

代数学方法-基础架构

李文威

2022 年 10 月 11 日

第一章 范畴论基础

1.1 范畴与态射

概括地说，范畴是由对象及其间的态射组成的数学结构，从对象 X 到对象 Y 的态射 f 习惯以箭头来描述

$$X \xrightarrow{f} Y$$

函子视作范畴间保持箭头结构的某种“映射”，函子之间的关系由自然变换描述。

数学中考虑的范畴经常以一类特定的结构为对象，例如群，环，向量空间，偏序集，拓扑空间等，范畴中的态射经常是保结构的映射，如群同态，连续映射等。函子与自然变换在这种种结构之间搭起桥梁。范畴论的本意不止于研究它们各自的性质。

范畴视角的特色正在于重视关联甚于数学对象本身，并以同构代替严格等式。

实际上，范畴里的对象未必是建立在集合上的结构，而态射也未必是映射。

	拓扑学 (配边理论)	量子物理	数理逻辑 (形式演绎系统)	计算机科学 (带类型的 λ 演算)
对象	流形	物理系统	命题	资料形态
态射	配边关系	过程	证明	程序

自然学科终归需要实践来检验。

实用中往往会考虑带有特殊结构的范畴。么半范畴是最常见的结构之一，其中具有类似于乘法的操作。

集合的大小对范畴的性质有实在的影响。

定义 1.1.1 (范畴 \mathcal{C}). 指:

1. 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$, 其元素称作 \mathcal{C} 的 对象
2. 集合 $\text{Mor}(\mathcal{C})$, 其元素称作 \mathcal{C} 的 态射, 配上一对映射

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) \xrightleftharpoons[t]{s} \text{Ob}(\mathcal{C})$$

其中 s, t 分别给出态射的来源和目标。对于 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 习惯记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$ 或简记为 $\text{Hom}(X, Y)$, 称为 Hom -集, 其元素称为从 X 到 Y 上的态射。

(从 X 出发的态射和到达 Y 的态射的交集)

3. 任意对象 X 给定元素 $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 称为 X 到自身的恒等态射。
4. $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 给定态射间的 合成映射

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

不致混淆时常将 $f \circ g$ 简记为 fg , 它满足

- (a) 结合律: \forall 态射 $h, g, f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, 若合成 $f(gh)$ 和 $(fg)h$ 都有定义, 则

$$f(gh) = (fg)h$$

- (b) \forall 态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 有

$$f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$$

注意 1. .

- 注意到 id_X 被其性质唯一确定。对象与态射集皆空的范畴称为空范畴, 记为 $\mathbf{0}$.
- 一般也将 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 写作 $f : X \rightarrow Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$, 故态射有时又叫作箭头。态射的合成对应于箭头的头尾衔接。图表加箭头是讨论

范畴的方便语言。其中最常用的是交换图表的概念,“交换”意指箭头的合成殊途同归,例如:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & Z & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow x & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{y} & D \end{array}$$

的交换性分别等价于 $gf = h$ 和 $vu = yx$ 。态射的名称 f, g 等自明或者不重要, 则常可以从图表中省略。

- 对于态射 $f: X \rightarrow Y, \exists g: Y \rightarrow X \Rightarrow fg = \text{id}_Y \wedge gf = \text{id}_X$, 则称 f 是同构 (或称可逆, 写作 $f: X \xrightarrow{\sim} Y$), g 称为 f 的逆, 从恒等态射的性质易见逆若存在则唯一。从 X 到 Y 的同构集记为 $\text{Isom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
- 记 $\text{End}_{\mathcal{C}} := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X), \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \text{Isom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 分别称作 X 的自同态集和自同构集。这些集合在二元运算 \circ 下封闭: 用代数的语言来说, $\text{End}(X)$ 是么半群, $\text{Aut}(X)$ 是群。

定义 1.1.2 (子范畴). 称 \mathcal{C}' 是 \mathcal{C} 的子范畴, 如果满足四条件:

1. $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$
2. $\text{Mor}(\mathcal{C}') \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$, 并保持恒等态射
3. 来源/目标映射 $\text{Mor}(\mathcal{C}') \xrightarrow[s]{t} \text{Ob}(\mathcal{C}')$ 是由 \mathcal{C} 限制而来的
4. \mathcal{C}' 中态射的合成也是由 \mathcal{C} 限制而来的

简而言之, 任意 \mathcal{C} 中的对象 X, Y , 有包含关系 $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 它与态射的合成兼容。如果 $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 则称 \mathcal{C}' 是全子范畴。

定义 1.1.3 (\mathcal{U} -范畴, \mathcal{U} -小范畴). .

范畴 \mathcal{C} 对于 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 都是 \mathcal{U} -小集 (局部 \mathcal{U} -小范畴)。

如果态射集 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 也是 \mathcal{U} -小集, 则称为 \mathcal{U} -小范畴

注意 2. .

范畴 \mathcal{C} 是 \mathcal{U} -小范畴当且仅当它是 \mathcal{U} -范畴且 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 是 \mathcal{U} -小集。因为 $X \mapsto id_X$ 将 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 嵌入 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 。

将群、环、空间等其它结构称为 \mathcal{U} -群 (环、空间)，如果它们作为集合是一个 \mathcal{U} -集合。不致混淆时，也简称作小集，小群等等。

约定 1 (). 选定宇宙后，若不另外说明，将略去符号 \mathcal{U} 将集合、群等理解为 \mathcal{U} -集 (群) 等。所论的范畴如不另外说明都是 \mathcal{U} -范畴。

例 1.1.1 (几个基本的范畴的例子). .

1. 预序集等同于任意两个对象之间至多有一个态射的范畴：对于预序集 (P, \leq) ，定义范畴使得其对象集为 P ，而存在态射 $p \rightarrow p' \Leftrightarrow p \leq p'$ ，此时这样的态射唯一。特别地，根据对有限序数的递归定义，任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 视为序数等同于全序集 $\{0, \dots, n-1\}$ ，而 $0 = \emptyset$ 。相应的范畴记为 \mathbf{n} ，其结构可以形象地表为

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow (n-1) \text{ (略去恒等态射)}$$

特别地， 0 给出空范畴 $\mathbf{0}$ ， 1 给出恰有一个对象和一个态射的范畴 $\mathbf{1}$ 。

2. 令 \mathbf{Set} 为所有集合构成的范畴，对象 X, Y 之间的态射定义为映射 $X \rightarrow Y$ 。态射的合成就是映射的合成，恒等态射就是映射的合成，恒等态射就是恒等映射。这是 \mathcal{U} -范畴。
3. 带基点的集合范畴 \mathbf{Set}_\bullet 。对象是所有 (X, x) ，其中 X 是集合 $x \in X$ (基点)，从 $(X, x) \rightarrow (Y, y)$ 的态射是满足 $f(x) = y$ 的映射 $f: X \rightarrow Y$ 。
4. 令 \mathbf{Grp} 是所有群构成的范畴，对象之间的态射定义为群同态，态射的合成与恒等态射定义与 \mathbf{Set} 相同。

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

5. 令 \mathbf{Ab} 为所有交换群 (Abel 群，二元运算用加法 $+$) 构成的范畴，态射与 \mathbf{Grp} 的情形相同。它是 \mathbf{Grp} 的全子范畴。注意到交换群的同态可以相加 (复合)，因此对于任意两个交换群 X, Y ，同态集 $\text{Hom}(X, Y)$ 不仅是一个集合，它还具有交换群的结构 $(G, +)$ ，这使得合成映射 $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ 满足双线性：

$$(f + g)h = fh + gh, \quad h(f + g) = hf + hg$$

这是 **Ab**-范畴的一个特殊情形。

$$(f + g)(xy) = f(g(x)g(y)) = f(g(x))f(g(y)) = (f + g)(x) \cdot (f + g)(y)$$

6. 令 **Top** 为所有拓扑空间构成的范畴，空间皆假定为 Hausdorff 的，态射定义为连续映射，合成与恒等态射的定义同上；类似的定义带基点的拓扑空间 **Top_{*}**。我们也希望赋予同态集 $\text{Hom}(X, Y)$ 额外的结构，例如紧开拓扑，使得 $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ 成为连续映射；更希望能有自然的同构

$$\text{Hom}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z))$$

相关的点集拓扑问题颇为棘手，为了在确保良好的范畴性质的同时容许充分广的拓扑空间，在同伦论里一般选用 **Top** 的一个子范畴 **CGHaus**，称为紧生成 Hausdorff 空间范畴

7. 选定一个域 \mathbb{k} ，令 **Vect**(\mathbb{k}) 为 \mathbb{k} 上的所有向量空间构成的范畴，态射为线性映射。类此定义有限维向量空间范畴 **Vect_f**(\mathbb{k})，它是 **Vect**(\mathbb{k}) 的全子范畴
8. 给定集合 S ，定义相应的离散范畴 **Disc**(S)：其对象集为 S 而态射仅有恒等态射 $\{\text{id}_x : x \in S\}$

注意 3. 如果不用约定 1 而直接考虑所有集合，所有群等等构成的范畴，则会面临悖论，因为所有集合的全体并不构成集合。常见的一种做法是区分类和集，并要求对象全体成一个类 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ ，而任一个态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是集合。用 ZFC 来考虑较为迂回，而 NBG 集合论则特别适应与这个编发。将真类引入范畴论公理会造成不少麻烦，之后要讨论的函子范畴是一个例子。因此我们宁可引入宇宙的概念，并假设所考察的数学对象都是 \mathcal{U} -小的。

单射和满射的概念有自然的范畴论推广

定义 1.1.4 (单态射，满态射). X, Y 为范畴 \mathcal{C} 中的对象， $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

1. 单态射任何对象 Z 和任一对态射 $g, h : Z \rightarrow X$ 有 $fg = fh \Leftrightarrow g = h$ 左消去律；
2. 满态射任何对象 Z 和任一对态射 $g, h : Y \rightarrow Z$ 有 $gf = hf \Leftrightarrow g = h$ 右消去律；

如存在 g 使得 $gf = id_X$, 则称 f 左可逆而 g 是它的一个左逆; 类似的可以定义右逆。左可逆蕴含单, 右可逆蕴含满。态射可逆当且仅当它左右皆可逆。

例 1.1.2 (常用范畴中的单性与满性). .

在范畴 $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Vect}(\mathbb{k})$ 中, 态射的单性与满性分别等价于集合论意义下的单射和满射, 而且既单又满的态射恰好是同构。对其它范畴则略有区别。在 \mathbf{Top} 中, 态射 $f: X \rightarrow Y$ 有稠密的像便是满态射。而在复拓扑向量空间范畴 $\mathbf{TopVect}(\mathbb{C})$ 中, 存在许多连续线性映射 $f: V \rightarrow W$, 使得 f 是双射而非开映射, 这样的态射既单且满, 却不是同构。

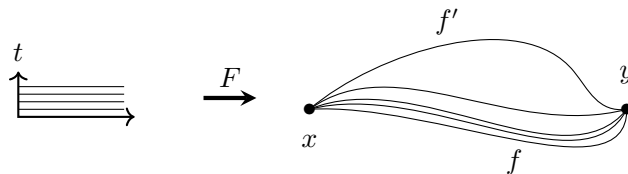
定义 1.1.5 (广群). 若一个范畴 \mathcal{C} 中的所有态射都可逆, 则称之为广群。

只有一个对象的范畴与么半群一一对应: 相应的么半群是 $\text{End}(X)$, x 是唯一对象。群无非是只有一个对象的广群。由于广群里的箭头都是同构, 它适合用来表述数学对象的分类问题。???

例 1.1.3 (基本广群). 设 X 是拓扑空间, 两点 x, y 之间的道路意指连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow X, f(0) = x, f(1) = y$. 道路的合成无非是头尾相接: 对于 $x, y, z \in X$ 和道路 $f(x \rightarrow y), f'(y \rightarrow z)$, 定义 $x \rightarrow z$ 的道路 f'' 为:

$$f''(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f'(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

两条 x, y 之间的道路 f, f' 称为 (定端) 同伦的, 如果存在连续映射 $F: [0, 1]^2 \rightarrow X$ 使得对每个 $t \in [0, 1], F(\cdot, t)$ 都是 x, y 之间的道路, 而且 $F(\cdot, 0) = f, F(\cdot, 1) = f'$. 同伦构成一个等价关系。易见道路的合成可以在同伦类的层次定义。



空间 X 的基本广群 $\Pi_1(X)$ 定义为如下范畴, 其对象是 X 中的点, 对任意 $x, y \in X$, 态射集 $\text{Hom}(x, y)$ 定义为所有从 x 到 y 的道路类; 态射的合成定义为道路类的合成, 而恒等态射 id_x 由静止道路 $\forall t, id_x(t) = x$ 表示。对

于给定的态射 $f : x \rightarrow y$ (同伦类中的某个代表元), 其逆可以取为反向道路 $f^{-1} := f(1 - t), t \in [0, 1]$ 。

可以验证这些操作都是良定的, 并使得 $\Pi_1(X)$ 成为广群。注意到 $\text{Aut}(X) = \text{Hom}(x, x)$ 正好是以 x 为基点的基本群 $\pi_1(X, x)$ 。

基本群是拓扑学中重要的不变量, 它为每个空间 X 指定一个相应的代数结构 (群)。基本广群可以视为再高一阶的不变量: 它为 X 指定一个范畴。但是应当注意还有大量拓扑信息被 $\Pi_1(X)$ 的范畴结构遗漏了: 除了道路的同伦类, 还应该计入道路间的同伦等价, 还可以设想同伦之间更有同伦, 直至无穷。凡此种种都必须以更高阶的范畴语言反映。???

定义 1.1.6 (反范畴). 任意范畴 \mathcal{C} , 其反范畴 \mathcal{C}^{op} 定义为:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$ 在 \mathcal{C}^{op} 中的合成 $f \circ^{\text{op}} g$ 定义为 \mathcal{C} 中的反向合成 $g \circ f$
- 恒等态射定义等同 \mathcal{C}

容易验证 \mathcal{C}^{op} 满足范畴定义, 且 $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$ 。

简而言之, \mathcal{C}^{op} 的构造就是反转箭头, 反转之后的范畴论公理依然成立, 范畴论中的这种对称性也称作对偶原理。例如: \mathcal{C}^{op} 中的单态射无非是 \mathcal{C} 中的满态射。

1.2 函子与自然变换

定义 1.2.1 (函子). 设 $\mathcal{C}', \mathcal{C}$ 为范畴。一个函子 $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ 指:

1. 对象间的映射 $F : \text{Ob}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$
2. 态射间的映射 $F : \text{Mor}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ 使得
 - F 的来源和目标映射可交换 $sF = Fs, tF = Ft$, 等价的说法是 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}') \text{ 都有映射 } F : \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$
 - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f); F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$

对于 $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$, 合成函子 $G \circ F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_3$ 的定义是显然的: 取合成映射

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}_1) &\xrightarrow{F} \text{Ob}(\mathcal{C}_2) \xrightarrow{G} \text{Ob}(\mathcal{C}_3) \\ \text{Mor}(\mathcal{C}_1) &\xrightarrow{F} \text{Mor}(\mathcal{C}_2) \xrightarrow{G} \text{Mor}(\mathcal{C}_3) \end{aligned}$$

旧文献常将上述函子称为 \mathcal{C}' 到 \mathcal{C} 的共变函子, 形如 $F: (\mathcal{C}')^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 的函子为反变函子。

注意 4. 从 \mathcal{C}' 到 \mathcal{C} 和从 $(\mathcal{C}')^{\text{op}}$ 到 \mathcal{C}^{op} 的函子是一回事。为区分, 对于函子 $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, 反范畴间的相应函子记为 $F^{\text{op}}: (\mathcal{C}')^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$

定义 1.2.2 (函子的满性, 忠实性, 全性). 对于函子 $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$

1. 本质满的: 若 \mathcal{C} 中任一对象都同构于某个 FX
2. 忠实的: 若 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, 映射 $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$ 都是单射
3. 全的: 上述映射对 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ 都是满射

例 1.2.1 (函子). .

1. 子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 给出一个包含函子 $\iota: \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$; 包含函子总是忠实的, 它是全函子当且仅当 \mathcal{C}' 是全子范畴。取 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ 就得到恒等函子 $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$
2. 考虑群范畴 \mathbf{Grp} . \forall 群 G , 总是可以忘掉 G 的群结构而视之为集合, 群同态当然也可以视为集合间的映射, 此程序给出忘却函子 $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ 。类似地给出忘却其它结构的忘却函子 $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ (忘却空间的拓扑结构), $\mathbf{Vect}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ (忘掉 \mathbb{k} -向量空间 V 的纯量乘法, 只看它的加法群 $(V, +)$) 等等。这类函子显然忠实而非全。
3. 考虑域 \mathbb{k} 上的向量空间范畴 $\mathbf{Vect}(\mathbb{k})$ 。对于任意 \mathbb{k} -向量空间 V , 定义其对偶空间

$$V^{\vee} := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}) = \{\mathbb{k}\text{-线性映射 } V \rightarrow \mathbb{k}\}$$

任一线性映射 $f: V_1 \rightarrow V_2$ 诱导对偶空间的反向映射

$$\begin{aligned} f^\vee: V_2^\vee &\rightarrow V_1^\vee \\ [\lambda: V_2 \rightarrow \mathbb{k}] &\mapsto \lambda \circ f \end{aligned}$$

易见 $D: V \mapsto V^\vee, f \mapsto f^\vee$ 定义了函子 $D: \mathbf{Vect}(\mathbb{k})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbb{k})$, 可以验证 D 是忠实的。根据反函子的定义合成函子 $DD^{\text{op}}: \mathbf{Vect}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbb{k})$

将 D 限制于有限维向量空间, 得到函子 $D: \mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})$ 和 $DD^{\text{op}}: \mathbf{Vect}_f(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})$, 分别称为对偶和双对偶函子。

4. 对于任意群 G , 定义导出子群 G_{der} 为子集 $\{xyx^{-1}: x, y \in G\}$ 生成的正规子群。商群 G/G_{der} 是交换群, 称作 G 的 Abel 化。对于任意群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 从定义可以看出 $\varphi(G_{\text{der}}) \subset H_{\text{der}}$, 因此 φ 诱导出交换群的同态 $\bar{\varphi}: G/G_{\text{der}} \rightarrow H/H_{\text{der}}$ 。容易验证 $G \mapsto G/G_{\text{der}}, \varphi \mapsto \bar{\varphi}$ 定义了 Abel 化函子 $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 。Abel 化函子不是忠实函子。
5. 对任意带点拓扑空间 (X, x) 指定基本群 $\pi_1(X, x)$, 给出了函子 $\mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Grp}$ 。代数拓扑学中还有许多例子, 例如空间的同调群 $X \mapsto H_n(X; \mathbb{Z})$ 给出了一族函子 $H_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 上同调群给出函子 $H^n: \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 。

定义 1.2.3 (自然变换, 或函子间的态射). 函子 $F, G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ 之间的自然变换 θ 是一族态射

$$\theta_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GX), X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$$

使得下图所有 \mathcal{C}' 中的态射交换

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\theta_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\theta_Y} & GY. \end{array}$$

上述自然变换写作 $\theta: F \rightarrow G$, 或图解为

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \mathcal{C}' & \Downarrow \theta & \mathcal{C} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & G & \end{array}$$

上述带有双箭头 \Rightarrow 的图表有时也被称为 2-胞腔，一种兴许更有益的看法是设想 θ 为从 F 到 G 的一个同伦。

约定 2. . 我们也将自然变换 $\theta : F \rightarrow G$ 称为从函子 F 到 G 的态射。实用中经常会省略严格的范畴论框架，只说态射 $\theta_X : FX \rightarrow GX$ 对于变元 X 是自然的，典范的，或称满足函子性。实践中经常把自然同构直接写成等号 $=$ 。

几种自然变换的操作，包括纵、横两种合成

- 纵合成: 考虑 \mathcal{C}' 到 \mathcal{C} 的三个函子间的态射 $\theta : F \rightarrow G, \psi : G \rightarrow H$ 。纵合成 $\psi \circ \theta := \{\psi_X \circ \theta_X : X \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}$ ，图解：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & \Downarrow \theta & \curvearrowright \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ \curvearrowleft & \Downarrow \psi & \curvearrowleft \\ & H & \end{array} & \text{合成为} & \begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & \Downarrow \psi \circ \theta & \curvearrowright \\ \mathcal{C}' & & \mathcal{C} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowleft \\ & H & \end{array} \end{array}$$

- 横合成: 考虑函子 $\mathcal{C}'' \xrightarrow{F_1} \mathcal{C}' \xrightarrow{G_1} \mathcal{C}$ 及态射 $\theta : F_1 \rightarrow F_2, \psi : G_1 \rightarrow G_2$ 。现定义横合成 $\psi \circ \theta : G_1 \circ F_1 \rightarrow G_2 \circ F_2$ 。注意到对所有 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}'')$ ，根据 ψ 的自然性，图表

$$\begin{array}{ccc} G_1 F_1(X) & \xrightarrow{\psi_{F_1 X}} & G_2 F_1(X) \\ G_1(\theta_X) \downarrow & & \downarrow G_2(\theta_X) \\ G_1 F_2(X) & \xrightarrow{\psi_{F_2 X}} & G_2 F_2(X) \end{array}$$

交换。对角合成 \searrow 记作 $(\psi \circ \theta)_X : G_1 F_1(X) \rightarrow G_2 F_2(X)$ ，此即所求的横合成，我们马上会证明它的自然性。图解：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \Downarrow \theta & \curvearrowright \\ \mathcal{C}'' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}' \\ \curvearrowleft & & \curvearrowleft \\ & F_2 & \end{array} & \begin{array}{ccc} & G_1 & \\ \curvearrowright & \Downarrow \psi & \curvearrowright \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowleft \\ & G_2 & \end{array} & \text{合成为} & \begin{array}{ccc} & G_1 F_1 & \\ \curvearrowright & \Downarrow \psi \circ \theta & \curvearrowright \\ \mathcal{C}'' & & \mathcal{C} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowleft \\ & G_2 F_2 & \end{array} \end{array}$$

- 横合成的特例

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{H} \mathcal{C}_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{K} \mathcal{C}_4$$

对左边三项: $\theta H : FH \rightarrow GH$ 简记横合成 $\theta \circ \text{id}_H$; 具体地说, $(\theta H)_X = \theta_{HX} : FH(X) \rightarrow GH(X)$; 类似地处理右三项: $K\theta : KF \rightarrow KG$ 为横合成 $\text{id}_K \circ \theta$, 我们有 $(K\theta)_X = K(\theta_X) : KF(X) \rightarrow KG(X)$

注意 5. 这里使用了同一个符号 \circ 表示纵横合成, 如有混淆之虞将另作说明

引理 1.2.1. 横纵合成 $\{(\psi \circ \theta)_X\}_X$ 都是函子间的态射, 而且各自满足严格结合律 $(\phi \circ \psi) \circ \theta = \phi \circ (\psi \circ \theta)$ 。横纵合成之间满足关系: 对于图表

$$\begin{array}{ccccc} & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ & \Downarrow \theta & & \Downarrow \theta' & \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_3 \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & \Downarrow \psi & & \Downarrow \psi' & \end{array}$$

以下的互换律成立

$$\left(\psi' \circ_{\text{纵}} \theta' \right) \circ_{\text{横}} \left(\psi \circ_{\text{纵}} \theta \right) = \left(\psi' \circ_{\text{横}} \psi \right) \circ_{\text{纵}} \left(\theta' \circ_{\text{横}} \theta \right)$$

证明. 证明横合成是函子间的态射。对于 \mathcal{C}'' 中的态射 $f : X \rightarrow Y$, 图表

$$\begin{array}{ccccc} G_1 F_1(X) & \xrightarrow{G_1 \theta_X} & G_1 F_2(X) & \xrightarrow{\psi_{F_2 X}} & G_2 F_2(X) \\ G_1 F_1 f \downarrow & & \downarrow G_1 F_2 f & & \downarrow G_2 F_2 f \\ G_1 F_1(Y) & \xrightarrow{G_1 \theta_Y} & G_1 F_2(Y) & \xrightarrow{\psi_{F_2 Y}} & G_2 F_2(Y) \end{array}$$

按定义, 水平方向箭头合成后上下分别是 $(\psi \circ \theta)_X$ 和 $(\psi \circ \theta)_Y$ 。因为 θ 是自然变换而 G_1 是函子, 左方块交换; 由于 ψ 是自然变换, 右方块交换。将箭头分段作合成, 可知整个大方块交换, 此即 $\psi \circ \theta$ 所需性质。

现证明横合成的结合律: 考虑函子间的态射

$$\begin{array}{ccccc} & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ & \Downarrow \theta & & \Downarrow \psi & & \Downarrow \phi & \\ \mathcal{C}''' & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{C}'' & \xrightarrow{G_1} & \mathcal{C}' & \xrightarrow{H_1} & \mathcal{C} \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & F_2 & & G_2 & & H_2 & \end{array}$$

对任意 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}''')$ 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} & & H_1 G_2 F_2(X) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ H_1 G_1 F_1(X) & \longrightarrow & H_1 G_2 F_1(X) & & H_2 G_2 F_2(X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & H_2 G_2 F_1(X) & & \end{array}$$

ψ 的自然性 $G_2F_1(X) \rightarrow G_2F_2(X)$ 可知菱形部分交换。按 $\begin{array}{ccc} & \searrow & \\ & & \searrow \\ & & \end{array}$ 合成给出 $(\phi \circ (\psi \circ \theta))_X$ 。按 $\begin{array}{ccc} & \searrow & \\ & & \searrow \\ & & \end{array}$ 合成则给出 $((\phi \circ \psi) \circ \theta)_X$ 。这里仍须用上交换图表，结合律证毕。

最后一个等式可以同样按图索骥。 \square

任意函子 F 到自身有恒等态射 $\text{id}_F : F \rightarrow F$ 。给定函子间的态射 $\theta : F_1 \rightarrow F_2$ ，若态射 $\psi : F_2 \rightarrow F_1$ 满足 $\psi \circ \theta = \text{id}_{F_1}, \theta \circ \psi = \text{id}_{F_2}$ ，则称 ψ 是 θ 的逆。可逆的态射称为函子间的同构，写作 $\theta : F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$ 。由定义，若 θ 的逆存在则唯一，记为 θ^{-1} ，它无非是在范畴中“逐点地”取逆： $(\theta^{-1})_X := (\theta_X)^{-1} : F_2X \xrightarrow{\sim} F_1X$ 。态射 θ 可逆当且仅当每个 θ_X 都可逆。易见同构的横纵合成仍是同构。函子间同构 $\theta : F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$ 的等价说法是称 $\theta_X : F_1X \xrightarrow{\sim} F_2X$ 对变元 X 是自然同构或典范同构。

定义 1.2.4 (等价). 如果一对函子 $\mathcal{C}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}_2$ 满足性质：存在函子之间的同构 $\theta : FG \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_2}, \psi : GF \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_1}$ 则称 G 是 F 的拟逆函子，并称 F 是范畴 \mathcal{C}_1 到 \mathcal{C}_2 的等价。

进一步，如果有 $FG = \text{id}_{\mathcal{C}_2}, GF = \text{id}_{\mathcal{C}_1}$ ，则称 F 是范畴间的同构， G 是 F 的逆。

容易证明，等价的合成仍是等价。

1.3 函子范畴

1.4 泛性质

1.5 可表函子

1.6 伴随函子

1.7 极限

1.8 完备性

1.9 习题