Chapter 5

BY 二次型

主要是实二次型理论。

应用了谱定理（R，C）；正规算子的刻画、自伴算子的刻画； 内积空间上的正算子理论

1 二次型与矩阵表示

1. 线性替换、线性表示、线性算子

$$\begin{gathered} T\colon \mathcal{L}(F^n). \\ T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ \text{称为从}\boldsymbol{x}\text{到}\boldsymbol{y}\text{的线性替换、线性代换} \\ T\text{称为}F^n\text{上的线性算子} \end{gathered}$$

2. 二次型与方阵表示

$$\begin{array}{cc} \text{二次型} & f \in \mathcal{P}(F)_n.\text{即}n\text{个变量的多项式} \\ & f\text{的每一项次数都为}2 \\ & f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j \\ \text{二次型的矩阵表示} & \text{矩阵表示: } f = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' (\; a_{ij} \;) \boldsymbol{x} \\ \text{二次型的矩阵} & \text{称}A\text{为二次型}f\text{的矩阵} \end{array}$$

Remark：根据F上乘法具有交换律、A是对称的(自伴的)。二次型的矩阵都是对称的

3. 定理：n元二次型与其矩阵表示是$1-1$映射

4. 二次型与线性算子的关系：

$$\begin{gathered} f = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = C \boldsymbol{x} \\ \rightarrow f = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = (C \boldsymbol{y})' A (C \boldsymbol{y}) \\ = \boldsymbol{y}' C' A C \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' (C' A C) \boldsymbol{y} \\ \text{由于}(C' A C)' = C' A' C'' = C' A C \\ \rightarrow \text{形成了新的二次型} f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}' B \boldsymbol{y} \end{gathered}$$

5. 方阵的合同：

$$\begin{gathered} \text{方阵}A\text{，}B \\ \text{存在可逆方阵}C \rightarrow B = C' A C \end{gathered}$$

6. 合同的性质：等价关系

$$\begin{array}{ccc} A = E' A E & \rightarrow & A \sim A \\ B = C' A C & \rightarrow & A = (C^{-1})' B C^{-1} \\ A = C_1' B C_1, B = C_2' D C_2 & \rightarrow & A = C_1' C_2' D C_2 C_1 \\ & & = (C_2 C_1)' D C_2 C_1 \end{array}$$

2 标准型

主要用实谱定理:

$$\begin{gathered}\text{三条件等价:}\\ T\text{是自伴的}\\ \exists V\text{的一组基}\boldsymbol{v}\text{使得}T\text{在}\boldsymbol{v}\text{下的方阵为对角阵}\\ V\text{有一个由}T\text{的特征向量组成的规范正交基}\end{gathered}$$

2.1 配方法

$$\begin{aligned}1\qquad & a_{ii}\text{至少一个不为}0\text{,设为}a_{11}\\ & a_{11}x_1^2+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\ &=a_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\ &=a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2-a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sim\\ & \text{此时所有带有}a_{1i}\text{的项化为}0\text{,形成两个新的平方项}\\ & \text{矩阵表示}\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}2\qquad \forall i, a_{ii}=0.\text{至少一个}a_{1j}\neq 0(j>1)\text{,设}a_{12}\neq 0\\ x_1=z_1+z_2; x_2=z_1-z_2; x_i=z_i(i>2)\\ 2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(z_1+z_2)(z_1-z_2)=2a_{12}(z_1^2-z_2^2)\\ =2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2\\ \text{化为两个二次型和更低阶的二次型}\\ \text{矩阵表示}\begin{pmatrix}1 & 1 & \\ 1 & -1 & \\ & & E\end{pmatrix}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}3\qquad a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=0\\ \text{此时本身为更低阶的二次型}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}4\qquad n=1\text{时。}a_{11}x_1^2\text{本身为对角二次型}\\ \text{根据数学归纳法,一切实对称矩阵都可化为对角形}\end{gathered}$$

Remark:

$$\text{若不是}a_{11}\text{使用}C=\begin{pmatrix}0 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}, C'AC\text{交换两行与两列进行移动}$$

1. 实谱定理:

$$\begin{gathered}T\text{是自伴的}\to\text{存在可逆变换}C\to C'TC\text{是对角阵}\\ \text{实对称矩阵合同与对角阵}\end{gathered}$$

2. 二次型的标准型：

$$\text{二次型变成的平方和称为二次型的标准型}$$
$$f = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (C\boldsymbol{y})'A(C\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'\mathrm{diag}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{y}$$

3 规范型与其唯一性

1. 二次型的秩：二次型矩阵的秩
2. 复谱定理：复数上的正规算子
   $(A\,\overline{A}' = \overline{A}'A$, 包含了自伴$A = \overline{A}')$总是存在一个基使得称为对角阵
3. 两个复空间上的正规矩阵：合同⇔秩相等
4. 复二次型的规范型：$\begin{pmatrix} E & \\ & O \end{pmatrix}$
5. 实二次型的规范型：$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$
6. 惯性定理：对称矩阵变换成规范型的算子是唯一的
7. 任意标准型中正项个数与负项个数等于规范型中的个数
8. 惯性指数、符号差

$$\begin{array}{cc} \text{正惯性指数} & \text{规范型中正项的个数} \\ \text{负惯性指数} & \text{规范型中负项的个数} \\ \text{符号差} & \text{正惯性指数} - \text{负惯性指数} \end{array}$$

4 正定二次型：正算子

若将二次型看成是内积空间上的算子。

$$\text{内积}\langle x, x\rangle = x'x$$
$$\forall x \in V, \langle Tx, x\rangle \geqslant 0\text{称}T\text{为正算子}$$

正算子的刻画

$$T\text{自伴} \wedge T\text{的特征值非负}$$
$$T\text{有正的平方根}$$
$$T\text{有自伴的平方根}$$
$$\exists R \in \mathcal{L}(V).T = R'R$$

$$\begin{array}{cc} \text{正定二次型} & T\text{是正算子} \wedge \operatorname{null} T = \{0\} \\ \text{半正定二次型} & T\text{是正算子} \end{array}$$

1. 二次型的正定：

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \rightarrow f(\boldsymbol{x}) > 0$$

2. 正定二次型的规范型是单位阵
   推论：正定二次型的行列式大于0

$$A = C'EC.\det A = \det C' \times \det E \times \det C = (\det C)^2 > 0$$

充要：正定二次型的有n个不同的正特征值

3. 二次型：正定⇔顺序主子式都大于0

$$A=(\ a_{ij}\ )$$
$$A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$\det A_n\text{称为}A\text{的}n\text{阶顺序主子式}$$
$$A_n>0$$

4. 二次型的其它定：

$$\begin{array}{cc} \text{正定} & \forall x\neq 0\to f(\boldsymbol{x})>0 \\ \text{半正定} & \forall x\neq 0\to f(\boldsymbol{x})\geqslant 0 \\ \text{负定} & \forall x\neq 0\to f(\boldsymbol{x})<0 \\ \text{半负定} & \forall x\neq 0\to f(\boldsymbol{x})\leqslant 0 \end{array}$$

5. 半正定的性质：正算子的刻画

$$\begin{array}{cc} & \text{五命题等价} \\ 1 & T\text{是正的}(\boldsymbol{x}'T\boldsymbol{x}\text{是半正定的}) \\ 2 & T\text{是自伴的}\wedge T\text{的所有特征值非负} \\ 3 & T\text{有正的平方根} \\ 4 & T\text{有自伴的平方根} \\ 5 & \exists R\in\mathcal{L}(V)\to T=R^*R \end{array}$$

6. 负定的刻画：

$$\text{二次型}f\text{是：}\begin{cases} \text{负定的}\Leftrightarrow -f\text{是正定的} \\ \text{半负定的}\Leftrightarrow -f\text{是半正定的} \end{cases}$$