Chapter 15

BY 傅里叶级数

以三角函数列所构成的函数项级数

1 Def & Theo

$$y = A\sin(\omega x + \varphi).$$

A：振幅；φ：初相角；ω：角频率；$T = \frac{2\pi}{\omega}$：周期

复杂简谐振动是多个简单震动的叠加。得到三角级数

$$A = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$$

1.1 三角级数

1. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

   $f_{\text{odd}} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} =$ 傅立叶正弦项; $f_{\text{even}} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} =$ 傅立叶余弦项;

2. 收敛定理：若数项级数$\frac{|a_0|}{2} + \sum(|a_n| + |b_n|)$收敛，则定义出来的三角级数在R上一致且绝对收敛

3. 三角级数系数的计算：

   由于$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0$

   $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \mathrm{d}x = 0$

   $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

   $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$ 构成了函数空间上的一组正交基(不规范)

   可以考虑函数空间上的内积$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g$

   $a_n = \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\|\varphi_i\|^2}; b_n = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\|\phi_i\|^2}; \|\varphi_i\| = \|\phi_i\| = \sqrt{\pi}$

$$\text{先假设了} f \rightrightarrows S$$

$$\text{这不总是成立，连续函数的傅立叶级数可能在若干点发散(雷蒙)}$$

$$\text{连续函数的傅立叶级数可能收敛但不一致收敛(勒贝格)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} S(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi a_0 + \sum a_n \int \cos nx \mathrm{d}x + \sum b_n \int \sin nx \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) \cdot \cos(kx)\mathrm{d}x = \int S(x) \cos(kx)$$

$$= a_0 \int \cos nx \mathrm{d}x + \sum a_n \int \cos nx \cdot \cos kx \mathrm{d}x + \sum b_n \int \sin nx \cdot \cos kx \mathrm{d}x$$

$$= 0 + a_k \cdot \pi + 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(x) \mathrm{d}x, n \in N^+$$

$$\text{同理：} b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) \mathrm{d}x, n \in N^+$$

4. 收敛定理：若函数的傅立叶展开式收敛，则收敛到每个点的左右极限的平均值

$$\text{若}2\pi\text{为周期的函数}f\text{在}[-\pi,\pi]\text{上逐段光滑(导数连续)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

推论：若函数f连续 周期为2π 在$[-\pi,\pi]$上逐段光滑，则函数的傅立叶展开式在R上收敛于f

1.2 一般周期函数的傅立叶展开式

1. 以$2l$为周期的函数，通过变量代换$\frac{\pi x}{l}=t$可以化为标准周期函数

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad n\in N^+$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad n\in N^+$$

2. 有界区间上的可傅立叶展开的函数必可仅表示为正弦级数和余弦级数

$$f\text{在}[0,a]\text{上}\ \ \begin{array}{ll}\text{偶周期延拓} & f(-x)=f(x)\\ \text{奇周期延拓} & f(-x)=-f(x)\end{array}$$

此时为$[-a,a]$上的奇函数或偶函数，因此傅立叶展开式仅有正弦项或余弦项；

1.3 收敛定理的证明

1. 贝塞尔不等式：

$$f\text{在}[-\pi,\pi]\text{可积且有傅立叶展开式}$$
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int f^2(x)\mathrm{d}x$$

Pr

$$\text{考虑}S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-2\int_{-\pi}^{\pi}fS+\int S^2$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}(S_m(x))^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)$$
$$\Rightarrow 0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f-S]=\int f^2\mathrm{d}x-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)$$
$$\to\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x$$
$$\text{而}f\text{可积}\to f\text{平方可积}\to\text{平方积分有极限}\to\text{部分和序列有界}\to\text{收敛}$$

推论：黎曼-勒贝格定理：

$$f\text{可积}\to\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

2. 傅立叶级数的部分和函数:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

3. 傅立叶级数收敛于左右极限的平均数的证法

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-S_n(x)\right]\\ =\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right]\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x=1\\ \lim_{t\to0^+}-\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}=-f'(x+0)\cdot1=-f'(x+0)\\ \to\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0\\ \text{同理可证}f(x-0)\text{也成立}\\ \to\text{因此定理本身成立}\end{gathered}$$

2 Fomula

1. 帕塞瓦尔(Parsaval)等式:

$$\begin{aligned}&\text{若}f\text{为}[-\pi,\pi]\text{上的可积函数，若}f\text{的傅立叶展开式}S\rightrightarrows f,x\in[-\pi,\pi]\\ \Rightarrow\quad&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\end{aligned}$$

2. 内积公式:

$$\begin{aligned}&f,g\text{在}[-\pi,\pi]\text{上可积，傅立叶展开式均一致收敛到自身}\\ \Rightarrow\quad&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fg=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\end{aligned}$$