Chapter 3

BY 线性方程组

1 Def & Theo

1.1 线性方程组及其解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_n \end{cases}$$

1. 线性方程组的初等变换

1	用数$k \neq 0$乘某一行
2	k乘某一行加到另一行
3	交换两个方程的位置

2. 初等变换将方程组变为同解方程组

3. 高斯消元法：

   初等变换必能将线性方程组变换为阶梯形方程组；解阶梯形方程组得到方程组的解

4. 线性方程组的解的结构:

1	唯一解	$\det A \neq 0; \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = n$
2	无解	$\operatorname{rank} \bar{A} = \operatorname{rank} A + 1$
3	$v + U$	$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} < n$

5. 线性方程组解的分类：特解、通解、通解中可能具有的变量为自由未知量

6. 齐次线性方程组若方程数小于未知数个数则必有非零解

1.2 有限维向量空间

1. n维向量：有序n元组，每个元素是数域F上的元素

2. 向量相等：长度相等$\wedge$对应分量相等

3. 向量运算：

   $$\begin{array}{ll} \text{加法}(V \times V) \to V & \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \text{数乘}(F \times V) \to V & \lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \end{array}$$

4. 向量运算的性质：

   $$\begin{array}{cc} \text{加法交换律} & \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \\ \text{加法结合律} & (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \\ \text{存在唯一逆元} & -\boldsymbol{a} = -1 \cdot \boldsymbol{a} \end{array}$$

   $$\begin{array}{cc} \text{数乘对加法分配} & k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \\ \text{乘法对数乘分配} & (x + y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{a} \\ \text{数乘与乘法有结合律} & x(y\boldsymbol{a}) = (xy)\boldsymbol{a} \\ \text{数乘单位元为}1 \in F & 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \end{array}$$

5. n维向量空间：数域F中n维向量的全体，和向量上的加法、和向量和数的数乘

$$V=\{\boldsymbol{a}_n|+:V\times V\to V|\cdot:F\times V\to V\}$$

1.3 向量的线性相关性

1. 线性组合：$\exists k_i\wedge\boldsymbol{a}=\sum k_i\boldsymbol{b}_i$

2. 线性相关的等价关系：若向量组$\bar{\boldsymbol{a}}$和向量组$\boldsymbol{b}$能够相互线性表出，称$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{b}$

3. 线性相关：向量组中其中一个向量可以由其它向量线性表出，则称向量组为线性相关的

4. 若存在数域F中一组不全为0的数k_i使得向量组的运算$\sum k_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$成立，则向量组线性相关

   推论：零向量与任何向量组线性相关(包括仅含零向量的向量组自身)

5. 线性无关：$\sum k_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0},k_i$仅有0解

6. 若向量组线性无关，则向量组的子组也线性无关

7. 若向量组线性无关，则给每个向量添加分量的扩张向量组也线性无关

8. 较多向量的向量组可以由较少向量的向量组线性表示，则较多向量组必线性相关

   推论：任意n+1个n维向量必线性相关

   推论：两个线性无关的等价向量组，所含的向量数相同

9. 极大线性无关组：向量组的子组，自身线性无关，添加任意一个组中的其它向量则线性相关

   推论：极大线性无关组和向量组等价

   推论：线性无关组的极大线性无关组是自身

   推论：含有非0向量的向量组必有极大线性无关组；全为0向量的向量组没有极大线性无关组

10. 极大线性无关组含有的向量数相同

11. 秩：极大线性无关组的向量个数

1.4 矩阵的秩

1. 矩阵的行秩、列秩：行向量的秩和列向量的秩

2. 行秩等于列秩.矩阵的秩

   Pr

$$\text{矩阵}A\text{的行秩为}r\begin{cases}\sum x_i\boldsymbol{a}_{1i}=0\\ \vdots\\ \sum x_i a_{ri}=0\end{cases}$$

$$\text{此方程组的系数矩阵为}A'\text{去掉后}n-r\text{行,且列向量线性无关为行向量的秩}$$
$$A=PE_rQ\Rightarrow A'=Q'E_rP'$$

3. 行列式为0的充要条件是矩阵的秩小于向量的维数

4. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数矩阵的行列式为0

5. 子式：从矩阵A中任选k行k列个元素组成的方阵的行列式，称为A的k阶子式

6. $\operatorname{rank} A = r \Leftrightarrow A$至少有一个$r$阶子式不为0，$r+1$阶子式全为0

1.5 线性方程组有解的判别定理

1. 系数矩阵，增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2. 线性方程组有解$\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$

1.6 线性方程组解的结构

1.6.1 齐次线性方程组,$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

1. 两个方程的解的和还是方程组的解
2. 一个解的数乘仍然是方程组的解
3. 基础解系：向量组，线性无关，方程的任意解都能表示成该向量组的线性组合
4. $\dim \operatorname{null} A = \dim V - \dim \operatorname{rang} A$.基础解系的向量个数为空间维数减去矩阵的秩

1.6.2 非齐次线性方程组

1. 导出组：常数项全为0的齐次线性方程组
2. 线性方程组的两个解的差是导出组的解
3. 线性方程组的解加导出组的解仍然是线性方程组的解
4. 线性方程组的解可以表示成$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\gamma}_0$是一个解, $\boldsymbol{\eta}$是导出组的解.
   推论：线性方程组有唯一解的充要条件是导出组仅有0解