2\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立

设 $h(x)=x^2\ln x+\ln x-2x+2$，$h'(x)=2x\ln x+x+\dfrac{1}{x}-2$

$\because x\geqslant 1$ $\therefore 2x\ln x\geqslant 0$，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，

即 $h'(x)\geqslant 0$

$\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)\geqslant h(1)=0$

$\therefore g(x)\geqslant f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立

(Ⅲ) $\because 0<a<b$ $\therefore \dfrac{b}{a}>1$，

由 (Ⅱ) 知有 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2\frac{b}{a}-2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}$，整理得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

$\therefore$ 当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+mx$（m 为常数）.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $m\leqslant-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2$ 的两个极值点 x_1，x_2($x_1<x_2$) 恰为 $h(x)=2\ln x-ax-x^2$ 的

零点，求 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值．

【答案】 (1) 当 $m<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,-\frac{1}{m}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{m},+\infty\right)$；

当 $m\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

(2) $2\ln 2-\frac{4}{3}$

【解析】 (1)$f'(x)=\frac{1}{x}+m=\frac{1+mx}{x}$，$x>0$，

当 $m<0$ 时，由 $1+mx>0$，解得 $x<-\frac{1}{m}$，

即当 $0<x<-\frac{1}{m}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

由 $1+mx<0$ 解得 $x>-\frac{1}{m}$，即当 $x>-\frac{1}{m}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $m=0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m>0$ 时，$1+mx>0$，故 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

所以当 $m<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,-\frac{1}{m}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{m},+\infty\right)$；

当 $m\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

(2) 由 $g(x)=\ln x+mx+\frac{1}{2}x^2$ 得 $g'(x)=\frac{1}{x}+m+x=\frac{x^2+mx+1}{x}$，

由已知 $x^2+mx+1=0$ 有两个互异实根 x_1，x_2，

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=1$，

因为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是 $h(x)$ 的两个零点，

故 $h(x_1)=2\ln x_1-x_1^2-ax_1=0$ ① $h(x_2)=2\ln x_2-x_2^2-ax_2=0$ ②

由② − ①得：$2\ln\frac{x_2}{x_1}-(x_2^2-x_1^2)-a(x_2-x_1)=0$，

解得 $a=\dfrac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)$，

因为 $h'(x)=\frac{2}{x}-2x-a$，得 $h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{4}{x_1+x_2}-2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-a$，

将 $a=\dfrac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)$ 代入得：

$$h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{4}{x_1+x_2}-2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\left[\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)\right]$$

$$=-\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{4}{x_1+x_2}=-\frac{2}{x_2-x_1}\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}\right]=-\frac{2}{x_2-x_1}\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-2\frac{\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}\right],$$

所以 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=2\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-2\dfrac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\frac{x_2}{x_1}+1}\right]$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，因为 $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=m^2\geqslant\frac{9}{2}$，

所以 $x_1^2+x_2^2\geqslant\frac{5}{2}$，所以 $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant\frac{5}{2}$，

所以 $t+\frac{1}{t}\geqslant\frac{5}{2}$，所以 $t\geqslant 2$.

构造 $F(t)=\ln t-2\frac{t-1}{t+1}$，得 $F'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

则 $F(t)=\ln t-2\frac{t-1}{t+1}$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $F(x)_{\min}=F(2)=\ln 2-\frac{2}{3}$，即 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值为 $2\ln 2-\frac{4}{3}$.

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx(m\in R)$.

(Ⅰ) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 当 $m\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $g(x)=2f(x)+x^2$ 的两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 恰为 $h(x)=\ln x-cx^2-bx$ 的零点，求 $y=(x_1-x_2)h'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值.

【答案】 (I) 当 $m>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$；

当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

$(II)-\frac{2}{3}+\ln 2$.

【解析】 $(I)\because$ 函数 $f(x)=\ln x-mx$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，$x>0$；

当 $m>0$ 时，由 $1-mx>0$ 解得 $x<\frac{1}{m}$，

即当 $0<x<\frac{1}{m}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

由 $1-mx<0$ 解得 $x>\frac{1}{m}$，即当 $x>\frac{1}{m}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $m=0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m<0$ 时，$1-mx>0$，故 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$\therefore$ 当 $m>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$；

当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

$(II)g(x)=2f(x)+x^2=2\ln x-2mx+x^2$，则 $g'(x)=\frac{2(x^2-mx+1)}{x}$，

$\therefore g'(x)$ 的两根 x_1，x_2 即为方程 $x^2-mx+1=0$ 的两根；

又 $\because m\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\triangle=m^2-4>0$，$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=1$；

又 $\because x_1$，x_2 为 $h(x)=\ln x-cx^2-bx$ 的零点，

$\therefore\ln x_1-cx_1^2-bx_1=0$，$\ln x_2-cx_2^2-bx_2=0$，

两式相减得 $\ln\frac{x_1}{x_2}-c(x_1-x_2)(x_1+x_2)-b(x_1-x_2)=0$，

得 $b=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-c(x_1+x_2)$，而 $h'(x)=\frac{1}{x}-2cx-b$，

$\therefore y=(x_1-x_2)\left[\dfrac{2}{x_1+x_2}-c(x_1+x_2)-b\right]$

$=(x_1-x_2)\left[\dfrac{2}{x_1+x_2}-c(x_1+x_2)-\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+c(x_1+x_2)\right]$

$=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-\ln\dfrac{x_1}{x_2}=2\cdot\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}-\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，

令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，

由 $(x_1+x_2)^2=m^2$ 得 $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=m^2$，

因为 $x_1x_2=1$，两边同时除以 x_1x_2，得 $t+\dfrac{1}{t}+2=m^2$，

$\because m\geqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故 $t+\dfrac{1}{t}\geqslant\dfrac{5}{2}$，解得 $t\leqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $t\geqslant 2$，$\therefore 0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$；

设 $G(t)=2\cdot\dfrac{t-1}{t+1}-\ln t$，

$\therefore G'(t)=\dfrac{-(t-1)^2}{t(t+1)}<0$，则 $y=G(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上是减函数，

$\therefore G(t)_{\min}=G\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}+\ln 2$，

即 $y=(x_1-x_2)h'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的最小值为 $-\dfrac{2}{3}+\ln 2$.

专题20：凹凸反转问题

1. 设函数 $f(x)=\ln x-\mathrm{e}^{1-x}$，$g(x)=a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}$.

(1) 判断函数 $y=f(x)$ 零点的个数，并说明理由；

(2) 记 $h(x)=g(x)-f(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x-ex}{xe^x}$，讨论 $h(x)$ 的单调性；

(3) 若 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 1;

(2) $a\leqslant 0$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，$a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 递增；

(3) $a\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 (1) 由题意得：$x>0$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；

又 $f(1)=-1$，$f(\mathrm{e})=1-\mathrm{e}^{1-\mathrm{e}}=1-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}>0$，故函数 $y=f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内存在零点，

$\therefore y=f(x)$ 的零点个数是1；

(2)$h(x)=a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}-\ln x+\mathrm{e}^{1-x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}=ax^2-a-\ln x$，

$h'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-1}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

当 $a>0$ 时，由 $h'(x)=0$，解得：$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$（舍取负值），

$\therefore x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，$x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，

综上，$a\leqslant 0$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，$a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 递增；

(3) 由题意得：$\ln x-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}<a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}$，

问题等价于 $a(x^2-1)-\ln x>\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，

设 $k(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-ex}{xe^x}$，若记 $k_1(x)=\mathrm{e}^x-ex$，则 $k_1'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，

$x>1$ 时，$k_1'(x)>0$，$k_1(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，

$k_1(x)>k_1(1)=0$，即 $k(x)>0$，

若 $a\leqslant 0$，由于 $x>1$，故 $a(x^2-1)-\ln x<0$，故 $f(x)>g(x)$，

即当 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立时，必有 $a>0$，

当 $a>0$ 时，设 $h(x)=a(x^2-1)-\ln x$，

①若 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}>1$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，由 (2) 得 $x\in\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$，$h(x)$ 递减，$x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$，$h(x)$ 递增，

故 $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)<h(1)=0$，而 $k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，即存在 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}>1$，使得 $f(x)<g(x)$，

故 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)<g(x)$ 不恒成立；

②若 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\leqslant 1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

设 $s(x)=a(x^2-1)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$，$s'(x)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$，

由于 $2ax\geqslant x$，且 $k_1(x)=\mathrm{e}^x-ex>0$，即 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}<\frac{1}{x}$，故 $-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}>-\frac{1}{x}$，

因此 $s'(x)>x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}>\frac{x^2-2+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$，

故 $s(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，故 $s(x)>s(1)=0$，

即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，

综上，$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立.

2. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，证明 $f(x)>1$.

【解析】 证明：$\because f(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2}{x}\mathrm{e}^{x-1}$，

从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{\mathrm{e}}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增，

从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{\mathrm{e}}$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$；

因为 $g_{\min}(x)=h(1)=h_{\max}(x)$，

所以当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

3. 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-x$.

(1) 当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $a=1$ 时，证明：$f(x)-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

【答案】 (1) $f(x)$ 极大值为 $\ln2-3$，无极小值；(2) 见解析。

【解析】 (1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{2}{x}-x$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1=-\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减；

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=\ln2-3$，$f(x)$ 无极小值；

(2) 当 $a=1$ 时，$f(x)-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+x=\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，

下面证 $\ln x+\frac{1}{x}>\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，即证 $x\ln x+1>\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，

设 $g(x)=x\ln x+1$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 是减函数；在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 是增函数.

所以 $g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$，

设 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

在 $(0,1)$ 上，$h'(x)>0$，$h(x)$ 是增函数；在 $(1,+\infty)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 是减函数，

所以 $h(x)\leqslant h(1)=\frac{1}{e}<1-\frac{1}{e}$，

所以 $h(x)<g(x)$，即 $\frac{x}{e^x}<x\ln x+1$，所以 $x\ln x+1-\frac{x}{e^x}>0$，即 $\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}>0$，

即 $f(x)-\frac{1}{e^x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

4. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-\ln(x+a)$.

(Ⅰ) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(Ⅱ) 当 $a\leqslant 1$ 时，证明：$f(x)>0$.

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 1，$f(x)$ 无极大值。

(2) 见解析。

【解析】 (Ⅰ)$a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^{x-\frac{1}{2}}-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$，$f'(x)=e^{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(x>-\frac{1}{2}\right)$，

注意到 $y=e^{x-\frac{1}{2}}$ 与 $y=-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$ 都是增函数，于是 $f'(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上递增，

又 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；故 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 1，$f(x)$ 无极大值。

(Ⅱ) 方法一：当 $a\leqslant 1$，$x\in(-a,+\infty)$ 时，$x-a\geqslant x-1$，$x+a\leqslant x+1$，

$\therefore e^{x-a}\geqslant e^{x-1}$，$\ln(x+a)\leqslant\ln(x+1)$，$e^{x-a}-\ln(x+a)\geqslant e^{x-1}-\ln(x+1)$

故只需证明当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln(x+1)>0$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单增，

又 $f'(0)=\frac{1}{e}-1<0$，$f'(1)=\frac{1}{2}>0$，

故 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一零点 $x_0\in(0,1)$.

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

从而 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$ 得：$e^{x_0-1}=\frac{1}{x_0+1}$，$\ln(x_0+1)=1-x_0$，

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=e^{x_0-1}-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}+x_0-1=\frac{x_0^2}{x_0+1}>0$，

综上，当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)>0$.

方法二：先证不等式 $e^x \geqslant x+1$ 与 $x-1 \geqslant \ln x$，

设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1=0 \Rightarrow x=0$，

可得 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单减，在 $(0,+\infty)$ 上单增，

$\therefore g(x)=e^x-x-1 \geqslant g(0)=0$，即 $e^x \geqslant x+1$；

设 $h(x)=x-1-\ln x$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1$，

可得 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增，在 $(1,+\infty)$ 上单减，

$\therefore h(x)=x-1-\ln x \geqslant h(1)=0$，即 $x-1 \geqslant \ln x$.

于是，当 $a \leqslant 1$ 时，$e^{x-a} \geqslant x-a+1 \geqslant x+a-1 \geqslant \ln(x+a)$，

注意到以上三个不等号的取等条件分别为：$x=a$、$a=1$、$x+a=1$，它们无法同时取等，

所以，当 $a \leqslant 1$ 时，$e^{x-a}>\ln(x+a)$，即 $f(x)>0$.

5. 设函数 $f(x)=ae^x$，$g(x)=\ln x+b$，其中 $a,b\in R$，e 是自然对数的底数.

(1) 设 $F(x)=xf(x)$，当 $a=e^{-1}$ 时，求 $F(x)$ 的最小值；

(2) 证明：当 $a=e^{-1}$，$b<1$ 时，总存在两条直线与曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都相切；

(3) 当 $a \geqslant \dfrac{2}{e^2}$ 时，证明：$f(x)>x[g(x)-b]$.

【答案】 (1) $F(x)$ 最小值是 $-e^{-2}$;(2)(3) 见解析

【解析】 (1)$F(x)=xe^{x-1}$，$F'(X)=(x+1)e^{x-1}$，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

故 $x=-1$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(-1)=-e^{-2}$；

(2) $\because f'(x)=e^{x-1}$，$\therefore f(x)=e^{x-1}$ 在 (m,e^{m-1}) 处的切线方程为 $y=e^{m-1}x+(1-m)e^{m-1}$，

$\because g'(x)=\dfrac{1}{x}$，$\therefore g(x)=\ln x+b$ 在点 $(n,\ln n+b)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{n}x+\ln n+b-1$，

由题意得 $\begin{cases} e^{m-1}=\dfrac{1}{n} \\ (1-m)e^{m-1}=\ln n+b-1 \end{cases}$，则 $(m-1)e^{m-1}-m+b=0$，

令 $h(m)=(m-1)e^{m-1}-m+b$，则 $h'(x)=me^{m-1}-1$，

由 (1) 得 $m<-1$ 时，$h'(m)$ 单调递减，且 $h'(m)<0$，

当 $m>-1$ 时，$h'(m)$ 单调递增，又 $h'(1)=0$，$m<1$ 时，$h'(m)<0$，

$\therefore$ 当 $m<1$ 时，$h'(m)<0$，$h(m)$ 单调递减；当 $m>1$ 时，$h'(m)>0$，$h(m)$ 单调递减，

由 (1) 得 $h(b-1)=(b-2)e^{b-2}+1 \geqslant -\dfrac{1}{e}+1>0$，

又 $h(3-b)=(2-b)e^{2-b}+2b-3>(2-b)(3-b)+2b-3=\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

$h(1)=b-1<0$，所以函数 $h(m)$ 在 $(b-1,1)$ 和 $(1,3-b)$ 内各有一个零点，

故当 $b<1$ 时，总存在两条直线与曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都相切；

(3) 证明：$f(x)>x[g(x)-b] \Leftrightarrow \dfrac{ae^x}{x}-\ln x>0$，

令 $G(x)=\dfrac{ae^x}{x}-\ln x(x>0)$，以下证明当 $a \geqslant \dfrac{2}{e^2}$ 时，$G(x)$ 的最小值大于 0，

求导的 $G'(x)=\dfrac{q(x-1)e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a(x-1)e^x-x}{x^2}$，

①当 $0<x\leqslant 1$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)\geqslant G(1)=ae>0$，

②当 $x>1$ 时，$G'(x)=\dfrac{a(x-1)}{x^2}\left[e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}\right]$，令 $H(x)=e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}$，

$H'(x)=e^x+\dfrac{1}{a(x-1)^2}>0$，又 $H(2)=e^2-\dfrac{2}{a}=\dfrac{ae^2-2}{a}\geqslant 0$，

$H'(x)=e^x+\dfrac{1}{a(x-1)^2}>0$，又 $H(2)=e^2-\dfrac{2}{a}=\dfrac{ae^2-2}{a}\geqslant 0$

取 $t\in(1,2)$ 且使 $\dfrac{t}{a(t-1)}>e^2$，即 $1<t<\dfrac{ae^2}{ae^2-1}$，

则 $H(x)=e^x-\dfrac{t}{a(t-1)}<e^2-e^2=0$，

$\because H(t)H(2)<0$，故 $H(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(1,2)$，

即 $G(x)$ 有唯一的极值点 $x_0\in(1,2)$，又 $G(x_0)=\dfrac{ae^{x_0}}{x_0}-\ln x_0$，

且 $H(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{x_0}{a(x_0-1)}=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{x_0}{a(x_0-1)}$，故 $G(x_0)=\dfrac{1}{x_0-1}-\ln x_0$，

$\because G'(x)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}-\dfrac{1}{x_0}<0$，故 $G(x_0)$ 是 $(1,2)$ 上的减函数，

$\therefore G(x_0)>G(2)=1-\ln 2>0$，所以 $G(x)>0$，

综上所求，当 $a\geqslant\dfrac{2}{e^2}$ 时，$f(x)>x[g(x)-b]$.

6. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2+x+1$.

(1) 当 $a=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2) 当 $a=0$ 时，证明：$xe^x\geqslant f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

【答案】 (1)$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，无极小值点；(2) 见解析。

【解析】 (1) 由题意得 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+1=\dfrac{-2x^2+x+1}{x}$，

当 $f'(x)>0$ 时，$0<x<1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数；

当 $f'(x)<0$ 时，$x>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数；

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，无极小值点

(2) 证明：令 $F(x)=xe^x-f(x)=xe^x-\ln x-x-1(x>0)$，

则 $F'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+1}{x}\cdot(xe^x-1)$，

令 $G(x)=xe^x-1$，则因为 $G'(x)=(x+1)e^x>0(x>0)$，

所以函数 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上最多有一个零点，

又因为 $G(0)=-1<0$，$G(1)=e-1>0$，所以存在唯一的 $c\in(0,1)$ 使得 $G(c)=0$，

且当 $x\in(0,c)$ 时，$G(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$G(x)>0$，

即当 $x\in(0,c)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$F'(0)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,c)$ 上单调递减，在 $(c,+\infty)$ 上单调递增，从而 $F(x)\geqslant F(c)=c\cdot e^c-\ln c-c-1$，

由 $G(c)=0$ 得 $c\cdot e^x-1=0$ 即 $c\cdot e^c=1$，两边取对数得：$\ln c+c=0$，

所以 $F(c)=0$，$F(x)\geqslant F(c)=0$，从而证得 $xe^x\geqslant f(x)$.

专题21：与三角函数有关题

1. 已知函数$f(x)=2\sin x+\tan x-2x$.

(1) 证明：函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增；

(2) 若$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<mx^2$，求$m$的取值范围.

【答案】 (1) 见解析；(2)$(-\infty,0]$.

【解析】 (1) 证明：$f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2$，

因为$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos x\in(0,1]$，

于是$f'(x)=2\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\geqslant\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\geqslant 0$(等号当且仅当$x=0$时成立).

故函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

(2) 由(1)得$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，又$f(0)=0$，所以$f(x)>0$，

(ⅰ) 当$m\leqslant 0$时，$f(x)>0\geqslant mx^2$成立.

(ⅱ) 当$m>0$时，令$p(x)=\sin x-x$，则$p'(x)=\cos x-1$，

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$p'(x)<0$，$p(x)$单调递减，又$p(0)=0$，所以$p(x)<0$，

故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x<x$. (*)

由(*)式可得$f(x)-mx^2=\sin x+\tan x-2x-mx^2<\tan x-x-mx^2$，

令$g(x)=\tan x-x-mx^2$，则$g'(x)=\tan^2 x-2mx$

由(*)式可得$g'(x)<\dfrac{x^2}{\cos^2 x}-2mx=\dfrac{x}{\cos^2 x}(x-2m\cos^2 x)$

令$h(x)=x-2m\cos^2 x$，得$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

又$h(0)<0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，所以存在$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$h(t)=0$，

即$x\in(0,t)$时，$h(x)<0$，

所以$x\in(0,t)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

又$g(0)=0$，所以$g(x)<0$，

即$x\in(0,t)$时，$f(x)-mx^2<0$，与$f(x)>mx^2$矛盾.

综上，满足条件的m的取值范围是$(-\infty,0]$.

2. 已知函数$f(x)=\ln(e^x+a)$(a为常数，e是自然对数的底数)是实数集R上的奇函数，函数$g(x)=\lambda f(x)+\sin x$是区间$[-1,1]$上的减函数.

(Ⅰ) 求a的值；

(Ⅱ) 若$g(x)\leqslant t^2+\lambda t+1$在$x\in[-1,1]$及$\lambda$所在的取值范围上恒成立，求$t$的取值范围；

(Ⅲ) 试讨论函数$h(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}-x^2+2ex-m$的零点的个数.

【答案】 (1) $a=0$;(2) $t\leqslant -1$;

(3) ①当$m-e^2>\dfrac{1}{e}$，即$m>e^2+\dfrac{1}{e}$时，方程无解. 函数$h(x)$没有零点；

②当 $m-e^2=\dfrac{1}{e}$，即 $m=e^2+\dfrac{1}{e}$ 时，方程有一个根．函数 $h(x)$ 有 1 个零点

③当 $m-e^2<\dfrac{1}{e}$，即 $m<e^2+\dfrac{1}{e}$ 时，方程有两个根．函数 $h(x)$ 有 2 个零点．

【解析】 (Ⅰ) $\because f(x)=\ln(e^x+a)$ 是 R 上的奇函数

$\therefore f(0)=0$，$\therefore f(0)=\ln(e^0+a)=0$

$\therefore \ln(1+a)=0$，$\therefore a=0$

(Ⅱ) 由 (I) 知 $f(x)=x$，$\therefore g(x)=\lambda x+\sin x$，$\therefore g'(x)=\lambda+\cos x$

又 $\because g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

$\therefore g'(x)\leqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立．

$\therefore \lambda\leqslant -\cos x$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，

$\because [-\cos x]_{\min}=-1$，$\therefore \lambda\leqslant -1$

$\because g(x)\leqslant t^2+\lambda t+1$ 在 $x\in[-1,1]$ 上恒成立，即 $g(x)_{\max}\leqslant t^2+\lambda t+1$

$\because g(x)_{\max}=g(-1)=-\lambda-\sin 1$，

$\therefore -\lambda-\sin 1\leqslant t^2+\lambda t+1$，

即 $(t+1)\lambda+t^2+\sin 1+1\geqslant 0$ 对 $\lambda\leqslant -1$ 恒成立

令 $F(\lambda)=(t+1)\lambda+t^2+\sin 1+1(\lambda\leqslant -1)$，则 $\begin{cases}t+1\leqslant 0\\-t-1+t^2+\sin 1+1\geqslant 0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}t\leqslant -1\\t^2-t+\sin 1\geqslant 0\end{cases}$，$\therefore t\leqslant -1$．

(Ⅲ) 由 (I) 知 $f(x)=x$，$\therefore h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ex-m$

$\therefore$ 讨论函数 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ex-m$ 的零点的个数，即讨论方程 $\dfrac{\ln x}{x}=x^2-2ex+m$ 根的个数．

令 $f_1(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$f_2(x)=x^2-2ex+m$，

$\because f_1'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时，$f_1'(x)>0$，$\therefore f_1(x)$ 在 $(0,e)$ 上为增函数；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f_1'(x)<0$，$\therefore f_1(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上为减函数，

$\therefore$ 当 $x=e$ 时，$f_1(x)_{\max}=f_1(e)=\dfrac{1}{e}$

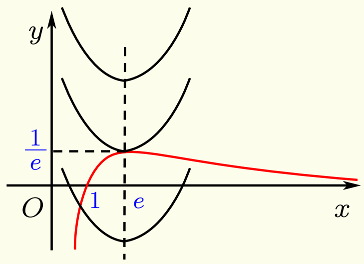
而 $f_2(x)=(x-e)^2+m-e^2$，

$\therefore$ 函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 在同一坐标系的大致图象如图所示，

$\therefore$ ①当 $m-e^2>\dfrac{1}{e}$，即 $m>e^2+\dfrac{1}{e}$ 时，方程无解．函数 $h(x)$ 没有零点；

②当 $m-e^2=\dfrac{1}{e}$，即 $m=e^2+\dfrac{1}{e}$ 时，方程有一个根．函数 $h(x)$ 有 1 个零点；

③当 $m-e^2<\dfrac{1}{e}$，即 $m<e^2+\dfrac{1}{e}$ 时，方程有两个根．函数 $h(x)$ 有 2 个零点．



3. 已知函数 $f(x)=2x+ax^2+b\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=\frac{3\pi}{4}$.

(Ⅰ) 求 a，b 的值，并讨论 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的增减性；

(Ⅱ) 若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $0<x_1<x_2<\pi$，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

(参考公式：$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$)

【答案】 (1) $a=-\frac{1}{\pi},b=1$; $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 为增函数；(2) 见解析。

【解析】 (Ⅰ) 由题意知 $f'(x)=2+2ax-b\sin x$，$\therefore \begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{\pi} \\ b=1 \end{cases}$

故 $f(x)=2x-\frac{1}{\pi}x^2+\cos x$，$f'(x)=2-\frac{2}{\pi}x-\sin x$.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)$ 为减函数，且 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

(Ⅱ) 证明：由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $2x_1-\frac{x_1^2}{\pi}+\cos x_1=2x_2-\frac{x_2^2}{\pi}+\cos x_2$，

所以 $2(x_1-x_2)-\frac{1}{\pi}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\cos x_1-\cos x_2=0$，

两边同除以 x_1-x_2，得 $2-\frac{1}{\pi}(x_1+x_2)+\frac{\cos x_1-\cos x_2}{x_1-x_2}=0$，

所以 $2-\frac{1}{\pi}(x_1+x_2)+\frac{-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}=0$，

令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，得 $2-\frac{2}{\pi}x_0-\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}=0$，

得 $2-\frac{2}{\pi}x_0=\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}$.

因为 $f'(x)=2-\frac{2x}{\pi}-\sin x$，

所以 $f'(x_0)=2-\frac{2}{\pi}x_0-\sin x_0=\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}-\sin x_0=\sin x_0\cdot\left(\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}-1\right)$，

因为 $\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}=\frac{\sin\frac{x_2-x_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}}$，

又 $\dfrac{x_2-x_1}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，易知 $0<\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}<\dfrac{x_2-x_1}{2}$，所以 $\dfrac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}-1<0$，

又 $x_0\in(0,\pi)$，所以 $\sin x_0>0$，故 $f'(x_0)<0$，得 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

4. 设 $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1$.

(Ⅰ) 求证：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$；

(Ⅱ) 若不等式 $e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】 (Ⅰ) 见解析。(Ⅱ) $[1,+\infty)$

【解析】 (Ⅰ) 证明：$f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1(x\geqslant 0)$，则 $f'(x)=x-\sin x$，

设 $\varphi(x)=x-\sin x$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，即 $f'(x)=x-\sin x$ 为增函数，

所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，

即 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时为增函数，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

(Ⅱ) 解法一：由 (Ⅰ) 知 $x\geqslant 0$ 时，$\sin x\leqslant x$，$\cos x\geqslant -\dfrac{x^2}{2}+1$，

所以 $\dfrac{x^2}{2}+x+1\geqslant\sin x-\cos x+2$，

设 $G(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1$，则 $G'(x)=e^x-x-1$，

设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，

当 $x\geqslant 0$ 时 $g'(x)=e^x-1\geqslant 0$，所以 $g(x)=e^x-x-1$ 为增函数，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $G(x)$ 为增函数，所以 $G(x)\geqslant G(0)=0$，

所以 $e^x\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立.

又 $x\geqslant 0$，$a\geqslant 1$ 时，$e^{ax}\geqslant e^x$，

所以 $a\geqslant 1$ 时 $e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立。

当 $a<1$ 时，设 $h(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2$，则 $h'(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x$，$h'(0)=a-1<0$，

所以存在实数 $x_0>0$，使得任意 $x\in(0,x_0)$，均有 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 为减函数，

所以在 $x\in(0,x_0)$ 时 $h(x)<h(0)=0$，所以 $a<1$ 时不符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

(Ⅱ) 解法二：因为 $e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$ 等价于 $ax\geqslant\ln(\sin x-\cos x+2)$

设 $g(x)=ax-\ln(\sin x-\cos x+2)$，则 $g'(x)=a-\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x+2}$

可求 $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x+2}\in[-1,1]$，

所以当 $a\geqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $ax\geqslant\ln(\sin x-\cos x+2)$，即 $e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$

所以 $a\geqslant 1$ 时，$e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意 $x\geqslant 0$ 恒成立.

当 $a<1$ 时，一定存在 $x_0>0$，满足在 $(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 是减函数，此时一定有 $g(x)<g(0)=0$，

即 $ax<\ln(\sin x-\cos x+2)$，即 $e^{ax}<\sin x-\cos x+2$，不符合题意，故 $a<1$ 不能满足题意，

综上所述，$a\geqslant 1$ 时，$e^{ax}\geqslant \sin x-\cos x+2$ 对任意 $x\geqslant 0$ 恒成立.

5. 已知函数 $f(x)=e^x\sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 如果对于任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geqslant kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

(3) 设函数 $F(x)=f(x)+e^x\cdot\cos x$，$x\in\left[-\frac{2015\pi}{2},\frac{2017\pi}{2}\right]$. 过点 $M\left(\frac{\pi-1}{2},0\right)$ 作函数 $F(x)$ 的图象的所有切线，令各切点的横坐标构成数列 $\{x_n\}$，求数列 $\{x_n\}$ 的所有项之和 S 的值.

【答案】 (1) $f(x)$ 的增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in Z)$；减区间为 $\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right](k\in Z)$.

(2) $(-\infty,1]$; (3) 1008π

【解析】 (1) $\because f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in Z)$；减区间为 $\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right](k\in Z)$.

(2) 令 $g(x)=f(x)-kx=e^x\sin x-kx$

要使 $f(x)\geqslant kx$ 恒成立，只需当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g(x)_{\min}\geqslant 0$，

$\because g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-k$

令 $h(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，则 $h'(x)=2e^x\cos x\geqslant 0$ 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，则 $h(x)\in\left[1,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$，

①当 $k\leqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=0$，$\therefore k\leqslant 1$ 满足题意；

②当 $1<k<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)=0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有实根 x_0，$h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，

则当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x_0)<g(0)=0$ 不符合题意；

③当 $k\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，

$\therefore g(x)<g(0)=0$ 不符合题意，$\therefore k\leqslant 1$，即 $k\in(-\infty,1]$.

(3) $\because F(x)=f(x)+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$ $\therefore F'(x)=2e^x\cos x$，

设切点坐标为 $(x_0,e^{x_0}(\sin x_0+\cos x_0))$，则切线斜率为 $F'(x_0)=2e^{x_0}\cos x_0$，

从而切线方程为 $y-e^{x_0}(\sin x_0+\cos x_0)=2e^{x_0}\cos x_0(x-x_0)$ ，

$\therefore -e^{x_0}(\sin x_0+\cos x_0)=2e^{x_0}\cos x_0\left(\frac{\pi-1}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow \tan x_0=2\left(x_0-\frac{\pi}{2}\right)$，

令 $y_1=\tan x$，$y_2=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，这两个函数的图象均关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称，

则它们交点的横坐标也关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，

从而所作的所有切线的切点的横坐标构成数列 $\{x_n\}$ 的项也关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 成对出现，

又在 $\left[-\frac{2015\pi}{2},\frac{2017\pi}{2}\right]$ 共有 1008 对，每对和为 π.

$\therefore S=1008\pi$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 如果对于任意的 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，$f(x)\leqslant kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right),(k\in Z)$；单调递减区间为 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right),(k\in Z)$；(2) $(-\infty,1]$

【解析】 (1) 由于 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$，

当 $\cos x-\sin x>0$，$\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，即 $x\in\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$k\in Z$ 时，$f'(x)>0$；

当 $\cos x-\sin x<0$，$\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，即 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$k\in Z$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right),(k\in Z)$，

单调递减区间为 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right),(k\in Z)$；

(2) 令 $g(x)=f(x)-kx=\dfrac{\sin x}{e^x}-kx$，

要使 $f(x)\leqslant kx$ 总成立，只需 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 时 $g(x)_{\max}\leqslant 0$，

对 $g(x)$ 求导，可得 $g'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}-k$，

令 $h(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{-2\cos x}{e^x}<0\left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]\right)$

所以 $h(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上为减函数，所以 $h(x)\in\left[1,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$；

对 k 分类讨论：

①当 $k\leqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上为增函数，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=0$，即 $g(x)\leqslant 0$，故成立；

②当 $1<k<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)=0$ 在上有实根 x_0，

因为 $h(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上为减函数，所以当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x_0)>g(0)=0$，不符合题意；

③当 $k\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上为减函数，

则 $g(x)\leqslant g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{k\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}$，由 $\dfrac{k\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\leqslant 0$，可得 $k\leqslant\dfrac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi}$，

即有 $k\in\varnothing$.

综上，可得实数 k 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

7. 已知函数 $f(x)=e^x\sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 如果对于任意的 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geqslant kx$ 总成立，求实数 k 的取值范围.

【答案】 (2) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)(k\in Z)$，单调递减区间为

$\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)(k\in Z)$；(2)　$(-\infty,1]$

【解析】 (1) 由于 $f(x)=e^x\sin x$，

所以 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x+\frac{\pi}{4}\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$，即 $x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x+\frac{\pi}{4}\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$，即 $x\in\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in Z)$，

单调递减区间为 $\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)(k\in Z)$；

(2) 令 $g(x)=f(x)-kx=e^x\sin x-kx$，

要使 $f(x)\geqslant kx$ 总成立，只需 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时 $g(x)_{\min}\geqslant 0$，

对 $g(x)$ 求导，可得 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-k$，

令 $h(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，

则 $h'(x)=2e^x\cos x>0$，$\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$

所以 $h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，所以 $h(x)\in\left[1,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$；

对 k 分类讨论：

①当 $k\leqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，即 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立；

②当 $1<k<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)=0$ 在上有实根 x_0，

因为 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x_0)<g(0)=0$，不符合题意；

③当 $k\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，

则 $g(x)<g(0)=0$，不符合题意.

综上，可得实数 k 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

8. 已知 $f(x)=\sin x-\cos x-ax$，其中 $a\in R$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求实数 a 的值.

(2) 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1)　$a=1$;(2) $a\leqslant -1$

【解析】 (1)$f'(x)=\cos x+\sin x-a$，由 $f'(0)=0$ 可得 $1-a=0$，$a=1$；

经检验，$a=1$ 满足题意.

(2) $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增.

$\therefore f'(x)=\cos x+\sin x-a\geqslant 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立.

即 $a\leqslant\cos x+\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立

. 即 $a\leqslant(\cos x+\sin x)_{\min}$

$\because y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y_{\min}=-1$

$\therefore a\leqslant-1$.

检验，$a=-1$ 时，$f'(x)=\cos x+\sin x+1=0$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，仅在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 处取得.

所以满足题意. $\therefore a\leqslant-1$.

9. 已知 $f(x)=\sin x-\cos x-ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，求实数 a 的取值范围；

(2) 证明：当 $a=\frac{2}{\pi}$ 时，$f(x)\geqslant-1$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立.

【答案】 (1) $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{2},+\infty)$;(2) 见解析。

【解析】 (1)$f'(x)=\cos x+\sin x-a=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a$

若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，则当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$,

此时 $a\leqslant-1$；

若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，同理可得 $a\geqslant\sqrt{2}$

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{2},+\infty)$

(2)$a=\frac{2}{\pi}$ 时，$f(x)=\sin x-\cos x-\frac{2}{\pi}x$,$f'(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{\pi}$

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减，

$f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0$,$f'(x)=-1-\frac{2}{\pi}<0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，使得在 $[0,x_0)$ 上 $f'(x)>0$，在 $(x_0,\pi]$ 上 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\pi]$ 上单调递减

故在 $[0,\pi]$ 上，$f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(\pi)\}=-1$，

所以 $f(x)\geqslant-1$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立

10. 已知 $f(x)=x\ln x+\frac{a}{2}x^2+1$.

(1) 若 $f(x)$ 在其定义域上为单调递减函数，求实数 a 的取值范围；

(2) 若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-x\ln x-1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点.

(ⅰ) 求实数 a 的取值范围；

(ⅱ) 证明：若 $x>1$，则不等式 $(x-1)\left[f(x)-\frac{a}{2}x^2\right]>ax\ln x$ 成立.

【答案】 (1) $a\leqslant-1$;(2)(ⅰ) $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ (ⅱ) 见解析。

【解析】 (1)$f'(x)=\ln x+1+ax\leqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\leqslant\frac{-\ln x-1}{x}$，令 $h(x)=\frac{-\ln x-1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，

由 $\frac{\ln x}{x^2}>0$，得 $x>1$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

由 $\frac{\ln x}{x^2}<0$，得 $0<x<1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

所以当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得最小值 $h(1)=-1$，

所以 $a\leqslant -1$.

(2) (i)$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$，

当 $a\geqslant 1$ 时，$a-\sin x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点.

当 $0<a<1$ 时，$\exists\, x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\sin x_0=a$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a\pi^2}{8}-1$，

所以若 $\frac{a\pi^2}{8}-1>0$，即 $a>\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点，

若 $\frac{a\pi^2}{8}-1\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=a-x\sin x<0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有一个零点

(ii) 证明：要证当 $x>1$ 时，$(x-1)\left[f(x)-\frac{a}{2}x^2\right]>ax\ln x$ 成立，

只需证 $(x-1)\left[x\ln x+1\right]>ax\ln x$，只需证 $\ln x+\frac{1}{x}>a\cdot\frac{\ln x}{x-1}$，

设 $F(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x\geqslant 1$，则 $F'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)>F(1)=1$，

由 (1) 知，$a=-1$ 时，$f'(x)=\ln x+1-x\leqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$ 即 $\frac{\ln x}{x-1}<1$，

所以 $\ln x+\frac{1}{x}>\frac{\ln x}{x-1}$，

又因为 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$，所以 $a<1$，

所以 $\frac{\ln x}{x-1}>a\frac{\ln x}{x-1}$，所以 $\ln x+\frac{1}{x}>a\cdot\frac{\ln x}{x-1}$，

即 $x>1$，不等式 $(x-1)\left[f(x)-\frac{a}{2}x^2\right]>ax\ln x$ 成立.

专题22：隐零点设而不求

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$ 的图象在点 $A(0,-1)$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅲ) 若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$，求 k 的最大值.

【解析】 (Ⅰ) $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$，$x\in R$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，$x\in R$，$f'(0)=1-a$，

函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$ 的图象在点 $A(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=(1-a)x-1$.

(Ⅱ) $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，$x\in R$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，所以，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

(*III*) 由于 $a=1$，所以，$(x-k)f'(x)+x+1=(x-k)(\mathrm{e}^x-1)+x+1$.

故当 $x>0$ 时，$(x-k)f/(x)+x+1>0\Leftrightarrow k<\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x-1}+x(x>0)$. ①

令 $g(x)=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x-1}+x$，则 $g/(x)=\dfrac{-xe^x-1}{(\mathrm{e}^x-1)^2}+1=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-x-2)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.

函数 $h(x)=\mathrm{e}^x-x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $h(1)<0$，$h(2)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点，故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点.

设此零点为 α，则 $\alpha\in(1,2)$. 当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\alpha,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；

所以，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(\alpha)$. 由 $g'(\alpha)=0$，可得 $\mathrm{e}^\alpha=\alpha+2$，

所以，$g(\alpha)=\alpha+1\in(2,3)$. 由于①式等价于 $k<g(\alpha)$.

故整数 k 的最大值为2.

2. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

(Ⅰ) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 当 $m\leqslant 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

【解析】 (Ⅰ) $\because f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+m}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，

$\therefore f'(0)=1-\dfrac{1}{m}=0$，解得 $m=1$.

所以函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$.

$\because f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^x(x+1)-1}{x+1}$.

设 $g(x)=\mathrm{e}^x(x+1)-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)+\mathrm{e}^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

又 $\because g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数；在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

(Ⅱ) 证明：当 $m\leqslant 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时 $f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上为增函数，且 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$.

故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$.

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$.

3. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m 并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $g(x)=f(x)-e^{-x}+\ln(2-x)$ 为奇函数时，证明：$f(x)>0$ 恒成立.

【解析】 (1) $\because f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，

$\therefore f'(0)=1-\dfrac{1}{m}=0$，解得 $m=1$.

$\therefore$ 函数 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$.

$\because f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$

设 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

又 $\because g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数；在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

(2) 证明：$g(x)=f(x)-e^{-x}+\ln(2-x)=e^x-\ln(x+m)-e^{-x}+\ln(2-x)$，

$\because g(x)=f(x)-e^{-x}+\ln(2-x)$ 为奇函数，

$\therefore g(x)+g(-x)=e^x-\ln(x+m)-e^{-x}+\ln(2-x)+e^{-x}-\ln(-x+m)-e^x+\ln(2+x)=0$，

即 $\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln(x+m)+\ln(m-x)$，

解得 $m=2$，

$\therefore f(x)=e^x-\ln(x+2)$，

则 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

$\because f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，

$\therefore f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 存在唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$，

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x=x_0$ 时，函数取得最小值，

$\because e^{x_0}=\dfrac{1}{2+x_0}$，即 $x_0=-\ln(2+x_0)$，

$\therefore f(x)\geqslant f(x_0)=e^{x_0}-\ln(2+x_0)=\dfrac{1}{2+x_0}+x_0=\dfrac{(1+x_0)^2}{2+x_0}>0$，

$\therefore f(x)>0$.

4. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(Ⅰ) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 证明：$e^x-\ln(x+2)>0$.

【解析】 (I)$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$，

由题意可得，$f'(0)=1-\dfrac{1}{m}=0$，解可得 $m=1$，

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{e^x(x+1)-1}{x+1}$，

令 $g(x)=e^x(x+1)-1$，则 $g'(x)=(x+2)e^x>0$，

故 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增且 $g(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$ 即 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$ 即 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

(II) 证明：(2) 令 $h(x)=e^x-\ln(x+2)$，则 $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h'(-1)<0$，$h'(0)>0$，

所以 $h'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 存在唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$，

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

当 $x=x_0$ 时，函数取得最小值，

因为 $e^{x_0}=\dfrac{1}{2+x_0}$，即 $x_0=-\ln(2+x_0)$，

故 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\ln(2+x_0)=\dfrac{1}{2+x_0}+x_0=\dfrac{(1+x_0)^2}{2+x_0}>0$，

所以 $e^x-\ln(x+2)>0$.

5. 已知函数 $f(x)=e^{x-t}-\ln x$

(I) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 t 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 当 $t\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>0$.

【解析】 (I) 由函数 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$，

因为 $f'(x)=e^{x-t}-\dfrac{1}{x}$，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(1)=e^{1-t}-1=0$，所以 $t=1$，所以 $f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，

因为 $y=e^{x-1}$ 和 $y=-\dfrac{1}{x}$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

此时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

(II) 证明：当 $t\leqslant 2$ 时，$f(x)=e^{x-t}-\ln x\geqslant e^{x-2}-\ln x$，

设 $g(x)=e^{x-2}-\ln x$，则 $g'(x)=e^{x-2}-\dfrac{1}{x}$，

因为 $y=e^{x-2}$ 和 $y=-\dfrac{1}{x}$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g'(1)=\dfrac{1}{e}-1<0$，$g'(2)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，

所以存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $g'(x_0)=0$，

所以在 $(0,x_0)$ 上使得 $g'(x)<0$，在 $(x_0,+\infty)$ 上 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x) \geqslant g(x_0)$，

因为 $g'(x_0)=0$，即 $e^{x_0-2}=\frac{1}{x_0}$，

所以 $\ln x_0=2-x_0$，

所以 $g(x_0)=e^{x_0-2}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，

因为 $x_0\in(1,2)$，所以 $g(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2>2-2=0$，

所以 $f(x)>0$.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+ax+1$ 在 $(-1,0)$ 上有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 证明：当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$f(x)>\frac{11}{12}$.

【解析】 (1) $\because f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+ax+1$，

$\therefore f'(x)=2x^2+2x+a$，由题意知方程 $2x^2+2x+a=0$ 在 $(-1,0)$ 上有两不等实根，

设 $g(x)=2x^2+2x+a$，其图象的对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$，

故有 $\begin{cases} g(-1)=a>0 \\ g(0)=a>0 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+(-1)+a<0 \end{cases}$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

(2) 证明：由题意知 x_2 是方程 $2x^2+2x+a=0$ 的大根，从而 $x_2\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，

由于 $0<a<\frac{1}{2}$，$\therefore ax_2>\frac{1}{2}x_2$，

$\therefore f(x_2)=\frac{2}{3}x_2^3+x_2^2+ax_2+1>\frac{2}{3}x_2^3+x_2^2+x_2+1$.

设 $h(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{1}{2}x+1$，$x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，

$h'(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$，$\therefore h(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 递增，

$\therefore h(x)>h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{12}$，即 $f(x_2)>\frac{11}{12}$ 成立.

7. 已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$，其中 $a>0$.

(Ⅰ) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 证明：存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

【解析】 (Ⅰ) 由已知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$g(x)=f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2\left(1+\frac{a}{x}\right)$，

$\therefore g'(x)=2-\frac{2}{x}+\frac{2a}{x^2}=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(a-\frac{1}{4}\right)}{x^2}$.

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

在区间 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减；

当 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(Ⅱ) 由 $f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2\left(1+\dfrac{a}{x}\right)=0$，解得 $a=\dfrac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$，

令 $\varphi(x)=-2\left(x+\dfrac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)\ln x+x^2-2\left(\dfrac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)x-2\left(\dfrac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)^2+\dfrac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$，

则 $\varphi(1)=1>0$，$\varphi(\mathrm{e})=-\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-2)}{1+\mathrm{e}^{-1}}-2\left(\dfrac{\mathrm{e}-2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right)^2<0$.

故存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $\varphi(x_0)=0$.

令 $a_0=\dfrac{x_0-1-\ln x_0}{1+x_0^{-1}}$，$u(x)=x-1-\ln x(x\geqslant1)$，

由 $u'(x)=1-\dfrac{1}{x}\geqslant0$ 知，函数 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore 0=\dfrac{u(1)}{1+1}<\dfrac{u(x_0)}{1+x_0^{-1}}=a_0<\dfrac{u(\mathrm{e})}{1+\mathrm{e}^{-1}}=\dfrac{\mathrm{e}-2}{1+\mathrm{e}^{-1}}<1$.

即 $a_0\in(0,1)$，

当 $a=a_0$ 时，有 $f'(x_0)=0$，$f(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

由 (Ⅰ) 知，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant0$.

综上所述，存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

8. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，

(Ⅰ) 当 $a>0$ 时，求证：存在唯一的 $x_0\in\left(-\dfrac{1}{2a},0\right)$，使得 $g(x_0)=0$；

(Ⅱ) 若存在实数 a,b，使得 $f(x)\geqslant b$ 恒成立，求 $a-b$ 的最小值.

【解析】 (Ⅰ) 证明：$\because g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x+2ax$，$g'(x)=\mathrm{e}^x+2a$，

当 $a>0$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调递增，

又 $g\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}-1<0$，$g(0)=1>0$，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0\in\left(-\dfrac{1}{2a},0\right)$，使得 $g(x_0)=0$；

(Ⅱ) (1) 当 $a<0$ 时，则当 $x<0$ 时，$g(x)>0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，这与 $f(x)\geqslant b$ 矛盾；

(2) 当 $a=0$，由 $\mathrm{e}^x\geqslant b$，得 $b\leqslant0$，$\therefore a-b\geqslant0$；

(3) 当 $a>0$，由 (Ⅰ) 知当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$g(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$；

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(x_0)$，其中 x_0 满足 $\mathrm{e}^{x_0}+2ax_0=0$，故 $a=-\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}}{2x_0}$ 且 $x_0<0$，

$\because f(x)\geqslant b$ 恒成立，$\therefore b\leqslant f(x_0)$，

即 $-b\geqslant-\mathrm{e}^{x_0}-ax_0^2$，于是 $a-b\geqslant-\mathrm{e}^{x_0}-ax_0^2=-\mathrm{e}^{x_0}\left(1+\dfrac{1}{2x_0}-\dfrac{x_0}{2}\right)$，

记 $h(x)=-\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x}{2}\right)$，$x<0$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{2x^2}e^x(x-1)^2(x+1)$，

由 $h'(x)<0$ 得 $x<-1$，即函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调时递减，

由 $h'(x)>0$ 得 $-1<x<0$，即函数 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(-1)=-\dfrac{1}{e}$，

综上得 $a-b$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{e}$，此时 $x_0=-1$.

专题23：端点效应专题

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$

(Ⅰ)证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

(Ⅱ)若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

【解析】 (Ⅰ)$f(x)$ 的导数 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$.

由于 $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{-x}}=2$，故 $f'(x)\geqslant 2$.（当且仅当 $x=0$ 时，等号成立）.

(Ⅱ)令 $g(x)=f(x)-ax$，则 $g'(x)=f'(x)-a=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-a$，

(ⅰ)若 $a\leqslant 2$，当 $x>0$ 时，$g'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-a>2-a\geqslant 0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以，$x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)$，即 $f(x)\geqslant ax$.

(ⅱ)若 $a>2$，方程 $g'(x)=0$ 的正根为 $x_1=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

此时，若 $x\in(0,x_1)$，则 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在该区间为减函数.

所以，$x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，即 $f(x)<ax$，与题设 $f(x)\geqslant ax$ 相矛盾.

综上，满足条件的 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

2.（理）已知函数 $f(x)=\sin x+\ln(1+x)$.

(I) 求证：$\dfrac{1}{n}<f\left(\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{2}{n}(n\in N^{+})$；

(II) 如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

【解析】 (Ⅰ)令 $g(x)=2x-f(x)$，$G(x)=f(x)-x$.

$\because g'(x)=2-\cos x-\dfrac{1}{x+1}$，定义域为 $(0,+\infty)$；

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$\Rightarrow g\left(\dfrac{1}{n}\right)>g(0)\Rightarrow 2\times\dfrac{1}{n}-f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{2}{n}$；

$G(x)$ 在 $(0,1]$ 递增 $\Rightarrow G\left(\dfrac{1}{n}\right)>G(0)\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}>0\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)>\dfrac{1}{n}$.

从而可得结论.

(Ⅱ)①当 $a\geqslant 2$ 时，对 $x\geqslant 0$，由(Ⅰ)的证明知 $f(x)\leqslant 2x\leqslant ax$.

②当 $a\leqslant 0$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0\geqslant a\cdot\dfrac{\pi}{2}$，不合题意.

③当 $0<a<2$ 时，令 $F(x)=f(x)-ax$.

则 $F'(x)=\cos x+\dfrac{1}{1+x}-a=\left(\cos x-\dfrac{a}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{a}{2}\right)$.

取 $x_0=\min\left\{\arccos\dfrac{a}{2},\dfrac{2}{a}-1\right\}$. 则 $x_0>0$.

易知当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)>0$，

$\therefore F(x)$ 递增 $\Rightarrow F(x)>F(0)=0$，即 $f(x)>ax$，不合题意.

综上知：$a\in[2,+\infty)$.

3. 设函数 $f(x)=ax\cdot\ln x(a>0)$.

(Ⅰ)当 $a=2$ 时，判断函数 $g(x)=f(x)-4(x-1)$ 的零点的个数，并且说明理由；

(Ⅱ)若对所有 $x\geqslant 1$，都有 $f(x)\leqslant x^2-1$，求正数 a 的取值范围.

【解析】 (Ⅰ)当 $a=2$ 时，$g(x)=f(x)-4(x-1)=2x\ln x-4x+4$ 的定义域是 $(0,+\infty)$

求导得 $g'(x)=2(\ln x-1)\begin{cases}<0, & 0<x<\mathrm{e}\\ =0, & x=\mathrm{e}\\ >0, & x>\mathrm{e}\end{cases}$

所以，$g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上为减函数，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上为增函数，$g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=2(2-\mathrm{e})<0$.

又 $g(1)=0$，根据 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上为减函数，则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上恰有一个零点；

又 $g(\mathrm{e}^2)=4>0$，则 $g(\mathrm{e})g(\mathrm{e}^2)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上恰有一个零点，

再根据 $g(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上为增函数，$g(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上恰有一个零点.

综上所述，函数 $g(x)=f(x)-4(x-1)$ 的零点的个数为 2.

(Ⅱ)令 $F(x)=f(x)-(x^2-1)=ax\ln x-x^2+1(a>0,x\geqslant 1)$，

求导，再令 $G(x)=F'(x)=a(\ln x+1)-2x$，

则 $G'(x)=\dfrac{a}{x}-2$

(ⅰ)若 $0<a\leqslant 2$，当 $x\geqslant 1$ 时，$G'(x)=\dfrac{a}{x}-2\leqslant 0$，

故 $G(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为减函数，

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$G(x)\leqslant G(1)=a-2\leqslant 0$，即 $F'(x)\leqslant 0$，

则 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为减函数，

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)\leqslant F(1)=0$，即 $f(x)\leqslant x^2-1$ 成立；

(ⅱ)若 $a>2$，方程 $G'(x)=0$ 的解为 $x=\dfrac{a}{2}>1$，

则当 $1\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{2}$ 时，$G'(x)=\dfrac{a}{x}-2\geqslant 0$，故 $G(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{a}{2}\right]$ 上为增函数，

所以当 $1\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{2}$ 时，$G(x)\geqslant G(1)=a-2>0$，即 $F'(x)>0$，

则 $F(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{a}{2}\right]$ 上为增函数，

所以当 $1<x<\dfrac{a}{2}$ 时，$F(x)>F(1)=0$，即 $f(x)>x^2-1$ 成立，此时不合题意.

综上，满足条件的正数 a 的取值范围是 $(0,2]$.

4. 设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若对所有的 $x\geqslant 0$，均有 $f(x)\geqslant ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 由 $f'(x)=\ln(x+1)+1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$，

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1,+\infty\right)$，减区间为 $\left(-1,\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1\right]$.

(2) 令 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-ax$.

“不等式 $f(x)\geqslant ax$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立” $\Leftrightarrow$ “$g(x)\geqslant g(0)$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立.”

$g'(x)=\ln(x+1)+1-a=0\Rightarrow x=\mathrm{e}^{a-1}-1$.

当 $x\in(-1,\mathrm{e}^{a-1}-1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数.

当 $x\in(\mathrm{e}^{a-1}-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数.

“$g(x)\geqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立” $\Leftrightarrow$ “$\mathrm{e}^{a-1}-1\leqslant 0$”，即 $\mathrm{e}^{a-1}\leqslant\mathrm{e}^0$，即 $a-1\leqslant 0$，即 $a\leqslant 1$.

故 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

5. 设函数 $f(x)=(2x+1)\ln(2x+1)$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的极小值;

(Ⅲ) 若对所有的 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant 2ax$ 成立,求实数 a 的取值范围.

【解析】 (Ⅰ) $\because f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x>-\frac{1}{2}\right\}$,又 $\because f'(x)=2\ln(2x+1)+2$,

$\therefore k_{切线}=f'(0)=2$,切点为 $O(0,0)$,

$\therefore$ 所求切线方程为 $y=2x$.

(Ⅱ) 设 $f'(x)=0$,得 $\ln(2x+1)=-1$,得 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)$;

$f'(x)>0$,得 $\ln(2x+1)>-1$,得 $x>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)$;

$f'(x)<0$,得 $\ln(2x+1)<-1$,得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)$;

则 $f(x)_{极小值}=f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)\right]=\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)+1\right]\cdot\ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)+1\right]=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(Ⅲ) 令 $g(x)=(2x+1)\ln(2x+1)-2ax$,

则 $g'(x)=2\ln(2x+1)+2-2a=2[\ln(2x+1)+1-a]$.

令 $g'(x)=0$,得 $\ln(2x+1)=a-1$,得 $x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$;

$g'(x)>0$,得 $\ln(2x+1)>a-1$,得 $x>\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$;

$g'(x)<0$,得 $\ln(2x+1)<a-1$,得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$;

(1) 当 $a\leqslant 1$ 时,$a-1\leqslant 0$,$\because \mathrm{e}^{a-1}\leqslant \mathrm{e}^0=1\Rightarrow \mathrm{e}^{a-1}-1\leqslant 0\Rightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)\leqslant 0$,

$\therefore$ 对所有 $x\geqslant 0$ 时,都有 $x\geqslant \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$,于是 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

又 $g(0)=0$,于是对所有 $x\geqslant 0$,都有 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 成立.

故当 $a\leqslant 1$ 时,对所有的 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant 2ax$ 成立.

(2) 当 $a>1$ 时,$a-1>0$,$\because \mathrm{e}^{a-1}>\mathrm{e}^0=1\Rightarrow \mathrm{e}^{a-1}-1>0\Rightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)>0$,

$\therefore$ 对所有 $0\leqslant x<\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$,都有 $g'(x)<0$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)\right)$ 上是减函数.

又 $g(0)=0$,于是对所有 $0\leqslant x<\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$,都有 $g(x)\leqslant g(0)=0$.

故当 $a>1$ 时,只有对仅有的 $0\leqslant x<\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a-1}-1)$,都有 $f(x)<2ax$.

即当 $a>1$ 时,不是对所有的 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant 2ax$.

综合 (1),(2) 可知实数 a 的取值范围 $(-\infty,1]$.

6. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0,其中 $a>0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$,有 $f(x)\leqslant kx^2$ 成立,求实数 k 的最小值.

【解析】 (1)$f'(x)=1-\frac{1}{x+a}=\frac{x+a-1}{x+a}$，$(x+a>0)$

令 $f'(x)=0$，可得 $x=1-a>-a$，

令 $f'(x)>0$，$x>1-a$；$f(x)$ 为增函数；$f'(x)<0$，$-a<x<1-a$，$f(x)$ 为减函数；

$\therefore x=1-a$ 时，函数取得极小值也是最小值，

$\because$ 函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，

$\therefore f(1-a)=1-a=0$，得 $a=1$；

(2) 当 $k\leqslant 0$ 时，取 $x=1$，有 $f(1)=1-\ln 2>0$，故 $k\leqslant 0$ 不合题意；

当 $k>0$ 时，令 $g(x)=f(x)-kx^2$，即 $g(x)=x-\ln(x+1)-kx^2$，

求导函数可得 $g'(x)=\frac{-x[2kx-(1-2k)]}{x+1}$，

令 $g'(x)=0$，可得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-2k}{2k}>-1$，

当 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1-2k}{2k}\leqslant 0$，$g'(x)<0$，在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)\leqslant g(0)=0$，

$\therefore$ 对任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant kx^2$ 成立；

当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，$x_2=\frac{1-2k}{2k}>0$，

$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-2k}{2k}\right)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数；

$g(x)$ 在 $\left(\frac{1-2k}{2k},+\infty\right)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；

因此存在 $x_0\in\left(0,\frac{1-2k}{2k}\right)$ 使得 $g(x_0)\geqslant g(0)=0$，

可得 $x_0-\ln(x_0+1)\geqslant kx_0^2$，即 $f(x_0)\geqslant kx_0^2$，与题矛盾；

$\therefore$ 综上：$k\geqslant\frac{1}{2}$ 时，对任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant kx^2$ 成立，

$\therefore$ 实数 k 的最小值为：$\frac{1}{2}$；

7. 设函数 $f(x)=ax+\cos x$，$x\in[0,\pi]$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$，求 a 的取值范围.

【解析】 (Ⅰ) 求导函数，可得 $f'(x)=a-\sin x$，$x\in[0,\pi]$，$\sin x\in[0,1]$；

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递减；当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增；

当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\arcsin a$，$x_2=\pi-\arcsin a$

当 $x\in[0,x_1]$ 时，$\sin x<a$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，$\sin x>a$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

当 $x\in[x_2,\pi]$ 时，$\sin x<a$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

(Ⅱ) 由 $f(x)\leqslant 1+\sin x$ 得 $f(\pi)\leqslant 1$，$a\pi-1\leqslant 1$，$\therefore a\leqslant\frac{2}{\pi}$.

令 $g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$

当 $x\in\left(0,\arccos\frac{2}{\pi}\right)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in\left(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$

$\because g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$\therefore g(x)\geqslant 0$，即 $\frac{2}{\pi}x\leqslant \sin x\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，

当 $a\leqslant \frac{2}{\pi}$ 时，有 $f(x)\leqslant \frac{2}{\pi}x+\cos x$

①当 $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}x\leqslant \sin x$，$\cos x\leqslant 1$，所以 $f(x)\leqslant 1+\sin x$；

②当 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi$ 时，$f(x)\leqslant \frac{2}{\pi}x+\cos x=1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 1+\sin x$

综上，$a\leqslant \frac{2}{\pi}$.

8. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $x>1$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $a=4$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x-4x+4$，

$\therefore x>0$，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3$，

$\therefore f'(1)=\frac{1}{1}+\ln 1-3=-2$，又 $f(1)=0$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：

$y-0=-2(x-1)$，即 $2x+y-2=0$.

(2) 令 $g(x)=f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1-a$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，即 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f'(1)=2-a$，

①当 $a\leqslant 2$ 时，$f'(1)\geqslant 0$，故 $f(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=0$，此时 $a\leqslant 2$ 符合题意；

②当 $a>2$ 时，由 $f(1)=0$ 及 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，知 $\exists x_0>1$，

使得 $f'(x_0)=0$，即 $f(x_0)<0$，不符合题意，

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x-a\cdot\frac{x-1}{x+1}(a\in R)$.

(1) 若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值；

(2) 令 $g(x)=(x+1)\cdot f(x)$，若对任意 $x\geqslant \mathrm{e}$，有 $g(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 设 m，n 为实数，且 $m>n$，求证：$\mathrm{e}^{\frac{m+n}{2}}<\frac{\mathrm{e}^m-\mathrm{e}^n}{m-n}<\frac{\mathrm{e}^m+\mathrm{e}^n}{2}$.

【解析】 (1) 因为 $f(x)=\ln x-a\frac{x-1}{x+1}$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}$，

令 $f'(2)=0$，所以 $a=\frac{9}{4}$，

检验：当 $a=\frac{9}{4}$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{9}{2(x+1)^2}=\frac{(x-2)(2x-1)}{2x(x+1)^2}$，

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以 $a=\frac{9}{4}$.

(2) 因为 $g(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$,因为 $x\geqslant e$,

由 $(x+1)\ln x-a(x-1)>0$,得 $a<\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$,

令 $t(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$,则 $t'(x)=\frac{x-2\ln x-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$,

令 $\varphi(x)=x-2\ln x-\frac{1}{x}$,则 $\varphi'(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\geqslant 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增,故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(e)=e-2-\frac{1}{e}>0$,

所以 $t'(x)>0$,故 $t(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增,$t(x)_{\min}=t(e)=\frac{e+1}{e-1}$.

所以 $a<\frac{e+1}{e-1}$.

(3) 证明:当 $a=2$ 时,$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增,

所以当 $x>1$ 时,$f(x)>f(1)=0$,即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$,

因为 $m>n$,所以 $e^{m-n}>1$,所以 $\ln e^{m-n}>\frac{2(e^{m-n}-1)}{e^{m-n}+1}$,

即 $\frac{m-n}{2}>\frac{e^{m-n}-1}{e^{m-n}+1}=\frac{e^m-e^n}{e^m+e^n}$,所以 $\frac{e^m-e^n}{m-n}<\frac{e^m+e^n}{2}$,

$\because\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x>1$ 时,$\varphi(x)>\varphi(1)=0$,即 $2\ln x<x-\frac{1}{x}$,

因为 $e^{\frac{m-n}{2}}>1$,所以 $2\ln e^{\frac{m-n}{2}}<e^{\frac{m-n}{2}}-\frac{1}{e^{\frac{m-n}{2}}}$.

即 $m-n<\frac{e^{m-n}-1}{e^{\frac{m-n}{2}}}=\frac{e^m-e^n}{e^{\frac{m+n}{2}}}$,所以 $e^{\frac{m+n}{2}}<\frac{e^m-e^n}{m-n}$,

综上,$e^{\frac{m+n}{2}}<\frac{e^m-e^n}{m-n}<\frac{e^m+e^n}{2}$.

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$,$g(x)=e^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $h(x)=f(x+1)+g(x)$,当 $x>0$ 时,$h(x)>1$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

(i) 当 $a\leqslant 0$ 时,对 $\forall x>0$,$f'(x)>0$,函数的单调递增区间是 $(0,+\infty)$,

(ii) 当 $a>0$ 时,时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$,单调递减区间是 $\left[\frac{1}{a},+\infty\right)$.

(2) 函数 $h(x)=f(x+1)+g(x)=\ln(x+1)-ax+e^x$.

(i) 当 $a\leqslant 2$ 时,由重要不等式 $e^x\geqslant x+1$ 知,

$h'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-a\geqslant(x+1)+\frac{1}{x+1}-a\geqslant 2-a\geqslant 0$,

$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=1$ 恒成立，符合题意.

(ⅱ) 当 $a>2$ 时，因为 $x\in[0,+\infty)$，故 $h''(x)=\dfrac{(x+1)^2\mathrm{e}^x-1}{(x+1)^2}\geqslant 0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增.

又 $h'(0)=2-a<0$，存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h'(x_0)=0$，

从而函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，

又 $h(x_0)<h(0)=1$，$\therefore h(x)\geqslant 1$ 不恒成立，不满足题意.

综上 (ⅰ)，(ⅱ) 知实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

11. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$ (其中 $a>0$，e 是自然对数的底数).

(Ⅰ) 若关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{a}x+a$ 有唯一实根，求 $(1+\ln a)a^2$ 的值；

(Ⅱ) 若过原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 与直线 $y=-ex+1$ 垂直，证明：$\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$；

(Ⅲ) 设 $g(x)=f(x+1)+\mathrm{e}^x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 【解析】(Ⅰ) $\because f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{a}x+a$，

$\therefore \ln x-\dfrac{1}{2}x^2-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)x=0$，

设 $h(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)x$，则 $h'(x)=-\dfrac{(x+a)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}{x}$，

$a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 递减，

则 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a+\dfrac{1}{2a^2}-1$，

$\because h(x)=0$ 有唯一实根，

$\therefore x_0=\dfrac{1}{a}$ 且 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a+\dfrac{1}{2a^2}-1=0$；

故 $1+\ln a=\dfrac{1}{2a^2}$，$\therefore (1+\ln a)a^2=\dfrac{1}{2}$；

(Ⅱ) 证明：$\because$ 过原点所作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 与直线 $y=-ex+1$ 垂直，

$\therefore$ 切线 l 的斜率为 $k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，方程是 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，

设 l 与 $y=f(x)$ 的切点为 (x_1,y_1)，

$$\therefore \begin{cases} f'(x_1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ y_1=\ln x_1-a(x_1-1), \\ y_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x_1 \end{cases}$$

$\therefore a=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，且 $\ln x_1-1+\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$，

令 $m(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $m'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，

$\therefore m(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

若 $x_1\in(0,1)$，$\because m\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-2+\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，$m(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，

$\therefore x_1\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，

而 $a=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 在 $x_1\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 递减，

$\therefore \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$，

若 $x_1\in(1,+\infty)$，$\because m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，且 $m(\mathrm{e})=0$，则 $x_1=\mathrm{e}$，

$\therefore a=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\mathrm{e}}=0$(舍)，

综上：$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$；

(Ⅲ) $\because g(x)=f(x+1)+\mathrm{e}^x=\ln(x+1)-ax+\mathrm{e}^x$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x+1}-a+\mathrm{e}^x$，$g''(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\geqslant 0$，

① $0<a\leqslant 2$ 时，$\because g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，

$\therefore g'(x)\geqslant g'(0)=2-a\geqslant 0$，

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，$g(x)\geqslant g(0)=1$ 恒成立，符合题意，

② $a>2$ 时，$\because g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，$g'(0)=2-a<0$，

则存在 $x_0(0,+\infty)$，使得 $g'(x_0)=0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，

又 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=1$，

$\therefore g(x)\geqslant 1$ 不恒成立，不合题意，

综上，所求实数 a 的范围是 $(0,2]$.

12. 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$，$g(x)=\mathrm{e}^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 过原点分别作曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的切线 l_1、l_2，已知两切线的斜率互为倒数，证明：$a=0$ 或 $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}<a<\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$；

(3) 设 $h(x)=f(x+1)+g(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)\geqslant 1$，求实数 a 的取值范围.

【解析】 【解析】(1) 依题意，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

①若 $a\leqslant 0$，对一切 $x>0$ 有 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$.

②若 $a>0$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间是 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

(2) 设切线 l_2 的方程为 $y=k_2x$，切点为 (x_2,y_2)，则 $y_2=\mathrm{e}^{x_2}$，$k2=g'(x_2)=\mathrm{e}^{x2}=\frac{y_2}{x_2}$，

所以 $x_2=1$，$y_2=\mathrm{e}$，则 $k_2=\mathrm{e}^{x2}=\mathrm{e}$.

由题意知，切线 l_1 的斜率为 $k_1=\frac{1}{k_2}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$l_1$ 的方程为 $y=k_1x=\frac{1}{\mathrm{e}}x$.

设 l_1 与曲线 $y=f(x)$ 的切点为 (x_1,y_1)，则 $k_1=f'(x_1)=\frac{1}{x_1}-a=\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{y_1}{x_1}$，

所以 $y_1=\frac{x_1}{\mathrm{e}}=1-ax_1$，$a=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

又因为 $y_1=\ln x_1-a(x_1-1)$，消去 y_1 和 a 后，整理得 $\ln x_1-1+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{e}=0$.

令 $m(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$，则 $m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

$m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

若 $x_1\in(0,1)$，因为 $m\left(\frac{1}{e}\right)=-2+e-\frac{1}{e}>0$，$m(1)=-\frac{1}{e}<0$，所以 $x1\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，

而 $a=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{e}$ 在 $x_1\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减，所以 $\frac{e-1}{e}<a<\frac{e^2-1}{e}$.

若 $x_1\in(1,+\infty)$，因为 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $m(e)=0$，则 $x_1=e$，

所以 $a=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{e}=0$(舍去).

综上可知，$\frac{e-1}{e}<a<\frac{e^2-1}{e}$

(3) 证明：$h(x)=f(x+1)+g(x)=\ln(x+1)-ax+e^x$，$h'(x)=ex+\frac{1}{x+1}-a$.

①当 $a\leqslant 2$ 时，因为 $e^x\geqslant x+1$，所以 $h'(x)=ex+\frac{1}{x+1}-a\geqslant x+1+\frac{1}{x+1}-a\geqslant 2-a\geqslant 0$，

$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，$h(x)\geqslant h(0)=1$ 恒成立，符合题意.

②当 $a>2$ 时，因为 $h''(x)=ex-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\geqslant 0$，

所以 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，且 $h'(0)=2-a<0$，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h'(0)=0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，

又 $h(x_0)<h(0)=1$，所以 $h(x)\geqslant 1$ 不恒成立，不合题意.

综合①②可知，所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

专题24：最大最小函数问题

1. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x-1$，$g(x)=x^3-1$.

(1) 若直线 $l:y=-x+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，求实数 a 的值；

(2) 用 $\min\{m,m\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\,(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【解析】 (1) 依题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+1$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=\left(\dfrac{a}{x_0}+1\right)(x-x_0)$，

又 $y_0=a\ln x_0+x_0-1$，代入整理得 $y=\left(\dfrac{a}{x_0}+1\right)x+a\ln x_0-a-1$，此直线与 l 重合，

得 $\begin{cases}\dfrac{a}{x_0}+1=-1\\ a\ln x_0-a-1=1\end{cases}$，消去 x_0 得：$\dfrac{a}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)-\dfrac{a}{2}-1=0$ ①，

令 $\Phi(x)=-x\ln x+x-1$，则 $\Phi'(x)=-\ln x$，

当 $0<x<1$ 时 $\Phi(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$\Phi(x)$ 单调递减，

$\therefore \Phi(x)_{\max}=\Phi(1)=0$. 由①知 $\Phi\left(-\dfrac{a}{2}\right)=0$，$\therefore 1=-\dfrac{a}{2}$，解得 $a=-2$；

(2) ①′ 当 $0<x<1$ 时，$g(x)=x^3-1<0$，所以 $h(x)\leqslant g(x)<0$，无零点；

②′ 当 $x=1$ 时，$f(1)=g(1)=0$，从而 $h(1)=0$，故 $x=1$ 为 $h(x)$ 的一个零点；

③′ 当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，则 $h(x)$ 的零点即为 $f(x)$ 的零点.

又 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+1=\dfrac{x+a}{x}$，

所以①″ 当 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)>f(1)=0$，此时 $h(x)$ 无零点；

②″ 当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=-a$，

易知 $f(x)$ 在 $(1,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(1)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,-a)$ 上无零点，另外，由 (1) 可知 $\Phi\left(\dfrac{1}{x}\right)\leqslant \Phi(1)=0$ 恒成立，

即 $\ln x\leqslant x-1$ 对 $x>0$ 恒成立，则 $\ln(4a^2)=2\ln(-2a)\leqslant 2(-2a-1)$，

所以 $f(4a^2)=a\ln(4a^2)+4a^2-1\geqslant a\times 2(-2a-1)+4a^2-1=-2a-1>0$，故存在 $x_0\in(-a,4a^2)$，

进而存在 $x_0\in(-a,+\infty)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $h(x_0)=0$，此时 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点；

综上可得：当 $a\geqslant -1$ 时，$h(x)$ 有1个零点；当 $a<-1$ 时，$h(x)$ 有2个零点.

2. 已知函数 $f(x)=\ln(x-1)$，$g(x)=\dfrac{2a}{3}x^3+3(1-a)x^2-18x+11a+26(a<0)$.

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2) 记 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}\,(x>1)$，若函数 $y=F(x)$ 至少有三个零点，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$g(x)=\dfrac{2a}{3}x^3+3(1-a)x^2-18x+11a+26$ 的定义域为 R，

$\therefore g'(x)=2(x-3)\,(ax+3)g'(x)=2(x-3)\,(ax+3)$，令 $g'(x)=0$，得 $x_1=3,x_2=-\dfrac{3}{a}$.

①当 $-\dfrac{3}{a}<3$，即 $a<-1$ 时，$x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{a}\right)\cup(3,+\infty)\Rightarrow g'(x)<0$，$x\in\left(-\dfrac{3}{a},3\right)\Rightarrow g'(x)>0$；

②当 $-\frac{3}{a}=3$，即 $a=-1$ 时，$g'(x)=-2(x-3)^2\leqslant 0$；

③当 $-\frac{3}{a}>3$，即 $-1<a<0$ 时，$x\in(-\infty,3)\cup\left(-\frac{3}{a},+\infty\right)\Rightarrow g'(x)<0, x\in\left(3,-\frac{3}{a}\right)\Rightarrow g'(x)>0$，

综上，当 $a<-1$ 时，$g(x)$ 的单减区间为 $\left(-\infty,-\frac{3}{a}\right)$ 和 $(3,+\infty)$，单增区间为 $\left(-\frac{3}{a},3\right)$；

当 $a=-1$ 时，$g(x)$ 的单减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当 $-1<a<0$ 时，$g(x)$ 的单减区间为 $(-\infty,3)$ 和 $\left(-\frac{3}{a},+\infty\right)$，单增区间为 $\left(3,-\frac{3}{a}\right)$.

(2)$f(x)=\ln(x-1)$ 的唯一一个零点是 $x=2$，

$\therefore g'(x)=2(x-3)(ax+3)$，$x>1$，由 (1) 可得：

(i) 当 $a<-1$ 时，$g(x)_{最大值}=2a-1<0$，

此时 $y=F(x)$ 至多有两个零点，不符合题意；

(ii) 当 $a=-1$ 时，$g(x)$ 在定义域 $(1,+\infty)$ 上单减递减，

此时 $y=F(x)$ 至多有两个零点，不符合题意；

(iii) 当 $-1<a<0$ 时，

若 $g(2)<0$，即 $-1<a<-\frac{6}{13}$，此时 $y=F(x)$ 至多有两个零点，不符合题意；

若 $g(2)=0$，即 $a=-\frac{6}{13}$，此时 $g(x)_{极大值}=g\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{143\times 13-66}{26}>0$，

即 $g(x)_{极大值}=g\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{11a^3+26a^2+27a+9}{a^2}>0$，

此时 $y=F(x)$ 恰好有三个零点，符合题意；

若 $g(2)>0$，即 $-\frac{6}{13}<a<0$，此时 $g(x)_{极小值}=2a-1<0$，

$g(x)_{极大值}=g\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{11a^3+26a^2+27a+9}{a^2}$，

记 $h(a)=11a^3+26a^2+27a+9\left(-\frac{6}{13}<a<0\right)$，

所以 $h'(a)=33a^2+52a+27>h'\left(-\frac{6}{13}\right)>0$，

所以 $y=h(a)$ 在 $a\in\left(-\frac{6}{13},0\right)$ 上单调递增，所以 $h(a)>h\left(-\frac{6}{13}\right)>0$，

此时 $y=F(x)$ 恰好有四个零点，符合题意，

综上，$a\in\left[-\frac{6}{13},0\right)$.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{2a}{3}x^3+2(1-a)x^2-8x+8a+7$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $y=f(x)+g(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a<0$ 时，记函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$，若函数 $y=h(x)$ 至少有三个零点，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 令 $F(x)=f(x)+g(x)$，

当 $a=0$ 时，$F(x)=\ln x+2x^2-8x+7$.

$F'(x)=\frac{4x^2-8x+1}{x}$，令 $F'(x)=0$，得 $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $x\in\left(0,1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F'(x)>0$，$F(x)=f(x)+g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F'(x)<0$，$F(x)=f(x)+g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$，$F'(x)>0$，$F(x)=f(x)+g(x)$ 单调递增.

(2) 当 $a<0$ 时，$g'(x)=2ax^2+4(1-a)x-8=2a(x-2)\left(x+\frac{2}{a}\right)$，

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=2$，$x_2=-\frac{2}{a}$.

①当 $-\frac{2}{a}<2$，即 $a<-1$ 时，$\because g(x)_{极大值}=g(2)=\frac{16}{3}a-1<0$，

此时 $y=h(x)$ 至多有两个零点，不合题意；

②当 $-\frac{2}{a}=2$，即 $a=-1$ 时，$\because g'(x)\leqslant 0$，此时 $y=h(x)$ 至多有两个零点，不合题意；

③当 $-\frac{2}{a}>2$，即 $-1<a<0$ 时，若 $g(1)<0$，$y=h(x)$ 至多有两个零点，不合题意；

若 $g(1)=0$，得 $a=-\frac{3}{20}$，$g\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\left(8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}\right)>0$，$y=h(x)$ 恰好有三个零点；

若 $g(1)>0$，得 $-\frac{3}{20}<a<0$，$g(2)=\frac{16}{3}a-1<0$，$g\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\left(8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}\right)$.

记 $\varphi(a)=8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}$，则 $\varphi'(a)=24a^2+14a+8>0$，$\varphi(a)>\varphi\left(-\frac{3}{20}\right)>0$，

此时 $y=h(x)$ 有四个零点.

综上所述，满足条件的实数 a 的取值集合为 $\left[-\frac{3}{20},0\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=4\ln x+\frac{2x+1}{x^2}+a-3,g(x)=4\ln x$.

(1) 求证：$f(x)\geqslant\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+a$；

(2) 用 $\max\{p,q\}$ 表示 p，q 中的最大值，记 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，讨论函数 $h(x)$ 零点的个数.

【解析】 【解析】证明：(1)：设 $\varphi(x)=4\ln x+\frac{2x+1}{x^2}+a-3-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-a=4\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)$，定义域为 $(0,+\infty)$，则 $\varphi'(x)=4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4(x-1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内是递减函数，在 $(1,+\infty)$ 内递增函数，

所以 $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的极小值点，也是 $\varphi(x)$ 的最小值点，所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$，

所以 $f(x)\geqslant\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+a$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(2x+1)(x-1)}{x^3}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是递减函数，在 $(1,+\infty)$ 内是递增函数，

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，也是 $f(x)$ 的最小值点，即 $f(x)_{\min}=f(1)=a$，

(i) 若 $a=0$，则 $f(x)-g(x)=\frac{2x+1}{x^2}-3=\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f(x)>g(x)$；当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)$；当 $x>1$ 时，$f(x)<g(x)$，

所以 $h(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x<1\\ g(x), & x>1\end{cases}$，于是 $h(x)$ 只有一个零点 $x=1$.

(ii) 当 $a>0$ 时，则 $f(x)-g(x)=-\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2}+a$，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)>g(x)$，此时 $h(x)=f(x)\geqslant a>0$；

当 $x>1$ 时，$f(x)>a>0$，$g(x)>0$，此时 $h(x)>0$.

所以 $h(x)$ 没有零点.

(iii) 当 $a<0$ 时，根据 (1) 知：$f(x)\geqslant\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+a$，而 $0<\frac{1}{\sqrt{-a}+1}<1$，

所以 $f\left(\frac{1}{\sqrt{-a}+1}\right)>(2\sqrt{-a}+1-1)^2+a=0$，

又因为 $f(x)_{\min}=f(1)=a<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点 x_0，

从而一定存在 $c\in(x_0,1)$，使得 $f(c)=g(c)$，即 $\frac{2c+1}{c^2}+a-3=0$，即 $3-a=\frac{2c+1}{c^2}$，

当 $x>c$ 时，$g(x)-f(x)=-\frac{2x+1}{x^2}+\frac{2c+1}{c^2}-a+3=\frac{x-c}{cx}\left(\frac{c+x}{cx}+2\right)>0$，

所以 $g(x)>f(x)$，从而 $h(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x\leqslant c\\ g(x), & x>c\end{cases}$，

于是 $h(x)$ 有两个零点 x_0 和 1. 当 $a<0$ 时，$h(x)$ 有两个零点.

综上：当 $a=0$ 时，$h(x)$ 有一个零点；当 $a>0$ 时，$h(x)$ 没有零点；当 $a<0$ 时，$h(x)$ 有两个零点.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+a$，$g(x)=x^2-1$.

(1) 当 $a=0$，$x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，证明：$\frac{1+x}{1-x}f(x)<\frac{2}{1-x^2}g(x)$；

(2) 定义 $\max\{m,n\}=\begin{cases}m, & m\geqslant n\\ n, & m<n\end{cases}$，设函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}\ (x>0)$，试讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【解析】 (1) 证明：当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x$，

要证 $\frac{1+x}{1-x}f(x)<\frac{2}{1-x^2}g(x)$，需证 $\frac{1}{1-x}[(1+x)\ln x-2(x-1)]<0$，

即 $\frac{1}{1-x}\left[\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right]<0$，

即证：当 $x>1$ 时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$；当 $0<x<1$ 时，$\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$.

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，此时 $\frac{1}{1-x}\left[\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right]<0$；

当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，此时 $\frac{1}{1-x}\left[\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right]<0$.

故 $a=0$，$x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$\frac{1+x}{1-x}f(x)<\frac{2}{1-x^2}g(x)$.

(2) (i) 当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，$h(x)\geqslant g(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上无零点；

(ii) 当 $x=1$ 时，$g(1)=f(1)=0$，则 $h(1)=0$，$\therefore x=1$ 是 $h(x)$ 的唯一零点；

(iii) 当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数等价于 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数.

$\because f'(x)=\frac{1}{x}-a(0<x<1)$，

$\therefore$①若 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$f(x)<f(1)=0$，此时 $f(x)$ 无零点；

②若 $a>1$ 即 $0<\dfrac{1}{a}<1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$；令 $f'(x)<0$，得 $\dfrac{1}{a}<x<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=a-1-\ln a$，

令 $t(a)=a-1-\ln a(a>1)$，则 $t'(a)=1-\dfrac{1}{a}>0$，$t(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore t(a)>t(1)=0$，即 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=a-1-\ln a>0$，即 $a-1>\ln a$，

两边取指数，有 $\mathrm{e}^{a-1}>\mathrm{e}^{\ln a}$，即 $\mathrm{e}^{a}>ae>a$，

$\therefore 0<\mathrm{e}^{-a}<\dfrac{1}{a}$，

又 $\because f(\mathrm{e}^{-a})=-a+a(1-\mathrm{e}^{-a})=-ae^{-a}<0$，

由零点存在性定理可知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in\left(\mathrm{e}^{-a},\dfrac{1}{a}\right)$.

综上所述：

当 $a\leqslant 1$ 时，$h(x)$ 仅有一个零点；

当 $a>1$ 时，$h(x)$ 有两个零点.

专题25:恒成立专题

1. 若 $\forall x\in(0,+\infty)$,$\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立,则整数 k 的最大值为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】 $\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立,即 $h(x)=\dfrac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}>k$ 恒成立,

即 $h(x)$ 的最小值大于 k,$h'(x)=\dfrac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$,

令 $g(x)=x-1-\ln(x+1)\ (x>0)$,

则 $g'(x)=\dfrac{x}{x+1}>0$,$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $g(2)=1-\ln3<0$,$g(3)=2-2\ln2>0$,

$\therefore g(x)=0$ 存在唯一实根 a,且满足 $a\in(2,3)$,$a=1+\ln(a+1)$.

当 $x>a$ 时,$g(x)>0$,$h'(x)>0$;当 $0<x<a$ 时,$g(x)<0$,$h'(x)<0$,

$\therefore h(x)_{\min}=h(a)=\dfrac{(a+1)[1+\ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$,

故整数 k 的最大值为3. 故选:C.

2. 已知关于 x 的不等式 $e^x>\ln x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立,则整数 a 的最大取值为 ( )

A. 3　　B. 1　　C. 2　　D. 0

【答案】 C

【解析】 若关于 x 的不等式 $e^x>\ln x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立,

即 $a<e^x-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立,

令 $h(x)=e^x-\ln x$,$h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$,$h''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$,

故 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增,而 $x\to0$ 时,$h'(x)\to-\infty$,$h'(1)=e-1>0$,

故存在 x_0,使得 $h'(x_0)=0$,故 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$,

故 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减,在 $(x_0,+\infty)$ 递增,

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=e^{x_0}+\ln e^{x_0}=x_0+\dfrac{1}{x_0}\geqslant2$,

故 $a\leqslant2$,故选:C.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$,$g(x)=\ln x$,当 $x>1$ 时,不等式 $2f'(x)+xg(x)+3>m(x-1)$ 恒成立,则整数 m 的最大值为 ________

【答案】 4

【解析】 【解析】$f'(x)=x-2$,

$x>1$ 时,不等式 $2f'(x)+xg(x)+3>m(x-1)$ 恒成立,

亦即 $m<\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}=\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$ 对一切 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,

所以不等式转化为 $m<\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$ 对任意 $x>1$ 恒成立.

设 $p(x)=\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$，则 $p'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $r(x)=x-\ln x-2(x>1)$，则 $r'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

所以 $r(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $r(3)=3-\ln 3-2=1-\ln 3<0$，$r(4)=4-\ln 4-2=2-2\ln 2>0$，

所以 $r(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一实根 x_0，且满足 $x_0\in(3,4)$，

当 $1<x<x_0$ 时，$r(x)<0$，即 $p'(x)<0$；

当 $x>x_0$ 时，$r(x)>0$，即 $p'(x)>0$.

所以函数 $p(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $r(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，所以 $\ln x_0=x_0-2$.

所以 $[p(x)]_{\min}=p(x_0)=\dfrac{x_0(x_0-2)+1}{x_0-1}=x_0-1+2\in(4,5)$，

所以 $m<[p(x)]_{\min}=x_0-1+2\in(4,5)$

故整数 m 的最大值是 4． 故答案为：4.

4. 已知函数 $f(x)=\ln x, g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$，当 $x>1$ 时，不等式 $k(x-1)<xf(x)+2g'(x)+3$ 恒成立，则整数 k 的最大值为 ________.

【答案】 4

【解析】 【解析】因为当 $x>1$ 时，不等式 $k(x-1)<xf(x)+2g'(x)+3$ 恒成立，

即 $k(x-1)<x\ln x+2(x-2)+3$ 对一切 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

亦即 $k<\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}=\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$ 对一切 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

所以不等式转化为 $k<\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$ 对任意 $x>1$ 恒成立.

设 $p(x)=\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$，则 $p'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $r(x)=x-\ln x-2(x>1)$，则 $r'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

所以 $r(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $r(3)=3-\ln 3-2=1-\ln 3<0$，$r(4)=4-\ln 4-2=2-2\ln 2>0$，

所以 $r(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一实根 x_0，且满足 $x_0\in(3,4)$，

当 $1<x<x_0$ 时，$r(x)<0$，即 $p'(x)<0$；

当 $x>x_0$ 时，$r(x)>0$，即 $p'(x)>0$.

所以函数 $p(x)=\dfrac{x\ln x+1}{x-1}+2$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $r(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，所以 $\ln x_0=x_0-2$.

所以 $[p(x)]_{\min}=p(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+1}{x_0-1}+2=\dfrac{x_0(x_0-2)+1}{x_0-1}=x_0-1+2\in(4,5)$，

所以 $k<[p(x)]_{\min}=x_0-1+2\in(4,5)$

故整数 k 的最大值是 4． 故答案为：4

5. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=axe^x$，$a\in R$.

(1) 若函数 $h(x)=x^2-x-2f(x)$，求函数 $h(x)$ 的单调区间；

(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 由题意得 $h(x)=x^2-x-2f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$，

函数的定义域是 $(-1,+\infty)$，

故 $h'(x)=2x-1-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x+1}$，

令 $h'(x)=0$，解得：$x=1$ 或 $x=-\dfrac{3}{2}$（舍），

故当 $-1<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，

故函数 $h(x)$ 在 $(-1,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增；

(2) 对任意 $x\in[0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立

$\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)-g(x)\leqslant 0$ 恒成立

$\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$，$\ln(x+1)-axe^x\leqslant 0$ 恒成立，

记 $F(x)=\ln(x+1)-axe^x(x\geqslant 0)$，

则 $F'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a(x+1)\mathrm{e}^x=\dfrac{1-a(x+1)^2\mathrm{e}^x}{x+1}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，

又 $F(0)=0$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)\geqslant 0$，不合题意；

②当 $a>0$ 时，

(i) 当 $a\geqslant 1$ 时，$\because x\geqslant 0$，$\therefore a(x+1)^2\mathrm{e}^x\geqslant 1$，

故 $F'(x)=\dfrac{1-a(x+1)^2\mathrm{e}^x}{x+1}\leqslant 0$，故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减，

故当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)\leqslant F(0)=0$，符合题意；

(ii) 当 $0<a<1$ 时，记 $\varphi(x)=1-a(x+1)^2\mathrm{e}^x(x\geqslant 0)$，

则 $\varphi'(x)=-a(x+1)(x+3)\mathrm{e}^x$，

显然 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，

又 $\varphi(0)=1-a>0$，$\varphi\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}-1\right)=1-\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{a}}-1}<0$，

故存在唯一的 $x_0\in\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{a}}-1\right)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，

故当 $0\leqslant x<x_0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(x_0)=0$，

$F'(x)=\dfrac{1-a(x+1)^2\mathrm{e}^x}{x+1}>0$，$F(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递增，

故当 $0\leqslant x<x_0$ 时，$F(x)\geqslant F(0)=0$，不符合题意，

综上：$a\geqslant 1$，即实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax^2+a$.

(1) 当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 若对任意 $x\geqslant 1$，有 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$a=2$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-2x^2+2$，$f(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-4x$，

故 $f'(1)=-3$，故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y=-3(x-1)$，

即 $y=-3x+3$；

(2) 由题意得：$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-2ax=\frac{1-\ln x-2ax^3}{x^2}$，

令 $g(x)=1-\ln x-2ax^3$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x}-6ax^2=-\frac{6ax^3+1}{x}$，

当 $a\geqslant 0$ 时，对任意 $x\geqslant 1$，有 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，

当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant g(1)=1-2a$，

若 $1-2a\leqslant 0$，$a\geqslant\frac{1}{2}$，则在 $[1,+\infty)$ 上，$g(x)\leqslant 0$，即在 $[1,+\infty)$ 上，$f'(x)\leqslant 0$，

故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递减，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant f(1)=0$，符合题意，

若 $1-2a>0$ 即 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$，则 $g(1)=1-2a>0$，$g(\mathrm{e})=1-\ln e-2ae^3=-2ae^3\leqslant 0$，

根据 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，可知存在 $x_0\in(1,\mathrm{e}]$，$g(x_0)=0$，

当 $1<x<x_0$ 时，有 $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上递增，有 $f(x)>f(1)=0$，与 $f(x)\leqslant 0$ 矛盾，不合题意，

当 $a<0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax^2+a=\frac{\ln x}{x}-a(x-1)(x+1)$，

当 $x>1$ 时，$\frac{\ln x}{x}>0$，$-a(x-1)(x+1)>0$，

于是 $f(x)>0$，与 $f(x)\leqslant 0$ 矛盾，不合题意，

综上：实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

7. 已知函数 $f(x)=ae^{x+1}$，$g(x)=\ln\frac{x}{a}-1$，其中 $a>0$.

(1) 若 $d=1$，在平面直角坐标系 xOy 中，过坐标原点 O 分别作函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象的切线 l_1，l_2. 求 l_1，l_2 的斜率之积；

(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小值.

【解析】 (1)$a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x+1}$，$g(x)=\ln x-1$，

设过坐标原点的直线分别切 $f(x)$，$g(x)$ 于点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，

$f'(x)=\mathrm{e}^{x+1}$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，$\therefore k_{l_1}=\mathrm{e}^{x_1+1}$，$k_{l_2}=\frac{1}{x_2}$，

且 $\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{x_1+1}}{x_1}=\mathrm{e}^{x_1+1}\\ \frac{\ln x_2-1}{x_2}=\frac{1}{x_2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\mathrm{e}^2\end{cases}$，

$\therefore k_{l_1}\cdot k_{l_2}=\mathrm{e}^2\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}=1$；

(2) 由 $ae^{x+1}\geqslant\ln\frac{x}{a}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

得 $a>0$ 时，$\mathrm{e}^{x+1}\geqslant\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a}-\frac{1}{a}$，

$xe^{x+1}\geqslant\frac{x}{a}\left(\ln\frac{x}{a}-1\right)=\left(\ln\frac{x}{a}-1\right)\cdot\mathrm{e}^{\ln\frac{x}{a}}(*)$，

令 $F(x)=xe^{x+1}$，$\therefore F(x)\geqslant F\left(\ln\frac{x}{a}-1\right)$，

①当 $\ln\frac{x}{a}-1\leqslant 0$ 时，$(*)$ 左边 >0，右边 $\leqslant 0$，显然成立，

②当 $\ln\frac{x}{a}-1>0$，注意到 $F'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$\therefore x\geqslant \ln\dfrac{x}{a}-1\Rightarrow a\geqslant\left(\dfrac{x}{e^{x+1}}\right)_{\max}$，

令 $\varphi(x)=\dfrac{x}{e^{x+1}}$，$\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x+1}}$，令 $\varphi'(x)=0$，得：$0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增，

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=\dfrac{1}{e^2}$，

$\therefore a\geqslant\dfrac{1}{e^2}$.

8. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\lambda(x^2-1)$（λ 为常数）.

(1) 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，证明：对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立；

(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

【解析】 证明：(1) 设 $h(x)=f(x)-g(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$，$x\geqslant1$，

$\therefore h'(x)=1+\ln x-x$，

设 $\varphi(x)=1+\ln x-x$，$x\geqslant1$，

$\therefore \varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}\leqslant0$ 恒成立，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h'(x)=\varphi(x)<\varphi(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)\leqslant h(1)=0$，

$\therefore$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立.

(2) 对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，

$\therefore x\ln x\leqslant\lambda(x^2-1)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

当 $x=1$ 时，成立，

当 $x>1$ 时，$\lambda\geqslant\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ 恒成立，

设 $m(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$，$x>1$，

$\therefore m'(x)=\dfrac{(1+\ln x)(x^2-1)-2x^2\ln x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2-1-(x^2+1)\ln x}{(x^2-1)^2}$，

设 $p(x)=x^2-1-(x^2+1)\ln x$，

$\therefore p'(x)=2x-2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$，

设 $q(x)=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$，$x>1$，

$\therefore q'(x)=1-2(1+\ln x)+\dfrac{1}{x^2}=-1-2\ln x+\dfrac{1}{x^2}$.

易知函数 $q'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore q'(x)<q'(1)=0$，$\therefore q(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore p'(x)=q(x)<q(1)=0$，$\therefore p(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore p(x)<p(1)=0$，

$\therefore m'(x)<0$，在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore m(x)<m(1)$,

$\because \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\ln x}{2x}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore m(x)<\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \lambda\geqslant\dfrac{1}{2}$.

9. 已知函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最值;

(2) 若 $f(x)+\mathrm{e}^x\geqslant\ln x+x+a$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求 a 的取值范围.

【解析】 (1)$f'(x)=xe^x$,令 $f'(x)>0$,得 $x>0$;令 $f'(x)<0$,得 $x<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-1$,无最大值.

(2) 由题知,$a\leqslant xe^x-\ln x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x)=xe^x-\ln x-x$,则 $g'(x)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\right)$,

因为 $x>0$,所以 $x+1>0$.

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$,易知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$, $h(1)=\mathrm{e}-1>0$

所以存在 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $h(t)=0$,即 $\mathrm{e}^t=\dfrac{1}{t}$.

当 $x\in(0,t)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递减;

当 $x\in(t,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(t,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(t)=te^t-\ln t-t=1+t-t=1$,从而 $a\leqslant1$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

10. 已知函数 $f(x)=ax+1+\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对于任意 $x>0$,不等式 $f(x)\leqslant xe^x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$f'(x)=a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax+1}{x}(x>0)$,

当 $a\geqslant0$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$;

当 $a<0$, 令 $f'(x)=0$,$x=-\dfrac{1}{a}$,当 $x\in\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x)>0$,当 $x\in\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$,单调递减区间是 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

(2) 由已知,问题等价于对于任意 $x>0$,不等式 $a\leqslant\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 恒成立,

设 $F(x)=\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}$,则 $F'(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x+\ln x}{x^2}$,

设 $h(x)=x^2\mathrm{e}^x+\ln x$,则 $h'(x)=(x^2+2x)\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$,

在 $(0,+\infty)$ 上, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增,

又 $h\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}-2}-1<0$, $h(1)=\mathrm{e}>0$,所以 $h\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)h(1)<0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $F'(x_0)=0$，

在 $(0,x_0)$ 上，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；在 $(x_0+\infty)$ 上，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；

所以 $F(x)\geqslant F(x_0)$，

又有 $x_0^2e^{x_0}=-\ln x_0 \Rightarrow x_0e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\left(\frac{1}{x_0}\right)\Rightarrow x_0e^{x_0}=\ln\left(\frac{1}{x_0}\right)e^{\ln\left(\frac{1}{x_0}\right)}$，

设 $\phi(x)=xe^x(x>0)$，则有 $\phi(x_0)=\phi\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$ 和 $\phi'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以在 $(0,+\infty)$ 上，$\phi(x)$ 单调递增，所以 $x_0=\ln\left(\frac{1}{x_0}\right)\Rightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，

所以 $F(x)\geqslant F(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{1+x_0-1}{x_0}=1$，

所以 $a\leqslant 1$，

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

11. 设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，$g(x)=e^{2x}-2ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域；

(2) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，不等式 $g(x)\geqslant f'(x)$ 恒成立 ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x<\frac{\pi}{4}$，令 $f'(x)<0$，解得：$x>\frac{\pi}{4}$，

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 递增，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 递减，

故 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$f(x)_{\min}=f(0)$ 或 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，

而 $f(0)=0<f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$，

故函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域是 $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$；

(2)$g(x)=e^{2x}-2ax$，$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，不等式 $g(x)\geqslant f'(x)$ 恒成立，

即 $e^{2x}-2ax\geqslant\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$ 恒成立，

即 $\frac{\sin x-\cos x}{e^x}+e^{2x}-2ax\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $h(x)=\frac{\sin x-\cos x}{e^x}+e^{2x}-2ax$，$x\in[0,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{2\cos x}{e^x}+2e^{2x}-2a$，

设 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=\frac{4e^{3x}-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$4e^{3x}>4$，

$2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{2}$，$\therefore \varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $h'(x)\geqslant h'(0)=4-2a$，

若 $a\leqslant 2$，则 $h'(x)\geqslant h'(0)=4-2a\geqslant 0$，

故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\geqslant h(0)=0$ 恒成立，符合题意，

若 $a>2$，则 $h'(0)=4-2a<0$，必存在正实数 x_0，

满足当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

此时，$h(x)<h(0)=0$，符合题意，

综上：a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2+ax-6\ln x(a\in R)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小正整数值. $\left(\ln\dfrac{3}{2}\approx 0.404\right)$

【解析】 (1) 由题得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2ax+a-\dfrac{6}{x}=\dfrac{2ax^2+ax-6}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，由于 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒为负数，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2+48a}}{4a}$，

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{-a+\sqrt{a^2+48a}}{4a}$.

此时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+48a}}{4a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+48a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+48a}}{4a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{a+\sqrt{a^2+48a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 依题意，$a>\dfrac{6\ln x}{x^2+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{6\ln x}{x^2+x}(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{\frac{6}{x}(x^2+x)-6(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}=\dfrac{6}{(x^2+x)^2}(x+1-2x\ln x-\ln x)\ (x>0)$，

令 $h(x)=x+1-2x\ln x-\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=-1-2\ln x-\dfrac{1}{x}$，

令 $\varphi(x)=-1-2\ln x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，由于 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{1-2x}{x^2}$，

因此 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi(x)$ 取得最大值 $2\ln 2-3<0$.

根据 $\varphi(x)$ 恒为负数，知 $h'(x)$ 亦恒为负数，

因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

而 $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{2}-4\ln\dfrac{3}{2}>0$，$h(2)=3-5\ln 2<0$ 知，

可知在区间 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 上必存在 x_0，使得函数 $h(x)$ 满足 $h(x_0)=0$，

且 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减.

由于 $g(x\leqslant)g(x_0)=\dfrac{6\ln x_0}{x_0^2+x_0}$，而 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{2x_0+1}$，

故 $g(x)\leqslant g(x_0)=\dfrac{6\ln x_0}{x_0^2+x_0}$,

由 $x_0\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$,因此 $2x_0^2+x_0\in(6,10)$,$g(x_0)\in\left(\dfrac{3}{5},1\right)$,

所以 $a\geqslant1$,因此 a 的最小正整数值为 1.

13. 已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x>1$ 时,$f(x)+x>k(x-1)$ 恒成立,求正整数 k 的最大值.

【解析】 (1)$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=1+\ln x$,所以 $f'(\mathrm{e})=2$,又 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$,

所以切线方程为 $y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})$,即 $2x-y-\mathrm{e}=0$.

(2) 当 $x>1$ 时,$f(x)+x>k(x-1)$ 恒成立,可转化为当 $x>1$ 时,$k<\dfrac{x(1+\ln x)}{x-1}$ 恒成立,

设 $h(x)=\dfrac{x(1+\ln x)}{x-1}(x>1)$,则 $h'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,

设 $\varphi(x)=x-\ln x-2$,$(x>1)$,则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}$,

因为 $x>1$ 时,$\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$,所以 $\varphi(x)=x-\ln x-2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

又因为 $\varphi(3)=1-\ln3<0$,$\varphi(4)=2-\ln4>0$

所以存在唯一的 $x_0\in(3,4)$,使得 $\varphi(x_0)=0$,即 $\ln x_0=x_0-2$,

当 $x\in(1,x_0)$ 时,$\varphi(x)<0$,即 $h'(x_0)<0$,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$\varphi(x)>0$,即 $h'(x_0)>0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(x_0-1)}{x_0-1}=x_0$,

因为 $k<\left[\dfrac{x(1+\ln x)}{x-1}\right]_{\min}=x_0$,且 $x_0\in(3,4)$,

所以整数 k 的最大值为 3.

14. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(1) 若 $x\geqslant0$ 时,不等式 $(x-1)f(x)\geqslant mx^2-1$ 恒成立,求 m 的取值范围;

(2) 求证:当 $x>0$ 时,$f(x)>4\ln x+8-8\ln2$.

【解析】 (1) 不等式 $(x-1)f(x)\geqslant mx^2-1$ 恒成立,即 $(x-1)\mathrm{e}^x-mx^2+1\geqslant0$ 恒成立,

令 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-mx^2+1$,则 $g'(x)=x(\mathrm{e}^x-2m)\ (x\geqslant0)$,

当 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,对任意 $x\in[0,+\infty)$,有 $g'(x)\geqslant0$,得 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 满足题意;

当 $m>\dfrac{1}{2}$ 时,若 $x\in(0,\ln2m)$,则 $g'(x)<0$,

$g(x)$ 在 $(0,\ln2m)$ 上单调递减,$\therefore g(\ln2m)<g(0)=0$,

与 $g(x)\geqslant0$ 矛盾,不合题意.

综上所述,$m\leqslant\dfrac{1}{2}$;

证明：(2) 令 $h(x)=\mathrm{e}^{x}-4\ln x-8+8\ln 2$，

$h'(x)=\mathrm{e}^{x}-\frac{4}{x}$，

$\because h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h'(1)=\mathrm{e}-4<0$，$h'(2)=\mathrm{e}^{2}-2>0$，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-4\ln x_0-8+8\ln 2$，

由 $h'(x_0)=0$，得 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{4}{x_0}$，$\therefore x_0=\ln 4-\ln x_0$，

$\therefore h(x_0)=\frac{4}{x_0}-4(\ln 4-x_0)-8+8\ln 2=4x_0+\frac{4}{x_0}-8\geqslant 2\sqrt{4x_0\cdot\frac{4}{x_0}}-8=0$，

$\because x_0\in(1,2)$，上式“=”不成立，

$\therefore h(x)\geqslant h(x_0)>0$，

即 $f(x)>4\ln x+8-8\ln 2$.

专题26:筷子夹汤圆专题

1. 已知函数 $f(x)=4x-x^4$，$x\in R$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(Ⅲ)若方程 $f(x)=a$(a 为实数)有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1\leqslant -\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

【解析】 (Ⅰ)由 $f(x)=4x-x^4$，可得 $f'(x)=4-4x^3$.

当 $f'(x)>0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $f'(x)<0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(Ⅱ)证明：设点 p 的坐标为 $(x_0,0)$，则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$，$f'(x_0)=-12$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，

则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

$\because F'(x_0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$F'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 对于任意实数 x，$F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即对任意实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(Ⅲ)证明：由(Ⅱ)知，$g(x)=-12\left(x-4^{\frac{1}{3}}\right)$，设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=-\frac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$.

$\because g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，又由(Ⅱ)知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$，

因此 $x_2\leqslant x_2'$.

类似地，设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=4x$，

对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)-h(x)=-x^4\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant h(x)$.

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\frac{a}{4}$，

$\because h(x)=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\leqslant h(x_1)$，

因此 $x_1'\leqslant x_1$，

由此可得 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

2. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in R$. 其中 $n\in N$. $n\geqslant 2$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(3)设 $n=5$，若关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为实数)有两个正实根 x_1，x_2，求证：$|x_2-x_1|<2-\frac{a}{4}$.

【解析】 (1)由 $f(x)=nx-x^n$，可得 $f'(x)=n-nx^{n-1}=n(1-x^{n-1})$，其中 $n\in N^*$，且 $n\geqslant 2$.

下面分两种情况讨论:

①当 n 为奇数时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，或 $x=-1$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$

$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	递减	递增	递减

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 单调递增；

②当 n 为偶数时，

当 $f'(x)>0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减；

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

(2) 证明：设点 P 的坐标为 $(x_0,0)$，则 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$，$f'(x_0)=n-n^2$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，

即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，

则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

由于 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又因为 $F'(x_0)=0$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $\in(0,x_0)$ 内单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以对应任意的正实数 x，都有 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，

即对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$.

(3) 证明：不妨设 $x_1\leqslant x_2$，

由 (2) 知 $g(x)=(n-n^2)(x-x_0)$，设方程 $g(x)=a$ 的根为 $x_{2'}$，

可得 $x_{2'}=\dfrac{a}{n-n^2}+x_0$，由 (Ⅱ) 知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_{2'})$，可得 $x_2\leqslant x_{2'}$.

类似地，设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=nx$，

当 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)-h(x)=-x^n<0$，

即对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<h(x)$，

设方程 $h(x)=a$ 的根为 $x_{1'}$，可得 $x_{1'}=\dfrac{a}{n}$，

因为 $h(x)=nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

且 $h(x_{1'})=a=f(x_1)<h(x_1)$，因此 $x_{1'}<x_1$，

由此可得：$x_2-x_1<x_{2'}-x_{1'}=\dfrac{a}{1-n}+x_0$，

因为 $n\geqslant 2$，所以 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}\geqslant 1+C_{n-1}^1=1+n-1=n$，

故：$2\geqslant n^{\frac{1}{n-1}}=x_0$. 则 $|x_2-x_1|<2+\dfrac{a}{1-n}$，

所以当 $n=5$ 时，即有 $|x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{4}$.

3. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in R$，其中 $n\in N^{\cdot}$，且 $n\geqslant 2$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

(Ⅲ)若关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为实数)有两个正实数根 x_1,x_2,求证:$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.

【解析】【解析】(本题满分为14分)

(Ⅰ)由 $f(x)=nx-x^n$,可得 $f'(x)=n-nx^{n-1}=n(1-x^{n-1})$,其中 $n\in N^*$,且 $n\geqslant 2$.

下面分两种情况讨论:

(1)当 n 为奇数时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$,或 $x=-1$,当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	递减	递增	递减

所以,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$ 上单调递减,在 $(-1,1)$ 单调递增.

(2)当 n 为偶数时,

当 $f'(x)>0$,即 $x<1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $f'(x)<0$,即 $x>1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减;

所以,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减;

(Ⅱ)证明:设点 P 的坐标为 $(x_0,0)$,则 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$,$f'(x_0)=n-n^2$,

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$,即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$,

令 $F(x)=f(x)-g(x)$,即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$,则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

由于 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

又因为 $F'(x_0)=0$,所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$F'(x)>0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$F'(x)<0$,

所以 $F(x)$ 在 $\in(0,x_0)$ 内单调递增,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减,

所以对应任意的正实数 x,都有 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$,

即对于任意的正实数 x,都有 $f(x)\leqslant g(x)$.

(Ⅲ)证明:不妨设 $x_1\leqslant x_2$,

由(Ⅱ)知 $g(x)=(n-n^2)(x-x_0)$,

设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2',可得 $x_2'=\frac{a}{n-n^2}+x_0$,

由(Ⅱ)知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$,可得 $x_2\leqslant x_2'$.

类似地,设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$,

可得 $h(x)=nx$,当 $x\in(0,+\infty)$,$f(x)-h(x)=-x^n<0$,

即对于任意的 $x\in(0,+\infty)$,$f(x)<h(x)$,

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1',可得 $x_1'=\frac{a}{n}$,

因为 $h(x)=nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,且 $h(x_1')=a=f(x_1)<h(x_1)$,

因此 $x_1'<x_1$,

由此可得:$x_2-x_1<x_2'-x_1'=\frac{a}{1-n}+x_0$,

因为 $n\geqslant 2$,所以 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}\geqslant 1+C_{n-1}^1=1+n-1=n$,

故:$2\geqslant n^{\frac{1}{n-1}}=x_0$.

所以:$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.

4. 已知函数 $f(x)=(x+b)(e^x-a)\ (b>0)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+e-1=0$.

(1) 求 a,b;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的交点为点 P,曲线在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$,求证:对于任意的实数 x,都有 $f(x)\geqslant h(x)$;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个实数根 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,证明:$x_2-x_1\leqslant 1+\dfrac{m(1-2e)}{1-e}$.

【解析】 (1) 将 $x=-1$ 代入切线方程 $(e-1)x+ey+e-1=0$ 中,有 $y=0$,

所以 $f(-1)=0$,即 $f(-1)=(b-1)\left(\dfrac{1}{e}-a\right)=0$,

又 $f'(x)=e^x(x+b+1)-a$,所以 $f'(-1)=\dfrac{b}{e}-a=-\dfrac{e-1}{e}=-1+\dfrac{1}{e}$.

若 $a=\dfrac{1}{e}$,则 $b=2-e<0$,与 $b>0$ 矛盾,故 $a=b=1$.

(2) 证明:由 (1) 可知 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$,

令 $f(x)=0$,有 $x=-1$ 或 $x=0$,

故曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的唯一交点 P 为 $(-1,0)$.

曲线在点 $P(-1,0)$ 处的切线方程为 $y=h(x)$,则 $h(x)=f'(-1)(x+1)$,

令 $F(x)=f(x)-h(x)$,则 $F(x)=f(x)-f'(-1)(x+1)$,

所以 $F'(x)=f'(x)-f'(-1)=e^x(x+2)-\dfrac{1}{e}$,$F'(-1)=0$.

当 $x<-1$ 时,

若 $x\in(-\infty,-2]$,$F'(x)<0$,

若 $x\in(-2,-1)$,$F''(x)=e^x(x+3)>0$,

$F'(x)$ 在 $x\in(-2,-1)$ 时单调递增,$F'(x)<F'(-1)=0$.

故 $F'(x)<0$,$F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,

当 $x>-1$ 时,

由 $F''(x)=e^x(x+3)>0$ 知 $F'(x)$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 时单调递增,$F'(x)>F'(-1)=0$,

$F(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)\geqslant F(-1)=0$,即 $f(x)\geqslant h(x)$ 成立.

(3) 证明:$h(x)=\left(\dfrac{1}{e}-1\right)(x+1)$,设 $h(x)=m$ 的根为 $x_{1'}$,

则 $x_{1'}=-1+\dfrac{me}{1-e}$,

又 $h(x)$ 单调递减,且 $m=h(x_{1'})=f(x_1)\geqslant h(x_1)$,

所以 $x_{1'}\leqslant x_1$,

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=t(x)$,有 $t(x)=x$,

令 $T(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(e^x-1)-x$,$T'(x)=(x+2)e^x-2$,

当 $x\leqslant -2$ 时,$T'(x)=(x+2)e^x-2\leqslant -2<0$,

当 $x>-2$ 时,$T''(x)=(x+3)e^x>0$,

故函数 $T'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增,

又 $T'(0)=0$,

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$T'(x)<0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$T'(x)>0$,

所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

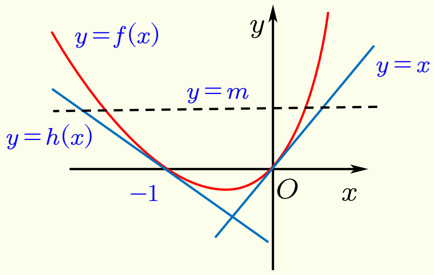
所以 $T(x)\geqslant T(0)=0$，即 $f(x)\geqslant t(x)$，

设 $t(x)=m$ 的根为 $x_{2'}$，则 $x_{2'}=m$，

又函数 $t(x)$ 单调递增，故 $m=t(x_{2'})=f(x_2)\geqslant t(x_2)$，

故 $x_{2'}\geqslant x_2$. 又 $x_{1'}\leqslant x_1$，

所以 $x_2-x_1\leqslant x_{2'}-x_{1'}=m-\left(-1+\dfrac{me}{1-\mathrm{e}}\right)=1+\dfrac{m(1-2\mathrm{e})}{1-\mathrm{e}}$.



5. 已知函数 $f(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$.

(1) 求 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $a\leqslant \mathrm{e}-1$，证明：$f(x)\geqslant a\ln x+2ex-2$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立；

(3) 若方程 $f(x)=b$ 有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_2-x_1\leqslant 1+\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\dfrac{eb}{\mathrm{e}-1}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$，由 $f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-1$，

由 $f'(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$，$f(-1)=0$，

所以切线方程为 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)$，

(2) 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln x\geqslant 0$，所以 $a\ln x+2ex-2\leqslant(\mathrm{e}-1)\ln x+2ex-2$.

故只需证 $f(x)\geqslant(\mathrm{e}-1)\ln x+2ex-2$，

构造 $g(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}-1)\ln x-2ex+2$，

$g'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-1-\dfrac{\mathrm{e}-1}{x}-2\mathrm{e}$，

又 $g'(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=0$，知 $g(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geqslant g(1)=2\mathrm{e}-2-2\mathrm{e}+2=0$.

因此 $(x+1)(\mathrm{e}^x-1)\geqslant(\mathrm{e}-1)\ln x+2ex-2\geqslant a\ln x+2ex-2$，得证.

(3) 由 (1) 知 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)$.

构造 $F(x)=f(x)-\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$F'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$F''(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$.

当 $x<-3$ 时，$F''(x)<0$；当 $x>-3$ 时，$F''(x)>0$；

所以 $F'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增.

又 $F'(-3)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F'(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$F'(-1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)\geqslant F(-1)=0\Rightarrow f(x)\geqslant\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)$.

设方程 $s(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)=b$ 的根 $x_1'=\dfrac{eb}{1-\mathrm{e}}-1$. 又 $b=s(x_1')=f(x_1)\geqslant s(x_1)$，由 $s(x)$ 在 R 上单调

递减，所以 $x_1'\leqslant x_1$.

另一方面，$f(x)$ 在点 $(1,2\mathrm{e}-2)$ 处的切线方程为 $t(x)=(3\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}-1$.

构造 $G(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)-(3\mathrm{e}-1)x+\mathrm{e}+1=(x+1)\mathrm{e}^x-3ex+\mathrm{e}$.

$G'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}$，$G''(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$.

当 $x<-3$ 时，$G''(x)<0$；当 $x>-3$ 时，$G''(x)>0$；

所以 $G'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增.

又 $G'(-3)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-3\mathrm{e}<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}G'(x)=-3\mathrm{e}$，$G'(1)=0$，

所 $G(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $G(x)\geqslant G(1)=0\Rightarrow f(x)\geqslant t(x)=(3\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}-1$.

设方程 $t(x)=(3\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}-1=b$ 的根 $x_2'=\dfrac{\mathrm{e}+1+b}{3\mathrm{e}-1}$.

又 $b=t(x_2')=f(x_2)\geqslant t(x_2)$，由 $t(x)$ 在 R 上单调递增，

所以 $x_2\leqslant x_2'$.

$\because x_1'\leqslant x_1$，$x_2\leqslant x_2'$，

$\therefore -x_1\leqslant -x_1'$，

所以 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'\leqslant 1+\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\dfrac{eb}{\mathrm{e}-1}$，得证.

6. 已知函数 $f(x)=ax-\mathrm{e}^x+1$，曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线为 $y=2x$.

(1) 证明：曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴有交点；

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线为直线 l，求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$(m 为正实数) 有不等实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{3m}{4}$.

【解析】 证明：(1) 因为 $f'(x)=a-\mathrm{e}^x$，由已知得：$a-\mathrm{e}^0=2$，解得 $a=3$，

即 $f'(x)=3-\mathrm{e}^x$，所以 $f(x)=3x-\mathrm{e}^x+1$ 在 $(-\infty,\ln3)$ 上单调递增，在 $(\ln3,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(0)=0$，$f(\ln3)=3\ln3-2>0$，$f(2)=7-\mathrm{e}^2<0$，

所以，存在 $x_0\in(\ln3,2)$，使得 $f(x_0)=3x_0-\mathrm{e}^{x_0}+1=0$.

即曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴有交点 $P(x_0,0)$；

(2) 曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线 l：$y=(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)$，

令 $g(x)=(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)$，$F(x)=f(x)-g(x)$，

则 $F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$，

又 $F'(x)=3-\mathrm{e}^x-(3-\mathrm{e}^{x_0})=\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^x$

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

所以对任意实数 x 都有 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，

即对任意实数 x 都有 $f(x)\leqslant g(x)$，

故曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(3) 因为 $3x_0-\mathrm{e}^{x_0}+1=0$，所以 $g(x)=(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)=(2-3x_0)(x-x_0)$ 为减函数，

设方程 $g(x)=m$ 的根为 $x_{2'}=\dfrac{m}{2-3x_0}+x_0$，

由 (2) 可知 $g(x_2)>f(x_2)=m=g(x_{2'})$，所以 $x_2\leqslant x_{2'}$

记 $h(x)=f(x)-2x=x+1-e^x$，则 $h'(x)=1-e^x$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$，单调递减，

所以，对任意的实数 x，都有 $h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $f(x)\leqslant 2x$

设方程 $2x=m$ 的根 $x_{1'}=\dfrac{m}{2}$，则 $2x_1\geqslant f(x_1)=m=2x_{1'}$，所以 $x_{1'}\leqslant x_1$

于是 $x_2-x_1\leqslant x_{2'}-x_{1'}=\dfrac{m}{2-3x_0}+x_0-\dfrac{m}{2}$，

令 $\varphi(x)=\dfrac{m}{2-3x}+x-\dfrac{m}{2}$，$x\in[1,+\infty)$，又 $m>0$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{3m}{(2-3x)^2}+1>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，又 $x_0\in(\ln3,2)$，

所以，$\varphi(x_0)<\varphi(2)=2-\dfrac{3m}{4}$，

所以 $x_2-x_1<2-\dfrac{3m}{4}$.

7. 已知函数 $f(x)=6x-x^6$，$x\in R$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的极值；

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，求曲线在点 P 处的切线方程；

(Ⅲ) 若方程 $f(x)=a$(a 为实数) 有两个实数根 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1\leqslant 6^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{5}$.

【解析】 (Ⅰ) 由已知得：$f'(x)=6(1-x^5)$ 由 $f'(x)=0$ 得：$x=1$

又当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 $f(1)=5$，无极小值 .

(Ⅱ) 设 $P(x_0,0)$，则 $x_0=\sqrt[5]{6}$，$f'(x_0)=-30$，

曲线 $f(x)$ 在点 P 处的切线方程为：$y=f'(x_0)(x-x_0)=-30(x-\sqrt[5]{6})$，

即曲线在点 P 处的切线方程为：$y=-30(x-\sqrt[5]{6})$

(Ⅲ) 设 $g(x)=-30(x-\sqrt[5]{6})$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$

即 $F(x)=f(x)+30(x-\sqrt[5]{6})$，则 $F'(x)=f'(x)+30$

由于 $f'(x)=6-6x^5$ 在 R 单调递减，故 $F'(x)$ 在 R 单调递减，又 $\because F'(x_0)=0$，$(x_0=\sqrt[5]{6})$

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时 $F'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减，

$\therefore\forall x\in R$，$F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即 $\forall x\in R$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

设方程 $g(x)=a$ 的根为 $x_{2'}$，$\therefore x_2'=6^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{30}$.

$\because g(x)$ 在 R 单调递减，且 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$

$\therefore x_2<x_2'$，

设曲线 $y=f(x)$ 在点原点处的切线方程为：$y=h(x)$，则易得 $h(x)=6x$，

$\forall x\in R$，有 $f(x)-h(x)=-x^6\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant h(x)$，

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，则 $x_1'=\dfrac{a}{6}$，

$\because h(x)$ 在 R 单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\leqslant h(x_1)$，

$\therefore x_1{}'\leqslant x_1$

$\therefore x_2-x_1\leqslant x_2{}'-x_1{}'=\left(a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{30}\right)-\dfrac{a}{6}=a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{5}$,

即 $x_2-x_1\leqslant a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{5}$.

8. 已知函数 $f(x)=ax-\mathrm{e}^x+1$，$\ln 3$ 是 $f(x)$ 的极值点.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线为直线 l. 求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(Ⅲ) 若关于 x 的方程 $f(x)=m(m>0)$ 有两个不等实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{7m}{10}$.

【解析】 (Ⅰ)$f'(x)=a-\mathrm{e}^x$；

由题意知，$f'(\ln 3)=a-\mathrm{e}^{\ln 3}=0$；$\therefore a=3$；

(Ⅱ) 证明：设曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,0)$ 处切线为直线 $l:y=(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)$；

令 $g(x)=(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)$；

$F(x)=f(x)-g(x)=3x-\mathrm{e}^x+1-(3-\mathrm{e}^{x_0})(x-x_0)$；

$\therefore F'(x)=3-\mathrm{e}^x-(3-\mathrm{e}^{x_0})=\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^x$；

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减；

$\therefore F(x)_{\max}=F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$；

$\therefore F(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant g(x)$，即 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(Ⅲ) 由 (Ⅱ) 设方程 $g(x)=m$ 的解为 $x_2{}'$；

则有 $(3-\mathrm{e}^{x_0})(x_2{}'-x_0)=m$，解得 $x_2{}'=\dfrac{m}{3-\mathrm{e}^{x_0}}+x_0$；

由题意知，$\ln 3<x_2<x_2{}'$；

令 $r(x)=2x-f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$(x>0)$；$r'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$；

$\therefore r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；$\therefore r(x)>r(0)=0$；

$\therefore y=2x$ 的图象不在 $f(x)$ 的下方；

$\because y=2x$ 与 $y=m$ 交点的横坐标为 $x_1{}'=\dfrac{m}{2}$；

则有 $0<x_1{}'<x_1<\ln 3$，即 $0<x_1{}'<x_1<\ln 3<x_2<x_2{}'$；

$\therefore x_2-x_1<x_2{}'-x_1{}'=\dfrac{m}{3-\mathrm{e}^{x_0}}+x_0-\dfrac{m}{2}$；

$\because$ 关于 x_0 的函数 $y=\dfrac{m}{3-\mathrm{e}^{x_0}}+x_0-\dfrac{m}{2}$ 在 $(\ln 3,2)$ 上单调递增；

$\therefore x_2-x_1<\dfrac{m}{3-\mathrm{e}^2}+2-\dfrac{m}{2}<\dfrac{m}{2-7}+2-\dfrac{m}{2}=2-\dfrac{7m}{10}$.

9. 已知函数 $f(x)=3x-\mathrm{e}^x+1$，其中 $\mathrm{e}=0.71828\cdots$，是自然对数的底数.

(I) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴相交于点 $P(x_0,0)$，曲线在点 P 处的切线为 l，求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(II) 若关于 x 的方程 $f(x)=m$(m 为正实数) 有两个不等实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{3}{4}m$.

【解析】 证明：(*I*) 由题意可得：$3x_0-\mathrm{e}^{x_0}+1=0$，$\mathrm{e}^{x_0}=3x_0+1$，$x_0\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

$f'(x)=3-\mathrm{e}^x$，$f'(x_0)=3-\mathrm{e}^{x_0}=3-3x_0-1=2-3x_0$，

可得：曲线在点 P 处的切线为 $l:y=(2-3x_0)(x-x_0)$，

令 $g(x)=(2-3x_0)(x-x_0)-(3x-e^x+1)$，$g(x_0)=0$.

$g'(x)=2-3x_0-3+e^x=-1-3x_0+e^x$，$g'(x_0)=-3x_0+e^{x_0}-1=0$，

可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)\geqslant g(x_0)=0$，

因此：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方.

(II) 由 (I) 可得：$f'(x)=3-e^x=0$，解得 $x=\ln 3$.

$f(\ln 3)=3\ln 3-3+1=3\ln 3-2$. $\therefore 0<m<3\ln 3-2$.

曲线在点 P 处的切线为 $l:y=(2-3x_0)(x-x_0)$，$x_0\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

同理可得：$f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为：$y=2x$.

$y=m$ 与 $y=2x$，$y=(2-3x_0)(x-x_0)$ 的交点的横坐标分别为 x_3，x_4.

则 $x_3=\dfrac{m}{2}$，$x_4=x_0+\dfrac{m}{2-3x_0}$.

$\therefore |x_2-x_1|<x_4-x_3=x_0+\dfrac{m}{2-3x_0}-\dfrac{m}{2}$.

下面证明：$x_0+\dfrac{m}{2-3x_0}-\dfrac{m}{2}<2-\dfrac{3m}{4}$.

$\because 2-\dfrac{m}{4}-x_0-\dfrac{m}{2-3x_0}=2-x_0-m\cdot\dfrac{3(2-x_0)}{4(2-3x_0)}=(2-x_0)\cdot\dfrac{12x_0+3m-8}{4(3x_0-2)}$.

$\because 12x_0-8+3m>4+3m>0.3x_0-2>0$.

$\therefore x_0+\dfrac{m}{2-3x_0}-\dfrac{m}{2}<2-\dfrac{3m}{4}$.

10. 已知函数 $g(x)=x^4$，$x\in R$，在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程记为 $y=m(x)$，令 $f(x)=m(x)-g(x)+3$.

(I) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴相交于 P，$f(x)$ 在点 P 处的切线为 l，证明：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

(II) 关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为正实数) 有两个实根 x_1，x_2，求证：$|x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{3}$.

【解析】 证明：$(I)g(1)=1$，$g'(x)=4x^3$，$g'(1)=4$.

$\therefore$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为：$y-1=4(x-1)$，记为 $y=m(x)=4x-3$，

$f(x)=m(x)-g(x)+3=4x-3-x^4+3=4x-x^4$.

由 $f(x)=4x-x^4=x(4-x^3)=0$. $x>0$，解得 $x=\sqrt[3]{4}$. $\therefore P(\sqrt[3]{4},0)$.

$f'(x)=4-4x^3$，$f'(\sqrt[3]{4})=4-4\times 4=-12$.

$\therefore f(x)$ 在点 P 处的切线为 $l:y=-12(x-\sqrt[3]{4})$.

令 $h(x)=-12(x-\sqrt[3]{4})-4x+x^4$. $h(\sqrt[3]{4})=0$.

$h'(x)=-12-4+4x^3=4(x^3-4)=4(x-\sqrt[3]{4})(x^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}x)$.

可得函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt[3]{4})$ 上单调递减，在 $(\sqrt[3]{4},+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x)\geqslant h(\sqrt[3]{4})=0$，

$\therefore -12(x-\sqrt[3]{4})\geqslant 4x-x^4$.

因此曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方.

$(II)f(x)$ 在点 P 处的切线为 $l:y=-12(x-\sqrt[3]{4})$.

同理可得：$f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为：$y=4x$.

$y=a$ 与 $y=4x$，$y=-12(x-\sqrt[3]{4})$ 的交点的恒坐标分别为 x_3，x_4.

$4x-f(x)=x^4 \geqslant 0(x\geqslant 0)$，

则 $x_3=\dfrac{a}{4}$，$x_4=\sqrt[3]{4}-\dfrac{a}{12}$.

$\therefore |x_2-x_1|<x_4-x_3=\sqrt[3]{4}-\dfrac{a}{12}-\dfrac{a}{4}=\sqrt[3]{4}-\dfrac{a}{3}<2-\dfrac{a}{3}$.

$\therefore |x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{3}$.

专题27：找点专题

1. 已知函数$f(x)=ax+\frac{2}{e^x}+1(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若函数$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，求实数a的取值范围；

(2) 当$a\neq 0$时，讨论函数$g(x)=f(x)-a-3$的零点个数，并给予证明.

【解析】 (1)$f'(x)=a-\frac{2}{e^x}$

由题意得$f'(x)\geqslant 0$，即$a\geqslant\frac{2}{e^x}$在区间$(1,+\infty)$上恒成立.

当$x\in(1,+\infty)$时，$\frac{2}{e^x}\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$，所以$a\geqslant\frac{2}{e}$，故实数$a$的取值范围为$\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$.

(2) 由已知得$g(x)=ax+\frac{2}{e^x}-a-2$，则$g'(x)=a-\frac{2}{e^x}=\frac{ae^x-2}{e^x}$.

当$a<0$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减，

又$g(0)=-a>0$，$g(1)=\frac{2}{e}-2<0$，故函数$g(x)$有且只有一个零点.

当$a>0$时，令$g'(x)<0$，得$x<\ln\frac{2}{a}$，函数$g(x)$单调递减，

令$g'(x)>0$，得$x>\ln\frac{2}{a}$，函数$g(x)$单调递增，

而$g\left(\ln\frac{2}{a}\right)=a\left(\ln\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\right)<0$，$g\left(\frac{a+2}{a}\right)=\frac{2}{e^{\frac{a+2}{a}}}>0$，

($\ln x<x$在$(0,+\infty)$上恒成立)

由于$x>\ln x$，所以$\frac{a+2}{a}>\frac{2}{a}>\ln\frac{2}{a}$，所以$g(x)$在$\left(\ln\frac{2}{a},\frac{a+2}{a}\right)$上存在一个零点.

又$g\left(\ln\frac{2}{a^2+a+2}\right)=a\left(a-\ln\frac{a^2+a+2}{2}\right)$，且$\ln\frac{2}{a^2+a+2}<\ln\frac{2}{a}$，

设$h(a)=a-\ln\frac{a^2+a+2}{2}$，则$h'(a)=1-\frac{2a+1}{a^2+a+2}=\frac{a^2-a+1}{a^2+a+2}>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

故$h(a)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

而$h(0)=0$，所以$h(a)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$g\left(\ln\frac{2}{a^2+a+2}\right)>0$，

所以$g(x)$在$\left(\ln\frac{2}{a^2+a+2},\ln\frac{2}{a}\right)$上存在一个零点.

综上所述，当$a<0$时，函数$g(x)$有且只有一个零点；

当$a>0$时，函数$g(x)$有两个零点.

2. 已知函数$f(x)=e^x\sin x$.(e是自然对数的底数)

(1) 求$f(x)$的单调区间；

(2) 记$g(x)=f(x)-ax$，$0<a<3$，试讨论$g(x)$在$(0,\pi)$上的零点个数.(参考数据：$e^{\frac{\pi}{2}}\approx 4.8$)

【解析】 (1) 由题意，函数$f(x)=e^x\sin x$，其定义域为R，

可得$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

令$f'(x)<0$，即$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，解得$2k\pi+\pi<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+2\pi(k\in Z)$

解得$2k\pi+\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi(k\in Z)$.

令 $f'(x)>0$，即 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，解得 $2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi(k\in Z)$

解得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in Z)$.

所以 $f(x)$ 的减区间为 $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)$，增区间为 $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in Z)$.

(2) 由 $g(x)=f(x)-ax=e^x\sin x-ax$，可得 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-a$，

令 $h(x)=e^x(\sin x+\cos x)-a$，则 $h'(x)=2e^x\cos x$，

因为 $x\in(0,\pi)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

即 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

因为 $g'(0)=1-a$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-a>0$，$g'(\pi)=-e^{\pi}-a<0$，

①当 $1-a\geqslant 0$ 时，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$g'(0)\geqslant 0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，(x_0,π) 上单调递减，

所以 $g(0)=0$，所以 $g(x_0)>0$，

又因为 $g(\pi)=-a\pi<0$，由零点存在性定理可得，此时 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有一个零点.

②若 $1<a<3$ 时，$g'(0)=1-a<0$，

又因为 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

而 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-a>0$，所以 $\exists x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $g'(x_1)=0$，$g'(x_2)=0$，

且当 $x\in(0,x_1)$　$x\in(x_2,\pi)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 (x_2,π) 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

因为 $g(0)=0$，所以 $g(x_1)<0$，

因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}a>e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3\pi}{2}>0$，所以 $g(x_2)>0$.

又因为 $g(\pi)=-a\pi<0$，

由零点存在性定理可得，$g(x)$ 在 (x_1,x_2) 和 (x_2,π) 内各有一个零点，

即此时 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个零点.

综上所述，当 $0<a\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有一个零点；

当 $1<a<3$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个零点.

3. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1$，其中 $a>0$，e 为自然对数的底数.

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

所以 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}(x>0)$，设 $g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$

所以函数 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(1)=e^0-1=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$

所以当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $[1,+\infty)$.

(2) 当 $a=1$ 时，由 (1) 可知，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $[1,+\infty)$，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$，所以函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

当 $a>1$ 时，$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1>e^{x-1}-\ln x-1\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 没有零点.

当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}(x>0)$，设 $h(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}(x>0)$，

则 $h'(x)=ae^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，所以函数 $f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f'(1)=a-1<0$，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=ae^{\frac{1}{a}-1}-a=a\left(e^{\frac{1}{a}-1}-1\right)>0$，

所以存在 $x_0\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1)=a+\ln a-1$ 且 $0<a<1$，所以 $a-1<0$，$\ln a<0$，所以 $f(1)<0$.

令 $x_1=\dfrac{a}{e}$，则 $x_1<1$ 且 $f(x_1)=f\left(\dfrac{a}{e}\right)=ae^{\frac{a}{e}-1}>0$.

令 $x_2=\left(\dfrac{2}{a}\right)^2=\dfrac{4}{a^2}$，则 $x_2>\dfrac{1}{a}>1$

且 $f(x_2)=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=ae^{\frac{4}{a^2}-1}-\ln\dfrac{4}{a^2}+\ln a-1=ae^{\frac{4}{a^2}-1}+3\ln a-1-2\ln 2$.

下面先证：$e^{x-1}>x(x>1)$，令 $t(x)=e^{x-1}-x(x>1)$，则 $t'(x)=e^{x-1}-1>0$

故函数 $t(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t(x)>e^{1-1}-1=0$，所以 $e^{x-1}>x(x>1)$

所以 $f(x_2)=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=ae^{\frac{4}{a^2}-1}+3\ln a-1-2\ln 2>a\cdot\dfrac{4}{a^2}+3\ln a-1-2\ln 2=\dfrac{4}{a}+3\ln a-1-2\ln 2$.

令 $r(a)=\dfrac{4}{a}+3\ln a-1-2\ln 2(0<a<1)$，则 $r'(a)=-\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{a}=\dfrac{3a-4}{a^2}<0$

所以函数 $r(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $r(a)>4+3\ln 1-1-2\ln 2=3-2\ln 2>0$

所以 $f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{e},1\right)$ 和 $\left(1,\dfrac{4}{a^2}\right)$ 内各有一个零点，所以函数 $f(x)$ 有两个零点

综上，当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点；当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点；当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

4. 已知函数 $f(x)=a(x-1)\cdot e^x-b\cdot\ln x$，其中 $a\geqslant 1$，$b\in R$.

(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，证明不等式 $\ln x\leqslant a\cdot(x-1)$ 恒成立；

(2) 若 $\dfrac{b}{a}>e(e=2.718\cdots)$，证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

【解析】 (1) 令 $m(x)=\ln x-a\cdot(x-1)$，则 $m'(x)=\dfrac{1-ax}{x}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$m'(x)\leqslant 0$，$\therefore m(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore m(x)\leqslant m(1)=0$，即不等式 $\ln x\leqslant a\cdot(x-1)$ 恒成立；

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=a[(x-1)e^x+e^x]-\dfrac{b}{x}=\dfrac{a\cdot x^2\cdot e^x-b}{x}$，

令 $g(x)=a\cdot x^2\cdot e^x-b$，$g'(x)=ax(x+2)e^x>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $\dfrac{b}{a}>e$ 时，$\ln\dfrac{b}{a}>1$，$\therefore g(1)=ae-b<0$，

$g\left(\ln\frac{b}{a}\right)=a\cdot\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2\cdot e^{\ln\frac{b}{a}}-b=a\cdot\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{b}{a}-b=b\left[\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2-1\right]>0$,

故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解，从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解，

不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{b}{a}$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

因此 x_0 是 $f(x)$ 唯一极值点，

$\because 0<1<x_0$，$\therefore f(x_0)<f(1)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有唯一零点，

$f\left(\ln\frac{b}{a}\right)=a\cdot\left(\ln\frac{b}{a}-1\right)\cdot e^{\ln\frac{b}{a}}-b\cdot\ln\left(\ln\frac{b}{a}\right)$

$=a\cdot\left(\ln\frac{b}{a}-1\right)\cdot\frac{b}{a}-b\cdot\ln\left(\ln\frac{b}{a}\right)=b\cdot\left[\ln\frac{b}{a}-1-\ln\left(\ln\frac{b}{a}\right)\right]$,

$\because \ln\frac{b}{a}>1$，由 (1) 可知 $\ln\frac{b}{a}-1>\ln\left(\ln\frac{b}{a}\right)$，$\therefore f\left(\ln\frac{b}{a}\right)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有唯一零点，

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有两个零点．

5. 已知函数 $f(x)=2x\cdot\ln a-(x+a)\cdot\ln x$.

(1) 当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数．

【解析】 (1) 当 $a=e$ 时，$f(x)=2x\cdot\ln e-(x+e)\cdot\ln x=2x-(x+e)\cdot\ln x$,

定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2-\ln x-\frac{x+e}{x}$，又 $f(1)=2$，$f'(1)=1-e$,

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y-2=(1-e)(x-1)$,

即 $(1-e)x-y+1+e=0$；

(2) 显然 $a>0$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2\ln a-\ln x-\frac{x+a}{x}$,

令 $g(x)=f'(x)=2\ln a-\ln x-\frac{x+a}{x}$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{a-x}{x^2}$,

当 $0<x<a$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>a$ 时，$g'(x)<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 有最大值 $g(a)=\ln a-2$,

当 $\ln a-2\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant e^2$ 时，$g(a)\leqslant 0$，于是 $g(x)\leqslant 0$，即 $f'(x)\leqslant 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $f(a)=0$，$\therefore f(x)$ 只有一个零点，

当 $\ln a-2>0$，即 $a>e^2$ 时，$g(a)>0$，$g(1)=2\ln a-1-a$,

令 $h(a)=2\ln a-1-a\,(a>e^2)$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}<0$,

$\therefore h(a)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，$h(a)<4-1-e^2=3-e^2<0$，$\therefore g(1)<0$；

$\therefore g(a^2)=2\ln a-\ln a^2-\frac{a^2+a}{a^2}=-\frac{a^2+a}{a^2}<0$,

又 $g(a)>0$ 且 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 存在 $x_1\in(1,a)$，使得 $g(x_1)=0$，存在 $x_2\in(a,a^2)$，使得 $g(x_2)=0$,

$\therefore$ 当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_2$ 时 $f'(x)<0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(a)=0$，且 $x_1<a<x_2$，$\therefore f(x)$ 在 (x_1,x_2) 内有唯一零点，且 $f(x_1)<0$、$f(x_2)>0$，

又 $f(1)=2\ln a>0$，$f(a^2)=2a^2\cdot\ln a-(a^2+a)\cdot\ln a^2=-2a\cdot\ln a<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 与 $(x_2,+\infty)$ 内均有唯一零点，

故当 $a>e^2$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点，

因此当 $0<a\leqslant e^2$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点，当 $a>e^2$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点．

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+a(\ln x-x)$，$a\in R$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\ln x-x$，$f(1)=\dfrac{1}{e}-1$，$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+\dfrac{1}{x}-1$，$f'(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}-1$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+a\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1-x}{e^x}+a\cdot\frac{1-x}{x}=(1-x)\left(\frac{1}{e^x}+\frac{a}{x}\right).$$

①当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{e^x}>0$，$f(x)$ 无零点.

②当 $a>0$ 时，$\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{a}{x}>0$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，令 $f'(x)<0$，

得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 有最大值 $f(1)=\dfrac{1}{e}-a$.

当 $\dfrac{1}{e}-a<0$，即 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 无零点.

当 $\dfrac{1}{e}-a=0$，即 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 只有一个零点.

当 $\dfrac{1}{e}-a>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$f(1)>0$，$f(a)=\dfrac{a}{e^a}+a(\ln a-a)$，

令 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，所以 $g(x)=\ln x-x+1\leqslant 0$，

因此当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$\ln a-a<-1$，$f(a)=\dfrac{a}{e^a}+a(\ln a-a)<\dfrac{a}{e^a}-a=a\left(\dfrac{1}{e^a}-1\right)$.

因为 $a>0$，所以 $e^a>1$，于是 $f(a)<a\left(\dfrac{1}{e^a}-1\right)<0$.

又 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$f(1)>0$，且 $a<1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点.

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}+a\left(\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}-a\ln a-1,$$

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$\dfrac{1}{a}>e$，令 $h(x)=e^x-x^2$，其中 $x>e$，则 $h'(x)=e^x-2x$，

令 $\varphi(x)=e^x-2x$，$x>e$，则 $\varphi'(x)=e^x-2>0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，$h'(x)>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-2\mathrm{e}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^2>0$，

故当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}^x>x^2$．因为 $\frac{1}{a}>\mathrm{e}$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}>\left(\frac{1}{a}\right)^2$，即 $\dfrac{\frac{1}{a}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}<a$，

所以 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\dfrac{\frac{1}{a}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}-a\ln a-1<a-a\ln a-1$.

由 $\ln x-x+1\leqslant 0$，得 $\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1<0$，即 $-\ln a-\frac{1}{a}+1<0$，得 $a-a\ln a-1<0$，

于是 $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$.

又 $f(1)>0$，$\frac{1}{a}>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点.

故 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

③当 $a<0$ 时，由 $\ln x-x+1\leqslant 0$，得 $\ln x-x\leqslant -1<0$，

则 $a(\ln x-x)>0$，又当 $x>0$ 时，$\frac{x}{\mathrm{e}^x}>0$，所以 $f(x)>0$，$f(x)$ 无零点.

综上可知，$a\leqslant 0$ 或 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 无零点；$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

7. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{a}{x+1}$.

(Ⅰ) 设函数 $h(x)=(x-1)F(x)$，当 $a=2$ 时，证明：当 $x>1$ 时，$h(x)>0$；

(Ⅱ) 若 $F(x)$ 有两个不同的零点，求 a 的取值范围 .

【解析】 (Ⅰ)$h(x)=(x-1)\left(\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为单调递增函数，且 $h(1)=0$，

当 $x>1$ 时，$h(x)>0$.

(Ⅱ) 设函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，

令 $g(x)=x^2+2(1-a)x+1$，

当 $a\leqslant 1$ 时，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，当 $1<a\leqslant 2$ 时，$\Delta=4a^2-8a\leqslant 0$，得 $g(x)\geqslant 0$，

所以当 $a\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数，此时 $g(x)$ 至多有一个零点，

$F(x)=\dfrac{1}{x-1}f(x)$ 至多一个零点不符合题意舍去 .

当 $a>2$ 时，有 $\Delta=4a^2-8a>0$，此时 $g(x)$ 有两个零点，设为 t_1,t_2，且 $t_1<t_2$.

又因为 $t_1+t_2=2(a-1)>0$，$t_1t_2=1$，所以 $0<t_1<1<t_2$.

得 $f(x)$ 在 $(0,t_1)$，$(t_2,+\infty)$ 为单调递增函数，在 (t_1,t_2) 上为单调递减函数，且 $f(1)=0$，

所以 $f(t_1)>0$，$f(t_2)<0$，

又因为 $f(\mathrm{e}^{-a})=-\dfrac{2a}{\mathrm{e}^a+1}<0$，$f(\mathrm{e}^a)=\dfrac{2a}{\mathrm{e}^a+1}>0$，且 $f(x)$ 图象连续不断，

所以存在唯一 $x_1\in(\mathrm{e}^{-a},t_1)$，使得 $f(x_1)=0$，存在唯一 $x_2\in(t_2,\mathrm{e}^{-a})$，使得 $f(x_2)=0$，

又因为 $F(x)=\dfrac{1}{x-1}f(x)$，

所以，当 $F(x)$ 有两个不同的零点时，$a>2$.

8. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 令 $g(x)=f(x)-ax-1$，当 $a\in[1,2)$ 时，证明：函数 $g(x)$ 有 2 个零点 .

【解析】 (1)$y=2x+1$

(2) 当 $x=0$ 时，$g(0)=\mathrm{e}^0-0-1+\sin 0=0$，$\therefore x=0$ 是 $g(x)$ 的一个零点，

由 $g'(x)=\mathrm{e}^x-a+\cos x$，设 $h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^x-a+\cos x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x$.

因为 $1\leqslant a<2$，

①当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\mathrm{e}^x>1$，$\therefore h'(x)>1-\sin x\geqslant 0$，$\therefore g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore g'(x)>g'(0)=2-a>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$\therefore g(x)>g(0)=0$，此时 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点

②当 $x\in(-\infty,-\pi]$ 时，$-ax\geqslant\pi$，有 $g(x)=\mathrm{e}^x-ax+\sin x-1\geqslant\mathrm{e}^x+\pi+\sin x-1>0$，

此时 $g(x)$ 在 $(-\infty,-\pi]$ 无零点 .

③当 $x\in(-\pi,0)$ 时，$\sin x<0$，$h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x>0$，$\therefore g'(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 单调递增，

又 $g'(0)=2-a>0$，$g'(\pi)=\mathrm{e}^{-\pi}-1-a<0$，

由零点存在性定理知，存在唯一 $x_0\in(-\pi,0)$，使得 $g'(x_0)=0$.

当 $x\in(-\pi,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\pi,x_0)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,0)$ 单调递增；

又 $g(-\pi)=\mathrm{e}^{-\pi}+a\pi-1>0$，$g(x_0)<g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上有 1 个零点 .

综上，当 $1\leqslant a<2$ 时，$g(x)$ 有 2 个零点.

9. 已知函数 $f(x)=ae^x-2x+1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 函数 $g(x)=f(x)+x\ln x$，当 $a>0$ 时，讨论 $g(x)$ 零点的个数 .

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=ae^x-2$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln\dfrac{2}{a}$.

若 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{2}{a}\right)$，$f'(x)<0$；

若 $x\in\left(\ln\dfrac{2}{a},+\infty\right)$，$f'(x)>0$；

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{2}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\ln\dfrac{2}{a},+\infty\right)$ 单调递增 .

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{2}{a}\right)$ 单调递减；$f(x)$ 在 $\left(\ln\dfrac{2}{a},+\infty\right)$ 单调递增 .

(2)$g(x)=ae^x+x\ln x-2x+1$, 设函数 $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{ae^x}{x}+\ln x+\dfrac{1}{x}-2$

$h'(x)=\dfrac{ae^x(x-1)}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(ae^x+1)(x-1)}{x^2}$

因为 $a>0$,所以 $h'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=1$ 时,$h(x)$ 取最小值,最小值为 $h(1)=ae-1$.

若 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$h(1)=0$,所以函数 $h(x)$ 只有 1 个零点;

若 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$h(x)\geqslant h(1)>0$,所以函数 $h(x)$ 无零点;

若 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$h(1)<0$,$h(\mathrm{e}^{-2})=a\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}}}{\mathrm{e}^{-2}}-2+\mathrm{e}^2-2>\mathrm{e}^2-4>0$,

$h(\mathrm{e}^2)=a\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}}{\mathrm{e}^2}+2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-2>0$,故 $h(1)h(\mathrm{e}^{-2})<0$,$h(1)h(\mathrm{e}^2)<0$;

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,\mathrm{e}^{-2})$ 和 $(1,\mathrm{e}^2)$ 各有一个零点,所以函数 $h(x)$ 有两个零点.

综上所述,当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $g(x)$ 只有 1 个零点;当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $g(x)$ 无零点;

当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $g(x)$ 有两个零点

10. 已知函数 $f(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}$,$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于直线 $y=x$,求该切线方程;

(2) 若 $a=1$,求证:当 $x>0$ 时,$f(x)>0$;

(3) 若 $f(x)$ 恰有两个零点,求 a 的值.

【解析】 (1) 因为 $f'(x)=\dfrac{ax(x-2)}{\mathrm{e}^x}$,所以 $f'(1)=-\dfrac{a}{\mathrm{e}}=1$,故 $a=-\mathrm{e}$.

所以 $f(1)=1-\dfrac{a}{\mathrm{e}}=2$.

所求切线方程为 $y-2=x-1$,即 $y=x+1$.

(2) 当 $a=1$ 时,$f(x)=1-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$,$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{\mathrm{e}^x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减,在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=1-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}>0$.

故 $x>0$ 时,$f(x)>0$.

(3) 对于函数 $f(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}$,$a\in\mathbf{R}$.

(i) 当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)>0$,$f(x)$ 没有零点;

(*ii*) 当 $a>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{ax(x-2)}{\mathrm{e}^x}$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增;

当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减;

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(0)=1$ 是 $f(x)$ 的极大值，$f(2)=1-\dfrac{4a}{\mathrm{e}^2}$ 是 $f(x)$ 的极小值.

因为 $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=1-\dfrac{a\left(-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{a}}}}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{a}}}}=1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个零点. 由于 $f(2)=1-\dfrac{4a}{\mathrm{e}^2}$，

①若 $f(2)>0$，即 $a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上没有零点；

②若 $f(2)=0$，即 $a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点；

③若 $f(2)<0$，即 $a>\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，由于 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有一个零点.

由 (2) 知，当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>x^2$，

所以 $f(4a)=1-\dfrac{16a^3}{\mathrm{e}^{4a}}=1-\dfrac{16a^3}{(\mathrm{e}^{2a})^2}>1-\dfrac{16a^3}{(2a)^4}=1-\dfrac{1}{a}>0$.

故 $f(x)$ 在区间 $(2,4a)$ 上有一个零点.

因此 $a>\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个零点.

综上，当 $f(x)$ 有两个零点时，$a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

11. 已知函数 $f(x)=2xe^x-ax-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $a=2\mathrm{e}$，求函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1)$a=2\mathrm{e}$，$f'(x)=2(x+1)\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}-\dfrac{2\mathrm{e}}{x}=(x+1)\left(2\mathrm{e}^x-\dfrac{2\mathrm{e}}{x}\right)=\dfrac{2(x+1)(xe^x-\mathrm{e})}{x}$，

设 $g(x)=xe^x-\mathrm{e}$，$g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，故 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增；

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f'(x)=2(x+1)\mathrm{e}^x-a-\dfrac{a}{x}=(x+1)\left(2\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{(x+1)(2xe^x-a)}{x}$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，最多只有一个零点；

②当 $a>0$ 时，令 $g(x)=2xe^x-a(x\geqslant 0)$.

由 $g'(x)=2(x+1)\mathrm{e}^x>0$，可知函数 $g(x)$ 单调递增，

又 $g(0)=-a<0$，$g(a)=2ae^a-a=a(2\mathrm{e}^a-1)>0$，

可得存在 $x_0\in(0,a)$，使得 $g(x_0)=0$，

有 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{a}{2}$，可知函数 $f(x)$ 的减区间为 $(0,x_0)$，增区间为 $(x_0,+\infty)$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点，必有

$f(x_0)=2x_0e^{x_0}-ax_0-a\ln x_0=a-a(x_0+\ln x_0)=a-a\ln(x_0e^{x_0})=a-a\ln\frac{a}{2}<0$,

得 $a>2e$.

又由 $f(e^{-a})>-ae^{-a}-a\ln e^{-a}=a^2-\frac{a}{e^a}=\frac{a(ae^a-1)}{e^a}>0$.

令 $h(x)=x-\ln x$,有 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

令 $h'(x)>0$,可得 $x>1$,

故函数 $h(x)$ 的增区间为 $(1,+\infty)$,减区间为 $(0,1)$,有 $h(x)\geqslant h(1)=1$.

当 $x>\ln a$ 时,$e^x>a$,$f(x)=x(2e^x-a)-a\ln x>ax-a\ln x=a(x-\ln x)\geqslant a>0$.

可得此时函数 $f(x)$ 有两个零点.

由上可知,若函数 $f(x)$ 有两个零点,则实数 a 的取值范围是 $(2e,+\infty)$.

12. 已知函数 $F(x)=xe^x-a\ln(x+1)(a\geqslant1)$.

(1) 求函数 $F(x)$ 的定义域;

(2) 求函数 $F(x)$ 的零点个数.

【解析】【解析】(1) 要使函数有意义,则 $x+1>0$,可得 $x>-1$,所以函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$;

(2) 求得 $F(0)=0$.

对函数 $F(x)$ 求导得 $F'(x)=(x+1)e^x-\frac{a}{x+1}=\frac{(x+1)^2e^x-a}{x+1}$,

$G(x)=(x+1)^2e^x-a(x>-1)$ 是增函数,

若 $a=1$,则有下表

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$G(x)$	$-$	0	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	极小值为 0	↗

$\therefore F(x)$ 在定义域 $(-1,+\infty)$ 上有且只有 0 一个零点;

若 $a>1$,$\because G(x)=(x+1)^2e^x-a$ 在 $(-1,+\infty)$ 是增函数,

且 $G(0)=1-a<0$,$G(a)=(a+1)^2e^a-a>(a+1)^2-a=a^2+a+1>0$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0\in(0,a)$,使得 $G(x_0)=(x_0+1)^2e^{x_0}-a=0$,

则有下表

x	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$G(x)$	$-$	0	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore F(0)=0>F(x_0)$,所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 有且仅有 1 个零点;

令 $h(x)=e^x-x-1$,则 $h'(x)=e^x-1$,

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

$h(x)$	↘	极小值为$=0$	↗

$\therefore \forall x \in R, h(x)=e^{x}-x-1 \geqslant 0$，$\therefore \forall x \in R, e^{x} \geqslant x+1$，

$\forall x \in(-1,+\infty), x \geqslant \ln (x+1)$，

$\therefore F(a)=a e^{a}-a \ln (a+1) \geqslant a(a+1)-a \times a=a>0$，

所以 $F(x)$ 在 (x_{0}, a) 有且仅有 1 个零点；

则 $F(x)$ 在定义域 $(-1,+\infty)$ 上有且只有两个零点，

综上，$a=1$ 时有 1 个零点，$a>1$ 时有 2 个零点．