第八章 复向量空间上的算子

1 广义本征向量和幂零算子

1.1 算子幂的零空间

定理 1.1. *算子的幂的零空间是递增的*

$$T \in \mathcal{L}(V).\ \{0\} = \operatorname{null} T^0 \subset \operatorname{null} T^1 \subset \operatorname{null} T^2 \subset \cdots \subset \operatorname{null} T^k \subset \operatorname{null} T^{k+1} \subset \cdots$$

证明.

$$\begin{gathered} T^0 = I.\operatorname{null} I = \{0\} \\ k\text{是非负整数，} v \in \operatorname{null} T^k \to T^k v = 0 \\ T^{k+1}v = T(T^k)v = T(0) = 0 \\ \to v \in \operatorname{null} T^{k+1} \end{gathered}$$

□

定理 1.2. *零空间序列的等式*

$$T \in \mathcal{L}(V).m \in N^+, \operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1} \to \operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1} = \cdots$$

证明.

$$\begin{gathered} \operatorname{null} T^k \subset \operatorname{null} T^{k+1} \\ \forall v \in \operatorname{null} T^{k+1}. v \in \operatorname{null} T^k \\ T^{m+1}(T^v(v)) = T^{m+k+1}v = 0 \\ \to T^k v \in \operatorname{null} T^{m+1} = \operatorname{null} T^m \\ \to T^{m+k}v = T^m(T^k v) = 0 \\ \to v \in \operatorname{null} T^{m+k} \\ \to \operatorname{null} T^{m+k+1} \subset \operatorname{null} T^{m+k} \end{gathered}$$

□

定理 1.3. *零空间序列增长到维数时停止增长*

$$T \in \mathcal{L}(V).n = \dim V, \operatorname{null} T^n = \operatorname{null} T^{n+1} = \cdots$$

证明.

$$\begin{gathered} \text{设命题不成立} \\ \{0\} \subsetneq \operatorname{null} T^0 \subsetneq \operatorname{null} T^1 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{null} T^n \subsetneq \operatorname{null} T^{n+1} \\ \to \dim \{0\} \leqslant \dim \operatorname{null} T^0 \leqslant \cdots \leqslant \dim \operatorname{null} T^n \leqslant \operatorname{null} T^{n+1} \\ \dim V = n < \dim (\operatorname{null} T^{n+1}) = n+1 \\ \text{矛盾} \end{gathered}$$

□

定理 1.4.

$$T \in \mathcal{L}(V).\ n = \dim V. V = \operatorname{null} T^n \oplus \operatorname{range} T^n$$

证明.

$$
\begin{aligned}
s1 \quad & (\operatorname{null} T^n) \cap (\operatorname{range} T^n) = \{0\} \\
& v \in (\operatorname{null} T^n) \cap (\operatorname{range} T^n) \\
& \rightarrow T^n v = 0; \exists u \in V, T^n u = v \\
& \rightarrow T^n v = T^n (T^n u) \\
& \rightarrow T^{2n} u = 0 = T^{2n-1} u = \cdots = T^n u \\
& \rightarrow v = T^n u = 0 \\
& \rightarrow (\operatorname{null} T^n) \cap (\operatorname{range} T^n) = \{0\} \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s2 \quad & \operatorname{null} T^n \text{和} \operatorname{range} T^n \text{是} V \text{的子空间且交为0空间} \\
& \rightarrow \operatorname{null} T^n + \operatorname{range} T^n \text{是直和}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s3 \quad & \dim (\operatorname{null} T^n \oplus \operatorname{range} T^n) = \dim \operatorname{null} T^n + \dim \operatorname{range} T^n = \dim V \\
& \rightarrow \operatorname{null} T^n \oplus \operatorname{range} T^n = V
\end{aligned}
$$

Remark: $\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$不表示$\operatorname{null} T$和$\operatorname{range} T$是直和

例 1.5. $T \in \mathcal{L}(F^3), T(z_1, z_2, z_3) = (4z_2, 0, 5z_3)$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{null} T = \{v : Tv = 0\} &= \{T(z_1, z_2, z_3) = z_2 = 0 \wedge z_3 = 0\} \\
&\rightarrow \operatorname{null} T = (z_1, 0, 0) \\
\operatorname{range} T &= \{Tv \in V : v \in V\} = (z_1, 0, z_3) \\
&\operatorname{null} T \subset \operatorname{range} T \\
T^3(z_1, z_2, z_3) &= T^2(4z_2, 0, 5z_3) \\
&= T(4 * 0, 0, 5 * (5z_3)) = T(0, 0, 25z_3) \\
&= (0, 0, 125z_3) \\
\operatorname{null} T^3 &= (0, 0, 125z_3) = (z_1, z_2, 0) \\
\operatorname{range} T^3 &= (0, 0, 125z_3) = (0, 0, z_3) \\
&\rightarrow F^3 = \operatorname{null} T^3 \oplus \operatorname{range} T^3
\end{aligned}
$$

1.2 广义本征向量

有些算子因为没有足够的本征向量，所以没有一个好的描述。因此引入广义本征向量的概念。

需要考察算子的定义域的不变子空间的分解来描述算子。为此找到一个好的直和分解

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

其中每个子空间U是T的不变子空间。最简单的非零不变子空间是一维的。

根据之前本征值理论， 如果每个U都是T的一维不变子空间， 当且仅当V有一个T的本征向量组成的基。

$$V = E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_n, T)$$

$F = C$则每个正规算子都成立；$F = R$则对每个自伴算子都成立。因为这些形式的算子都具有足够的本征向量构成V的基。

定义 1.6. *广义本征向量(generalized eigenvector)*

$$
\begin{gathered}
T \in \mathcal{L}(V). \lambda \text{是} T \text{的本征值}, v \in V \text{称为} T \text{的相应与} \lambda \text{的广义本征向量} \\
v \neq 0 \wedge \exists j \in N^+, (T - \lambda I)^j v = 0
\end{gathered}
$$

定义 1.7. *广义本征空间(generalized eigenspace),* $G(\lambda,T)$

$$T\in\mathcal{L}(V).\lambda\in F.T\text{相应于}\lambda\text{的广义本征空间}G(\lambda,T)$$
$$G(\lambda,T)=\{\text{span}(v)\colon v\text{是广义本征向量}\}$$
$$\{0\}\in G(\lambda,T)$$
$$E(\lambda,T)\subset G(\lambda,T)$$

定理 1.8. *广义本征空间的刻画*

$$T\in\mathcal{L}(V),\lambda\in F.G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$$

证明.

1
$$\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}\subset G(\lambda,T)$$
$$v\in\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}.v\in G(\lambda,T).$$
$$\rightarrow\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}\subset G(\lambda,T)$$

2
$$G(\lambda,T)\subset\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$$
$$\text{设}v\in G(\lambda,T),\exists j\in N^+,v\in\text{null}(T-\lambda I)^j$$
$$\text{null}(T-\lambda I)^1\subset\cdots\subset\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V+1}$$
$$\rightarrow v\in\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$$
$$\rightarrow G(\lambda,T)\subset\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$$

$$\rightarrow G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$$

□

例 1.9. 求算子的本征值、本征向量、和广义本征空间

$$T\in\mathcal{L}(C^3),T(z_1,z_2,z_3)=(4z_2,0,5z_3)$$

1 求T的所有本征值和相应的本征空间和相应的广义本征空间
$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}.T\text{的本征值}=0,5$$
$$E(0,T)=(z_1,0,0);E(5,T)=(0,0,z_3)$$
$$\text{span}(E(0,T),E(5,T))\neq C^3$$
$$T^3(z_1,z_2,z_3)=(0,0,125z_3)$$
$$G(0,T)=\text{null}(T-0I)^3=(z_1,z_2,0)$$
$$G(5,T)=\text{null}(T-5I)^3=\begin{pmatrix}-5&4&\\&-5&\\&&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-125&300&\\&-125&\\&&0\end{pmatrix}$$
$$(T-5I)^3(z_1,z_2,z_3)=(-125z_1+300z_2,-125z_2,0)$$
$$\text{null}(T-5I)^3=(0,0,z_3)$$

2
$$C^3=G(0,T)\oplus G(5,T)$$

定理 1.10. *对应不同特征值的广义本征向量是线性无关的*

$$T\in\mathcal{L}(V).\lambda_1,\ldots,\lambda_m\text{是}T\text{的所有不同的本征值}$$
$$v_i\text{是各个}\lambda_i\text{对应的广义本征向量}$$
$$\rightarrow\boldsymbol{v}\text{是线性无关的}$$

证明.

$$
\begin{gathered}
a_1,\ldots,a_m\in C\\
0=a_1v_1+\cdots+a_mv_m\\
\text{let:}\,k\text{是使得}(T-\lambda_1I)^kv_1\neq 0\text{的最大非负整数}\\
w=(T-\lambda_1I)^kv_1\\
\rightarrow(T-\lambda_1I)w=(T-\lambda_1I)^{k+1}v_1=0\\
\rightarrow Tw=\lambda_1w\\
\forall\lambda\in F,(T-\lambda I)w=(\lambda_1-\lambda)w\\
\forall\lambda\in F,(T-\lambda I)^nw=(\lambda_1-\lambda)^nw,\,n=\dim V\\
(T-\lambda_1I)^k(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_m)^n\\
(T-\lambda_1I)^k(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_m)^n\,0=(T-\lambda_1I)^k(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_m)^n(a_1v_1+\cdots+a_mv_m)\\
0=(T-\lambda_1I)^k(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_m)^n(a_1v_1+\cdots+a_mv_m)\\
=a_1(T-\lambda_1I)^k(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_mI)^nv_1+0+\cdots+0\\
=a_1(T-\lambda_2I)^n\cdots(T-\lambda_2I)^nw\\
=a_1(\lambda_1-\lambda_2)^n\cdots(\lambda_1-\lambda_m)^nw\\
\rightarrow a_1=0\\
\text{类似的}a_1,\ldots,a_m=0\\
\rightarrow\boldsymbol{v}\text{线性无关}
\end{gathered}
$$

□

1.3 幂零算子

定义 1.11. *幂零的(nilpotent)*

$$T\in\mathcal{L}(V).\exists k\in N^+,T^k=\mathbf{0}$$

例 1.12. 幂零算子

1 $N\in\mathcal{L}(F^4).\,N(z_1,z_2,z_3,z_4)=(z_3,z_4,0,0).\,N^2=(0,0,0,0)$
2 $\mathcal{P}_m(R)$上的微分算子是幂零的.$\forall p\in\mathcal{P}_m(R),\,D^{n+1}p=0$

定理 1.13. *n维空间上幂零算子的n次幂等于0算子*

$$N\in\mathcal{L}(V)\text{是幂零的。}N^{\dim V}=\mathbf{0}$$

证明.

N是幂零的，$G(0,N)=V\rightarrow\operatorname{null}N^{\dim V}=V$ □

给定V上的算子T. 想要找到一个V的基记得T关于此基的矩阵尽可能简单

定理 1.14. *幂零算子的矩阵*

$$
\begin{gathered}
\text{设}N\text{是}V\text{上的幂零算子，那么}V\text{有一个基使得}N\text{关于此基的矩阵为}\\
\begin{pmatrix}
0 & * & \ldots & * & *\\
0 & 0 & \cdots & * & *\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & *\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}\\
\text{对角线和对角线下方的元素都是0}
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
N\text{是幂零的} \to \operatorname{null} N^{\dim V} = V \\
\text{先取}\operatorname{null} N\text{是一个基, 再扩充成}\operatorname{null} N^2\text{的基} \\
\ldots\text{最后得到}V\text{的一个基}\boldsymbol{e} \\
\text{考虑}\mathcal{M}(N, \boldsymbol{e}) \\
\to \boldsymbol{e}\text{是}\operatorname{null} N\text{的基} \to \text{第一列必全为}0 \\
\text{第二列必为}\operatorname{null} N^2\text{的基，可能不是}\operatorname{null} N\text{的基} \to \text{第二列对角线下全为}0 \\
\cdots \\
\to \mathcal{M}(N, \boldsymbol{e})\text{对角线和对角线下全是}0
\end{gathered}
$$

□

v8.A

2 算子的分解

2.1 复向量空间上算子的刻画

根据前面的事实。即使在有限维复向量空间上，算子的定义域也未必能分解成本征空间的直和。

但是：有限维复向量空间上的算子都有足够多的广义本征向量给出一个分解。

$T \in \mathcal{L}(V).\, p \in \mathcal{P}(F).\, \operatorname{null} T$和$\operatorname{rang} T$在$T$下都不变

定理 2.1. *算子的多项式的零空间和像空间在算子下是不变的*

$$
T \in \mathcal{L}(V) \wedge p \in \mathcal{P}(F).\, \operatorname{null} p(T)\text{和}\operatorname{range} p(T)\text{都是}T\text{的不变子空间}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\forall v \in \operatorname{null} p(T) \to p(T)v = 0 \\
(p(T))(Tv) = T(p(T)v) = T(0) = 0 \quad (p(T))(Tv) = p(T)q(T) = q(T)p(T) \\
\to Tv \in \operatorname{null} p(T) \qquad T(\operatorname{null} p(T)) \subset \operatorname{null} p(T)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
v \in \operatorname{range} p(T), \exists u \in V, v = p(T)u \\
Tv = T(p(T)u) = p(T)(Tu) \\
\to Tv \in \operatorname{range} p(T) \\
T(\operatorname{range} p(T)) \subset \operatorname{range} p(T)
\end{gathered}
$$

□

定理 2.2. *复向量空间上的算子的幂零算子刻画*

$$
\begin{array}{cc}
 & V\text{是复向量空间，}T \in \mathcal{L}(V).\text{设}\boldsymbol{\lambda}\text{是}T\text{的不同本征值} \\
1 & V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, T) \\
2 & G(\lambda_i, T)\text{都是}T\text{的不变子空间} \\
3 & (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}\text{都是幂零算子}
\end{array}
$$

证明.

2
$$
\begin{gathered}
n=\dim V\\
\forall i, G(\lambda_i,T)=\mathrm{null}(T-\lambda_i I)^n\\
p(z)=(z-\lambda_i)^n, p(T)\text{是}T\text{的不变子空间}\\
\rightarrow p(T)=(T-\lambda_i I)^n.\\
T\,(\mathrm{null}\,p(T))\subset \mathrm{null}\,p(T)\\
\rightarrow T(\mathrm{null}\,(T-\lambda_i I)^n)\subset \mathrm{null}\,(T-\lambda_i I)^n\\
\rightarrow G(\lambda_i,T)\text{是}T\text{的不变子空间}
\end{gathered}
$$

3
$$
\begin{gathered}
\lambda_i\text{是}T\text{的本征值}\\
\rightarrow \dim(\mathrm{null}\,(T-\lambda_i I))<n\\
\rightarrow T-\lambda_i I\text{是幂零的}
\end{gathered}
$$

1 使用归纳法$n=1$时只有一个一维不变子空间必然成立
$$
\begin{gathered}
V\text{是复向量空间}\rightarrow T\text{必有本征值}.m\geqslant 1\\
V=\mathrm{null}\,(T-\lambda_1 I)^n\oplus \mathrm{range}\,(T-\lambda_1 I)^n\\
\rightarrow V=G(\lambda_1,T)\oplus U\\
\rightarrow U\text{是}T\text{的不变子空间}\qquad 2.1\\
G(\lambda_1,T)\neq\{0\}\rightarrow \dim U<n\\
T|_U\text{使用归纳法}\\
T|_U\text{关于}\lambda_1\text{的所有广义本征向量都不在}U\text{中}\\
T|_U\text{的每个本征值都在}\lambda_2,\ldots,\lambda_n\\
U=G(\lambda_2,T|_U)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_n,T|_U)\\
\text{对于任意的}k\geqslant 2.G(\lambda_k,T|_U)=G(\lambda_k,T)\\
\rightarrow G(\lambda_k,T|_U)\subset G(\lambda_k,T)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
v\in G(\lambda_k,T), v=v_1+u.v_1\in G(\lambda_1,T), u\in U\\
\rightarrow u=v_2+\cdots+v_n; v_i\in G(\lambda_i,T)\wedge v_i\in G(\lambda_i,T|_U)\\
\rightarrow v=v_1+\cdots+v_n\\
\text{由于对应于不同特征值的广义本征向量线性无关}\\
\text{除了}i=j\text{之外所有的}v_i\text{都是}0.\text{特别的}v_1=0\\
v=u\in U\rightarrow v\in U\\
\rightarrow v\in G(\lambda_k,T|_U)
\end{gathered}
$$

□

复向量空间上的算子可能没有足够多的本征向量组成定义域的基。但复向量空间上的算子有足够多的广义本征向量组成基

2.2 本征值的重数

设V是复向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$.则算子分解成幂零算子的叠加

定义 2.3. *重数(multiplicity)*

$$
\begin{gathered}
T\in\mathcal{L}(V).T\text{的本征值}\lambda\text{的重数}:\dim G(\lambda,T)\\
T\text{的本征值的重数}:\dim\mathrm{null}(T-\lambda I)^{\dim V}
\end{gathered}
$$

例 2.4. $T\in\mathcal{L}(C^3), T(z_1,z_2,z_3)=(6z_1+3z_2+4z_3, 6z_2+2z_3, 7z_3)$

$$
\mathcal{M}(T,\boldsymbol{e})=\begin{pmatrix}6&3&4\\&6&2\\&&7\end{pmatrix}
$$

T的本征值是6,7.

$$G(6,T)=\mathrm{null}\,(T-6I)^3=\mathrm{null}\begin{pmatrix}0&3&4\\&0&2\\&&1\end{pmatrix}^3=\mathrm{null}\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}(z_1,z_2,z_3)=(10z_3,2z_3,z_3)=\mathbf{0}\rightarrow z_3=0.$$

$$G(6,T)=\mathrm{span}((z_1,0,0),(0,z_2,z_3))$$

$$G(7,T)=\mathrm{null}(T-6I)^3=\mathrm{null}\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{null}\begin{pmatrix}-1&9&-8\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&9&-8\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}(z_1,z_2,z_3)=(-z_1+9z_2-8z_3,-z_2+2z_3,0)$$

$$\begin{cases}-z_1+9z_2-8z_3=0\\-z_2+2z_3=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-z_1+9z_2-8z_3-4z_2+8z_3=0 & -z_1+5z_2=0\\-z_2+2z_3=0 & -z_2+2z3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-z_1+5z_2-5z_2+10z_3=0 & -z_1+10z_3=0\\ & -z_1+5z_2=0\end{cases}$$

$$\text{let: } z_1=10; \rightarrow z_2=2; z_3=1$$

$$\rightarrow G\,(7,T)=\mathrm{span}(-10,2,1)$$

$\rightarrow$本征值6的重数为2；本征值7的重数为1

$$\rightarrow C^3=G(6,T)\oplus G(7,T)=\mathrm{span}((1,0,0),(0,1,0),(10,2,1))$$

定理 2.5. *复向量空间的所有本征值重数之和等于空间的维数*

$$V\text{是复向量空间}.\,T\in\mathcal{L}(V).\,T\text{的所有本征值的重数之和等于}\dim V$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_n, T)\\
\rightarrow &\dim V = \dim G(\lambda_1, T) + \cdots + \dim G(\lambda_n, T)\\
= &\dim \operatorname{null}(T - \lambda_1 I)^n + \cdots + \dim \operatorname{null}(T - \lambda_n I)^n
\end{aligned}
$$

□

定义 2.6.

$$
\begin{array}{ll}
\text{代数重数} & \dim \operatorname{null}(T - \lambda_i I)^n = \dim G(\lambda_i, T)\\
\text{几何重数} & \dim \operatorname{null}(T - \lambda_i I) = \dim E(\lambda_i, T)
\end{array}
$$

2.3 分块对角矩阵

使用矩阵解释之前的结果

定义 2.7. *分块对角矩阵(block diagonal matrix)*

$$
\text{形如} \begin{pmatrix} A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}
$$
$$
\text{其中每个} A_i \text{是方阵}
$$

例 2.8. 分块对角阵

$$
A = \begin{pmatrix} (4) & & & & 0\\ & 2 & -3 & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & & 1 & 7\\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix} . A_1 = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} . A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3\\ & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7\\ & 1 \end{pmatrix}
$$

定理 2.9. *具有上三角块的分块对角矩阵*

$$
\rightarrow \begin{array}{c}
\text{设} V \text{是复向量空间，} T \in \mathcal{L}(V). \boldsymbol{\lambda} \text{是} T \text{的互不相同的本征值, 重数为} \boldsymbol{d}\\
V \text{有一个基使得} T \text{关于此基有分块对角矩阵}
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}
$$
$$
\text{其中每个} A_i \text{都是} d_i \times d_i \text{阶上三角矩阵}
$$

证明.

$$
(T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)} \text{都是幂零的}
$$
$$
\dim G(\lambda_i, T) = \dim \operatorname{null}(T - \lambda_i I)^{\dim V} \text{是} d_i \text{维的}
$$
$$
\text{取} G(\lambda_i, T) \text{的一个基，使得} (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)} \text{关于此基的矩阵} \begin{pmatrix} 0 & & *\\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
T|_{G(\lambda_i, T)} = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)} + \lambda_i I|_{G(\lambda_i, T)} \text{关于此基的矩阵} \begin{pmatrix} \lambda_j & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}
$$
$$
V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_n, T)
$$
$$
\rightarrow \text{所有的} G(\lambda_i, T) \text{的基构成了} V \text{的基}
$$
$$
\rightarrow \mathcal{M}(T, \boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}
$$

□

例 2.10. 上三角分块矩阵

$$T \in \mathcal{L}(C^3), T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_3, 6z_2 + 2z_3, 7z_3)$$

$$\mathcal{M}(T, \boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ & 6 & 2 \\ & & 7 \end{pmatrix}$$
$$T\text{的本征值是}6\text{，}7$$
$$G(6, T) = \operatorname{span}((1,0,0),(0,1,0))$$
$$G(7, T) = \operatorname{span}((10,2,1))$$
$$\mathcal{M}(T, ((1,0,0),(0,1,0),(10,2,1)))$$
$$\mathcal{M}(T)e^t = e$$
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = x \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = y \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = z \end{cases}$$
$$v = (1,0,0) \rightarrow \begin{cases} a_{1,1} = 1 \\ a_{2,1} = 0 \\ a_{3,1} = 0 \end{cases}$$
$$v = (0,1,0) \rightarrow \begin{cases} a_{1,2} = 0 \\ a_{2,2} = 1 \\ a_{3,2} = 0 \end{cases}$$
$$v = (10,2,1) \rightarrow \begin{cases} 10a_{1,1} + 2a_{2,1} + a_{3,1} = 10 \\ 10a_{1,2} + 2a_{2,2} + a_{3,2} = 2 \\ 10a_{1,3} + 2a_{2,3} + a_{3,3} = 1 \end{cases}$$
$$10a_{1,3} + 2a_{2,3} + a_{3,3} = 1$$
$$???\text{得研究研究}\mathcal{M}(T, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\text{怎么算}$$

2.4 平方根

每个算子$T \in \mathcal{L}(V)$的平方根是$R^2 = T$的算子$R \in \mathcal{L}(V)$.每个复数都有平方根，但复空间上的算子并不是都有平方根。例如$T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$.

定理 2.11. *恒等算子加幂零算子具有平方根*

$$N \in \mathcal{L}(V)\text{是幂零的，则}I + N\text{具有平方根}$$

证明.

$$\text{考虑泰勒级数}\sqrt{1+x}$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$
$$N\text{是幂零的}: \exists m \in N^+, N^m = \mathbf{0}_V$$
$$\rightarrow I + a_1N + a_2N^2 + \cdots + a_mN^{m-1}$$
$$\text{取}a_1, \ldots, a_m\text{使得算子的平方等于}I + N$$
$$(I + a_1N + a_2N^2 + \cdots + a_mN^{m-1})^2$$
$$= I + 2a_1N + (2a_2 + a_1^2)N^2 + (2a_3 + 2a_1a_2)N^3 + \cdots + (2a_{m-1} + p(a_1 \ldots a_{m-2}))N^{m-1}$$
$$\text{let}: a_1 = \frac{1}{2}; p(a_1, a_2) = 2a_2 + a_1^2 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{8}$$
$$p(a_1, \ldots, a_{m-1}) = 0 \rightarrow a_i\text{是可解的}$$
$$\rightarrow \exists a_1, \ldots, a_n\text{使得}I + N = I + a_1N + a_2N^2 + \cdots$$
$$\rightarrow I + N\text{具有平方根}$$
□

定理 2.12. *复空间上的可逆算子具有平方根*

证明.

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}\text{是}T\text{的互不相同的本征值}\\ \forall\lambda, N_i \in \mathcal{L}(G(\lambda_i, T)).T|_{G(\lambda_i,T)}=\lambda_i I + N_i\\ \text{因为}T\text{可逆}\rightarrow\lambda_i\text{都不等于}0\\ T|_{G(\lambda_i,T)}=\lambda_i\Big(I+\frac{N_i}{\lambda_i}\Big).\\ \frac{N_i}{\lambda_i}\text{是幂零的}\rightarrow I+\frac{N_i}{\lambda_i}\text{具有平方根}\\ T|_{G(\lambda_i m)}\text{的平方根}R_i=\sqrt{\lambda_i}\cdot\sqrt{I+\frac{N_i}{\lambda_i}}\\ v=u_1+\cdots+u_n\\ R\in\mathcal{L}(V).Rv=R_1u_1+\cdots+R_nu_n\\ \rightarrow R^2=T\end{gathered}$$

□

8.B

3 特征多项式和极小多项式

3.1 哈密瓜-凯南定理

如果选$F=C.V$上的每个算子都和多项式联系在一起

定义 3.1. *特征多项式(characteristic polynomial)*

$$\begin{gathered}V\text{是复向量空间}.T\in\mathcal{L}(V).\boldsymbol{\lambda}\text{是}T\text{的所有互不相同的本征值}\\ \boldsymbol{d}\text{是各个本征值对应的重数}\\ (z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_n)^{d_n}\text{称为}T\text{的特征多项式}\end{gathered}$$

例 3.2. $T\in\mathcal{L}(C^3), T(z_1,z_2,z_3)=(6z_1+3z_2+4z_3, 6z_2+2z_3, 7z_3)$. T的特征多项式$(z-6)^2(z-7)$

定理 3.3. *特征多项式的次数和零点*

$$\begin{array}{cc} & V\text{是复向量空间，}T\in\mathcal{L}(V)\\ 1 & \deg p(T)=\dim V\\ 2 & p(T)=0, p(T)\text{的零点恰好是}T\text{的本征值}\end{array}$$

证明.

$\deg p(T)=(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_n)^{d_n}=d_1+\cdots+d_n=\dim V$
根据特征多项式的定义和复空间的代数基本定理$p(\lambda_i)=0$ □

定理 3.4. *凯莱-哈密顿定理*

$$V\text{是复向量空间，}T\in\mathcal{L}(V).\,q\text{是}T\text{的特征多项式}\rightarrow q(T)=\mathbf{0}_V$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}\text{是}T\text{的所有不同的本征值，}\boldsymbol{d}\text{是对应本征值的重数}\\
&(T-\lambda_i I)|_{G(\lambda_i,T)}\text{是幂零的}\rightarrow(T-\lambda_i I)^{d_i}|_{G(\lambda_i,T)}=\mathbf{0}_{G(\lambda_i,T)}\\
&\forall v\in V, v=u_1+\cdots+v_n; v_i\in G(\lambda_i,T)\\
&q(T)=0\Leftrightarrow\forall i, q(T)|_{G(\lambda_i,T)}=\mathbf{0}\\
&q(T)=(T-\lambda_1 I)^{d_1}\cdots(T-\lambda_n I)^{d_n}\\
&\text{右边的算子是可交换的}\qquad ???\\
&\rightarrow q(T)=(T-\lambda_1 I)^{d_1}\ldots(T-\lambda_n I)^{d_n}(T-\lambda_i I)^{d_i}u_i=0\\
&\rightarrow q(T)v=q(T)(u_1+\cdots+u_n)\\
&=q(T)u_1+\cdots+q(T)u_n=0
\end{aligned}
$$

□

3.2 绩效多项式

定义 3.5. *首一多项式(monic polynomial)*

$$\text{首一多项式指最高次数的系数为1的多项式}$$

定理 3.6. *极小多项式*

$$T\in\mathcal{L}(V).\exists\text{唯一一个次数最小的首一多项式}p, p(T)=0$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\text{存在性}\qquad &n=\dim V.\dim\mathcal{L}(V)=(\dim v)^2\\
&\rightarrow I,T,T^2,T^3,\cdots,T^{n^2}\text{必然线性相关}\\
&\text{设}m\text{是使得组}I,T,T^2,\ldots,T^m\text{是线性相关的最小整数}\\
&\rightarrow\exists a_i\neq 0, a_0 I+a_1 T+a_2T^2+\cdots+a_{m-1}T^{m-1}+T^m=0\\
&\text{定义多项式}p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{m-1}z^{m-1}+z^m\\
&\rightarrow p(T)=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
\text{唯一性}\quad &m\text{的选取使得没有次数小于}m\text{的首一多项式}q\in\mathcal{P}(F)\text{使得}q(T)=0\\
&q\in\mathcal{P}(F)\text{是次数为}m\text{的首一多项式}.q(T)=0\\
&\rightarrow(q-p)(T)=0\wedge\deg q-p<m\text{矛盾}\\
&\rightarrow q=p
\end{aligned}
$$

定义 3.7. *极小多项式(minimal polynomial)*

$$T\in\mathcal{L}(V).T\text{的极小多项式是唯一一个使得}p(T)=0\text{的次数最小的首一多项式}$$

Remark: 上述命题表明，V上的每个算子的极小多项式的次数最多为$(\dim V)^2$.

凯莱-哈密顿定理表示复空间V上的极小多项式的次数最多为dim V.

(实际上实空间上也是成立的)

已知某个算子$T\in\mathcal{L}(V)$关于某个基的矩阵，可以求T的极小多项式

$$a_0\mathcal{M}(I)+a_1\mathcal{M}(T)+\cdots+a_{m-1}\mathcal{M}(T)^{m-1}=-\mathcal{M}(T)^m$$

对m进行递增计算，直到有一个解$a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$.这就是T的极小多项式的系数

例 3.8. $T \in \mathcal{L}(C^5), \mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求T的极小多项式

$$\mathcal{M}(T)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathcal{M}(T)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}(T)^4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \mathcal{M}(T)^5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

此时$a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 = -T^5$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_0 = 3; a_1 = -6, a_2 = 0, a_3 = 1$$

$$\rightarrow T\text{的极小多项式} = a_4 z^3 + a_3 z^2 + a_1 z + a_0 1 = z^2 - 6z + 3$$

定理 3.9. *算子的多项式等于0算子当且仅当算子是极小多项式的多项式倍*

$$T \in \mathcal{L}(V), q \in \mathcal{P}(F).\ q(T) = 0 \Leftrightarrow q(T)\text{是}T\text{的极小多项式的多项式倍}$$

证明.

设p是极小多项式.

1 q是极小多项式的多项式倍 $\rightarrow q(T) = \mathbf{0}$

设q是p的多项式倍, $\exists s \in \mathcal{P}(F), q = ps$.

$$q(T) = p(T)\, s(T) = \mathbf{0}(s(T)) = \mathbf{0}$$

□

2 $q(T) = \mathbf{0} \rightarrow q = ps$

设$q(T) = 0 \rightarrow q = ps + r$

$$0 = q(T) = p(T)s(T) + r(T) = \mathbf{0}S(T) + r(T) = r(T)$$

$$\rightarrow q = ps$$

推论 3.10. *特征多项式是极小多项式的多项式倍*

定理 3.11. *本征值是极小多项式的零点*

$$T \in \mathcal{L}(V).T\text{的极小多项式的零点是}T\text{的本征值}$$

证明.

$$\begin{aligned}
p(z) = a_0 1 + a_1 z + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m &\text{是}T\text{的极小多项式} \\
\text{设}\lambda \in F\text{是}p\text{的一个零点}p(z) = (z-\lambda)q(z) \\
p(T) = \mathbf{0} \to \forall v \in V, \mathbf{0} = (T - \lambda I)(q(T)v) \\
\deg q < \deg p \to \exists v \in V \to q(T)v \neq 0 \\
\to (T - \lambda I)(q(T)\,v) = 0 \\
\to \lambda\text{是本征值}
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
\text{设}\lambda\text{是}T\text{的本征值} \to v \in V \wedge v \neq 0 \to Tv = \lambda v \\
\to \forall i \in N^+, T^i v = \lambda^i v \\
0 = p(T)v = (a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_{m-1} T^{m-1} + T^m)v \\
= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \lambda^m)v \\
= p(\lambda)v \\
v \neq 0 \to p(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

例 3.12. 解释此结果计算极小多项式，解释部分算子的本征值为何不能精确计算

$$T \in \mathcal{L}(C^3)$$
$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ & 6 & 2 \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T\text{的本征值是6和7} \to T\text{的极小多项式是}(z-6)(z-7)\text{的多项式倍} \\
T\text{的特征多项式是}(z-6)^2(z-7) \\
(T - 6I)(T - 7I) \neq 0 \\
\to T\text{的极小多项式是}(z-6)^2(z-7)
\end{aligned}$$

例 3.13. $T \in \mathcal{L}(C^3), T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1, 6z_2, 7z_3)$.求T的极小多项式

$$\begin{aligned}
T\text{的本征值是6、7} \\
\text{特征多项式是}(z-6)^2(z-7) \\
T\text{的极小多项式是}(z-6)(z-7)\text{的多项式倍} \\
(T - 6I)(T - 7I) = \mathbf{0} \\
\text{因此}, T\text{的极小多项式是}(z-6)(z-7)
\end{aligned}$$

例 3.14. $T \in \mathcal{L}(C^5)$.

$$\mathcal{M}(T, \boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

T的本征值是方程$z^5-6z+3=0$的根
但此方程的根不能用有理数、有理数的有理根和算数运算表示

8.C

4 若尔当形

如果V是复向量空间， 那么V中必有一个基使得T有上三角矩阵（舒尔定理）。

本节可以证明更强的结论： V中必有一个基使得T关于这个基的矩阵除了对角线和紧邻对角线上的元素之外全为0。

例 4.1. $N\in\mathcal{L}(C^4), N(z_1,z_2,z_3,z_4)=(0,z_1,z_2,z_3)$是幂零算子。

$$v=(1,0,0,0), N^3v, N^2v, Nv, v\text{是}F^4\text{的基}$$
$$\mathcal{M}(T,\boldsymbol{e})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 4.2. $N\in\mathcal{L}(F^6). N(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=(0,z_1,z_2,0,z_4,0)$

$$N\text{是幂零算子。这个幂零算子没有任何向量}v\in F^6$$
$$N^5v, N^4v, N^3v, N^2v, Nv, v\text{是}F^6\text{的基}$$
$$\text{但}v_1=(1,0,0,0,0,0), v_2=(0,0,0,1,0,0), v_3=(0,0,0,0,0,1)$$
$$N^2v_1, Nv_1, v_1, Nv_2, v_2, v_3\text{是}F^6\text{的基}$$
$$\mathcal{M}(N,\boldsymbol{e})=\begin{pmatrix}0&1&0&&&\\0&0&1&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&1&\\&&&0&0&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

此矩阵可以看作一个分块对角矩阵。每次都在对角线和对角线以上

幂零算子都具有上述性质。存在有限个向量$v_1,v_2,\dots,v_n\in V$.使得V有一个形如N^kv_i的向量组成的基，其中j从1到n，k从0到$N^{m_i}v_i\neq0$的最大非负整数m_i

定理 4.3. *对应于幂零算子的基*

$$N\in\mathcal{L}(V)\text{是幂零的}.\exists\boldsymbol{v}\in V\text{和非负整数}\boldsymbol{m}\text{使得}$$
$$1\quad N^{m_1}v_1,\dots,Nv_1,v_1,\dots,N^{m_n}v_n,\dots,Nv_n,v_n\text{是}V\text{的基}$$
$$2\quad N^{m_1+1}v_1=\cdots=N^{m_n+1}v_n=0$$

证明.

$$\text{对}\dim V\text{使用归纳法}$$
$$\dim V=1\text{时，}Nv=0\rightarrow N=\mathbf{0}$$
$$\text{假设对}\dim V=n>1\text{所有维数更小的向量空间都成立}$$
$$N\text{是幂零的}\rightarrow N\text{不是单的}\rightarrow N\text{不是满的}$$
$$\rightarrow \operatorname{range} N\subseteq V$$
$$N|_{\operatorname{range} N}\in\mathcal{L}(\operatorname{range} N)\text{使用归纳法假设}$$
$$\rightarrow N|_{\operatorname{range} N}\text{克制，存在向量}v_1,\ldots,v_n\in\operatorname{range} N\text{和非负整数}\boldsymbol{m}$$
$$N^{m_1}v_1,\ldots,Nv_1,v_1,\ldots,N^{m_n}v_n,\ldots,Nv_n,v_n\text{是}\operatorname{range} N\text{的基}$$
$$N^{m_1+1}v_1=\cdots=N^{m_n+1}v_n=0$$
$$v_i\in\operatorname{range} N\rightarrow\forall i,\exists u_i\in V,v_i=Nu_i$$
$$\rightarrow N^{m_1+1}u_1,\ldots,Nu_1,u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n,\ldots,Nu_n,u_n\text{是}V\text{中的线性无关组}$$
$$0=a_1N^{m_1+1}u_1+\cdots+a_nu_n$$
$$N0=a_1N^{m_1+2}u_1+\cdots+a_nNu_n$$
$$\rightarrow N^{m_1+1}u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n\text{的系数可能不为0，其它系数都为0}$$
$$N^{m_1+1}u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n=N^{m_1}v_1,\ldots,N^{m_n}v_n$$
$$N^{m_1}v_1,\ldots,N^{m_n}v_n\text{线性无关}\rightarrow N^{m_1+1}u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n\text{线性无关}$$
$$\rightarrow\text{这些向量前面的系数也为0}$$
$$\rightarrow N^{m_1+1}u_1,\ldots,Nu_1,u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n,\ldots,Nu_n,u_n\text{线性无关}$$
$$\rightarrow N^{m_1+1}u_1,\ldots,Nu_1,u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n,\ldots,Nu_n,u_n,w_1,\ldots,w_p\text{是}V\text{基}$$
$$\forall i,Nw_i\in\operatorname{range} N\rightarrow Nw_i\in\operatorname{span}(Nv_1,Nv_2,\ldots,Nv_n)$$
$$\rightarrow\exists Nw_i=Nx_i$$
$$u_{n+j}=w_j-x_j$$
$$\rightarrow Nu_{n+j}=0$$
$$V=\operatorname{span}(N^{m_1+1}u_1,\ldots,Nu_1,u_1,\ldots,N^{m_n+1}u_n,\ldots,Nu_n,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{n+p})$$
$$\rightarrow V=\operatorname{span}(N^{m_1+1}u_1,\ldots,u_n)$$

□

定义 4.4. *若尔当基(Jordan basis)*

$$T\in\mathcal{L}(V).V\text{的基}\boldsymbol{e}\text{称为若尔当基}$$
$$\Leftrightarrow\qquad\mathcal{M}(T,\boldsymbol{e})=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\end{pmatrix}$$
$$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}$$

定理 4.5. *复空间上的每个算子都有若尔当基*

证明.

考虑V上的幂零算子

$N^{m_1}v_1, \ldots, Nv_n, v_n$是$V$的基

$$\mathcal{M}(T, N^{m_1}v_1, \ldots, Nv_n, v_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

设$T \in \mathcal{L}(V)$. $\boldsymbol{\lambda}$是T的不同本征值

$V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_n, T)$

$G(\lambda_i, T) = (T - \lambda_i I)$都是幂零的

$$\rightarrow \mathcal{M}(G(\lambda_i, T), \boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

□

8.D