Chapter 7

1 Theorems

1. 确界原理: 非空实数集。有上界必有上确界；有下界必有下确界

2. 单调有界原理：单调递增有界实数列。必有极限

3. 致密性定理：有界数列必有收敛子列

4. 柯西收敛准则：数列收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N.m, n > N \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

5. 区间套定理：区间套的极限是一个实数

$$\text{闭区间序列}[a_n, b_n] \begin{array}{c} [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \end{array} \text{称为闭区间套}$$
$$\text{实数中有且仅有一点是区间套所有元素的公共点}.\xi = \lim x_n = \lim y_n$$

6. 聚点定理

def	聚点	$S \subset R. \xi \in R$(不一定属于S).$\forall U_\xi \cap S$是无限集，称ξ为S的聚点
	聚点	$S \subset R. \forall U_\xi^0 \cap S \neq \varnothing$,称$\xi$为$S$的聚点
	聚点	$S \subset R. \exists x_n \subset S, x_n$各项相异。极限$\lim x_n = \xi$是$S$的聚点
定理	聚点	实数的有界无限集至少有一个聚点

7. 有限覆盖定理(实数的紧子集结构)

def	开覆盖	开集族H,若$S \subset \bigcup\limits_{A \in H} A$，称$H$为$S$的一个开覆盖
定理	有限覆盖	有界闭区间的任意开覆盖必有有限子覆盖

2 Proof

有限覆盖定理是其它定理的逆否形式，证出有限覆盖定理和从有限覆盖定理证其它使用反证法

2.1 从确界证其它

$$\text{确界原理} \to \text{单调有界}$$
$$A = \{a_n\}\text{是有界数集} \to a_n\text{有上确界}\xi$$
$$\text{设}a_n\text{单调增}.\forall a_n, \exists a_{n+1} \in A \wedge a_{n+1} > a_n$$
$$\text{由于}\xi\text{是上确界} \to \forall \varepsilon > 0, \xi - \varepsilon\text{不是}A\text{的上界}$$
$$\to \exists a_n, \xi - \varepsilon < a_n < \xi$$
$$\to |a_n - \xi| < \varepsilon$$
$$\to \xi\text{是}a_n\text{的极限}$$

$$\text{确界原理} \to \text{致密性定理}$$
$$\text{数列}a_n.\text{构成集合}\{a_n\}$$
$$\{a_n\}\text{有界} \to \{a_n\}\text{有上下确界}m_1, M_1$$
$$\text{构造新数集}S_1 = \left\{a_i \colon a_i \geqslant \frac{m_1 + M_1}{2}\right\}, L_1 = \left\{a_i \colon a_i < \frac{m_1 + M_1}{2}\right\}$$
$$S_1\text{和}L_1\text{至少又一个无限集}$$
$$\text{而}\forall x \in S_1, \left|x - \frac{m_1 + M_1}{2}\right| < \frac{M_1 - m_1}{2}$$
$$\text{继续构造得集合序列到}S_i\text{和}L_i$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n, \frac{M_1 - m_1}{2^n} < \varepsilon$$
$$\text{而集合}F\text{中的任何元素都能满足这一点，并且是无限集}$$
$$\text{构成数列}x_n\text{是收敛数列}$$

$$\text{确界原理} \to \text{柯西收敛准则}$$
$$\text{收敛数列}a_n\text{构成集合}\{a_n\}$$
$$\text{数列收敛，则在别的区间上都是有限集}$$
$$\text{使用二分法并选取无限集即可}$$

$$\text{确界原理} \to \text{单调有界} \to \text{区间套定理}$$
$$\{a_n\}\text{和}\{b_n\}\text{构成了两个数集且}a_n\text{有上界}b_1; b_n\text{有下界}a_1$$
$$\to \{a_n\}\text{有上确界}; \{b_n\}\text{有下确界}$$
$$\forall a_n < a; \forall b_n < b$$
$$\text{由于}\lim a_n - b_n = 0 \to a = b = \xi$$
$$\text{因此每个区间都有数}\xi$$
$$\text{设}\xi' \neq \xi \wedge \xi' \in [a_n, b_n]$$
$$\xi' - \xi = \delta. \frac{a - b}{2^n} < \frac{\delta}{2}$$
$$\to |a_n - \xi| < \frac{\delta}{2}; |b_n - \xi| < \frac{\sigma}{2}$$
$$\to \xi' \notin [a_n, b_n]\text{矛盾}$$

$$\text{确界原理} \to \text{聚点定理}$$
$$\text{二分法得到一个无限的，直径任意小的数集，此即为内部任意点的聚点}$$

$$\text{确界原理} \to \text{有限覆盖}$$
$$\text{反证法：设有界闭区间不能被有限开覆盖}$$
$$\text{则闭区间}\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right]\text{和}\left[\frac{a_i + b_i}{2}, b_i\right]\text{至少一个不能被开覆盖}$$
$$\text{但闭区间长度可以任意小，任意开区间}(p, q).\text{必有闭子区间}[a_i, b_i] \subset (p, q)$$
$$\text{根据区间套定理} \to \xi \in [a_i, b_i]\text{而单点必能被开区间覆盖; 且无限个闭子区间也被覆盖}$$
$$\text{矛盾}$$

2.2 从单调有界证其它

确界原理

设数集A有界，取一个上界m_1和一个内部的数x_1

$$[m_1, x_1] \to \left[x_1, \frac{x_1+m_1}{2}\right] \cup \left[\frac{x_1+m_1}{2}, m_1\right]$$

若$\frac{x_1+m_1}{2}$是A的上界，则取$x_2 = x_1; m_2 = \frac{x_1+m_1}{2}$

继续使用此构造法，由于实数的稠密性，可以构造成数列$x_n; y_n$

x_n单调增且有上界m_1; y_n单调减且有下界x_1

$\to x_n$有极限ξ; y_n有极限ξ

$\forall x \in A, x < \xi \to \xi$是$A$的上界

$\forall \xi' < \xi$, 存在区间$[x_i, m_i]$使得$\xi' \in [x_i, m_i]$

由于$x_i \in A \to x_i < \xi' \to \xi'$不是$A$的上界

$\to \xi$是A的上确界

致密性定理(此证法需要选择公理)

设$\{a_n\}$是有界数列，有上界 → 可以选出单调减数列$\{a_{n_i}\} \searrow$

a_{n_i}单调有界 → a_{n_i}有极限

柯西准则

单调有界序列a_n

证柯西 $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon$

证有界 设a_n单调且$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$a_n - a_m < \varepsilon \to a_n < a_m + \varepsilon$

$\to a_n < a_1 + a_m - a_1 + \varepsilon$后面都有界；因此有界

区间套

端点是两个单调序列

聚点定理

二分集合，构造两个单调序列

有限覆盖定理

反证：设不能有限覆盖，二分有界闭区间必有单调增和单调减序列

二者收敛同一个极限 → 有开区间能覆盖此无限此分割

3 上极限和下极限

上极限是数列的最大聚点；下极限是数列的最小聚点

上下极限具有一般极限的性质(因为在上下极限领域内有无穷个点)

数列有极限 ⇔ 上极限 = 下极限(只有一个聚点)