Chapter 8

BY 不定积分

Definition 1. *不定积分是求函数在微分运算下的原函数。即函数空间上、微分的逆算子*

$$\begin{gathered}f\text{在}I\text{上的全体原函数称为}f\text{在}I\text{上的不定积分}\\ \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C\end{gathered}$$

1 Def

1.1 存在性

1. 函数在区间上连续，则在区间上存在原函数(变限积分证明)
2. 函数在区间上有第一类间断点(可去和跃点)，则区间上不存在不定积分
3. 函数在区间上有第二类间断点(无穷或不存在),则区间上的积分需要进一步判断

1.2 原函数的性质

1. $$\begin{gathered}F\text{是}f\text{在区间}I\text{上的原函数}\Rightarrow\\ F+c\text{也是}f\text{在}I\text{上的原函数，}c\text{是任意常量函数}\\ f\text{在}I\text{上的任意两个原函数之差为常量函数}\end{gathered}$$
2. 积分的线性性

$$\int(\lambda_1 f + \lambda_2 g)\mathrm{d}x = \lambda_1\int f\mathrm{d}x + \lambda_2\int g\mathrm{d}x$$

1.3 积分法：换元和分部

1. 复合函数求导法导出，换元法：

$$\begin{array}{ll}\text{第一}\quad\text{若}\displaystyle\int f\mathrm{d}x = F(x) + C\text{在}I\text{上存在}, \varphi(t)\text{在区间}J\text{上可导}\wedge\varphi(J)\subseteq I. \\ \Rightarrow & \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\text{在}J\text{上也存在} \\ \wedge & \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + C\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{第二}\quad\text{若}\varphi(t)\text{在区间}J\text{上可导}\wedge\varphi(J)\subseteq I, x=\varphi(x)\text{在}J\text{上存在反函数}t=\varphi^{-1}(x) \\ \wedge & \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x\text{在}I\text{上存在} \\ \wedge & \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}x = G(t) + C\text{在}J\text{上存在} \\ \Rightarrow & \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C\end{array}$$

2. 积的求导法则导出，分部法：

$$\begin{aligned}&u(x),v(x)\text{可导，不定积分}\int u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x\text{存在}\\ \Rightarrow\quad&\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\text{存在}\\ \wedge\quad&\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

1.4 有理函数积分法

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_n)^{\lambda_n}(x+b_1x+c_1)^{k_1}\cdots(x+b_m+c_m)^{k_m}}{(x-A_1)^{\Lambda_1}\cdots(x-A_p)^{\Lambda_p}(x^2+B_1x+C_1)^{K_1}\cdots(x^2+B_qx+C_q)^{K_q}}$$

$$Q(x)\text{先化简成真分式：}(x-A_1)^{\Lambda_1}\cdots(x-A_p)^{\Lambda_p}(x^2+B_1x+C_1)^{K_1}\cdots(x^2+B_qx+C_q)^{K_q}$$

$$\text{令}R(x)=\frac{s_1}{(x-A_1)}+\cdots\frac{s_{\Lambda_1}}{(x-A_1)^{\Lambda_1}}+\cdots\frac{s_1}{(x-A_p)}+\cdots+\frac{s_{\Lambda_p}}{(x-A_p)^{\Lambda p}}$$

$$+\frac{J_1x+F_1}{(x^2+B_1x+C_1)}+\cdots+\frac{J_{K_1}x+F_{K_1}}{(x^2+B_{K_1}x+C_{K_1})}+\cdots+\frac{J_1x+F_1}{(x^2+B_1x+C_1)}+\cdots+\frac{J_{K_q}x+F_{K_1}}{(x^2+B_{K_q}x+C_{K_q})}$$

$$\text{化为}\int\frac{s\mathrm{d}x}{(x-A)^k}\text{和}\int\frac{Jx+F}{(x^2+Bx+C)^k}\mathrm{d}x\text{两类积分}$$

$$\text{其中}\int\frac{s\mathrm{d}x}{(x-A)^k}=s\int\frac{d(x-A)}{(x-A)^k}=\begin{cases}\ln|x-A|+C & k=1\\ (1-k)^{-1}(x-A)^{k-1}+C & k>1\end{cases}$$

$$\text{其中}\int\frac{Jx+F}{x^2+Bx+C}\mathrm{d}x=\int\frac{J\left(x+\frac{B}{2}\right)+\left(F-J\frac{B}{2}\right)}{\left(x+\frac{B}{2}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{4}\right)}\mathrm{d}x$$

$$\text{let: }t=x+B/2;$$

$$=\frac{J}{2}\ln\left(\left(x+\frac{B}{2}\right)^2+C-\frac{B^2}{4}\right)+C$$

$$\text{后者}\int\frac{\mathrm{d}x}{t^2+r^2}=\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C$$

$$\text{对于}I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}$$

$$I_k=\frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1};$$

$$I_1=\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C;$$

1.5 三角函数有理分式的不定积分

$$\text{令}t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow\quad\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

1.6 某些无理根式的不定积分

1. $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$$\text{let: }t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\text{解出}x\text{和}\mathrm{d}x\text{化为有理函数不定积分}$$

2. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

$$\text{配方后化为}\int R\left(u,\sqrt{u^2\pm k^2}\right)\mathrm{d}u\text{和}\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\mathrm{d}u\right)$$
$$\text{使用}u=k\tan t;u=k\sec t;u=k\sin t\text{化为三角有理式不定积分}$$

这种情况也可以使用欧拉变换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x\pm t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

分别解出x和dx带入化简至有理分式函数

2 Famula

1. 基本积分表

0	$\int 0\mathrm{d}x=C$
1	$\int \mathrm{d}x=x+C$
2	$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1,x>0)$
3	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$
4	$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$
5	$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq1)$
6	$\int \cos\alpha x\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x+C.(\alpha\neq0)$
7	$\int \sin\alpha x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x+C.(\alpha\neq0)$
8	$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$
9	$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
10	$\int \sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$
11	$\int \csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C.$
12	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$
13	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}\, x+C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\mathrm{arcsinh}\, x+C$
15	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{arccosh}\, x+C$
16	$\int \frac{1}{1-x^2}=\mathrm{arctanh}\, x+C=\mathrm{arccoth}\, x+C$