高中数学基础合集（新教材）

目 录

初高中衔接知识

$P2$ 初高中衔接知识 1(十字相乘法、二次函数、方程、不等式)

【要点梳理】

$P3$ 初高中衔接知识 2(常用的乘法公式)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $a=1996x+1995, b=1996x+1996, c=1996x+1997$, 那么 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例 2、已知 $x\neq 0$, 且 $M=(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$, $N=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, 则 M 与 N 的大小关系为（　　）

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 无法确定

例 3、已知 $x^2-3x+1=0$, 求 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值 .

$P4$ 初高中衔接知识 3(绝对值的意义与解题方法)

【要点梳理】

$P5$ 初高中衔接知识 4(长除法)

【要点梳理】

长除法巧解高次多项式问题

【典型例题】

例题、已知 x^2+x+6 是多项式 $x^4-2x^3+ax^2+bx+a+b-1$ 的因式，则 $a+b=$ ______.

(变式练习) 已知 x^2-2x+3 是多项式 x^3+x^2+ax+b 的因式，则 $a+b=$ ______.

集合与常用逻辑用语

$P6$ 集合【辞典】1 集合的基本定义与表示方法

【要点梳理】

$P7$ 集合【辞典】2 集合之间的关系

【要点梳理】

$P8$ 集合【辞典】3 集合知识梳理（从一到无穷大系列）

【要点梳理】

$P9$ 集合【考点】4 集合互异性相关问题（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2-a+1\}$, 求 $A\cup B$.

例 2、已知 $A=\{3,3+m,3+5m\}$,$B=\{3,3p,3p^2\}$,若 $A=B$,求 m、p.

$P10$ 集合【考点】5 集合相等的证明办法(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $A=\{x|x=m+\frac{1}{6},m\in Z\}$,$B=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\}$,$C=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6})$,$p\in Z\}$, 则集合 A、B、C 的关系是什么?

例 2、已知 $A=\{x|x=14m+36n,m、n\in Z\}$,$B=\{x|x=2k,k\in Z\}$,求证:$A=B$.

$P11$ 集合【考点】6 子集相关问题(基础)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、写出满足条件 $\{a\}\subsetneqq P\subseteq\{a,b,c,d\}$ 的所有集合 P.

例 2、集合 $A=\{X|2<X<4\}$,集合 $M=\{X|3<X<2K+1\}$,若集合 M 是集合 A 的子集,求实数 k 的取值范围.

例 3、设集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$,A 是 S 的一个子集,当 $x\in A$ 时,若有 $x-1\notin A$ 且 $x+1\notin A$, 则称 x 为集合 A 的一个"孤立元素",那么集合 S 中所有无"孤立元素"的 4 元子集有 ______ 个.

$P12$ 集合【考点】7 集合的交并补混合运算(基础)(重要)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设常数 $a\in R$, 集合 $A=(x|(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$,$b=\{x|x\geqslant a-1\}$·

(1) 若 $a=2$, 求 $A\cap B, A\cap(\complement_R B)$;

(2) 若 $A\cup B=R$, 求 a 的取值范围 .

例 2、设 U 为全集，对于集合 M，N，下列集合之间关系不正确的是 (　　)

A. $M\cap N\subseteq M\cup N$

B. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)=\complement_U(M\cap N)$

C. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)$

D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cap N)$

$P13$ 集合【补充】集合易错点总结

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$,$B=\{x|2a\leqslant x\leqslant a+3\}$, 若 $B\subseteq A$, 求 a 的取值范围 .

例 2、(2021· 乙卷) 已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in Z\}$,$T=\{t|t=4n+1,n\in Z\}$, 则 $S\cap T=$ (　　)

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. Z

$P14$ 集合【考点】8 集合新定义问题 (拔高)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设 M,P 是两个非空集合 , 定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x|x\in M,x\notin P\}$. 已知 $A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{2,3,5\}$, 则集合 $A-B$ 的子集个数为 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例 2、对于集合 M、N, 定义 $M-N=\{x|x\in M$, 且 $x\in N\}$,$M\oplus N=(M-N)\cup(N-M)$. 设 $A=\{y|y=x^2-3x,x\in R\}$,$B=\{x|y=-2^x,x\in R\}$, 则 $A\oplus B=$ (　　)

A. $\left(-\frac{9}{4},0\right]$　　B. $\left[-\frac{9}{4},0\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right)\cup[0,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right)\cup(0,+\infty)$

例 3、若集合 A_1,A_2, 满足 $A_1\cup A_2=A$, 则称 (A_1,A_2) 为集合 A 的一个分拆，并规定：当且仅当 $A_1=A_2$ 时，(A_1,A_2) 与 (A_1,A_2) 为集合 A 的同一种分拆，则集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的不同分拆种数是 ______ .

$P15$ 集合【考点】9 集合综合拓展训练（拔高）

【典型例题】

交并关系、未知数

例 1、设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|m-1<x<2m+1\}$.

(1) 若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围;

(2) 设实数集为 R，若 $B\cap \complement_R A$ 中只有一个整数 -2，求实数 m 的取值范围 .

新定义、逻辑分析

例 2、已知集合 M 是非空数集，且满足三个条件：

① $\forall x\in M,\forall y\in M$, 恒有 $x-y\in M$;

② $\forall x\in M(x\neq 0)$，恒有 $\dfrac{1}{x}\in M$;

③ $1\in M$.

(1) 求证：$\forall x\in M,\forall y\in M$, 恒有 $x+y\in M$;

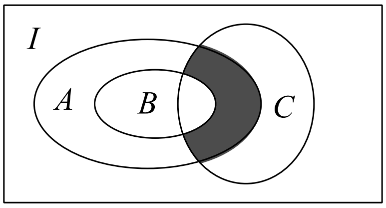
(2) 求证：当 $x\neq 0$ 且 $x\neq -1$ 时，若 $x\in M$, 则必有 $\dfrac{1}{x(x+1)}\in M$.

$P16$ 集合【挑战 150】全面提高(拔高)

【典型例题】

例 1、如图所示，I 是全集 A，B，C 是它的子集，则阴影部分所表示的集合是（　　）

A. $(A\cap B)\cap C$　　B. $(A\cap \complement_I B)\cap C$　　C. $(A\cap B)\cap \complement_I C$　　D. $\complement_I(A\cap B)\cap C$



例 2、设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$ 那么 $\complement_I M\cap \complement_I N$ 等于（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

例 3、设全集 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，子集 $A=\{a,c\}$，则满足 $B\subseteq I$，且 $A\cap B\neq\varnothing$ 的子集 B 共有 ______ 个

例 4、已知集合 $P=\{n|n=2k-1,k\in N_+,k\leqslant 50\}$,$Q=\{2,3,5\}$，则集合 $T=\{xy|x\in P,y\in P\}$ 中元素的个数为（　　）

A. 147　　B. 140　　C. 130　　D. 117

例 5、已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0\}$.

(1) 若集合 $B=\{x|x\leqslant t\}$，且 $A\cup B=R$, 求实数 t 的取值范围;

(2) 若集合 $B=\{x|x^2-ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$，求实数 a 的取值范围 .

例 6、已知集合 $S_n=\{X|X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_{\mathrm{i}}\in\{0,1\},\mathrm{i}=1,2,\cdots,n\}\ (n\geqslant 2)$ 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$;$A$ 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{n}|a_{\mathrm{i}}-b_{\mathrm{i}}|$

(Ⅰ) 当 $n=5$ 时，设 $A=(0,1,0,0,1),B=(1,1,1,0,0)$，求 $d(A,B)$;

(Ⅱ) 证明:$\forall\ A,B,C\in S_n$, 有 $A-B\in S_n$, 且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$;

$P17$ 逻辑用语【辞典】1 充分条件与必要条件

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若 $a\in R$, 则“$a=2$”是“$(a-1)\cdot(a-2)=0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 2、设集合 $A=\{x|x-2>0\},B=\{x|x<0\},C=\{x|x(x-2)>0\}$，则“$x=A\cup B$”是“$x\in C$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

$P18$ 逻辑用语【辞典】2 全称量词与存在量词

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、下列命题是假命题的是（　　）

A. $\forall x \in R, 3^{x}>0$　B. $\forall x \in N, x \geqslant 1$　C. $\exists x \in Z, x<1$　D. $\exists x \in Q, \sqrt{x} \notin Q$

例 2、下列命题：

①偶数都可以被 2 整除;②角平分线上的任一点到这个角的两边的距离相等;③有的实数是无限不循环小数;④有的菱形是正方形⑤存在三角形其内角和大于 180°.

既是全称命题又是真命题的是 ________ .

$P19$ 逻辑用语【辞典】3 命题的否定

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、所有能被 3 整除的整数都是奇数 .

例 2、有的三角形是等边三角形 .

例 3、$\exists x \in R, x^2 - x + 1 = 0$.

$P20$ 逻辑用语【习题】4 逻辑用语习题课

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $p: x^2 - x - 2 > 0, q: x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$, 则 q 是 $\neg p$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 2、已知条件 $p: a > b > 0$, 条件 $q: \dfrac{1}{a-b} > \dfrac{1}{a}$, 则 p 是 q 的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 3、下列命题为真命题的是（　　）

A. $\exists x_0 \in R$, 使 $x_0^2 < 0$　　B. $\forall x \in R$, 有 $x^2 \geqslant 0$

C. $\forall x \in R$, 有 $x^2 > 0$　　D. $\forall x \in R$, 有 $x^2 < 0$

例 4、(2020· 广元模拟) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x \leqslant 8\}$, $B = \{-2, 0\}$, 下列命题为假命题的是（　　）

A. $\exists x_0 \in A, x_0 \in B$　　B. $\exists x_0 \in B, x_0 \in A$

C. $\forall x \in A, x \in B$　　D. $\forall x \in B, x \in A$

一元二次函数、方程、不等式

$P21$ 二次与不等式【辞典】1 一元二次函数基础知识回顾（函数、方程、不等式）

【要点梳理】

$P22$ 二次与不等式【考点】2 二次函数中的 a、b、c（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、三个关于 x 的方程：$a_1(x+1)(x-2)=1, a_2(x+1)(x-2)=1, a_3(x+1)(x-2)=1$，已知常数 $a_1>a_2>a_3>0$，若 x_1、x_2、x_3 分别是按上顺序对应三个方程的正根，则下列判断正确的是（　　）

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_1>x_2>x_3$

C. $x_1=x_2=x_3$　　D. 不能确定 x_1、x_2、x_3 的大小

例 2、抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-1$，部分图象如图所示，下列判断中：

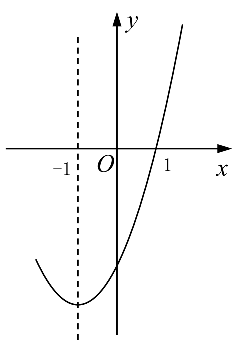
①$abc>0$；

②$b^2-4ac>0$；

③$9a-3b+c=0$；

④若点 $(-0.5,y_1)$，$(-2,y_2)$ 均在抛物线上，则 $y_1>y_2$；

⑤$5a-2b<0$.



其中正确的个数有（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

例 3、已知两点 $A(-6,y_1)$，$B(2,y_2)$ 均在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 上，点 $C(x_0,y_0)$ 是该抛物线的顶点，若 $y_0\geqslant y_1>y_2$，则 x_0 的取值范围是（　　）

A. $x_0<-6$　　B. $x_0<-2$　　C. $-6<x_0<-2$　　D. $-2<x_0<2$

$P23$ 二次与不等式【考点】3 含参一元二次函数（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知二次函数 $y=ax^2-4ax+3a$

(1) 若 $a=1$，则函数 y 的最小值为 ______；

(2) 若当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，y 的最大值是 4，则 a 的值为 ______ .

例 2、方程 $x^2-2ax+1=0$ 的两根分别在 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 内，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $1<a<\frac{5}{4}$　　B. $a<-1$ 或 $a>1$

C. $-1<a<1$　　D. $-\frac{5}{4}<a<-1$

例 3、函数 $f(x)=x^2+2mx+3m+4$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 有且只有一个零点，求 m 的值;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点且均比 -1 大，求 m 的取值范围.

例 4、已知关于 x 的不等式 $ax^2+3x+2>0(a\in R)$.

(1) 若不等式 $ax^2+3x+2>0$ 的解集为 $\{x|b<x<1\}$，求 a,b 的值.

(2) 求关于 x 的不等式 $ax^2+3x+2>-ax-1$(其中 $a>0$) 的解集.

$P24$ 二次与不等式【考点】4 韦达定理相关问题（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+m-1=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $2(x_1+x_2)+x_1x_2+10=0$，求 m 的值.

例 2、设 m 是不小于 -1 的实数，关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2,

(1) 若 $x_1^2+x_2^2=6$, 求 m 值;

(2) 令 $T=\frac{mx_1}{1-x_1}+\frac{mx_2}{1-x_2}$, 求 T 的取值范围 .

例 3、已知关于 x 的方程 $kx^2-(3k-1)x+2(k-1)=0$.

(1) 求证：无论 k 为何实数，方程总有实数根;

(2) 若此方程有两个实数根 x_1、x_2, 且 $|x_1-x_2|=2$, 求 k 的值 .

$P25$ 二次与不等式【辞典】5 等式与不等式的性质（初中知识回顾）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设 $a,b\in(0,+\infty)$，$A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$B=\sqrt{a+b}$, 则 A,B 的大小关系是（　　）

A. $A<B$　　B. $A>B$　　C. $A\leqslant B$　　D. $A\geqslant B$

例 2、设 $a>b>0$, 比较 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$ 的大小.

例 3、已知 $a>b>0,c<0$, 求证 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

$P26$ 二次与不等式【辞典】6 基本不等式

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $a>0$, 则 $a+\frac{4-a}{a}$ 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

例 2、若对任意的 $x\in(0,+\infty)$, 都有 $x+\frac{1}{x}\geqslant a$, 则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

$P27$ 二次与不等式【考点】7 不等式的性质（基础）

【要点梳理】

$P28$ 二次与不等式【考点】8 基本不等式“1”的代换（中档）（重要）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $mn>0,2m+n=1$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值是（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 16

例 2、已知 $m>0,n>0,\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=1$，若不等式 $m+n\geqslant -x^2+2x+a$ 对已知的 m,n 及任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[8,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,8]$

$P29$ 二次与不等式【考点】9 基本不等式的“凑形”(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $x+2y=xy(x>0,y>0)$,则 $2x+y$ 的最小值为 ______ .

例 2、函数 $y=2x+\frac{2}{x-1}(x>1)$ 的最小值是 ______ .

例 3、已知 $\triangle ABC$ 中,$a=1$,$A=\frac{\pi}{3}$,求:①周长的最大值;②面积的最大值 .

$P30$ 二次与不等式【考点】10 基本不等式(从一到无穷大系列)

【要点梳理】

函数

$P31$ 函数概念与性质【辞典】1 函数的基本概念

【要点梳理】

$P32$ 函数概念与性质【辞典】2 函数的三大要素（从一到无穷大系列）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、（复旦大学自主招生题）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$，则函数 $g(x)=f(x+c)+f(x-c)$ 在 $0<c<1$ 时的定义域为______________.

$P33$ 函数概念与性质【辞典】3 值域常见求法（中档）

【要点梳理】

$P34$ 函数概念与性质【辞典】4 函数的单调性及最值

【要点梳理】

$P35$ 函数概念与性质【辞典】5 函数的奇偶性

【要点梳理】

$P36$ 函数概念与性质【补充】对勾 / 双勾函数的性质

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、求函数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x-1}$ 的单调区间及对称中心 .

例 2、求函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{2x-4}$ 在 $(2,+\infty)$ 上的最低点坐标 .

例 3、求函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值.

例 4、已知函数 $f(x)$ 在 R 上有定义，对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x, 都有 $f(ax)=af(x)$.

(Ⅰ) 证明 $f(0)=0$;

(Ⅱ) 证明 $f(x)=\begin{cases}kx, x\geqslant 0,\\ hx, x<0.\end{cases}$ 其中 k 和 h 均为常数;

(Ⅲ) 当(Ⅱ)中的 $k>0$, 设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)\ (x>0)$，讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求最值．

$P37$ 函数概念与性质【补充】函数对称性与周期性条件翻译

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$ 等于 ______．

例 2、已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(x+4)=f(x-2)$. 若当 $x\in[-3,0]$ 时，$f(x)=6^{-x}$, 则 $f(919)=$ ______.

例 3、设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对任意实数 x, 恒有 $f(x+2)=-f(x)$. 当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2x-x^2$.

(1) 求证：$f(x)$ 是周期函数;

(2) 当 $x\in[2,4]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 计算 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2011)$.

例 4、已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$ 且在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，不等式 $f(ax+2)\leqslant f(x-1)$ 对任意 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-3,-1]$　　B. $[-2,0]$　　C. $[-5,-1]$　　D. $[-2,1]$

$P38$ 函数概念与性质【考点】6 函数解析式解法大全（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求 $f(x)$.

例 2、已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(x+1)=f(x)+2x+8$, 求 $f(x)$ 的解析式 .

例 3、已知 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

例 4、设是定义在 R 上的函数，且满足 $f(0)=1$，并且对任意的实数 x, y，有 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$, 求 $f(x)$ 函数解析式 .

$P39$ 函数概念与性质【考点】7 值域考点完全解析 (中档)

【要点梳理】

$P40$ 函数概念与性质【考点】8 函数单调性解法大全(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例题、若函数 $f(x)=|x-2|(x-4)$ 在区间 $(5a,4a+1)$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围是 ____________.

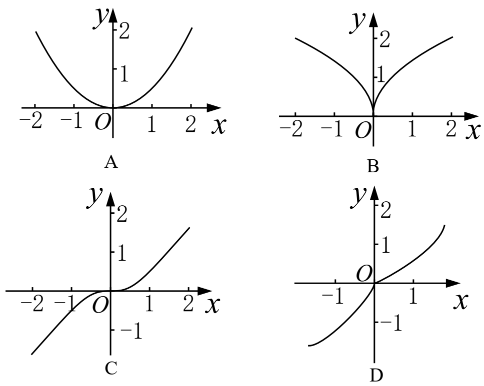
$P41$ 函数概念与性质【考点】9 函数奇偶性全完突破(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$ 是定义在 $(-\infty,b-3]\cup[b-1,+\infty)$ 上的奇函数.若 $f(2)=3$,则 $a+b$ 的值为 ______.

例 2、函数 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 的图象是（　　　）



例 3、设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，且 $f(2)=0$，则不等式 $f(x+1)>0$ 的解集为 ___________ .

例 4、已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-2x^2+3x+1$，求：

(1) 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式；

(2) $f(x)$ 在 R 上的解析式 .

$P42$ 初等函数【辞典】1 指数与指数幂的运算法则

【要点梳理】

$P43$ 初等函数【辞典】2 分数指数幂运算习题课(基础)

【典型例题】

例 1、计算:$\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$.

例 2、计算:$\dfrac{(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^{5}}}$.

例 3、计算:$(2\dfrac{3}{5})^{0}+2^{-2}\times(2\dfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}-(0.01)^{\frac{1}{2}}$.

$P44$ 初等函数【辞典】3 幂函数的概念

【要点梳理】

【典型例题】

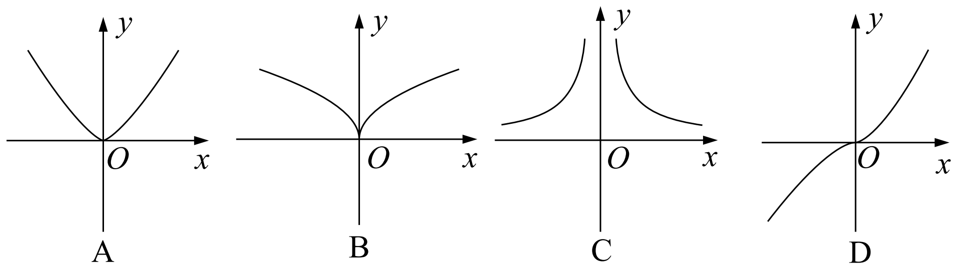
例 1、下列所给出的函数中,是幂函数的是(　　)

A. $y=-x^{3}$　　B. $y=x^{-3}$　　C. $y=2x^{3}$　　D. $y=x^{3}-1$

例 2、下列函数中既是偶函数又是$(-\infty,0)$上是增函数的是(　　)

A. $y=x^{\frac{4}{3}}$　　B. $y=x^{\frac{3}{2}}$　　C. $y=x^{-2}$　　D. $y=x^{-\frac{1}{4}}$

例 3、函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的图象是（　　）



例 4、下列命题中正确的是（　　）

A. 当 $\alpha=0$ 时函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象是一条直线

B. 幂函数的图象都经过 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 点

C. 若幂函数 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数，则 $y=x^{\alpha}$ 是定义域上的增函数

D. 幂函数的图象不可能出现在第四象限

$P45$ 初等函数【辞典】4 指数函数的概念

【要点梳理】

【典型例题】

例题、若函数 $f(x)=(k+3)a^{x}+3-b(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 是指数函数 .

(1) 求 k,b 的值;

(2) 求解不等式 $f(2x-7)>f(4x-3)$.

$P46$ 初等函数【辞典】5 对数的定义

【要点梳理】

$P47$ 初等函数【辞典】6 对数的运算法则

【要点梳理】

$P48$ 初等函数【辞典】7 对数函数的图像与性质

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若函数 $y=\log_2(kx^2+4kx+5)$ 的定义域为 R, 则 k 的取值范围 ____________.

例 2、已知 $a=2^{1.1}, b=\log_2 3, c=3^{\log_3 \frac{3}{2}}$ 则 a,b,c 的大小关系为 ____________.

$P49$ 初等函数【辞典】8 初等函数（从一到无穷大系列）

【要点梳理】

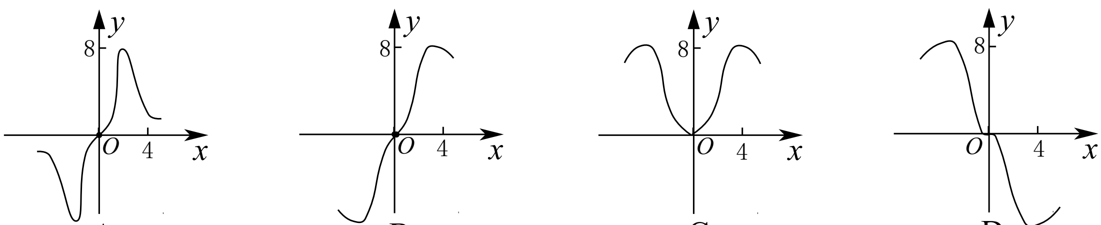
【典型例题】

例 1、(2019· 新课标 I) 已知 $a=\log_2 0.2, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$, 则 ________ .

例 2、已知 $a=3^{0.2}, b=\log_6 4, c=\log_3 2$, 则 a,b,c 的大小关系为 ________ .

例 3、(2019· 海南) 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(ln2)=8$, 则 $a=$ ______.

例 4、(2019· 新课标III) 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图象大致为（　　）



A　　B　　C　　D

$P50$ 初等函数【辞典】9 复合函数解析式与单调性（中档）（重要）

【要点梳理】

$P51$ 初等函数【考点】10 指数与对数运算解析（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4\cdot\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times 8^{0.25}-(-2005)^0$.

例 2、$\frac{1}{3}\lg\frac{25}{9}+\frac{2}{3}\lg\sqrt{8}+\lg(45)^{\frac{1}{3}}$.

例 3、解下列方程：

$\log_{x+2}(4x+5)-\log_{4x+5}(x^2+4x+4)-1=0$.

$P52$ 初等函数【考点】11 指数、对数大小比较（中档）（重要）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $a=\log_2 e, b=\ln 2, c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 则 a,b,c 的大小关系为 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

例 2、已知 $a=3^{0.2}, b=\log_6 4, c=\log_3 2$, 则 a,b,c 的大小关系为 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

例 3、已知实数 a,b,c 满足 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a, \left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b, \left(\frac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$ 这三个数从小到大排列为 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

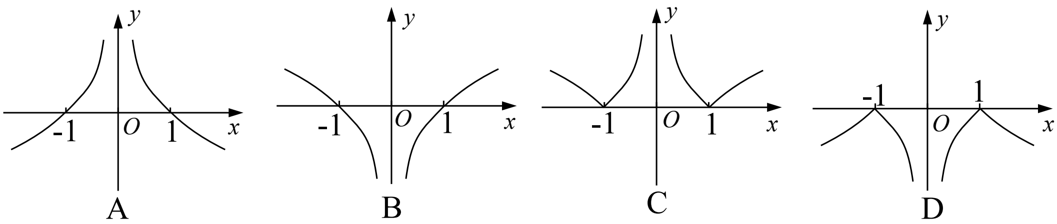
例 4、设 $a=\lg e, b=(\lg e)^2, c=\lg\sqrt{e}$, 其中 e 为自然对数的底数，则 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

$P53$ 初等函数【考点】12 初等函数图像考点解析（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若当 $x\in R$ 时，函数 $f(x)=a^{|x|}$ 终满足 $0<|f(x)|\leqslant 1$，则函数 $y=\log_a|\frac{1}{x}|$ 的图象大致为（　　）



例 2、已知函数 $f(x)=\ln(|x|+1)+\sqrt{x^2+1}$ 则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 的 x 的取值范围是__________.

例 3、已知 $m\in N$，函数 $f(x)=x^{3m-7}$ 关于 y 轴对称且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $m=$__________.

$P54$ 函数综合【辞典】1 零点存在性定理的运用（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知三个函数 $f(x)=2^x+x, g(x)=x-2, h(x)=\log_2 x+x$，零点依次为 a, b, c，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

例 2、若函数 $f(x)=x^2+\log_2|x|-4$ 的零点 $m\in(a, a+1)$，$a\in Z$，则所有满足条件的 a 的和为__________.

$P55$ 函数综合【考点】2 复合函数考点解析（基础）

【要点梳理】

$P56$ 函数综合【考点】3 分段函数解题思路（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+(2-a)x, & x\leqslant 0\\(2a-1)x+a-1, & x>0\end{cases}$ 在 R 上为增函数，则 a 的取值范围为 __________ .

例 2、函数 $f(x)=\begin{cases}-2x-3, & x<0\\x^2 & x>0\end{cases}$，若 $a>0>b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $f(a+b)$ 的取值范围是 __________ .

例 3、定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1) & (0\leqslant x<1)\\|x-3|-1 & (x\geqslant 1)\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$ 的所有零点之和为 __________ .

$P57$ 函数综合【考点】4 分段函数与零点问题（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x-1|, x<2,\\\dfrac{1}{2}f(x-2), x\geqslant 2\end{cases}$，则方程 $xf(x)-1=0$ 根的个数为 __________ .

例 2、已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx+k, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$（其中 $k\geqslant 0$），若函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是 ________ .

例 3、(2015 · 天津) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leqslant 2\\ (x-2)^2, & x>2\end{cases}$，函数 $g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in R$，若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是 ________ .

$P58$ 函数综合【考点】5 抽象函数考点解析（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，对一切实数 x、y 都成立，且 $f(0)\neq 0$，求证：$f(x)$ 为偶函数 .

例 2、奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 内递减，求满足 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 的实数 m 的取值范围 .

$P59$ 函数综合【考点】6 抽象函数难点突破（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)+f(x)=0$ ，且函数 $f(x+1)$ 为奇函数，对于下列命题：

①函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$;

②函数 $f(x)$ 图象关于点 $(1,0)$ 对称;

③函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称;

④函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)$;

⑤ $f(2009)=0$.

其中正确的序号为__________.

例 2、定义在 R 上的函数 $f(x)$，$f(0)\neq 0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意实数 a,b，有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，求证：

(1) $f(0)=1$;

(2) 证明：$f(x)$ 是 R 上的增函数.

三角函数

$P60$ 三角函数【辞典】1 任意角的度数

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019 春 · 娄底期末) 下列各角中与 225° 角终边相同的是（　　）

A. 585°　　B. 315°　　C. 135°　　D. 45°

例 2、(2019 春 · 舒兰市期中) 角 $\alpha=-60^\circ+k\cdot180^\circ\,(k\in Z)$ 的终边落在（　　）

A. 第四象限　　B. 第一、二象限　　C. 第一象限　　D. 第二、四象限

$P61$ 三角函数【辞典】2 弧度制与扇形面积公式

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019 春 · 新乡期末) 已知一个扇形的圆心角为 $\frac{5\pi}{6}$, 半径为 3. 则它的弧长为 (　　)

A. $\frac{5\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

例 2、(2019 春 · 惠农区校级期中) $-\frac{5\pi}{3}$ 弧度化为角度应为 ______.

例 3、(2016· 岳阳县校级三模) 已知扇形的周长是 6cm, 面积是 2cm^2, 则扇形的中心角的弧度数是 (　　)

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 2 或 4

$P62$ 三角函数【辞典】3 任意角的三角函数

【要点梳理】

$P63$ 三角函数【辞典】4 同角三角函数的基本关系

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A \cdot \cos A = -\frac{1}{8}$ 则 $\cos A - \sin A$ 的值为 ______ .

例 2、若 $\tan\theta = 2$, 则 $2\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta =$ ______.

$P64$ 三角函数【辞典】5 三角函数的诱导公式

【要点梳理】

$P65$ 三角函数【辞典】6 诱导公式习题课（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、计算下列各式的值：$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$.

例 2、若 α 是第四象限角，$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{5}{13}$,$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$______.

例 3、已知 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-3\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=0$, 则 $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-3\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\theta+4\sin\theta}=$______.

$P66$ 三角函数【辞典】7 三角函数的图像与性质

【要点梳理】

$P67$ 三角函数【辞典】8 三角函数的一般形式与性质

【要点梳理】

$P68$ 三角函数【辞典】9 三角函数的一般形式习题课（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、为了得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=3\sin x$ 的图象上所有点的（　　）

A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$

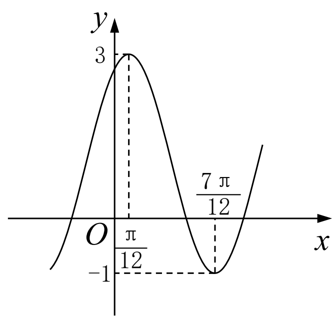
C. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$

D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$

例 2、已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A. $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$　　B. $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

C. $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$　　D. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$



例 3、已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上为单调函数，且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，则函数 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=\sin 2x$

D. $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$

$P69$ 三角函数【考点】10 同名三角函数化简求值（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$ 计算下列各式的值：

（Ⅰ）$\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos a-1$;

（Ⅱ）$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(\alpha-3\pi)\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$.

$P70$ 三角函数【考点】11 图像解决三角函数不等式问题（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\frac{1}{2}-\cos x}$ 定义域是 ____________ .

例 2、若 $\theta\in(0,2\pi)$，且 $\sin\theta<\cos\theta<\cot\theta<\tan\theta$, 则 θ 的范围是 ____________ .

$P71$ 三角函数【考点】12 五点法作图考点解析（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、(2019· 西湖区校级模拟)某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时，列出了如表格并给出了部分数据：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$	
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	2	0		0

(1) 请根据上表数据，写出函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________(直接写出结果即可);

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 设 $t\in R$, 已知函数 $g(x)=f(x)+t$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上的最小值.

$P72$ 三角函数【考点】13 三角函数图像平移与伸缩变换(重要)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、将函数 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，再把所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $f(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的解析式为(　　)

A. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(8x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $f(x)=\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)$

例 2、要得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需要将函数 $y=\cos x$ 的图象（　　）

A. 向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，横坐标缩短为原来的 6 倍，纵坐标不变

B. 向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变

C. 向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，横坐标伸长为原来的 $\sqrt{5}$ 倍，纵坐标不变

D. 向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，横坐标伸长为原来的 $\sqrt{5}$ 倍，纵坐标不变

例 3、将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1、x_2，有 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，则 $\varphi=$（　　）

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

$P73$ 三角函数【考点】14 三角函数对称性（重要）（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，其相邻一条对称轴方程为 $x=\frac{7\pi}{12}$，该对称轴处所对应的函数值为 -1，为了得到 $g(x)=\cos 2x$ 的图象，则只要将 $f(x)$ 的图象（　　）

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

例 2、已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，则下列判断不正确的是（　　）

A. 要得到函数 $f(x)$ 的图象，只需将 $y=2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称

C. $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减

$P74$ 三角函数【考点】15 三角函数的单调性（重要）（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的对称轴和对称中心 .

例 2、已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$, 已知 $\omega>0$, 函数 $g(x)=f\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$, 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上是增函数，求 ω 的最大值 .

$P75$ 三角函数【考点】16 三角函数难题克星—整体换元法（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，若方程 $f(x)=\frac{1}{3}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 $\sin(x_1-x_2)=$ ______.

例 2、已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，且 (x) 在区间 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调，则 ω 的最大值为 ______ .

$P76$ 三角恒等变换【辞典】1 三角函数的和与差公式

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,$\beta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$则$\alpha+\beta=$（　　）

A. $\frac{5\pi}{4}$　　B. $\frac{7\pi}{4}$　　C. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{2}$

$P77$三角恒等变换【辞典】2 辅助角公式

【要点梳理】

$P78$三角恒等变换【辞典】3 二倍角公式

【要点梳理】

$P79$ 三角恒等变换【辞典】4 三角恒等变换上（基础）

【要点梳理】

$P80$ 三角恒等变换【辞典】5 三角恒等变换下（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上是增函数，且在区间 $[0,\pi]$ 上恰好取得一次最大值，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$

例 2、已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1+\cos2\alpha}{2\cos\alpha+\sin2\alpha}$，则 $\tan\left(\alpha+2\beta+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$P81$ 三角恒等变换【考点】6 具体角度的求值（中档）

【要点梳理】

两角和与差的三角函数：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

二倍角公式：

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$

$tan2\alpha=\dfrac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$

辅助角公式：

$asinx+bcosx=\sqrt{a^2+b^2}\,sin(x+\varphi)$（其中 $tan\varphi=\dfrac{b}{a}$）

【典型例题】

例 1、计算 $\sin15^\circ\cdot\sin105^\circ$ 的结果是 ______.

例 2、$\cos10^\circ-2\cos20^\circ\cdot\cos10^\circ=$ ______.

$P82$ 三角恒等变换【考点】7 三角恒等变换稳定得分策略（重要）（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的周期;

(2) 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$f(\alpha)=\frac{2}{5}$ 求 $\sin2\alpha$.

例 2、已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos x+a$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 求使 $f(x)<0$ 成立的实数 x 的取值集合 .

例 3、已知函数 $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-2$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的图象的对称中心及其在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 的值域;

(II) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间 .

例 4、已知函数 $f(x)=\cos^4x+2\sin x\cos x-\sin^4x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值 .

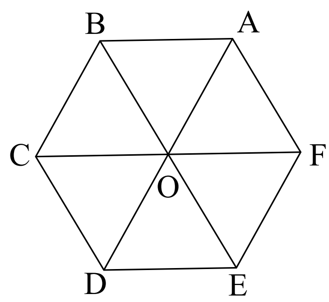
平面向量

$P83$ 平面向量【辞典】1 平面向量的基本概念

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、如图，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，则与 $\overrightarrow{BC}$ 相等的向量为 ______ .



例 2、若向量 $\vec{a}$ 向量 $\vec{b}$ 不相等，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 一定（　　）

A. 不共线　　　B. 长度不相等

C. 不都是单位向量　　　D. 不都是零向量

例 3、下列说法正确的有 ________ .（选填序号）

① 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A,B,C,D 四点必在同一条直线上;

② 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是平行向量;

③ 任何两个单位向量都是相等向量;

④ 零向量只有大小没有方向;

⑤ 相等向量一定是平行向量，平行向量不一定是相等向量;

⑥ 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向，$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$;

⑦ 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

$P84$ 平面向量【辞典】2 向量的加减法运算法则

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BD}=\vec{d}$, 下列等式中不正确的是（　　）

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$　　B. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$　　C. $\vec{b}-\vec{a}=\vec{d}$　　D. $\vec{c}-\vec{a}=\vec{b}$

例 2、已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$, 则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为 ______ .

$P85$ 平面向量【辞典】3 向量的数乘运算

【要点梳理】

$P86$ 平面向量【辞典】4 平面向量基本定理

【要点梳理】

$P87$ 平面向量【辞典】5 平面向量基本定理习题课（基础）

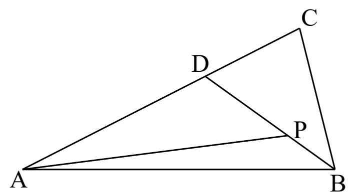
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$, 表示向量 $\overrightarrow{AG}=$______.

例 2、如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PD}$, 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{\mu}{\lambda}$ 的值为（　　）

A. $\frac{11}{12}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{7}{9}$



例 3、已知非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两不平行，且 $\vec{a}\parallel(\vec{b}+\vec{c})$，$\vec{b}\parallel(\vec{a}+\vec{c})$，设 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，$x$，$y\in R$, 则 $x+2y=$______.

$P88$ 平面向量【辞典】6 平面向量正交分解与坐标表示

【要点梳理】

$P89$ 平面向量【辞典】7 平面向量的坐标表示习题课（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知向量 $\vec{a}=(3,1)$，$2\vec{a}+\vec{b}=(5,3)$，则 $|\vec{b}|=$ ______.

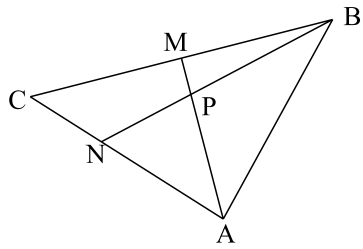
例 2、已知 $\vec{a}=(1,2+\sin x)$，$\vec{b}=(2,\cos x)$，$\vec{c}=(-1,2)$，$(\vec{a}-\vec{c})/\!/\vec{b}$ 则锐角 x 等于 ______ .

例 3、已知向量 $\vec{m}=(3,2)$，$\vec{n}=(-1,2)$，$\vec{p}=(4,1)$，当 k 为何值时，$(\vec{m}+k\vec{p})/\!/(2\vec{n}-\vec{m})$? 平行时它们是同向还是反向?

例 4、如图，在 ΔABC 中，点 M 为 BC 的中点，A、B、C 三点坐标分别为 $(2,-2)$、$(5,2)$、$(-3,0)$，点 N 在 AC 上，且 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，$AM$ 与 BN 的交点为 P，求：

(1) 点 P 分向量 $\overrightarrow{AM}$ 所成的比 λ 的值;

(2)P 点坐标 .



$P90$ 平面向量【辞典】8 向量的数量积与投影

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知非零向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ______ .

例 2、已知 $2|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$ 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ______ .

$P91$ 平面向量【辞典】9 平面向量知识梳理（从一到无穷大系列）

【要点梳理】

$P92$ 平面向量【考点】10 向量加减运算、共线、模（基础）

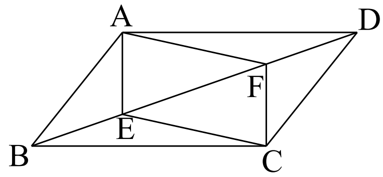
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=$ ______.

例 2、设点 M 是线段 BC 的中点，点 A 在直线 BC 外，若 $|BC|=2$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则 $|\overrightarrow{AM}|=$ ______.

例 3、已知：如图，在▱$ABCD$ 中，E、F 是对角线 BD 上的两点，且 $BE=DF$，求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



$P93$ 平面向量【考点】11 平面向量基本定理综合演练（重要）（中档）

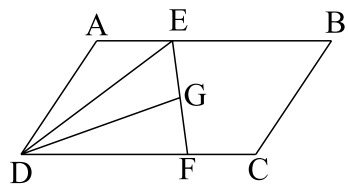
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 两个不共线的向量，$\vec{a}=-\vec{e_1}+3\vec{e_2}$, $\vec{b}=4\vec{e_1}+2\vec{e_2}$, $\vec{c}=-3\vec{e_1}+12\vec{e_2}$, 试用 $\vec{b}, \vec{c}$ 为基底表示向量 $\vec{a}$.

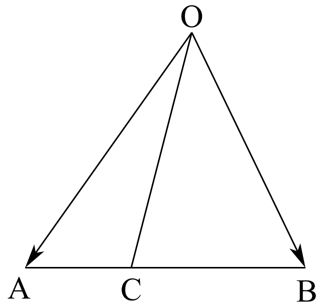
例 2、如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE=\frac{1}{3}AB$, $CF=\frac{1}{3}CD$, G 为 EF 的中点，则 $\overrightarrow{DG}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



例 3、如图所示，在 $\triangle OAB$ 中，$OA>OB, OC=OB$, 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ 则实数 λ 的值为（　　）

A. $\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}$　　B. $\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}$　　C. $\dfrac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{|\vec{a}-\vec{b}|}$　　D. $\dfrac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}$



$P94$ 平面向量【考点】12 向量数量积问题处理思路（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020· 黄山一模) 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=0$, 则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

例 2、(2019 秋 · 海淀区期末) 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. 且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 3、(2020· 岳阳一模) 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0, |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}, \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$ 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=$ ( )

A. 4　　B. -6　　C. 6　　D. $-4\sqrt{3}$

$P95$ 平面向量【考点】13 向量数量积与几何(拔高)

【要点梳理】

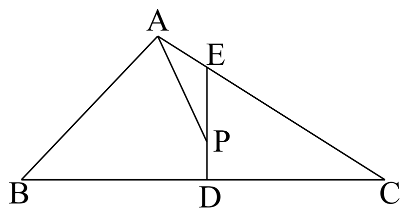
【典型例题】

例 1、三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，圆心 O，已知 $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$ $=$ ______.

例 2、(2019 秋 · 嘉兴期末) 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=2, AC=3, BC$ 边的垂直平分线分别与 BC, AC 交于点 D, E，若 P 是线段 DE 上的动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 ( )

A. 与角 A 有关，且与点 P 的位置有关　　B. 与角 A 有关，但与点 P 的位置无关

C. 与角 A 无关，但与点 P 的位置有关　　D. 与角 A 无关，且与点 P 的位置无关



$P96$ 平面向量【考点】14 向量坐标的运算方法（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-1)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为（　　）

A. $(-2,3)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(2,-3)$

例 2、已知向量 $\vec{a}=(3,x)$，$\vec{b}=(-2,2)$

(1) 若向量 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 求实数 x 的值;

(2) 若向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 与 $3\vec{a}+2\vec{b}$ 共线，求实数 x 的值．

例 3、平面直角坐标系 xOy 中，$A(2,4)$，$B(-1,2)$，C,D 为动点，

(1) 若 $C(3,1)$，求平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的长度;

(2) 若 $C(a,b)$，且 $\overrightarrow{CD}=(3,1)$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 取得最小值时 a,b 的值．

$P97$ 平面向量【考点】15 解析法解决高考向量问题（必看）（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例1、(2019 新课标III) 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 若 $\vec{c}=2\vec{a}-\sqrt{5}\vec{b}$，则 $cos<\vec{a},\vec{c}>=$ ______.

例2、(2018· 新课标Ⅰ) 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$ (　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

例3、(2017· 新课标II) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是 (　　)

A. -2　B. $-\frac{3}{2}$　C. $-\frac{4}{3}$　D. -1

$P98$ 平面向量【考点】16 两向量和与差的模(必看)(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，若 $\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}$ 共线，则 $|\vec{c}|$ 的最小值为 ______.

解三角形

$P99$ 解三角形【辞典】1 正弦定理

【要点梳理】

【典型例题】

例题、$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c 若 $a=6,b=2\sqrt{3},B,A,C$ 成等差数列，则 $B=$ ______.

$P100$ 解三角形【辞典】2 余弦定理

【要点梳理】

【典型例题】

例题、$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2-b^2-c^2}{4}$, 则 A $=$ ______.

$P101$ 解三角形【考点】3 正余弦定理使用策略

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C, a=2\sqrt{3}, b=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ______ .

例 2、已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，且 $b=2, b^2+c^2-a^2=bc$，若 BC 边上的中线 $AD=\sqrt{7}$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为（　　）

A. 4π　　B. 7π　　C. 12π　　D. 16π

$P102$ 解三角形【考点】4 三角变换法

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$，$b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$ 则 $\tan B=$______.

例 2、在 $\triangle ABC$ 中，设角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，$\sin C=3\sin B$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 计算 $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$ 的值 .

$P103$ 解三角形【考点】5 三角形中的取值范围问题

【要点梳理】

【典型例题】

例题、在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为最大角，且 $\sin A:\sin B:\sin C=2:(1+k):2k$, 则实数 k 的取值范围是 ______ .

$P104$ 解三角形【总结】第一问思路整理（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例1、(2020·浙江) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $2b\sin A-\sqrt{3}a=0$.

(Ⅰ) 求角 B 的大小;

(Ⅱ) 求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围 .

例2、(2019·天津) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $b+c=2a, 3c\sin B=4a\sin C$.

(Ⅰ) 求 $\cos B$ 的值;

(Ⅱ) 求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

例3、ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c 且满足 $(2a-c)\cos B=b\cos C$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 且 $b=\sqrt{3}$, 求 $a+c$ 的值 .

例 4、已知 A、B、C 分别为 $\triangle ABC$ 三边 a,b,c 所对的角，且 $(2b-c)(b^2+c^2-a^2)=2abc\cos C$.

(1) 求角 A;

(2) 若 $a=\sqrt{3}$, 求 BC 边上中线 AM 的最大值.

例 5、已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 且 $a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\frac{4}{3}a$.

(1) 求 $\frac{b}{a}$;

(2) 若 $c^2=a^2+\frac{1}{4}b^2$, 求角 C.

例 6、在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 且满足 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $\sin(B+C)=6\cos B\sin C$, 求 $\frac{b}{c}$ 值.

例 7、已知 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 且 $\sin B(\tan A+\tan C)=\tan A\tan C$.

(1) 求证：$b^2=ac$;

(2) 若 $a=2c=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 8、(2014·江苏)若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是 ______.

$P105$ 解三角形【总结】第二问思路整理(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 已知 $\cos 2B+1=2\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(Ⅰ)求角 B 的大小;

(Ⅱ)若 $b=\sqrt{3}$ 求 $a+c$ 的最大值.

例 2、(2021 春·瑶海区月考)若 a,b,c 为锐角 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边,且 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2(B+C)=\sin B\sin C$.

(1)求角 A;

(2)若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

例 3、(2019·天津)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $b+c=2a, 3c\sin B=4a\sin C$.

(Ⅰ)求 $\cos B$ 的值;

(Ⅱ)求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

例 4、(2021·上海)已知 A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角,a、b、c 是其三条边,$a=2, \cos C=-\frac{1}{4}$.

(1)若 $\sin A=2\sin B$, 求 b、c;

(2)若 $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$ 求 c.

例 5、(2020·新课标 II)$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$.

(1)求 A;

(2)若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, 证明:$\triangle ABC$ 是直角三角形.

例 6、(2021· 南康区校级模拟)$\triangle ABC$ 中 , 角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c 且满足 $(2a-c)\cos B=b\cos C$.

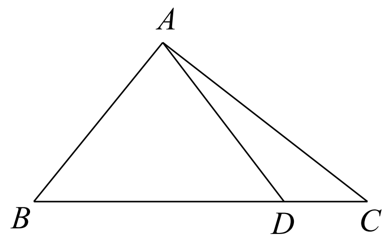
(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,且 $b=\sqrt{3}$, 求 $a+c$ 的值 .

例 7、(2020· 江苏) 在 $\triangle ABC$ 中 , 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 已知 $a=3,c=\sqrt{2},B=45°$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 在边 BC 上取一点 D, 使得 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$, 求 $\tan\angle DAC$ 的值 .



例 8、在 $\triangle ABC$ 中 ,D 为 BC 上一点 ,$AD=CD,BA=7,BC=8$.

(1) 若 $B=60°$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 R;

(2) 设 $\angle CAB-\angle ACB=\theta$, 若 $\angle BAD$ 为锐角 ,$\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 面积 .

复数

$P106$ 复数【辞典】1 复数的概念

【要点梳理】

$P107$ 复数【辞典】2 复数的四则运算

【要点梳理】

$P108$ 复数【辞典】3 复例题综合演练（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$, 则复数 z 的虚部为（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $\frac{3}{5}\mathrm{i}$

例 2、已知复数 $\frac{a+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 是纯虚数 (i 是虚数单位), 则实数 a 等于（　　）

A. -4　　B. 4　　C. 1　　D. -1

例 3、(2018 全国 II) $\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ 等于 ______.

例 4、(2019· 通辽诊断) 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $\mathrm{i}z=2z+1$, 则 z 等于（　　）

A. $-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

例 5、(2019· 盘锦模拟) 已知 $z(1+\mathrm{i})=-1+7\mathrm{i}$(i 是虚数单位),$z$ 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 $|\bar{z}|$ 等于（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $3+4\mathrm{i}$　　C. 5　　D. 7

例 6、已知复数 z 满足 $z^2=12+16\mathrm{i}$, 则 z 的模为（　　）

A. 20　　B. 12　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{3}$

例 7、(2018 乌海模拟) 对于两个复数 $\alpha=1-\mathrm{i},\beta=1+\mathrm{i}$, 有下列四个结论：

①$\alpha\beta=1$;②$\frac{\alpha}{\beta}=-\mathrm{i}$;③$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=1$;④$\alpha^2+\beta^2=0$, 其中正确结论的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例 8、(2018· 赤峰质检) 复数 z 满足 $(2+\mathrm{i})z=|3-4\mathrm{i}|$, 则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

$P109$ 复数【辞典】4 复数的三角形式 (选学)

【要点梳理】

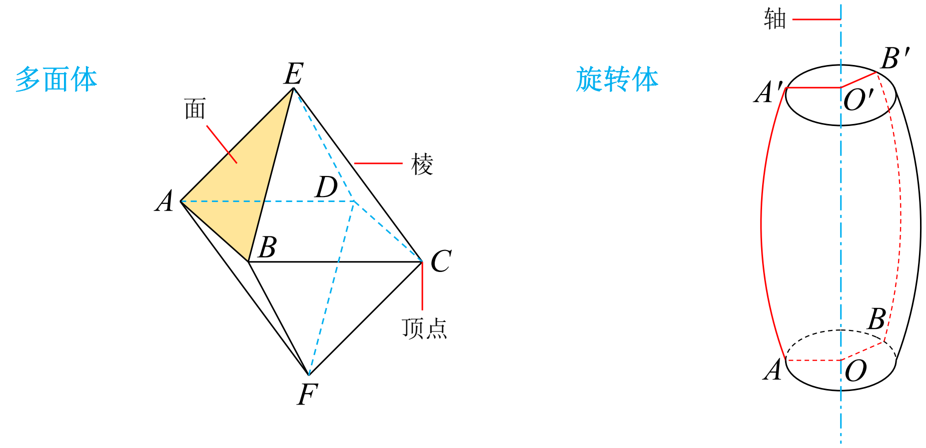
【典型例题】

例题、计算 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$，把结果化为代数形式 .

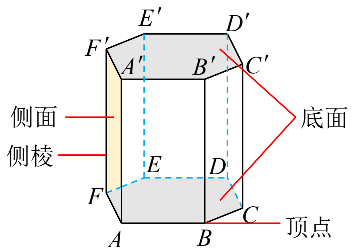
立体几何

$P110$ 立体几何【辞典】1 基本立体图形

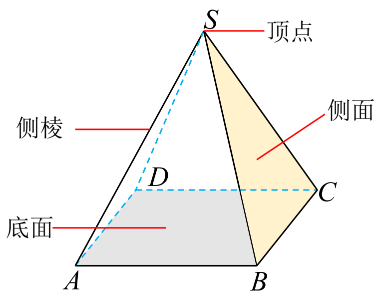
【要点梳理】



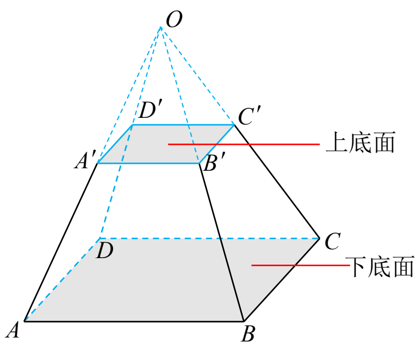
1、棱柱



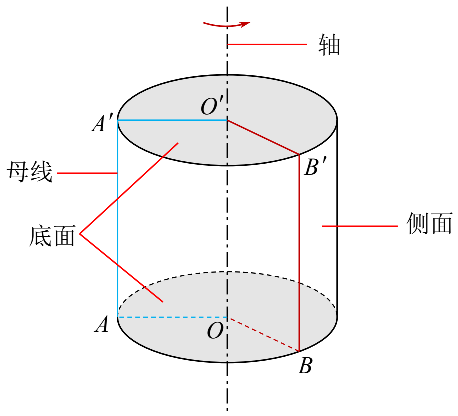
2、棱锥



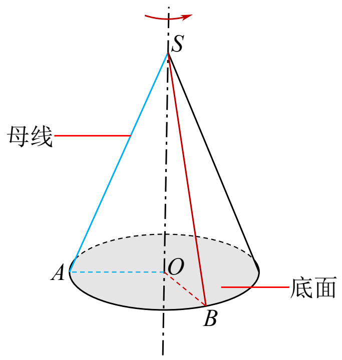
3、棱台



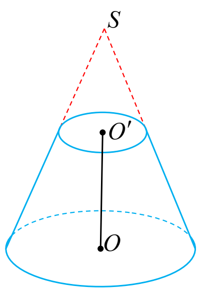
4、圆柱



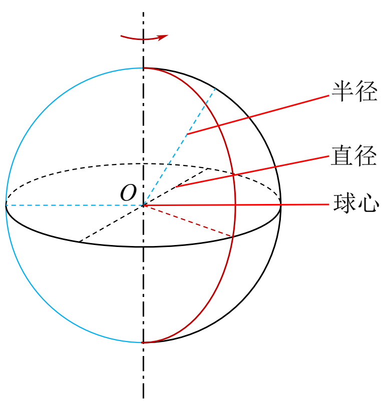
5、圆锥



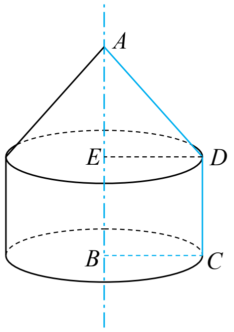
6、圆台



7、球



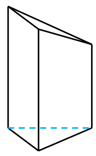
8、组合体

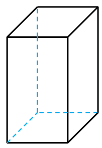


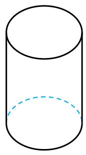
【典型例题】

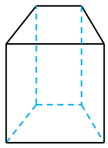
例 1、如图，下列几何体中为棱柱的是 ____________ (填写序号).

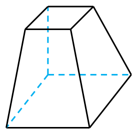

(1)

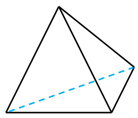

(2)


(3)

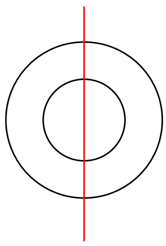

(4)

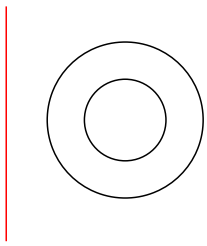

(5)

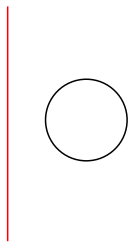

(6)

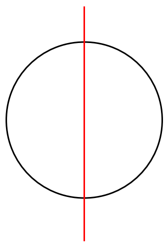

(7)

例 2、如图，汽车内胎可以由下面某个图形绕轴旋转而成，这个图形是（　　）


A


B


C


D

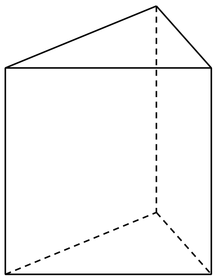
$P111$ 立体几何【辞典】2 立体图形的三视图
（人教新版已删除该章节）

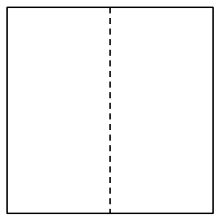
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019· 秋河南期末) 如图，三棱柱的棱长均为 6，且剩棱垂直于底面，其三视图中的主视图是边长为 6 的正方形，则该三棱柱的左视图面积为（　　）

A. $8\sqrt{3}$　　B. 18　　C. $18\sqrt{2}$　　D. $18\sqrt{3}$

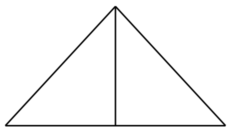




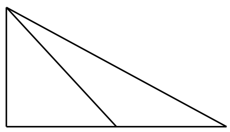
主视图

例 2、(2019· 怀化模拟)《九章算术》中，称底面为矩形且有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马，如图，某阳马的三视图如图所示，则该阳马的最长棱的长度为（　　）

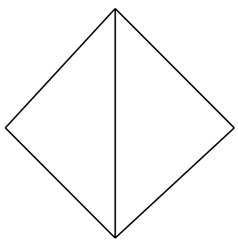
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2



正视图



侧视图



俯视图

$P112$ 立体几何【辞典】3 立体图形的直观图

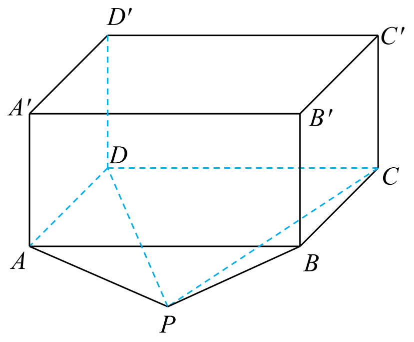
【要点梳理】

$P113$ 立体几何【辞典】4 简单几何体的表面积与体积

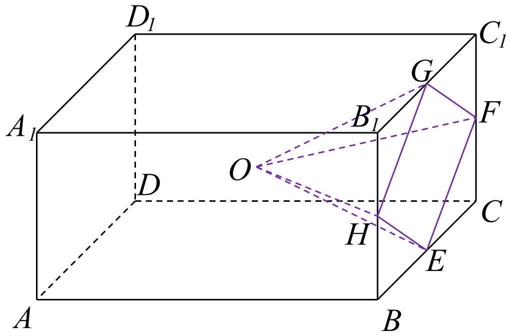
【要点梳理】

【典型例题】

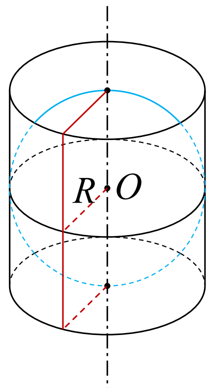
例 1、如图，一个漏斗的上面部分是一个长方体，下面部分是一个四棱锥，两部分的高都是 $0.5m$，公共面 $ABCD$ 是边长为 $1m$ 的正方形，那么这个漏斗的容积是多少立方米(精确到 $0.01m^3$)?



例 2、(2019· 新课标III) 学生到工厂劳动实践，利用 $3D$ 打印技术制作模型．如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E,F,G,H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{cm}$，$AA_1=4\text{cm}$．$3D$ 打印所用原料密度为 $0.9g/\text{cm}^3$．不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为 ________ g．



例 3、如图，圆柱的底面直径和高都等于球的直径，求球与圆柱的体积之比．



$P114$ 立体几何【考点】14 几何体的结构问题（基础）

【典型例题】

例 1、将表面积为 36π 的圆锥沿母线将其侧面展开，得到一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，则该圆锥的轴截面的面积 $S=$ ______．

例 2、将周长为 8 的矩形 $ABCD$ 绕边 AB 所在直线旋转一周得到圆柱当该圆柱体积最大时，边 AB 的长为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 1

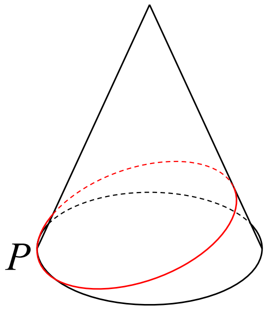
例 3、(2020· 新课标 I) 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥 . 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

P115 立体几何【考点】15 几何体的展开问题 (中档)

【典型例题】

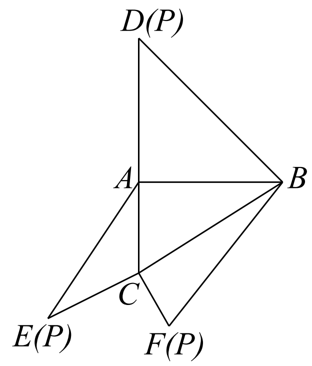
例 1、如图, 一立在水平地面上的圆锥形物体的母线长为 6cm, 一只小虫从圆锥的底面圆上的点 P 出发, 绕圆锥表面爬行一周后回到点 P 处 . 若该小虫爬行的最短路程为 $6\sqrt{2}$cm, 则圆锥底面圆的半径等于 ______ cm.



例 2、已知三棱锥 $P-ABC$ 各侧棱长均为 $2\sqrt{3}$, 三个顶角均为 40°, M,N 分别为 PA,PC 上的点, 求 $\triangle BMN$ 周长的最小值 .

例 3、圆锥的母线长为 2, 其侧面展开图的中心角为 θ 弧度, 过圆锥顶点的截面中, 面积的最大值为 2, 则 θ 的取值范围是 ________ .

例 4、(2020· 新课标 I) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1, AB=AD=\sqrt{3}, AB\perp AC, AB\perp AD, \angle CAE=30^\circ$，则 $\cos\angle FCB=$ ______.



$P116$ 立体几何【考点】16 动态图形探究(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、直角三角形的三边满足 $a<b<c$，分别以 a，b，c 三边为轴将三角形旋转一周所得旋转体的体积记为 V_a，V_b，V_c，则（　　）

A. $V_c<V_b<V_a$　　B. $V_a<V_b<V_c$　　C. $V_c<V_b<V_a$　　D. $V_b<V_a<V_c$

例 2、一圆锥的内部装有一个小球，若小球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 则该圆锥侧面积的最小值是 ______.

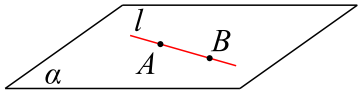
例 3、在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=2\sqrt{3}, BC=2\sqrt{6}, \angle ABC=45^\circ$，$D$ 是边 AC 上的一点，将 $\triangle ABC$ 沿 BD 折叠，得到三棱锥 $A-BCD$，若该三棱锥的顶点 A 在底面 BCD 的射影 M 在线段 BC 上，设 $BM=x$，则 x 的取值范围是（　　）

A. $(0,2\sqrt{3})$　　B. $(\sqrt{3},\sqrt{6})$　　C. $(\sqrt{6},2\sqrt{3})$　　D. $(2\sqrt{3},2\sqrt{6})$

$P117$ 立体几何【辞典】5 平面的定义与公理

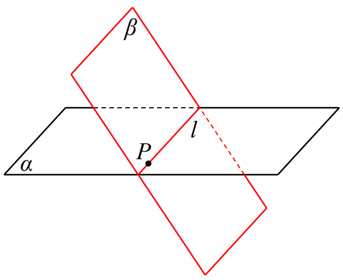
【要点梳理】

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内．那么这条直线在此平面内．



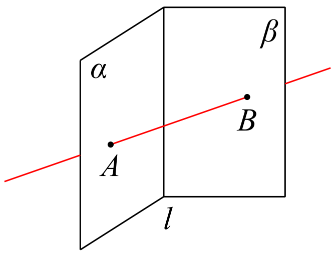
公理 2 过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面．

公理 3 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

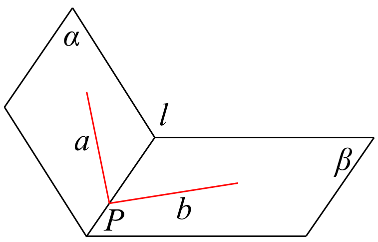


【典型例题】

例题、如图，用符号表示下列图形中点、直线、平面之间的位置关系．



（1）



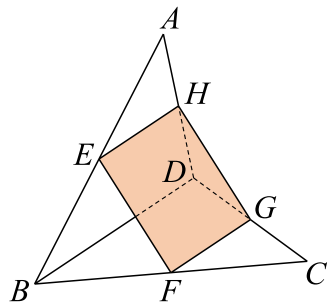
（2）

$P118$ 立体几何【辞典】6 空间中直线与直线的位置关系

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E,F,G、H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

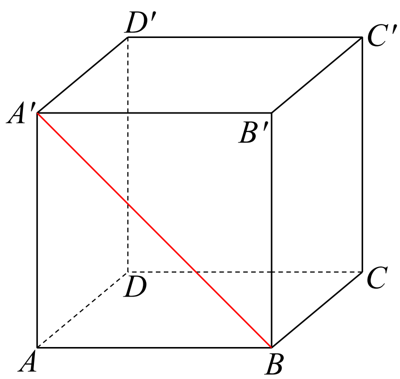


例 2、如图，已知正方体 $ABCD-A'BC'D'$．

(1) 哪些棱所在直线与直线 BA' 是异面直线？

(2) 直线 BA' 和 CC' 的夹角是多少？

(3) 哪些棱所在的直线与直线 AA' 垂直？



$P119$ 立体几何【辞典】7 与面相关的位置关系

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、下列命题中正确的个数是（　　　）

① 若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l /\!/ \alpha$;

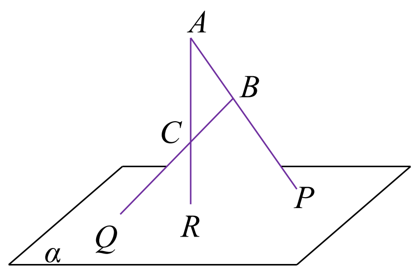
② 若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行;

③ 如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行;

④ 若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点.

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

例 2、如图，$\triangle ABC$ 在平面 α 外，$AB \cap \alpha = P$, $BC \cap \alpha = Q$, $AC \cap \alpha = R$, 求证：P, Q, R 三点共线.



$P120$ 立体几何【辞典】8 空间中的夹角与习题课（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020·河西区一模) 设 l, m 是不同的直线，α, β, γ 是不同的平面，则下列结论正确的是（　　　）

A. 若 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$, 则 $l /\!/ m$ 或 l 与 m 相交

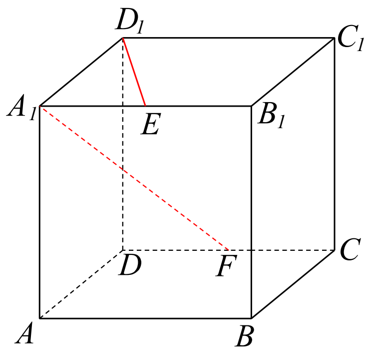
B. 若 $l /\!/ \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \beta$ 或 $l \subset \beta$

C. 若 $l \perp \gamma$, $\alpha \perp \gamma$, 则 $l /\!/ \alpha$ 或 $l \subset \alpha$

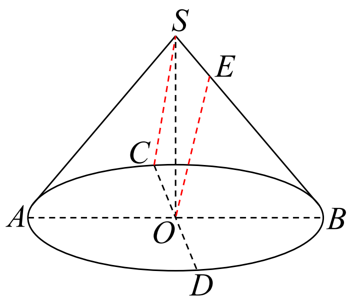
D. 若 $l \perp m$, $m \perp \alpha$, 则 $l \perp \alpha$ 或 $l /\!/ \alpha$

例 2、(2020· 玉林一模) 如图 , 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 ,E,F 分别为 A_1B_1,CD 的中点,则异面直线 D_1E 与 A_1F 所成的角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$



例 3、(2020· 绥阳县一模) 如图 , 在圆锥 SO 中 ,AB,CD 为底面圆的两条直径 ,$AB\cap CD=O$, 且 $AB\perp CD,SO=OB=3,SE=\frac{1}{4}SB$, 异面直线 SC 与 OE 所成角的正切值为______.

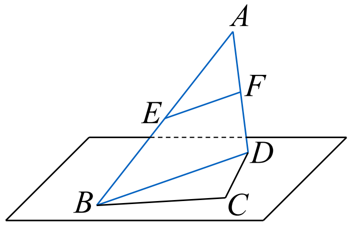


$P121$ 立体几何【辞典】9 线面平行的判定与性质

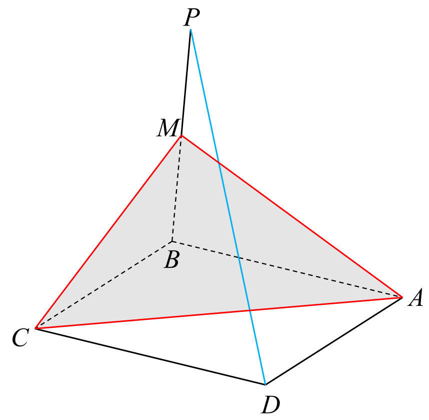
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、求证 : 空间四边形相邻两边中点的连线平行于经过另外两边所在的平面 .



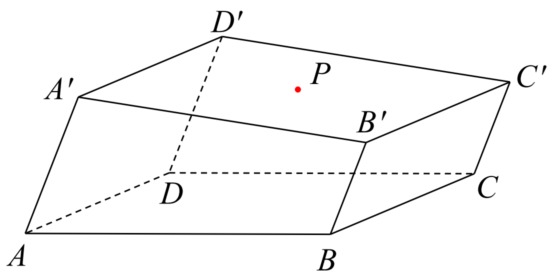
例 2、如图，已知 P 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，M 为 PB 的中点，求证：PD // 平面 MAC.



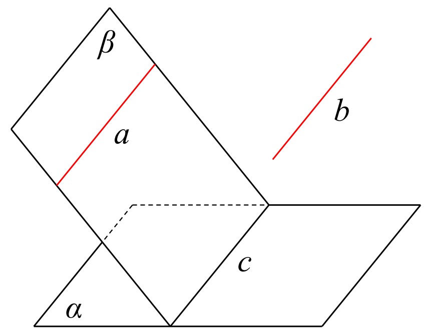
例 3、如图所示的一块木料中，棱 BC 平行于面 $A'C'$.

(1) 要经过面 $A'C'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线?

(2) 所画的线和平面 AC 是什么位置关系?



例 4、已知平面外的两条平行直线中的一条平行于这个平面，求证：另一条也平行于这个平面.

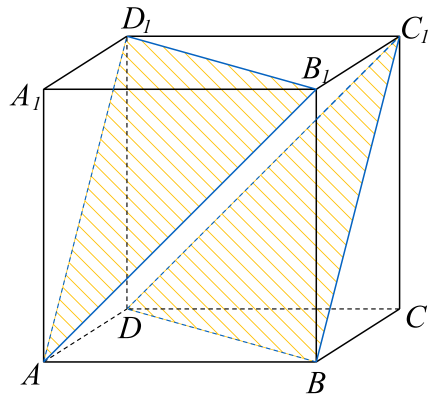


$P122$ 立体几何【辞典】10 面面平行的判定与性质

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 求证 : 平面 AB_1D_1 // 平面 C_1BD.

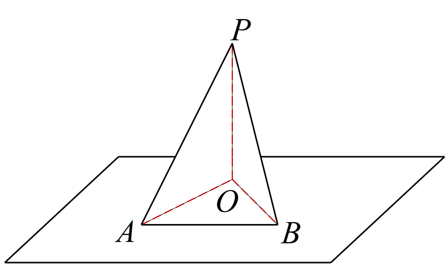


$P123$ 立体几何【辞典】11 线面垂直的判定与性质

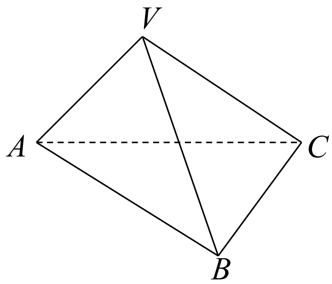
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、一旗杆高 $8m$, 在它的顶点处系两条长 $10m$ 的绳子 , 拉紧绳子并把它们的下端固定在地面上的两点 (与旗杆脚不在同一条直线上). 如果这两点与旗杆脚距 $6m$, 那么旗杆就与地面垂直 . 为什么?



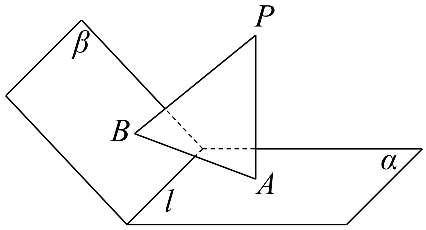
例 2、在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VA=VC$，$AB=BC$．求证：$VB\perp AC$．



例 3、已知 $PA\perp\alpha$,$PB\perp\beta$, 垂足分别为 A,B, 且 $\alpha\cap\beta=l$. 求证：

(1)$l\perp$ 平面 APB;

(2)$l\perp AB$.

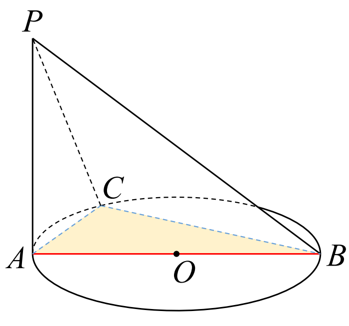


$P124$ 立体几何【辞典】12 二面角与面面垂直

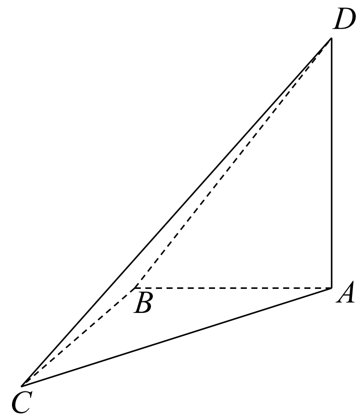
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，PA 垂直于 $\odot O$ 所在的平面，C 是圆周上不同于 A,B 的任意一点，求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.



例 2、如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AD \perp$ 平面 ABC, $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，证明：平面 $ABD \perp$ 平面 BCD;



$P125$ 立体几何【辞典】13 判定与性质定理习题课（基础）

【典型例题】

例 1、已知三个互不重合的平面 α, β, γ，且直线 m, n 不重合，由下列条件：

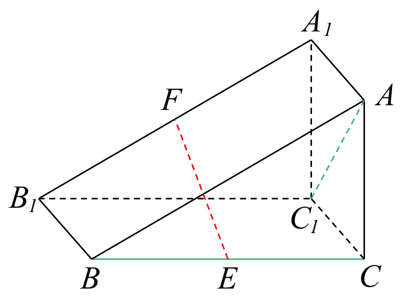
①$m \perp n, m \perp \beta$；②$n \subset \alpha, \alpha // \beta$；③$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, n \subset \alpha$；

能推得 $n // \beta$ 的条件是 ______ .

例 2、如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1, 侧面 BCC_1B_1 是矩形，点 E, F 分别为 BC, A_1B_1 的中点．求证：

(1)$BC \perp AC_1$

(2)$EF //$ 平面 ACC_1A_1.



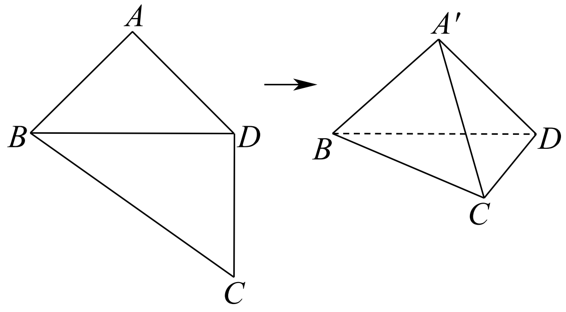
例 3、如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1, BD=\sqrt{2}, BD \perp CD$. 将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$, 使平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD, 则下列结论正确的是（　　）

A. $A'C \perp BD$

B. $\angle BA'C=90^\circ$

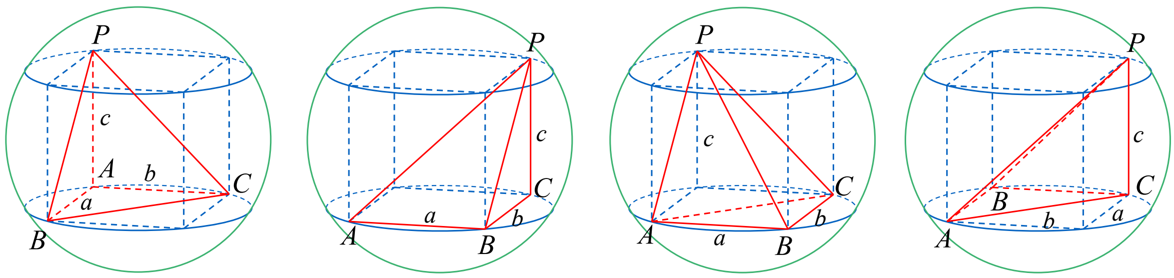
C. CA' 与平面 $A'BD$ 所成的角为 30°

D. 四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$



$P126$ 立体几何【考点】17 外接球之墙角模型（基础）

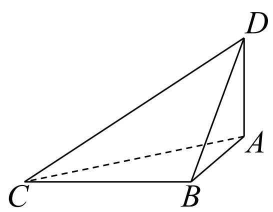
【要点梳理】



【典型例题】

例 1、若三棱锥的三个侧面两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$, 则其外接球的表面积是 ______ .

例 2、如图，已知球 O 的面上四点 A、B、C、D, $DA \perp$ 平面 ABC, $AB \perp BC$, $DA = AB = BC = \sqrt{3}$, 则球 O 的体积等于 ______ .



例 3、(2021 春 · 安徽月考) 在正三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB = BC = CA = 6$, 点 D 是 SA 的中点，若 $SB \perp CD$, 则该三棱锥外接球的表面积为 ______ .

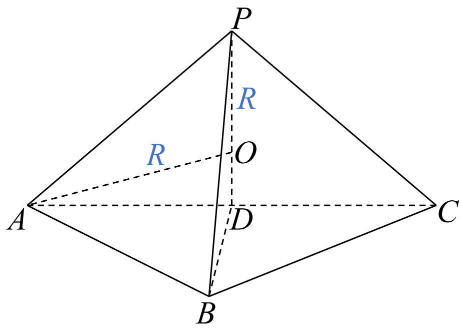
$P127$ 立体几何【考点】18 外接球之外心法（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020· 西安一模）已知 $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形，P 为平面 ABC 外一点，且平面 $PBC\perp$ 平面 ABC, $BC=3, PB=2\sqrt{2}, PC=\sqrt{5}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为______.

例 2、(2020· 珠海一模）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8, BC=6, AC=10, P$ 为 $\triangle ABC$ 外一点，满足 $PA=PB=PC=5\sqrt{5}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为______.



例 3、已知球 O 是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，$PA=AB=PB=AC=2, CP=2\sqrt{2}$ 点 D 是 PB 的中点，且 $CD=\sqrt{7}$, 则球 O 的表面积为______.

例 4、在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4, \angle A=60^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 折起使得二面角 $A-BD-C$ 的大小为 60°, 则折叠所得的四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为______.

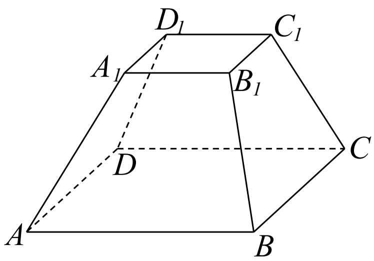
$P128$ 立体几何【考点】19 特殊外接球求法（拔高）

【典型例题】

例 1、已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上下底面均为正方形，其中 $AB=2\sqrt{2}$，$A_1B_1=\sqrt{2}$，$AA_1=BB_1=CC_1=2$，则下述正确的是（　　）

A. 该四棱台的高为 $\sqrt{3}$　　　　B. $AA_1\perp CC_1$

C. 该四棱台的表面积为 26　　　　D. 该四棱台外接球的表面积为 16π



例 2、在四面体 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=\sqrt{3}$，$AC=BD=2$，则它的外接球的面积 $S=$ ______.

例 3、在四棱锥 $E-ABCD$ 中，已知 $AB=1$，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$DA=\sqrt{3}$，三角形 BDE 是边长为 2 的正三角形，当四棱锥 $E-ABCD$ 的外接球的体积取得最小值时，则以下判断正确的是（　　）

A. 四棱锥 $E-ABCD$ 的体积取得最小值为 $\frac{6+\sqrt{21}}{12}$，外接球的球心必在四棱锥 $E-ABCD$ 内

B. 四棱锥 $E-ABCD$ 的体积取得最小值为 $\frac{6+\sqrt{7}}{4}$，外接球的球心可在四棱锥 $E-ABCD$ 内或外

C. 四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 $\frac{6+\sqrt{21}}{12}$，外接球的球心必在四棱锥 $E-ABCD$ 内

D. 四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 $\frac{6+\sqrt{7}}{4}$，外接球的球心可在四棱锥 $E-ABCD$ 内或外

$P129$ 立体几何【考点】20 球内的计算策略（拔高）

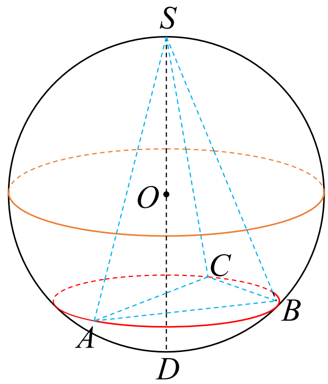
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 P,A,B,C 是半径为 3 的球面上四点，其中 PA 过球心，$AB=BC=2,AC=2\sqrt{3}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

例 2、已知球 O 的直径 $SD=4$, A、B、C 是球 O 表面上的三个不同的点，$\angle ASD=\angle BSD=\angle CSD=30^\circ$, 则（　　）



A. $AB\perp SD$

B. 线段 AB 的最长长度为 $2\sqrt{3}$

C. 三棱锥 $S-ABC$ 的体积最大值为 3

D. 过 SA 作球的截面中，球心 O 到截面距离的最大值为 2

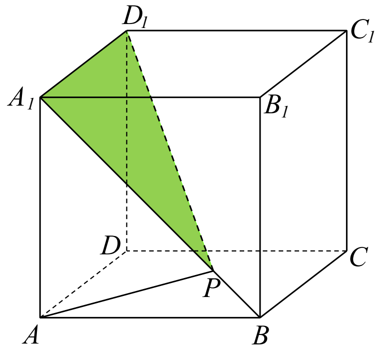
$P130$ 立体几何【考点】21 长方体中的动点问题（中档到拔高）

【典型例题】

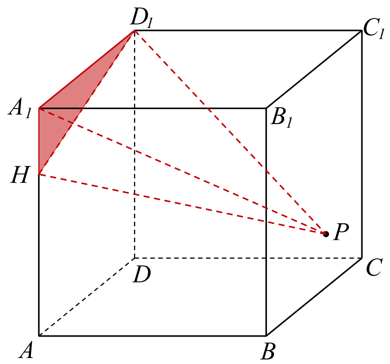
例 1、如图所示，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 A_1B 上的动点（不含端点），则下列结论正确的是（　　）

A. 平面 $D_1A_1P\perp$ 平面 A_1AP　　B. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC_1}$ 不是定值

C. 三棱锥 B_1-D_1PC 的体积为定值　　D. $DC_1\perp D_1P$



例 2、如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 H 在棱 AA_1 上，且 $HA_1=1$，P 是侧面 DCC_1D_1 内一动点，且 $HP=\sqrt{17}$ 则四面体 HA_1D_1P 体积的最大值为______.



例 3、如图，已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3,AD=4,AA_1=5$，点 E 为 CC_1 上的一个动点，平面 BED_1 与棱 AA_1 交于点 F，给出下列命题：

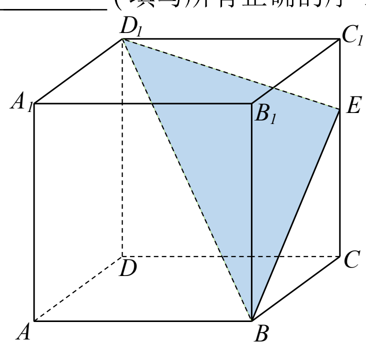
① 四棱锥 B_1-BED_1F 的体积为 20;

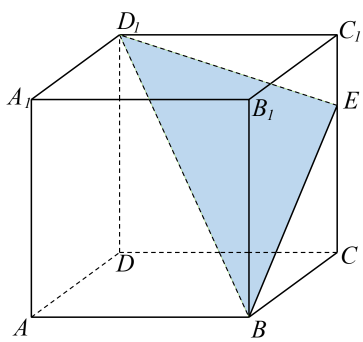
② 存在唯一的点 E，使截面四边形 BED_1F 的周长取得最小值 $2\sqrt{74}$;

③ 当 E 点不与 C,C_1 重合时，在棱 AD 上均存在点 G，使得 $CG\,/\!/$ 平面 BED_1;

④ 存在唯一的点 E，使得 $B_1D\perp$ 平面 BED_1，且 $CE=\dfrac{16}{5}$.

其中正确的命题是________（填写所有正确的序号）





$P131$ 立体几何【考点】22 特殊图形的动点问题（中档）

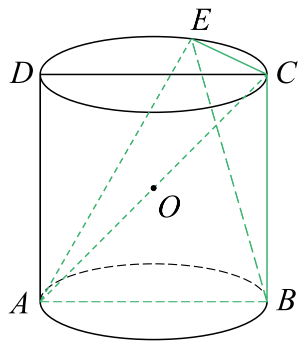
【典型例题】

例 1、已知正方体的外接球与内切球上各有一个动点 M、N，若线段 MN 的最小值为 $\sqrt{3}-1$，则下列结论不正确的是（　　）

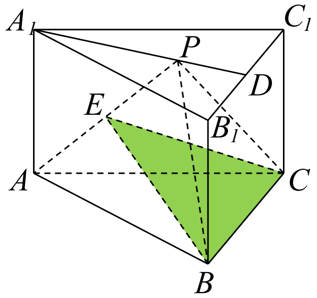
A. 正方体的外接球的表面积为 12π　　B. 正方体的内切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$

C. 正方体的棱长为 2　　D. 线段 MN 的最大值为 $2\sqrt{3}$

例 2、如图，圆柱的轴截面是边长为 4 的正方形 $ABCD$，点 E 为上底圆弧上一个动点，当三棱锥 $B-ACE$ 的体积最大时，三棱锥 $B-ACE$ 外接球的表面积为 ______ .



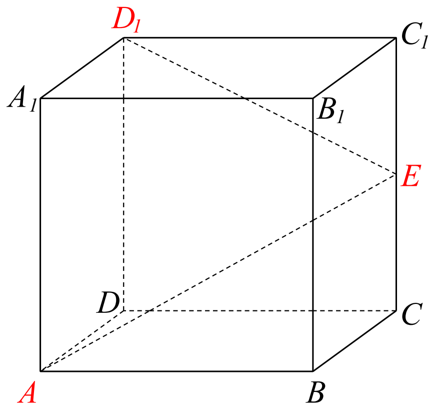
例 3、如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 4，底面边长为 $4\sqrt{3}$，D 是 B_1C_1 的中点，P 是线段 A_1D 上的动点，过 BC 作截面 $\alpha \perp AP$ 于 E，则三棱锥 $P-BCE$ 体积的最小值为 ______ .



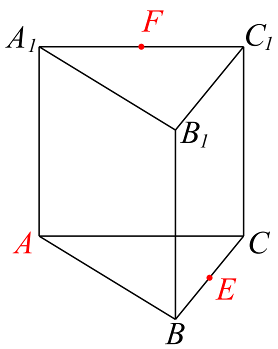
$P132$ 立体几何【考点】三点确定截面精确位置（基础）

【典型例题】

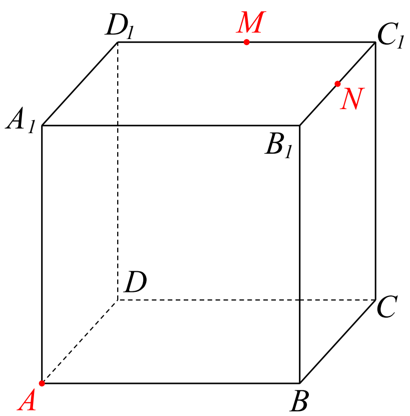
例 1、如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CC_1 的中点，则过三点 A，D_1，E 的截面面积等于 ______ .



例 2、在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，所有棱长都为 1，E，F 分别为棱 BC 和 A_1C_1 的中点，若经过点 A，E，F 的平面将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 分割成两部分，则这两部分体积的比值为 ______ .



例 3、如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M，N 分别为 C_1D_1 和 B_1C_1 的中点，用过点 A，M，N 的平面去截该正方体，则所得截面图形的周长为 ______ .



$P133$ 立体几何【考点】23 棱柱中的截面画法（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在线段 AD 上，(点 P 异于 A、D 两点)，线段 DD_1 的中点为 Q，若平面 BPQ 截该正方体所得的截面为四边形，则线段 AP 长度的取值范围为 __________ .

例 2、在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，所有棱长都为 1，E,F 分别为棱 BC 和 A_1C_1 的中点，若经过点 A,E,F 的平面将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 分割成两部分，则这两部分体积的比值为 ________ .

统计

$P134$ 统计【辞典】1 随机抽样

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知某地区在职特级教师、高级教师．中级教师分别有 100 人，900 人，2000 人，为了调查该地区不同职称的教师的工资情况，研究人员在该地区按照分层抽样的方法随机抽取了 60 人进行调查，则被抽取的高级教师有（　　）

A. 2 人　　B. 18 人　　C. 40 人　　D. 36 人

例 2、某学校为了了解高一年级学生对教师教学的意见，打算从高一年级 500 名学生中抽取 50 名进行调查．除了用简单随机抽样获得样本外，你能否设计其他抽取样本的方法?

例 3、设某校共有 118 名教师，为了支援西部的教育事业，现要从中随机地抽出 16 名教师组成暑假期西部讲师团，请用系统抽样法选出讲师团队成员．

例 4、某单位有 840 名职工，现采用系统抽样方法从中抽取 56 人做问卷调查，将 840 人按 $1, 2, 3, \cdots, 840$ 随机编号，若 442 号职工被抽到，则下列 4 名职工中未被抽到的是（　　）

A. 487 号职工　　B. 307 号职工　　C. 607 号职工　　D. 520 号职工

$P135$ 统计【辞典】2 频率的表示方法

【要点梳理】

由于城市住户较多，通常采用抽样调查的方式，通过分析样本数据来估计全市居民用水量的分布情况．假设通过抽样，我们获得了 100 位居民某年的月均用水量（单位：t）：

表 2-1　100 位居民的月均用水量（单位：t）

3.1	2.5	2.0	2.0	1.5	1.0	1.6	1.8	1.9	1.6
3.4	2.6	2.2	2.2	1.5	1.2	0.2	0.4	0.3	0.4
3.2	2.7	2.3	2.1	1.6	1.2	3.7	1.5	0.5	3.8
3.3	2.8	2.3	2.2	1.7	1.3	3.6	1.7	0.6	4.1
3.2	2.9	2.4	2.3	1.8	1.4	3.5	1.9	0.8	4.3
3.0	2.9	2.4	2.4	1.9	1.3	1.4	1.8	0.7	2.0
2.5	2.8	2.3	2.3	1.8	1.3	1.3	1.6	0.9	2.3
2.6	2.7	2.4	2.1	1.7	1.4	1.2	1.5	0.5	2.4
2.5	2.6	2.3	2.1	1.6	1.0	1.0	1.7	0.8	2.4
2.8	2.5	2.2	2.0	1.5	1.0	1.2	1.8	0.6	2.2

表 2-2　100 位居民月均用水量的频率分布表

分组	频数累计	频数	频率
[0，0.5)	止	4	0.04
[0.5，1)	正下	8	0.08
[1，1.5)	正正正	15	0.15
[1.5，2)	正正正正丅	22	0.22
[2，2.5)	正正正正正	25	0.25
[2.5，3)	正正止	14	0.14
[3，3.5)	正一	6	0.06
[3.5，4)	止	4	0.04
[4，4.5)	丅	2	0.02
合计		100	1.00

画频率分布直方图

根据表 2-2 可以得到如图 2.2-1 所示的**频率分布直方图**.

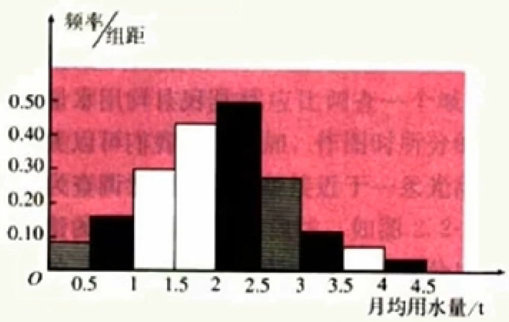
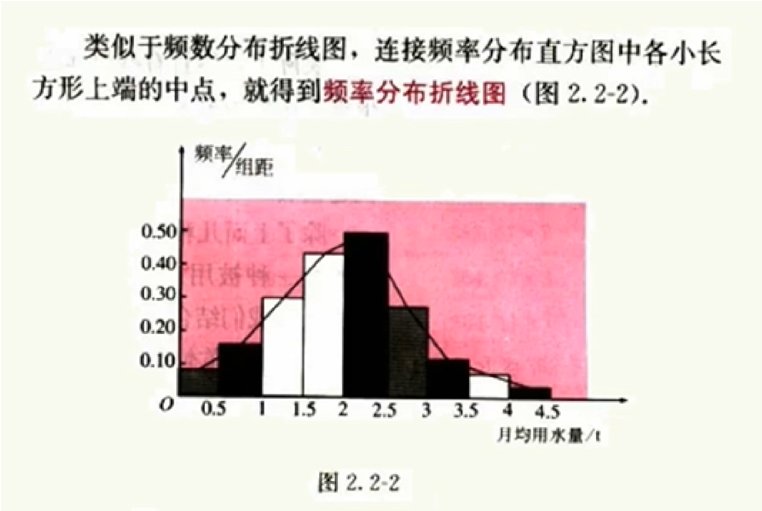
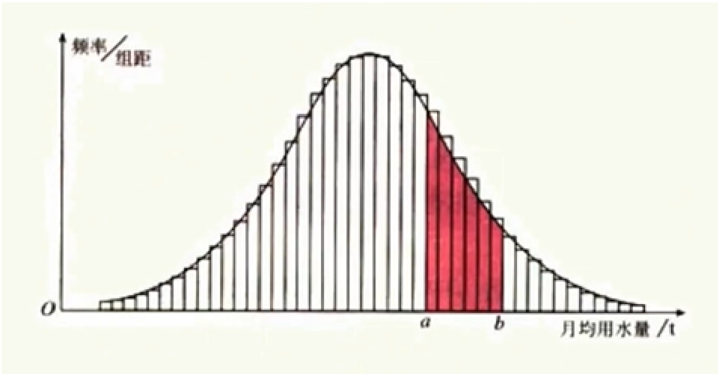


图 2.2-1





某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛得分的原始记录如下：

甲运动员得分：13,51,23,8,26,38,16,33,14,28,39;

乙运动员得分：49,24,12,31,50,31,44,36,15,37,25,36,39.

$P136$ 统计【辞典】3 样本的数字特征

【要点梳理】

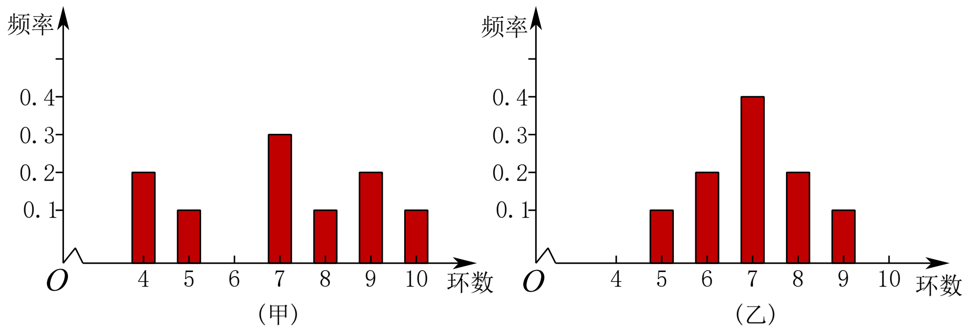
【典型例题】

例 1、有两位射击运动员在一次射击测试中各射靶 10 次，每次命中的环数如下：

甲：7　8　7　9　5　4　9　10　7　4

乙：9　5　7　8　7　6　8　6　7　7

如果你是教练，你应当如何对这次射击情况作出评价？如果这是一次选拔性考核，你应当如何作出选择？



例 2、甲、乙两台机床在相同的技术条件下，同时生产一种零件，现在从中抽测 10 个，它们的尺寸分别如下（单位：mm）.

甲机床：10.2　10.1　10　9.8　9.9　10.3　9.7　10　9.9　10.1;

乙机床：10.3　10.4　9.6　9.9　10.1　10.9　8.9　9.7　10.2　10.

分别计算上面两个样本的平均数和方差，如图纸规定零件的尺寸为 10mm, 从计算的结果来看哪台机床加工这种零件较合适?

$P137$ 统计【辞典】4 百分位数（新教材内容）

【要点梳理】

我国是世界上严重缺水的国家之一，城市缺水问题较为突出．某市政府为了减少水资源的浪费，计划对居民生活用水费用实施阶梯式水价制度，即确定一户居民月均用水量标准 a，用水量不超过 a 的部分按平价收费，超出 a 的部分按议价收费．

如果该市政府希望使 80% 的居民用户生活用水费支出不受影响，根据 9.2.1 节中 100 户居民用户的月均用水量数据，你能给市政府提出确定居民用户月均用水量标准的建议吗?

假设通过简单随机抽样，获得了 100 户居民用户的月均用水量数据（单位：t）：

9.0	13.6	14.9	5.9	4.0	7.1	6.4	5.4	19.4	2.0
2.2	8.6	13.8	5.4	10.2	4.9	6.8	14.0	2.0	10.5
2.1	5.7	5.1	16.8	6.0	11.1	1.3	11.2	7.7	4.9
2.3	10.0	16.7	12.0	12.4	7.8	5.2	13.6	2.6	22.4
3.6	7.1	8.8	25.6	3.2	18.3	5.1	2.0	3.0	12.0
22.2	10.8	5.5	2.0	24.3	9.9	3.6	5.6	4.4	7.9
5.1	24.5	6.4	7.5	4.7	20.5	5.5	15.7	2.6	5.7
5.5	6.0	16.0	2.4	9.5	3.7	17.0	3.8	4.1	2.3
5.3	7.8	8.1	4.3	13.3	6.8	1.3	7.0	4.9	1.8
7.1	28.0	10.2	13.8	17.9	10.1	5.5	4.6	3.2	21.6

【典型例题】

根据 9.1.2 节问题 3 中女生的样本数据，估计树人中学高一年级女生的第 25,50,75 百分位数.

解：把 27 名女生的样本数据按从小到大排序，可得:

148.0	149.0	154.0	154.0	155.0	155.0	155.5	157.0	157.0
158.0	158.0	159.0	161.0	161.0	162.0	162.5	162.5	163.0
163.0	164.0	164.0	164.0	165.0	170.0	171.0	172.0	172.0

根据表 9.2-1，估计月均用水量的样本数据的 80%和 95%分位数.

表 9.2-1

分组	频数累计	频数	频率
[1.2，4.2)	正正正正下	23	0.23
[4.2，7.2)	正正正正正正丅	32	0.32
[7.2，10.2)	正正下	13	0.13
[10.2，13.2)	正íF	9	0.09
[13.2，16.2)	正íF	9	0.09
[16.2，19.2)	正	5	0.05
[19.2，22.2)	下	3	0.03
[22.2，25.2)	íF	4	0.04
[25.2，28.2]	丅	2	0.02
合计		100	1.00

$P138$ 统计【辞典】5 方差知识补充（新教材内容）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在对树人中学高一年级学生身高的调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样，如果不知道样本数据，只知道抽取了男生 23 人，其平均数和方差分别为 170.6 和 12.59，抽取了女生 27 人，其平均数和方差分别为 160.6 和 38.62. 你能由这些数据计算出总样本的方差，并对高一年级全体学生的身高方差作出估计吗?

概率

$P139$ 概率【辞典】1 样本空间与随机事件

【要点梳理】

研究某种随机现象的规律，首先要观察它所有可能的基本结果．例如，将一枚硬币抛掷 2 次，观察正面、反面出现的情况；从你所在的班级随机选择 10 名学生，观察近视的人数；在一批灯管中任意抽取一只，测试它的寿命；从一批发芽的水稻种子中随机选取一些，观察分蘖数；记录某地区 7 月份的降雨量；等等．

我们把对随机现象的实现和对它的观察称为**随机试验**($randomexperiment$)，简称试验，常用字母 E 表示．我们感兴趣的是具有以下特点的随机试验：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果．

我们把随机试验 E 的每个可能的基本结果称为**样本点**，全体样本点的集合称为试验 E 的**样本空间**($samplespace$)．一般地，我们用 Ω 表示样本空间，用 ω 表示样本点．在本书中，我们只讨论 Ω 为有限集的情况．如果一个随机试验有 n 个可能结果 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，则称样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为**有限样本空间**．

抛掷一枚硬币，观察它落地时哪一面朝上，写出试验的样本空间．

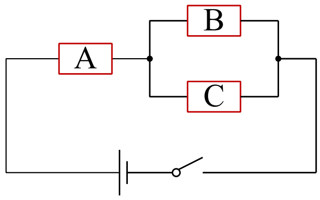
解：因为落地时只有正面朝上和反面朝上两个可能结果，所以试验的样本空间可以表示为 $\Omega=\{$正面朝上，反面朝上$\}$．如果用 h 表示“正面朝上”，t 表示“反面朝上”，则样本空间 $\Omega=\{h,t\}$．

抛掷两枚硬币，观察它们落地时朝上的面的情况，写出试验的样本空间．

一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示．为了叙述方便，我们将样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**($randomevent$)，简称**事件**，并把只包含一个样本点的事件称为**基本事件**($elementaryevent$)．随机事件一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为**事件 A 发生**．Ω 作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为**必然事件**．而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称 $\varnothing$ 为**不可能事件**．必然事件与不可能事件不具有随机性．为了方便统一处理，将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形．这样，每个事件都是样本空间 Ω 的一个子集．

【典型例题】

例题、如图，一个电路中有 A,B,C 三个电器元件，每个元件可能正常，也可能失效．把这个电路是否为通路看成是一个随机现象，观察这个电路中各元件是否正常．



(1) 写出试验的样本空间;

(2) 用集合表示下列事件：

$M=$“恰好两个元件正常”;

$N=$“电路是通路”;

$T=$“电路是断路”．

$P140$ 概率【辞典】2 事件的关系与运算

【要点梳理】

【典型例题】

例题、如图，由甲、乙两个元件组成一个并联电路，每个元件可能正常或失效．设事件 $A=$“甲元件正常”,$B=$“乙元件正常”．

(1) 写出表示两个元件工作状态的样本空间;

(2) 用集合的形式表示事件 A,B 以及它们的对立事件;

(3) 用集合的形式表示事件 $A\cup B$ 和事件 $\bar{A}\cap\bar{B}$, 并说明它们的含义及关系．

$P141$ 概率【辞典】3 古典概型

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、单项选择题是标准化考试中常用的题型，一般是从 A，B，C，D 四个选项中选择一个正确答案 . 如果考生掌握了考查的内容，他可以选择唯一正确的答案．假设考生有一题不会做，他随机地选择一个答案，答对的概率是多少？

例 2、抛掷两枚质地均匀的骰子 (标记为 Ⅰ 号和 Ⅱ 号) , 观察两枚骰子分别可能出现的基本结果 .

(1) 写出这个试验的样本空间 , 并判断这个试验是否为古典概型;

(2) 求下列事件的概率 :

$A=$“两个点数之和是 5”;

$B=$“两个点数相等”;

$C=$“Ⅰ 号骰子的点数大于 Ⅱ 号骰子的点数” .

例 3、袋子中有 5 个大小质地完全相同的球 , 其中 2 个红球、3 个黄球 , 从中不放回地依次随机摸出 2 个球 , 求下列事件的概率 :

(1)$A=$“第一次摸到红球”;

(2)$B=$“第二次摸到红球”;

(3)$AB=$“两次都摸到红球” .

从两名男生(记为B_1和B_2)、两名女生(记为G_1和G_2)中任意抽取两人.

(1)分别写出有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层抽样的样本空间.

(2)在三种抽样方式下,分别计算抽到的两人都是男生的概率.

有放回简单随机抽样的样本空间

$\Omega_1=\{(B_1,B_1),(B_1,B_2),(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,B_1),(B_2,B_2),(B_2,G_1),(B_2,G_2),$
$(G_1,B_1),(G_1,B_2),(G_1,G_1),(G_1,G_2),(G_2,B_2),(G_2,B_2),(G_2,G_1),(G_2,G_2)\}$

不放回简单随机抽样的样本空间

$\Omega_2=\{(B_1,B_2),(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,B_1),(B_2,G_1),(B_2,G_2),(G_1,B_1),(G_1,B_2),$
$(G_1,G_2),(G_2,B_1),(G_2,B_2),(G_2,G_1)\}$.

按性别等比例分层抽样,先从男生中抽一人,再从女生中抽一人,其样本空间

$\Omega_3=\{(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,G_1),(B_2,G_2)\}$

P142 概率【辞典】4 概率的基本(运算)性质

【要点梳理】

一个袋子中有大小和质地相同的4个球,其中有2个红色球(标号为1和2),2个绿色球(标号为3和4),从袋中不放回地依次随机摸出2个球.设事件R_1=“第一次摸到红球”,R_2=“第二次摸到红球”,R=“两次都摸到红球”,G=“两次都摸到绿球”.

【典型例题】

例1、从不包含大小王牌的52张扑克牌中随机抽取一张,设事件A=“抽到红心”,事件B=“抽到方片”,$P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$.那么

(1)C=“抽到红花色”,求$P(C)$;

(2)D=“抽到黑花色”,求$P(D)$.

例 2、为了推广一种新饮料，某饮料生产企业开展了有奖促销活动：将 6 罐这种饮料装一箱，每箱中都放置 2 罐能够中奖的饮料．若从一箱中随机抽出 2 罐，能中奖的概率为多少？

$P143$ 概率【辞典】5 事件的相互独立

【要点梳理】

下面两个随机试验各定义了一对随机事件 A 和 B, 你觉得事件 A 发生与否会影响事件 B 发生的概率吗?

试验 1：分别抛掷两枚质地均匀的硬币，$A=$“第一枚硬币正面朝上”，$B=$“第二枚硬币反面朝上”．

试验 2：一个袋子中装有标号分别是 1,2,3,4 的 4 个球，除标号外没有其他差异．采用有放回方式从袋中依次任意摸出两球．设 $A=$“第一次摸到球的标号小于 3”，$B=$“第二次摸到球的标号小于 3”．

分别计算 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，你有什么发现?

【典型例题】

例 1、一个袋子中有标号分别为 1,2,3,4 的 4 个球，除标号外没有其他差异．采用不放回方式从中任意摸球两次．设事件 $A=$“第一次摸出球的标号小于 3”，事件 $B=$“第二次摸出球的标号小于 3”，那么事件 A 与事件 B 是否相互独立?

例 2、甲、乙两名射击运动员进行射击比赛，甲的中靶概率为 0.8, 乙的中靶概率为 0.9, 求下列事件的概率：

(1) 两人都中靶;

(2) 恰好有一人中靶;

(3) 两人都脱靶;

(4) 至少有一人中靶．

例 3 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动，每轮活动由甲、乙各猜一个成语，已知甲每轮猜对的概率为 $\frac{3}{4}$，乙每轮猜对的概率为 $\frac{2}{3}$，在每轮活动中，甲和乙猜对与否互不影响，各轮结果也互不影响．求“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率．

P144 概率【辞典】6 频率与概率

【要点梳理】

利用计算机模拟掷两枚硬币的试验，在重复试验次数为 20,100,500 时各做 5 组试验，得到事件 $A=$“一个正面朝上，一个反面朝上”发生的频数 n_A 和频率 $f_n(A)$（表 1）.

表 1

序号	$n=20$		$n=100$		$n=500$	
	频数	频率	频数	频率	频数	频率
1	12	0.6	56	0.56	261	0.522
2	9	0.45	50	0.50	241	0.482
3	13	0.65	48	0.48	250	0.5
4	7	0.35	55	0.55	258	0.516
5	12	0.6	52	0.52	253	0.506

【典型例题】

例 1、新生婴儿性别比是每 100 名女婴对应的男婴数．通过抽样调查得知，我国 2014 年、2015 年出生的婴儿性别比分别为 115.88 和 113.51.

(1) 分别估计我国 2014 年和 2015 年男婴的出生率（新生儿中男婴的比率，精确到 0.001);

(2) 根据估计结果，你认为“生男孩和生女孩是等可能的”这个判断可靠吗?

例 2、一个游戏包含两个随机事件 A 和 B, 规定事件 A 发生则甲获胜，事件 B 发生则乙获胜．判断游戏是否公平的标准是事件 A 和 B 发生的概率是否相等．

在游戏过程中甲发现：玩了 10 次时，双方各胜 5 次；但玩到 1000 次时，自己才胜 300 次，而乙却胜了 700 次．据此，甲认为游戏不公平，但乙认为游戏是公平的．你更支持谁的结论？为什么？

思考

气象工作者有时用概率预报天气，如某气象台预报“明天的降水概率是 90%．如果您明天要出门，最好携带雨具”．如果第二天没有下雨，我们或许会抱怨气象台预报得不准确．那么如何理解“降水概率是 90%”？又该如何评价预报的结果是否准确呢？

例 3、盒中仅有 4 个白球和 5 个黑球，从中任意取出一个球．

(1)“取出的球是黄球”是什么事件？它的概率是多少？

(2)“取出的球是白球”是什么事件？它的概率是多少？

(3)“取出的球是白球或是黑球”是什么事件？它的概率是多少．

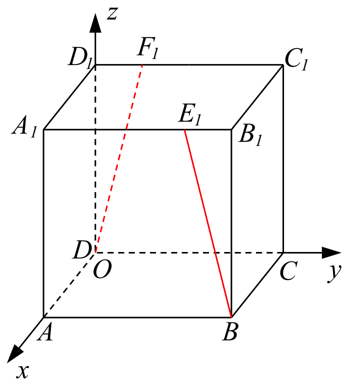
空间向量

$P145$ 空间向量【辞典】1 空间向量与坐标运算

【要点梳理】

【典型例题】

例题、如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E_1,F_1 分别是 A_1B_1,C_1D_1 的一个四等分点，求 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值．



$P146$ 空间向量【辞典】2 空间向量法（重要）

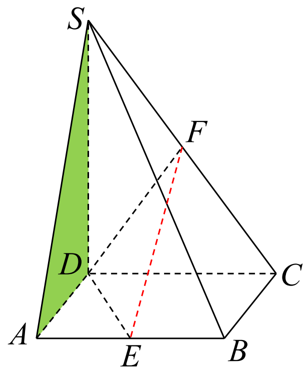
【要点梳理】

【典型例题】

例题、如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，E，F 分别为 AB，SC 的中点．

(1) 证明：$EF\parallel$ 平面 SAD.

(2) 若 $SD=8$，求二面角 $D-EF-S$ 的正弦值．



$P147$ 空间向量【考点】3 法向量求法稳固（基础）

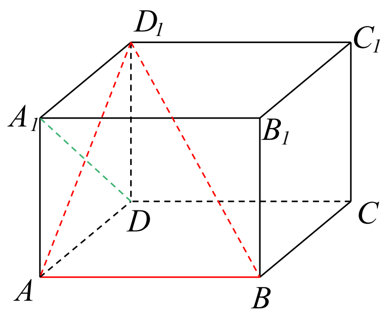
【典型例题】

例 1、(2021 春·湖北月考) 在空间直角坐标系内，平面 α 经过三点 $A(1,0,2)$，$B(0,1,0)$，$C(-2,1,1)$，向量 $\vec{n}=(1,\lambda,\mu)$ 是平面 α 的一个法向量，则 $\lambda-\mu=$ ______.

例 2、如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 A_1ADD_1 是正方形．

(1) 证明：$A_1D\perp$ 平面 ABD_1；

(2) 若 $AD=2$，$AB=4$，求二面角 B_1-AD_1-C 的余弦值．



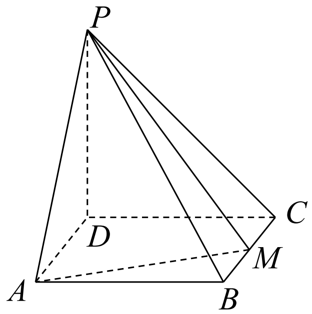
$P148$ 空间向量【考点】4 建系实战指南（中档）

【典型例题】

例 1、(2021·乙卷) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=1$，M 为 BC 中点，且 $PB\perp AM$.

(1) 求 BC;

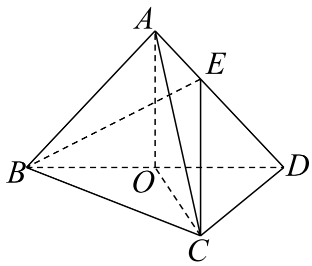
(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



例 2、(2021·新高考 I) 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

(1) 证明：$OA\perp CD$;

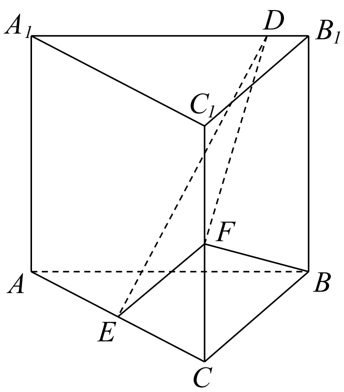
(2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



例 3、(2021·甲卷) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.

(1) 证明：$BF\perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



$P149$ 空间向量【考点】5 方法总结与复杂建系策略（拔高）

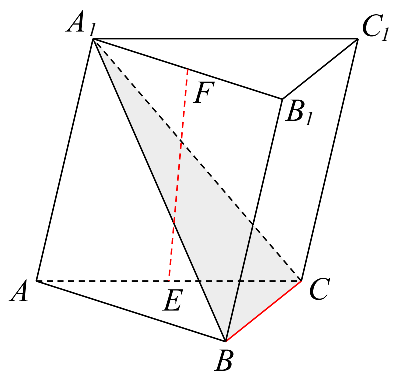
【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019· 浙江) 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$, $A_1A=A_1C=AC$, E,F 分别是 AC,A_1B_1 的中点．

(1) 证明：$EF\perp BC$;

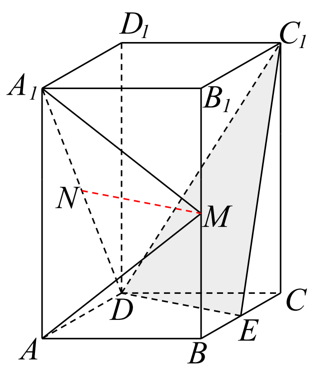
(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值．



例 2、(2019· 新课标 I) 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E,M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点．

(1) 证明：MN // 平面 C_1DE;

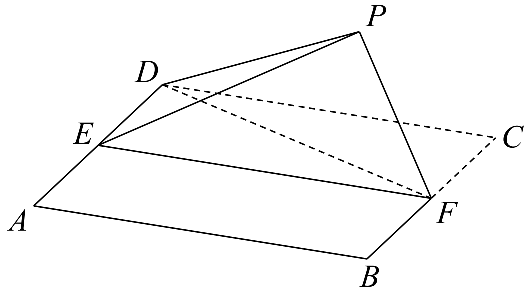
(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值．



例 3、(2018· 新课标 I) 如图,四边形 $ABCD$ 为正方形,E,F 分别为 AD,BC 的中点,以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起,使点 C 到达点 P 的位置,且 $PF \perp BF$.

(1) 证明:平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;

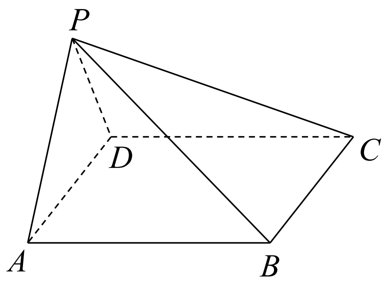
(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值 .



例 4、(2017· 新课标 I) 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.

(1) 证明:平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;

(2) 若 $PA=PD=AB=DC, \angle APD=90^\circ$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值 .



直线与圆

$P150$ 直线与圆【辞典】1 直线的斜率与倾斜角

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知直线 $kx-y+2=0$ 和以 $M(3,-2)$，$N(2,5)$ 为端点的线段相交，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $k\leqslant\frac{3}{2}$　　B. $k\geqslant\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}\leqslant k\leqslant\frac{3}{2}$　　D. $k\leqslant-\frac{4}{3}$ 或 $k\geqslant\frac{3}{2}$

例 2、已知两点 $A(0,1)$，$B(4,3)$，则线段 AB 的垂直平分线方程是 ______.

$P151$ 直线与圆【辞典】2 直线的方程

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、从点 $A(1,-2)$ 射出的光线经直线 $l:x+y-3=0$ 反射后到达点 $B(-1,1)$，则光线所经过的路程是 ________．

$P152$ 直线与圆【辞典】3 点、直线距离公式

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知点 $A(1,3)$，$B(3,1)$，$C(-1,0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

例 2、已知直线 $l_1:2x-7y-8=0$，$l_2:6x-21y-1=0$，l_1 与 l_2 是否平行？若平行，求 l_1 与 l_2 间的距离．

例 3、已知 $a\in R$，若不论 a 为何值时，直线 $l:(1-2a)x+(3a+2)y-a=0$ 总经过一个定点，则这个定点的坐标是 ____．

$P153$ 直线与圆【辞典】4 圆的两种方程表示

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知圆心为 C 的圆经过点 $A(1,1)$,$B(2,-2)$,且圆心 C 在直线 $l:x-y+1=0$ 上,求圆 C 的标准方程.

例 2、(2020· 全国 II 卷模拟)已知圆 C 过点 $(4,6)$,$(-2,-2)$,$(5,5)$,点 M,N 在圆 C 上,则 $\triangle CMN$ 面积的最大值为 ______.

例 3、已知线段 AB 的端点 B 的坐标为 $(4,3)$,端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动,求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程,并说明 M 的轨迹是什么图形.

$P154$ 直线与圆【辞典】5 直线、圆的位置关系

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知直线 $l:3x+y-6=0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-2y-4=0$, 判断直线 l 与圆的位置关系; 如果相交,求它们交点的坐标.

例 2、已知圆 $C_1: x^2+y^2+2x+8y-8=0$, 圆 $C_2: x^2+y^2+4x-4y-2=0$, 试判断圆 C_1 与圆 C_2 的关系?

$P155$ 直线与圆【辞典】6 直线与圆习题课(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、过点 $A(4,1)$, 且在两坐标轴上的截距相等的直线方程是 (　　)

A. $4x-y=0$ 或 $x+y-5=0$　　B. $x-4y=0$ 或 $x+y-5=0$

C. $x-4y=0$ 或 $x-y+3=0$　　D. $x+y-5=0$

例 2、已知点 $P(m,n)$ 是函数 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 图象上的动点, 则 $|4m+3n-21|$ 的最小值是 (　　)

A. 25　　B. 21　　C. 20　　D. 4

例 3、已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于点 M、N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

$P156$ 直线与圆【考点】7 直线倾斜角的理解（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、直线 $l:\sqrt{3}x-y+2=0$ 与 x 轴交于点 A, 把 l 绕点 A 顺时针旋转 45° 得直线 m,m 的倾斜角为 α, 则 $\cos\alpha=$ ______.

例 2、已知点 $A(\sqrt{3},2)$,$B(4,-3)$，若直线 l 过点 $P(0,1)$ 与线段 AB 相交，则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ______ .

例 3、已知点 P 在直线 $x-2y+1=0$ 上，点 Q 在直线 $x-2y+3=0$ 上，线段 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，且 $-1\leqslant x_0\leqslant 2$, 则 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 的取值范围是 ______ .

$P157$ 直线与圆【考点】8 特殊直线性质：过定点、对称性

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、直线 $l:(a+2)x+(1-a)y-3=0$, 当 a 变动时，所有直线都通过定点 ______.

例 2、已知直线 $l:(m+1)x+(1-m)y+(m-3)=0$, 则原点到直线 l 的距离的最大值等于 ______.

例 3、点 $(1,2)$ 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是 ______.

例 4、已知点 $A(4,5)$，点 B 在 x 轴上，点 C 在 $2x-y+2=0$ 上，则 $\triangle ABC$ 的周长最小值为 ______; 此时点 C 的坐标为 ______.

例 5、与直线 $3x-4y+5=0$ 关于坐标原点对称的直线方程为 ____________.

圆锥曲线

$P158$ 圆锥曲线【辞典】1 椭圆的定义

【要点梳理】

$P159$ 圆锥曲线【辞典】2 椭圆的习题课(基础)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一个焦点为 $(1,0)$，则 $b=$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

例 2、已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过点 F_1 的直线与 C 交于 A,B 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则椭圆 C 的标准方程为 (　　)

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{7}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

例 3、已知椭圆 C 的中心为坐标原点 O，$F(\sqrt{5},0)$ 是椭圆 C 的右焦点，P 是椭圆 C 上一点，满足 $|OP|=|OF|$，且 $|PF|=2$，则椭圆 C 的离心率是 (　　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

例 4、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，直线 $y=kx$ 与该椭圆交于 A、B 两点，分别过 A、B 向 x 轴作垂线，若垂足恰为椭圆的两个焦点，则 k 等于（　　）

A. $\pm\frac{3}{2}$　　B. $\pm\frac{2}{3}$　　C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. ± 2

$P160$ 圆锥曲线【辞典】3 双曲线的定义

【要点梳理】

$P161$ 圆锥曲线【辞典】4 双曲线习题课

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率是 ______ .

例 2、已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，则下列说法错误的是（　　）

A. 双曲线 C 的实轴长为 8

B. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$

C. 双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 3

D. 双曲线 C 上的点到焦点距离的最小值为 $\frac{9}{4}$

例 3、已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 A 为双曲线右支上的点．若 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴切于点 M，且 $|F_1M|=\sqrt{3}b$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　B. $\sqrt{3}$　　　C. 2　　　D. $\sqrt{5}$

$P162$ 圆锥曲线【辞典】5 抛物线的定义

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知抛物线方程为 $x^2=12y$，求抛物线的焦点坐标和准线方程．

例 2、已知抛物线 C 的标准方程是 $y^2=6x$.

(I) 求它的焦点坐标和准线方程;

(II) 直线 l 过已知抛物线 C 的焦点且倾斜角为 45°，且与抛物线的交点为 A、B，求线段 AB 的长度．

$P163$ 圆锥曲线【辞典】6 抛物线习题课（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知抛物线 $x^2=2py$ 上一点 $A(m,1)$ 到其焦点的距离为 p, 则 $p=$（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

例 2、已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 F 的直线与抛物线 C 的两个交点分别为 A、B, 且满足 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$, E 为 AB 的中点，则点 E 到抛物线准线的距离为（　　）

A. $\frac{11}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

例 3、已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, A 为 C 上一点且在第一象限，以 F 为圆心，FA 为半径的圆交 C 的准线于 B、D 两点，且 A,F,B 三点共线，则直线 AF 的斜率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

例 4、已知点 F 为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 的直线 l 交 C 于 A、B 两点，与 C 的准线交于点 M, 若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ 则 $|AB|$ 的值等于（　　）

A. $\frac{3}{4}p$　　B. $2p$　　C. $3p$　　D. $\frac{9}{4}p$

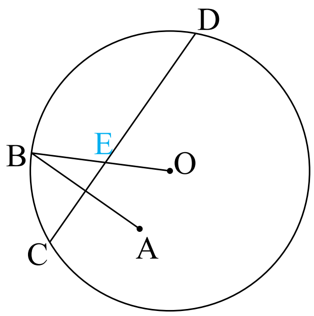
$P164$ 圆锥曲线【考点】7 椭圆的第一定义与方程(基础)

【要点梳理】

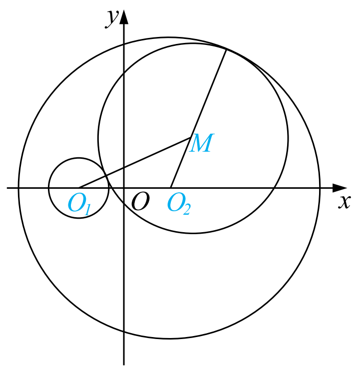
【典型例题】

例 1、如图所示,A 是圆 O 内一定点,B 是圆周上一个动点,AB 的中垂线 CD 与 OB 交于 E,则点 E 的轨迹是 (　　)

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线



例 2、如图所示,一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切,同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切,求动圆圆心 M 的轨迹方程,并说明它是什么样的曲线.



例 3、已知 $\triangle ABC$ 的周长为 20, 且顶点 $B(0,-4)$, $C(0,4)$, 则顶点 A 的轨迹方程是 (　　)

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1(x\neq 0)$　　B. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1(x\neq 0)$

C. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{20}=1(x\neq 0)$　　D. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{6}=1(x\neq 0)$

例 4、点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一点，M、N 分别是圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的动点，则 $PM+PN$ 的取值范围是 ______________.

$P165$ 圆锥曲线【考点】8 椭圆中的焦点三角形问题（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、（辽宁）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A、B，线段 MN 的中点在 C 上，则 $|AN|+|BN|=$ ______.

例 2、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2. P 是椭圆上一点，$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，若 $0^\circ<\angle PF_1F_2<60^\circ$，则该椭圆的离心率的取值范围是 __________.

例 3、(2020· 浙江学业考试) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F, 左顶点为 A. 若点 P 为椭圆 C 上的点 ,$PF\perp x$ 轴 , 且 $\sin\angle PAF<\frac{\sqrt{10}}{10}$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是 __________ .

例 4、(2020· 邵阳三模) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2, 点 M 为椭圆上一点 , $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$, 线段 MF_2 的延长线交椭圆 C 于点 N, 若 $|MF_1|,|MN|,|NF_1|$ 成等差数列 , 则椭圆 C 的离心率为 __________ .

$P166$ 圆锥曲线【考点】9 点差法 (中点弦问题) (中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 过点 $(0,\frac{5}{8})$ 的直线交椭圆 C 所得的弦的中点坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, 则该椭圆的离心率为 ______ .

例 2、椭圆 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$ 与直线 $y=-x+1$ 交于 A,B 两点，过原点与线段 AB 中点的直线斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 则 $\dfrac{n}{m}$ 的值为 ______.

例 3、设椭圆方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$, 过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A、B,O 为坐标原点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点 N 的坐标为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$. 当 l 绕点 M 旋转时，求：

(1) 动点 P 的轨迹方程;

(2)$|\overrightarrow{NP}|$ 的最大值和最小值 .

$P167$ 圆锥曲线【考点】10 椭圆小题进阶（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2,M 为椭圆上异于长轴端点的一点，$\triangle MF_1F_2$ 的内心为 I, 直线 MI 交 x 轴于点 E, 若 $\dfrac{|MI|}{|EI|}=2$, 则椭圆 C 的离心率是（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

例 2、在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A,F 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和右焦点，过坐标原点 O 的直线交椭圆 C 于 P,Q 两点，线段 AP 的中点为 M，若 Q,F,M 三点共线，则椭圆 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{8}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{8}{3}$

例 3、已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 是 C 上一点，且 $PF_2\perp x$ 轴，直线 PF_1 与 C 的另一个交点为 Q，若 $|PF_1|=4|F_1Q|$，则 C 的离心率为 ______.

例 4、已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$P$ 为椭圆 E 的右顶点，直线 l 交 E 于 A、B 两点，且 $PA\perp PB$，则 l 恒过除 P 点以外的定点 ______.

$P168$ 圆锥曲线【考点】11 双曲线方程求法(基础)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知双曲线的上、下焦点分别为 $F_1(0,-3)$，$F_2(0,3)$，P 是双曲线上一点且 $||PF_1|-|PF_2||=4$，则双曲线的标准方程为 ________.

例 2、已知 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，$|PM|-|PN|=4$，则动点 P 的轨迹是 (　　)

A. 一条射线　　B. 双曲线　　C. 双曲线左支　　D. 双曲线右支

例 3、已知双曲线 C 的一个焦点为 $(0,5)$，且与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线相同，则双曲线 C 的标准方程为 ________.

例 4、过双曲线 E: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 $(-\sqrt{5},0)$，作圆 $(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 的切线，切点在双曲线 E 上，则 E 的离心率等于 ______.

$P169$ 圆锥曲线【考点】12 双曲线与几何小题（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 点 P 在 C 上，且 $|PF_1|+|PF_2|=3b$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{9}{4}ab$, 则双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\sqrt{10}$

例 2、设 F_1,F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为双曲线右支上一点，若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，$c=2$，$S_{\triangle PF_1F_2}=3$, 则双曲线的两条渐近线的夹角为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{5}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

例 3、双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,P 是 E 左支上一点，且 $|PF_1|=|F_1F_2|$, 直线 PF_2 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，则 E 的离心率为 ______ .

例 4、已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$，A, B 是圆 $(x+c)^2+y^2=4c^2$ 与 C 位于 x 轴上方的两个交点，且 $F_1A\parallel F_2B$, 则双曲线 C 的离

心率为（　　）

A. $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$　　B. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$　　C. $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$　　D. $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

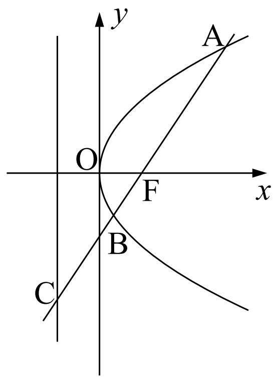
$P170$ 圆锥曲线【考点】13 抛物线小题几何性质（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知抛物线 $C:y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F,O 为坐标原点，点 A 在抛物线 C 上，点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF|=2$, 点 P 是抛物线 C 的准线上的一动点，则 $|PA|+|PO|$ 的最小值为______.

例 2、如图，过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于点 A,B, 交其准线于点 C, 若 $|BC|=2|BF|$, 且 $|AF|=6$, 则此抛物线方程为________________.



例 3、已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, 点 A,B 在抛物线 C 上, 过线段 AB 的中点 M 作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足为 N, 若 $\angle AFB=90^\circ$, 则 $\dfrac{|AB|}{|MN|}$ 的最小值为______.

$P171$ 圆锥曲线【大题】14 大题中的弦长公式(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴的一个端点到椭圆的一个焦点的距离为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $y=x-1$ 与椭圆 C 交于不同的 A、B 两点, 求 $\triangle AOB$(O 为坐标原点) 的面积.

例 2、已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 为曲线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的动点，满足 $x_1+x_2=4$. 且当直线 AB 经过曲线 C 的焦点 F 时，弦 AB 的长为 7.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若弦 AB 的中垂线交 x 轴于点 M, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值 .

$P172$ 圆锥曲线【大题】15 大题中的垂直翻译（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在平面直角坐标系 xOy 中，平面上的动点 P 到点 $F(1,O)$ 的距离与它到直线 $x=-1$ 的距离相等 .

(Ⅰ) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(Ⅱ) 过点 $F(1,0)$ 的直线 l 与点 P 的轨迹 C 交于两个不同点 A,B. 若点 $E(0,1)$，且 $EA\perp EB$, 求直线 l 的方程 .

例 2、已知圆 M 经过点 $(0,1)$ 且与直线 $y=-1$ 相切，圆心 M 的轨迹为曲线 C，点 $A(a,1)$ $(a>0)$ 为曲线 C 上一点 .

(1) 求 a 的值及曲线 C 的方程;

(2) 若 M,N 为曲线 C 上异于 A 的两点，且 $AM\perp AN$. 记点 M,N 到直线 $x=-2$ 的距离分别为 d_1,d_2，判断 d_1d_2 是否为定值，若是，请求出该定值；若不是，请说明理由 .

$P173$ 圆锥曲线【大题】16 大题中的对称条件（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知圆 $E:(x-\sqrt{2})^2+y^2=16$，P 为 E 上任意一点，$F(-\sqrt{2},0)$，PF 的垂直平分线交 PE 于点 G，记点 G 的轨迹为曲线 C，求曲线 C 的方程 .

例 2、已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长为 2.

（I）求椭圆 C 的标准方程;

（II）若直线 $l:y=kx+m(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N，且线段 MN 的垂直平分线过定点 $(1,0)$，求实数 k 的取值范围 .

$P174$ 圆锥曲线【大题】17 大题中的定点问题（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知平面内的两点 $A(0,2\sqrt{2})$，$B(0,-2\sqrt{2})$，过点 A 的直线 l_1 与过点 B 的直线 l_2 相交于点 C，若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$，设点 C 的轨迹为 E.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设 P 是 E 与 x 轴正半轴的交点，过 P 点作两条直线分别与 E 交于点 M,N，若直线 PM,PN 斜率之积为 -4，求证：直线 MN 恒过一个定点，并求出这个定点的坐标.

例 2、已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，横坐标为 1 的点 P 在抛物线上，且以 F 为圆心，$|PF|$ 为半径的圆与 C 的准线相切.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设不经过原点 O 的直线 l 与抛物线交于 A、B 两点，设直线 OA、OB 的倾斜角分别为 α 和 β，证明：当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 时，直线 l 恒过定点.

$P175$ 圆锥曲线【大题】18 大题中的角相等问题（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2018 新课标 I) 设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

例 2、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 2.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过椭圆右焦点且垂直于 x 轴的直线交椭圆于 P,Q 两点，C,D 为椭圆上位于直线 PQ 异侧的两个动点，满足 $\angle CPQ=\angle DPQ$, 求证：直线 CD 的斜率为定值，并求出此定值.

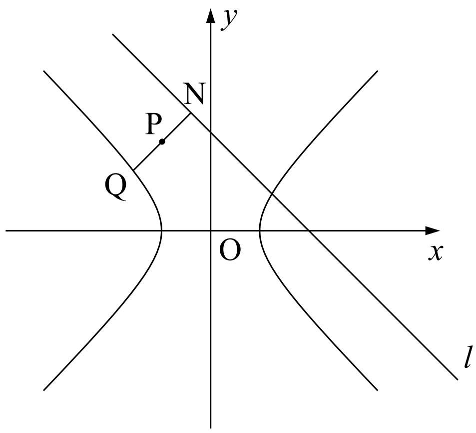
$P176$ 圆锥曲线【大题】19 大题中的轨迹问题（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知两圆 $C_1:(x+4)^2+y^2=2$、$C_2:(x-4)^2+y^2=2$，动圆 M 与圆 C_1 外切，与圆 C_2 内切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为 ____________ .

例 2、如图所示，从曲线 $x^2-y^2=1$ 上一点 Q 引直线 $x+y=2$ 的垂线，垂足为 N，求线段 QN 的中点 P 的轨迹方程 .



例 3、抛物线 $y^2=4px(p>0)$ 的顶点作互相垂直的两弦 OA、OB，求抛物线的顶点 O 在直线 AB 上的射影 M 的轨迹 .

数列

$P177$ 数列【辞典】1 数列的概念与表示方法

【要点梳理】

$P178$ 数列【辞典】2 等差数列的概念

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019 秋 · 常州期末) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中 , 已知 $a_1=1$，$a_3+a_5=8$, 则 $a_7=$ (　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

例 2、(2019 秋 · 石景山区期末) 如果 2，a，b，c，10 成等差数列 , 那么 $c-a=$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

$P179$ 数列【辞典】3 等差数列的前 n 项和

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2019 秋 · 连云港期末) 等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_7=9, S_5=5$，则 S_8 的值是 (　　)

A. 23　　B. 30　　C. 32　　D. 34

例 2、(2020· 岳阳一模) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_3=52$，$a_1+a_4+a_7=147$，a_n 的前 n 项和为 S_n，则使得 S_n 达到最大值时 n 是 (　　)

A. 19　　B. 20　　C. 39　　D. 40

$P180$ 数列【辞典】4 等差数列习题课 (习题课)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则 $a_{10}-\frac{2}{3}a_{11}$ 的值为 (　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 16

例 2、已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_n=2-\dfrac{9}{a_{n-1}+4}(n>1)$，记 $b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$.

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 等差数列;

(2) 求 a_n.

例 3、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_{2020}>0$, 且 $a_{2019}+a_{2020}<0$, 则满足 $S_n>0$ 的最小正整数 n 的值为（　　）

A. 2019　　B. 2020　　C. 4039　　D. 4040

$P181$ 数列【辞典】5 等比数列的概念

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4a_5=4$，则 $a_1a_2\cdots a_8=$（　　）

A. -128　　B. 128　　C. -256　　D. 256

$P182$ 数列【辞典】6 等比数列的前 n 项和

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2S_4=a_4S_2$，则 $\frac{a_{2019}}{a_1}=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2019　　D. -2019

$P183$ 数列【考点】7 累加法题型一网打尽（中档）

【要点梳理】

$P184$ 数列【考点】8 累乘法题型一网打尽（中档）

【要点梳理】

$P185$ 数列【考点】9 待定系数与换元法求解通项公式（重要）（中档）

【要点梳理】

$P186$ 数列【考点】10 等差等比数列的和与通项公式的特殊关系（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、两个等差数列的前 n 项的和比为 $\frac{9n+2}{n+7}$，则它们的第六项相应的比为 ______ .

例 2、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和记为 S_n，$S_{10}=10$，$S_{30}=70$，则 S_{40} 等于 ______ .

例 3、已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_5=4$，$S_{10}=10$，则 $S_{15}=$ ______.

例 4、已知 $\{a_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，S_n 是它的前 n 项和，若 $S_4=6, S_8=18$, 则 $S_{12}=$ ______.

$P187$ 数列【考点】$11An$、Sn 混搭型数列求解思路（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例1、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n+S_a=n+3$，则 $a_n=$ (　　)

A. $1+2^n$　　B. $1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　C. $1+2^{n-1}$　　D. $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

例2、已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$S_{n+1}S_n=a_{n+1}$，又 $a_1=\frac{2}{9}$.

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为等差数列;

(2) 求 a_n.

$P188$ 数列【考点】12 错位相减法求数列的和（重要）（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、(2020· 咸阳一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=2a_n-2n-1,(n\in N_+)$.

(Ⅰ) 求证：数列 $\{a_n+2\}$ 是等比数列;

(Ⅱ) 求数列 $\{n\cdot(a_n+2)\}$ 的前 n 项和 .

$P189$ 数列【考点】13 裂项相消法（重要）（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知数列 a_n 满足 $\frac{1}{2a_1-5}+\frac{2}{2a_2-5}+\frac{3}{2a_3-5}+\cdots+\frac{n}{2a_n-5}=\frac{n}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明 $\frac{1}{22}\leqslant T_n<\frac{1}{6}$.

$P190$ 数列【考点】14 倒序相加与分组求和法（基础）

【要点梳理】

导数

P191 导数【辞典】1 导数的概念与意义

【要点梳理】

【典型例题】

例题、将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加热．如果在第 xh 时，原油的温度（单位：℃）为．计算第 $2h$ 与第 $6h$ 时，原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义．

P192 导数【辞典】2 常见函数的导数

【要点梳理】

P193 导数【辞典】3 导数的运算法则（中档）

【要点梳理】

$P194$ 导数【辞典】4 导数的运算法则习题课（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=x^3e^x-1$，则它的导函数 $f'(x)$ 等于（　　）

A. $3x^2e^x$　　B. $x^2e^x(3+x)$　　C. $x^2e^x(3+x)-1$　　D. $3x^2e^x-1$

例 2、已知函数 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x+\cos x$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. -1

例 3、设 $f(x)=\ln(2x-1)$，若 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=1$，则 x_0 的值（　　）

A. $\frac{e+1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{4}$

例 4、函数 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 的导函数为 $f'(x)=$ ________.

$P195$ 导数【辞典】5 函数单调性与导数（重要）

【要点梳理】

$P196$ 导数【辞典】6 极值与最值

【要点梳理】

$P197$ 导数【考点】7 导数与几何意义考点解析（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2ax+\ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线，则实数 a 的取值范围是 ________.

例 2、(2020· 江苏模拟)已知函数 $y=e^{x}$ 的图象在点 (a_k,e^{a_k}) 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 a_{k+1}, 其中 $k\in N^{*}$,$a_1=0$, 则 $a_1+a_3+a_5=$ ______.

$P198$ 导数【考点】8 构造函数值比较大小(中档)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$,$b=\dfrac{\ln 3}{3}$,$c=\dfrac{1}{e}$, 则 (　　)

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

例 2、已知 $a=3\ln 2^{\pi}$,$b=2\ln 3^{\pi}$,$c=3\ln \pi^{2}$, 则下列选项正确的是 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $b>c>a$

例 3、若 $2^{a}+\dfrac{\ln 2}{2}=3^{b}+\dfrac{\ln 3}{3}=5^{c}+\dfrac{\ln 5}{5}$, 则 (　　)

A. $c\ln 5>a\ln 2>b\ln 3$　　B. $a\ln 2>c\ln 5>b\ln 3$

C. $b\ln 3>c\ln 5>a\ln 2$　　D. $a\ln 2>b\ln 3>c\ln 5$

$P199$ 导数【考点】9 构造函数之导数式（拔高）

【典型例题】

例 1、已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x)$，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ 成立，若 $a=(2^{0.1})\cdot f(2^{0.1})$，$b=(\ln2)\cdot f(\ln2)$，$c=\left(\log_2\frac{1}{8}\right)\cdot f\left(\log_2\frac{1}{8}\right)$ 则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　　B. $c>b>a$　　　C. $c<a<b$　　　D. $a>c>b$

例 2、设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的导函数，$f(1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是__________.

例 3、已知偶函数 $f(x)$ $(x\neq0)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$2f(x)>xf'(x)$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是__________.

$P200$ 导数【考点】10 复合函数的求导问题（基础）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、设 $a \in R$，函数 $f(x)=e^{x}+a\cdot e^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$ 是奇函数．若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\frac{3}{2}$，则切点的横坐标为 ______．

例 2、设 $f(x)=\ln\sqrt{x^{2}+1}$, 则 $f'(2)=$ ______.

例 3、设 $f_0(x)=\sin 2x+\cos 2x, f_1(x)=f_0'(x), f_2(x)=f_1'(x), \cdots, f_{1+n}(x)=f_n'(x), n\in N^{*}$, 则 $f_{2013}(x)=$ ______.

P201 导数【压轴】1 恒成立之参数分离(拔高)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020· 新课标 Ⅰ) 已知函数 $f(x)=e^{x}+ax^{2}-x$.

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^{3}+1$, 求 a 的取值范围．

例 2、(2020 秋 · 沧州期中) 已知函数 $f(x)=\ln x-mx^{2}+(1-2m)x+1$.

(1) 若 $m=1$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意 $x>0$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求整数 m 的最小值 .

$P202$ 导数【压轴】2 恒成立之多级讨论 (拔高)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、已知 $f(x)=e^{x}$. 若 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $(x-1)f(x)\geqslant mx^{2}-1$ 恒成立，求 m 的取值范围 .

例 2、已知函数 $f(x)=(1-a-x)\sin x-(1+a+x)\cos x, x\in[0,\pi], a\in R$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线斜率为 $\frac{\pi}{2}+1$, 求 a 的值;

(2) 若任意 $x\in[0,\pi]$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围 .

$P203$ 导数【压轴】3 未知极值点的处理（中档）

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=\ln x-mx^2+(1-2m)x+1$.

(1) 若 $m=1$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意 $x>0$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求整数 m 的最小值.

例 2、已知 $f(x)=e^x$.

(1) 若 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $(x-1)f(x)\geqslant mx^2-1$ 恒成立，求 m 的取值范围;

(2) 求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>4\ln x+8-8\ln 2$.

$P204$ 导数【压轴】4 未知极值点的进阶处理（拔高）

【典型例题】

例题、(2020· 山东) 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.

$P205$ 导数【压轴】5 极值点偏移（拔高）

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in R)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若 $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x+x_2>2$.

例 2、已知函数 $f(x)=x\ln x$ 的图像与直线 $y=m$ 交于不同的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求证: $x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$.

$P206$ 导数【压轴】6 常见三连放缩（中档）

【要点梳理】

【典型例题】

例1、已知函数 $f(x)=me^{x}-\ln x-1$.

(1) 当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $m\geqslant 1$ 时，证明：$f(x)>1$.

例2、已知函数 $f(x)=ax+b\ln x+1$, 此函数在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 x 轴.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和最大值;

(2) 当 $x>0$ 时，证明：$\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$

(3) 已知 $n\in N^{*},n\geqslant 2$, 求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$.

例3、已知函数 $f(x)=e^{x}-ax-1$(e 为自然对数的底数).

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ) 当 $a>0$ 时，若 $f(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 a 的值;

(Ⅲ) 求证：$\ln\left[1+\frac{2\times 3}{(3-1)^{2}}\right]+\ln\left[1+\frac{2\times 3^{2}}{(3^{2}-1)^{2}}\right]+\cdots+\ln\left[1+\frac{2\times 3^{n}}{(3^{n}-1)^{2}}\right]<2$.

$P207$ 导数【压轴】7 三角放缩举例（拔高）

【要点梳理】

【典型例题】

例题、已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{m}{2}\ln x+1, f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数．

(1) 证明：当 $m=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

(2) 若存在 $x_1, x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1x_2<m^2$.

$P208$ 导数【压轴】8 涉及数列求和放缩（拔高）

【典型例题】

例 1、已知函数 $f(x)=kx-x\ln x, k\in R$.

(1) 当 $k=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant k$ 恒成立，求 k 的取值范围；

(3) 设 $n\in N^*$，求证：$\frac{\ln 1}{2}+\frac{\ln 2}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}\leqslant\frac{n(n-1)}{4}$.

例 2、(2020 安徽相山淮北一中高三三模) 已知函数 $f(x)=|x-a|-\ln x(a>0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 比较 $\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ 的大小 ($n\in N_+$, 且 $n>2$), 并证明你的结论.

$P209$ 导数【压轴】9 进阶放缩技巧 (拔高)

【典型例题】

例 1、(2020 春 · 蚌埠月考) 已知函数 $f(x)=e^x-1-a\sin x(a\in R)$.

(1) 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geqslant 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a=1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0<a_n<1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, 求证: $\{a_n\}$ 是递减数列. (参考数据: $\sin 1\approx 0.84$)

例 2、(2021· 七模拟) 已知函数 $f(x)=2ax^2-x\ln x+x+b$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线经过点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

(Ⅰ) 若函数 $f(e)>a+2$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 的两个极值点分别是 x_1,x_2, 求证: $\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$.

$P210$ 导数【压轴】10 极值点“0”的运用(拔高)

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2021· 山东模拟)设函数 $f(x)=x\ln x-mx^3+mx+1$, 其中 $m\in R$.

(Ⅰ)求函数 $f'(x)$ 的极值;

(Ⅱ)若对于任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f(x)<\dfrac{x}{e^{x-1}}$ 成立($e=2.718\cdots$ 为自然对数的底数),求 m 的取值范围.

例 2、(2021· 全国模拟)已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x, g(x)=e^x+\sin x+\cos x$.

(1)证明:当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时,$f(x)\geqslant 0$;

(2)若 $g(x)\geqslant 2+ax$, 求 a.

计数原理

$P211$ 计数原理【辞典】1 加法与乘法原理

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、某学校高一年级共 8 个班，高二年级 6 个班从中选一个班级担任学校星期一早晨升旗任务，共有（　　）种安排方法.

A. 8　　B. 6　　C. 14　　D. 48

例 2、学校体育场南侧有 4 个大门，北侧有 3 个大门，西侧有 2 个大门，某学生到该体育场训练，但必须是从南或北门进入，从西门或北门出去，则他进出门的方案有（　　）

A. 7 个　　B. 12 个　　C. 24 个　　D. 35 个

例 3、(2020 春 · 浙江期中) 某校教学大楼共有五层，每层均有两个楼梯，一学生由一层到五层的走法有（　　）

A. 10 种　　B. 2^5 种　　C. 5^2 种　　D. 2^4 种

例 4、有不同的语文书 9 本，不同的数学书 7 本，不同的英语书 5 本，从中选出不属于同一学科的书 2 本，则不同的选法有（　　）种.

A. 21　　B. 315　　C. 143　　D. 153

P212 计数原理【辞典】2 排列

【要点梳理】

一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素．按照一定的顺序排成一列叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

【典型例题】

例 1、从 1,2,3,4 这 4 个数字中,每次取出 3 个排成一个三位数,共可得到多少个不同的三位数?

例 2、某年全国足球甲级(A 组)联赛共有 14 个队参加,每队都要与其余各队在主、客场分别比赛一次,共进行多少场比赛?(　　)

A. 91　　B. 182　　C. 364　　D. 14

例 3、(1) 从 5 本不同的书中选出 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?
(2) 从 5 种不同的书中买 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的选法?

例 4、用 0 到 9 这 10 个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

$P213$ 计数原理【辞典】3 组合

【要点梳理】

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素合成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**．

【典型例题】

例 1、一位教练的足球队共有 17 名初级学员，他们中以前没有一人参加过比赛．按照足球比赛规则，比赛时一个足球队的上场队员是 11 人．问：

(1) 这位教练从这 17 名学员中可以形成多少种学员上场方案?

(2) 如果在选出 11 名上场队员时，还要确定其中的守门员，那么教练员有多少种方式做这件事情?

例 2、在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件次品．从这 100 件产品中任意抽出 3 件．

(1) 有多少种不同的抽法?

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种?

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种?

$P214$ 计数原理【补充】排列组合使用场景

【典型例题】

例 1、在精准扶贫工作中，有 6 名男干部、5 名女干部，从中选出 2 名男干部、1 名女干部组成一个扶贫小组分到某村工作，则不同的选法共有（　　）

A. 60 种　　B. 70 种　　C. 75 种　　D. 150 种

例 2、从 1,3,5,7 中任取 2 个数字，从 0,2,4,6,8 中任取 2 个数字，组成没有重复数字的四位数，这样的四位数一共有 ______ 个.

$P215$ 计数原理【辞典】4 排列与组合的运用（习题课）

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020 春 · 平顶山期末) 为了奖励班上进步大的 8 名学生，班主任购买了 5 本相同的书和 3 本相同的笔记本作为奖品分发给这 8 名学生，每人一件，则不同的分法有（　　）

A. 28 种　　B. 56 种　　C. 112 种　　D. 336 种

例 2、(2020 春 · 梅州期末) 某省高考实行 3 + 3 模式，即语文、数学、英语必选，物理、化学、政治、历史、生物、地理六选三，今年高一的小明与小芳进行选科，假若他们对六科没有偏好，则他们至少有两科相同的选法有（　　）

A. 110 种　　B. 180 种　　C. 360 种　　D. 200 种

例题 3、某医院医疗小组共有甲乙丙丁戊己庚 7 名护士，每名护士从 7 月 1 日到 7 月 7 日安排一个夜班，则甲的夜班比丙晚一天的排法数为（　　）

A. A_6^6　　B. $\frac{1}{2}A_7^7$　　C. $C_7^2A_6^6$　　D. $2A_6^6$

例 4、某学校需要把包含甲、乙、丙在内的 6 名教育专家安排到高一、高二、高三三个年级去听课，每个年级安排 2 名专家，已知甲必须安排到高一年级，乙和丙不能安排到同一年级，则安排方案的种数有（　　）

A. 24 种　　B. 36 种　　C. 48 种　　D. 72 种

$P216$ 计数原理【辞典】5 二项式定理与通项

【要点梳理】

【典型例题】

例题、(2020 春·菏泽期末)$\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 $\frac{1}{x}$ 的系数为（　　）

A. -40　　B. 160　　C. -80　　D. 80

$P217$ 计数原理【辞典】6 二项式的性质

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、(2020 春 · 乐山期末) $\left(x^3-\dfrac{2}{x^6}\right)^6$ 的展开式中，二项式系数最大的项的系数是 ______.

例 2、$(2x-1)^6$ 展开式中各项的系数和为 ______ .

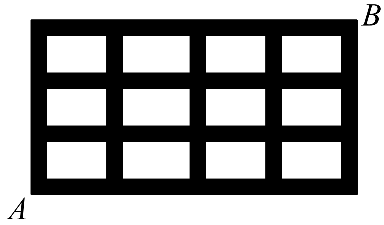
$P218$ 计数原理【考点】7 初识计数题型（基础）

【典型例题】

例 1、5 名同学报名参加 4 个活动小组，每人限报 1 个活动小组，不同的报名方法种数为 ______ .

例 2、用数字 1,2,3,4,6 可以组成无重复数字的五位偶数有 ______ .

例 3、如图，一只蚂蚁在 A 处觅食（蚂蚁只能走黑色实线），B 处有一块巧克力，蚂蚁找到巧克力的最短路径爬法有 ______ .



例 4、将 4 张座位编号分别为 1,2,3,4 的电影票全部分给 3 人，每人至少 1 张 . 如果分给同一人的 2 张电影票具有连续的编号，那么不同的分法种数是 ______ .

例 5、四名同学站在一起合影，甲与乙不相邻，总共有 ______ 种站法.

P219 计数原理【考点】8 捆绑法与插空法（基础）

【典型例题】

例 1、有 6 名同学站成一排，符合下列条件各题要求的不同排法共有多少种?

(1) 甲同学不站在排头;

(2) 甲、乙、丙三位同学两两不相邻;

(3) 甲、乙两同学不相邻，且乙、丙两同学也不相邻;

(4) 甲、乙同两同学相邻，且丙、丁两同学也相邻;

(5) 甲不站左端，乙不站右端 .

例 2、马路上有 10 盏灯，为节约用电，仅打开 5 盏灯，要求打开的 5 盏灯中有且只有 2 盏灯是连着的，这样的开灯方式有多少种?

$P220$ 计数原理【考点】9 隔板法（中档）

【典型例题】

例 1、共有 10 完全相同的球分到 7 个班里，每个班至少要分到一个球，问有几种不同分法?

例 2、(1) 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 的正整数解有多少组?

(2) 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 的非负整数解有多少组?

(3) 方程 $2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_0=3$ 的非负整数整数解有多少组?

例 3、有 8 个相同的球放到三个不同的盒子里，允许盒子为空，共有（　　）种不同方法.

A. 35　　B. 28　　C. 21　　D. 45

例 4、12 个相同的小球放入编号为 1,2,3,4 的盒子中要求每个盒子中，要求每个盒子中的小球个数不小于其编号数，问不同的方法有多少种?

$P221$ 计数原理【考点】10 分组分配问题（中档）

【典型例题】

例 1、把 $abcd$ 分成平均两组有 ______ 多少种分法?

例 2、将 6 本不同的书分成三堆，各有多少种方法?

(1) 分给甲、乙、丙三人，每个人 2 本;

(2) 每份 2 本;

(3) 分给甲乙丙三人，甲得 1 本，乙得 2 本，丙得 3 本;

(4) 一份 1 本，一份 2 本，一份 3 本;

(5) 分给甲、乙、丙三人，一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本;

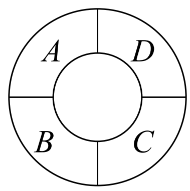
(6) 分给甲、乙、丙三人，甲得 4 本，乙、丙各得 1 本;

(7) 一份 4 本，其余两份都是 1 本;

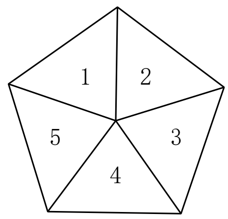
$P222$ 计数原理【考点】11 染色问题（中档到拔高）

【典型例题】

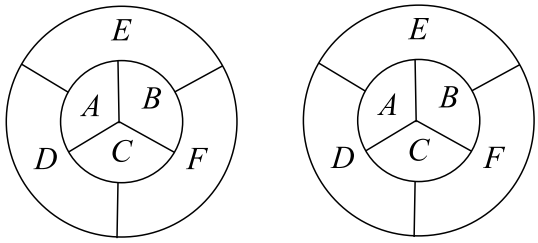
例 1、如图，一环形花坛分成 A、B、C、D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种一种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为 ______ .



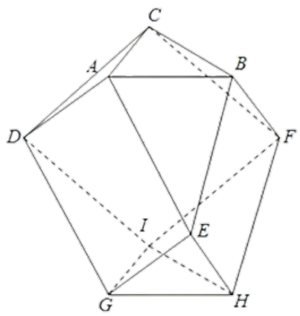
例 2、如图，将标号为 1,2,3,4,5 的五块区域染上红、黄、绿三种颜色中的一种，使得相邻区域（有公共边）的颜色不同，则不同的染色方法有 ______ 种 .



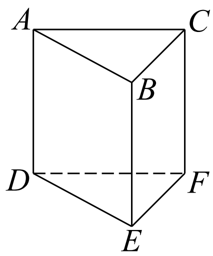
例 3、给图中 A、B、C、D、E、F 六个区域进行染色，每个区域只染一种颜色，且相邻的区域不同色. 若有 4 种颜色可供选择，则共有 ______ 种不同的染色方案.



例 4、在如图所示的十一面体 $ABCDEFGHI$ 中，用 3 种不同颜色给这个几何体各个顶点染色，每个顶点染一种颜色，要求每条棱的两端点异色，则不同的染色方案种数为 ______.



例 5、如图，给三棱柱 $ABC-DEF$ 的顶点染色，定义由同一条棱连接的两个顶点叫相邻顶点，规定相邻顶点不得使用同一种颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的染色方法有 ______.



$P223$ 计数原理【考点】12 组合计数之间接法（中档）

【典型例题】

例 1、从 8 男 4 女中选出 5 名学生代表，按下列条件各有多少种选法：至少有一名女同学．

例 2、(2020· 浙江模拟) 地面上有并排的七个汽车位，现有红、白、黄、黑四辆不同的汽车同时倒车入库，当停车完毕后，恰有两个连续的空车位，且红、白两车互不相邻的情况有______种．

例 3、(2020· 淮北一模) 淮北市第一次模拟考试理科共考语文、数学、英语、物理、化学、生物六科，安排在某两日的四个半天考完，每个半天考一科或两科．若语文、数学、物理三科中任何两科不能排在同一个半天，则此次考试不同安排方案的种数有______．

$P224$ 计数原理【考点】13 一道好题学会排列组合问题核心策略（中档）

【典型例题】

例题、《数术记遗》是《算经十书》中的一部，相传是汉末徐岳所著，该书主要记述了积算（即筹算）、太乙、两仪、三才、五行、八卦、九宫、运筹、了知、成数、把头、龟算、珠算、计数 14 种计算器械的使用方法，某研究性学习小组有甲、乙、丙、丁、戊五人．该小组搜集两仪、三才、五行、八卦、九宫 5 种计算器械的资料．每人搜集一种，每种资料都要有人搜集，其中甲乙不搜集两仪，丙丁不搜集三才，戊不搜集八卦和九宫，则不同的分配方案的种数______（用数字填写答案）

$P225$ 计数原理【考点】14 创新性排列组合问题如何思考?(中档)

【典型例题】

例 1、设 a_1、a_2、$\cdots$、a_6 为 1、2、3、4、5、6 的一个排列，则满足 $|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|=3$ 的不同排列的个数为______.

例 2、设集合 $4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)|x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,3,4,5\}$，则集合 A 中满足条件"$1\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\leqslant3$"元素个数为______.

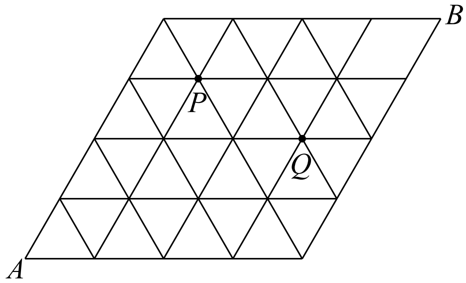
例 3、用 0,1,2,3,4 这五个数字组成无重复数字的自然数.

(Ⅰ)在组成的三位数中，求所有偶数的个数;

(Ⅱ)在组成的三位数中，如果十位上的数字比百位上的数字和个位上的数字都小，则称这个数为"凹数"，如 301,423 等都是"凹数"，试求"凹数"的个数;

(Ⅲ)在组成的五位数中，求恰有一个偶数数字夹在两个奇数数字之间的自然数的个数.

例 4、某城市街道的平面图如图所示，若每个路口仅能沿右、左上、右上三个方向走，若 P、Q 两处因故施工，不能通行，从 A 至 B 的路径条数有 m 条，则 m 为______.



$P226$ 计数原理【考点】15 常规二项式问题（基础）

【典型例题】

例 1、(2021 海淀区一模) 在 $\left(x-\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中 ,x^4 的系数为 12, 则 a 的值为 ______ .

例 2、(2021· 马鞍山二模) 若 $\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 可以是 (　　)

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

例 3、(2021· 南通模拟) 在 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中 , 第 4 项与第 5 项的二项式系数相等 , 则系数最大的有理项是 ______ .

随机变量

$P227$ 随机变量【辞典】1 条件概率与独立事件

【要点梳理】

三张奖券中只有一张能中奖，现分别由三名同学无放回地抽取，问最后一名同学抽到中奖奖券的概率是否比前两名同学小．

如果已经知道第一名同学没有抽到中奖奖券，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率又是多少?

【典型例题】

例 1、在 5 道题中有 3 道理科题和 2 道文科题．如果不放回地依次抽取 2 道题．求：

(1) 第 1 次抽到理科题的概率;

(2) 第 1 次和第 2 次都抽到理科题的概率;

(3) 在第 1 次抽到理科题的条件下．第 2 次抽到理科题的概率．

例 2、某地区气象台统计，该地区下雨的概率是 $\frac{4}{15}$，刮风的概率为 $\frac{2}{15}$，既刮风又下雨的概率为 $\frac{1}{10}$，则在刮风天里，下雨的概率为（　　）

A. $\frac{8}{225}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{4}$

$P228$ 随机变量【辞典】2 离散型随机变量及其分布列

【要点梳理】

例如，在含有 10 件次品的 100 件产品中，任意抽取 4 件，可能含有的次品件数 X 将随着抽取结果的变化而变化，是一个随机变量，其取值范围是 $\{1,2,3,4\}$.

【典型例题】

例题、在含有 3 件次品的 100 件产品中，任取 2 件，求：

(I) 取到的次品数 X 的分布列;

(II) 至少取到 1 件次品的概率 .

$P229$ 随机变量【辞典】3 离散型随机变量的均值与方差

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、在篮球比赛中，罚球命中 1 次得 1 分，不中得 0 分 . 如果运动员甲罚球命中的概率是 0.8,记运动员甲罚球 1 次的得分为 X, 则 $E(X)$ 等于 ______ .

例 2、要从两名同学中挑出一名，代表班级参加射击比赛．根据以往的成绩纪录，第一名同学击中目标靶的环数 X_1 的分布列为

表 1

X_1	5	6	7	8	9	10
P	0.03	0.09	0.20	0.31	0.27	0.10

第二名同学击中目标靶的环数 X_2 的分布列为

表 2

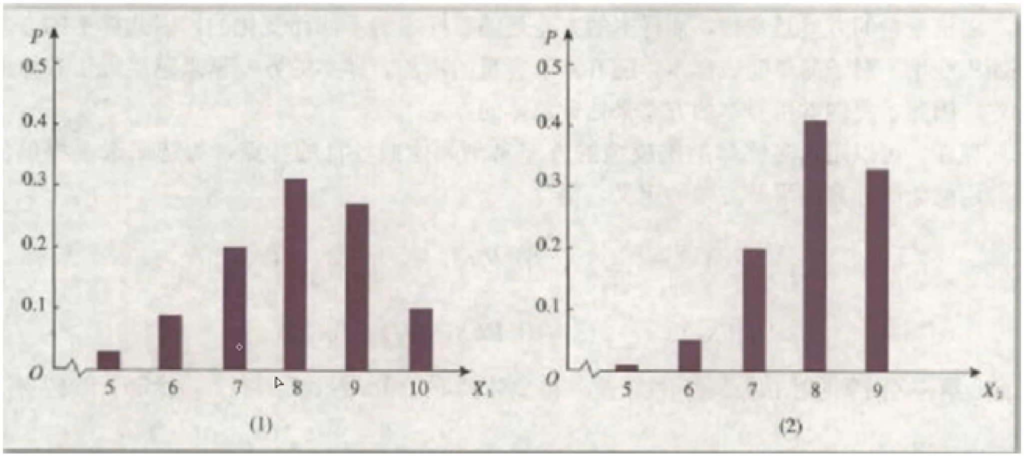
X_2	5	6	7	8	9
P	0.01	0.05	0.20	0.41	0.33

应该派哪名同学参赛?

根据已学知识，可以从平均中靶环数来比较两名同学射击水平的高低，即通过比较 X_1 和 X_2 的均值来比较两名同学射击水平的高低．通过计算，

$$E(X_1)=8, E(X_2)=8,$$

下图分别表示 X_1 和 X_2 的分布列．比较两个图形，可以发现，第二名同学的射击成绩更集中于 8 环，即第二名同学的射击成绩更稳定．



$P230$ 随机变量【辞典】4 独立重复试验

【要点梳理】

【典型例题】

例 1、某射手每次射击击中目标的概率是 $\frac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响 .

(1) 假设这名射手射击 5 次 , 求恰有 2 次击中目标的概率;

(2) 假设这名射手射击 5 次 , 求至少有 3 次击中目标的概率 .

例 2、已知随机变量 X 服从二项分布 , 即 $X\sim B(n,p)$, 且 $E(X)=2,D(X)=1.6$, 则二项分布的参数 n,p 的值为 (　　　)

A. $n=4,p=\frac{1}{2}$　　B. $n=6,p=\frac{1}{3}$　　C. $n=8,p=\frac{1}{4}$　　D. $n=10,p=\frac{1}{5}$

$P231$ 随机变量【辞典】5 随机变量习题课 (基础)

【典型例题】

例 1、袋中有 3 个白球、5 个黑球 , 从中任取 2 个 , 可以作为随机变量的是 (　　　)

A. 至少取到 1 个白球　　B. 至多取到 1 个白球

C. 取到白球的个数　　D. 取到的球的个数

例 2、设随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	p

则 p 为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{12}$

例 3、某投资公司在 2019 年年初准备将 1000 万元投资到"低碳"项目上，现有两个项目供选择：

项目一：新能源汽车．据市场调研，投资到该项目上，到年底可能获利 30%，也可能亏损 15%，且这两种情况发生的概率分别为 $\frac{7}{9}$ 和 $\frac{2}{9}$；

项目二：通信设备．据市场调研，投资到该项目上，到年底可能获利 50%，可能损失 30%,也可能不赔不赚，且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{3}{5},\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{15}$.

针对以上两个投资项目，请你为投资公司选择一个合理的项目，并说明理由．

例 4、已知随机变量与满足分布列 $\xi \sim B(3,p)$，当 $p\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ 且不断增大时，（　　）

A. $P(\xi=2)$ 的值增大，且 $D(\xi)$ 减小　　B. $P(\xi=2)$ 的值增大，且 $D(\xi)$ 增大

C. $P(\xi=2)$ 的值减小，且 $D(\xi)$ 增大　　D. $P(\xi=2)$ 的值减小，且 $D(\xi)$ 减小

$P232$ 随机变量【辞典】6 正态分布

【要点梳理】

你见过高尔顿板吗？图 7.4 − 2 所示的就是一块高尔顿板示意图．在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃．让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下，小球在下落的过程中与层层小木块碰撞，最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内．

如果把球槽编号，就可以考察球到底是落在第几号球槽中．重复进行高尔顿板试验，随着试验次数的增加，掉入各个球槽内的小球的个数就会越来越多，堆积的高度也会越来越高.各个球槽内的堆积高度反映了小球掉入各球槽的个数多少．

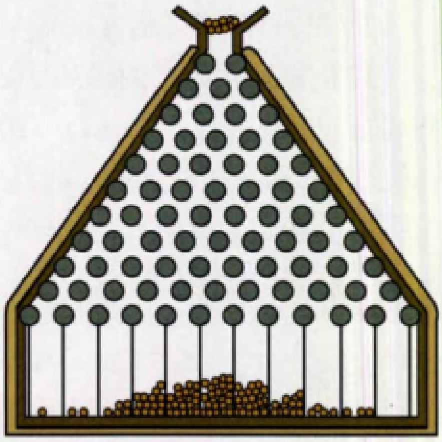


图 7.4-2

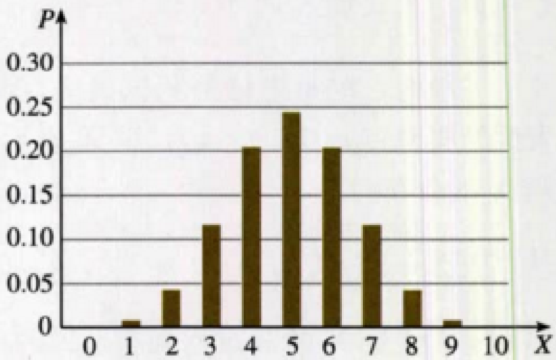


图 7.4-3

$P233$ 随机变量【辞典】7 正态分布习题课

【典型例题】

例 1、(2020 春 · 泰州期末) 现有 1000 名学生参加数学测试，其中测试成绩近似服从正态分布 $N(110,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，试卷满分 150 分，统计结果显示测试成绩优秀(高于 135 分)的人数占总人数的 $\frac{1}{5}$，则此次测试成绩在 85 分到 110 分之间的人数约为(　　)

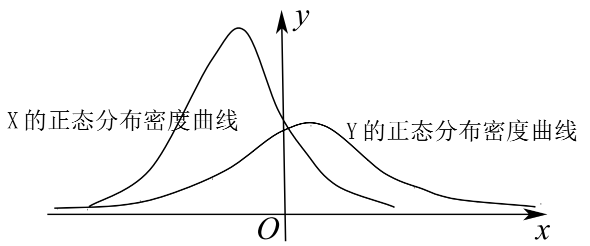
A. 200　　B. 300　　C. 400　　D. 500

例 2、(2015· 山东) 已知某批零件的长度误差(单位：毫米)服从正态分布 $N(0,3^2)$，从中随机抽取一件，其长度误差落在区间 (3,6) 内的概率为(　　)

(附：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=68.26\%$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=95.4\%$)

A. 4.56%　　B. 13.59%　　C. 27.18%　　D. 31.74%

例 3、(2015· 湖北) 设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示．下列结论中正确的是(　　)



A. $P(Y\geqslant\mu_2)\geqslant P(Y\geqslant\mu_1)$　　B. $P(X\leqslant\sigma_2)\geqslant P(Y\leqslant\sigma_1)$

C. 对任意正数 t, $P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$　　D. 对任意正数 t, $P(X\geqslant t)\geqslant P(Y\geqslant t)$

成对数据统计

$P234$ 成对数据统计【辞典】1 线性回归方程

【要点梳理】

$P235$ 成对数据统计【辞典】2 线性回归习题课

【典型例题】

例 1、某家电商场为了解广告宣传费与营业额之间的关系，得到如下数据统计表：

广告宣传费 x（万元）	3	4	5	6	7
营业额 y（万元）	10	14	15	17	19

根据数据表可得回归直线方程为 $\hat{y}=2.1x+\hat{a}$，据此预测广告费用为 10 万元时，营业额为（　　）万元．

A. 24　　B. 24.5　　C. 25.5　　D. 26

例 2、(2020· 新课标 II) 某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加．为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\dots,20)$，其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得：

$$x_i=60,\sum_{i=1}^{20}y_i=1200,\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80,\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000,\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800.$$

(2) 求样本 (x_i,y_i) $(i=1,2,\dots,20)$ 的相关系数（精确到 0.01）；

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{2}\approx 1.14$

例 3、两个变量 y 与 x 的回归模型中，分别选择了 4 个不同的模型，它们的相关系数 r 如表，其中拟合效果最好的模型是（　　）

模型	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4
相关系数 r	0.48	0.15	0.96	0.30

A. 模型 1　　B. 模型 2　　C. 模型 3　　D. 模型 4

例 4、某超市统计了最近 5 年的商品销售额与利润率数据，经计算相关系数 $r=0.862$，则下列判断正确的是（　　）

A. 商品销售额与利润率正相关，且具有较弱的相关关系

B. 商品销售额与利润率正相关，且具有较强的相关关系

C. 商品销售额与利润率负相关，且具有较弱的相关关系

D. 商品销售额与利润率负相关，且具有较强的相关关系

$P236$ 成对数据统计【辞典】3 独立性检验

【要点梳理】

	不患肺癌	患肺癌	总计
不吸烟	7775	42	7817
吸烟	2099	49	2148
总计	9874	91	9965

	不患肺癌	患肺癌	总计
不吸烟			
吸烟			
总计			

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【典型例题】

(2020·新课标III)某学生兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

(3) 若某天的空气质量等级为1或2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为3或4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次$\leqslant400$	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828