Linear Algebra Done Right

BY SHELDON AXLER

2020-4-11

第一章

1 $\mathbb{F}^n$

定义 1.1. *复数：复数是一个有序对*$(a,b), a,b\in\mathbb{R}$。*写作：*$a+bi$

定义 1.2. *复数集：*$\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$

定义 1.3. *复数运算*

$$\begin{array}{ll} \text{加法} & (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ \text{乘法} & (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{array}$$

注意 1.4. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{a+bi\,|\,a\in\mathbb{R},b=0\}$与$\mathbb{R}$同构，并且运算也保持了除序关系外的相容性，故在放弃序关系的条件下认为$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

复数性质(验证AMD成立)：

1. 交换律

$$\forall a,b\in\mathbb{C}\rightarrow a+b=b+a, ab=ba$$

2. 结合律

$$\forall a,b,c\in\mathbb{C}\rightarrow (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$$

3. 加法逆元

$$\forall a\in\mathbb{C}, \exists -a\in\mathbb{C}\rightarrow a+(-a)=0$$

4. 乘法逆元

$$\forall a\in\mathbb{C}\wedge a\neq 0, \exists \frac{1}{a}\in\mathbb{C}\rightarrow a\frac{1}{a}=1$$

5. 分配律

$$\forall a,b,c\in\mathbb{C}\rightarrow a(b+c)=ab+ac$$

证明.

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ &= (c+a)+(d+b)i\\ &= (c+di)+(a+b)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\\ &= (ca-db)+(da+cb)i\\ (c+di)(a+bi) &= (ca-db)+(cb+da)i\end{aligned}$$

其余类似易证 □

因此，复数集及运算构成了域($1=1+0i, 0=0+0i$)

定义 1.5. *域$\mathbb{F}$：满足上述5条性质的集合，至少包含零元和幺元的集合及其加法和乘法运算*

Remark:最小的域$F_{\min}=\{0,1\}, 1+1=0$
域中的元素叫做标量

定义 1.6. *组（tuple）：$n\in\mathbb{N}$，长度为n的组是n个有序元素的整体，n为组长度*

Remark:定义长度为0的组做平凡结果

定义 1.7. *组的相等关系：长度n相等且对应元素相等*

定义 1.8. $\mathbb{F}^n$*:以$\mathbb{F}$中的元素做每个位置上的元素，并且长度为n的组的集合*

$$\mathbb{F}^n=\{(x_1,x_2,\ldots x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{F}\wedge i\in 0\ldots n\}$$

其中x_i叫作$\boldsymbol{x}$的第i个坐标。

定义 1.9. $\mathbb{F}^n$*上的加法*

$$(x_1,\ldots x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

定义 1.10. $\mathbb{F}^n$*上的标量乘法*

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

性质:

1. $\mathbb{F}^n$上的加法具有交换律，易证

2. $\forall x \in \mathbb{F}^n, \exists -x \in \mathbb{F}^n \to x+(-x)=0$,namely 加法逆元存在

习题1.A

1.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di)=1 &\to \begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc=0 \end{cases} \\
a=0 &\to \begin{cases} -bd=1 \\ bc=0 \end{cases} \to \begin{cases} d=-1/b \\ c=0 \end{cases} \\
b=0 &\to \begin{cases} ac=1 \\ ad=0 \end{cases} \to \begin{cases} c=1/a \\ d=0 \end{cases} \\
a\neq 0 \wedge b\neq 0 &\to \frac{a}{b}c-d=\frac{1}{b} \\
& \quad d+\frac{b}{a}c=0\to \\
\frac{1}{b} &= \frac{a}{b}c+\frac{b}{a}c \\
&= \frac{a^2+b^2}{ab}c \\
c &= \frac{a}{a^2+b^2} \\
d+\frac{b}{a}c=0 &\to d+\frac{b}{a}\frac{a}{a^2+b^2}=0 \\
&= d+\frac{b}{a^2+b^2}=0 \\
d &= \frac{-b}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

综上:

$$c=\frac{a}{a^2+b^2} \qquad d=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) \\
(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) &= (1-3)+(-2\sqrt{3}i)=-2-2\sqrt{3} \\
(-2-2\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) &= (2+6)+(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})i=8+0i
\end{aligned}
$$

3.

令$x^2=i, x=(a+bi)$

$$
\begin{aligned}
x^2=(a+bi)(a+bi) &= (a^2-b^2)+(2ab)i \\
a^2-b^2 &= 0 \\
&\rightarrow \\
a &= \pm b \\
2ab &= 1 \\
&\rightarrow \\
a &= b \\
ab &= \frac{1}{2} \\
&\rightarrow \\
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}
$$

4. 略
5. 略
6. 略
7. 略
8. 略
9. 略
10. 略
11. 略
12. 略
13. 略
14. 略
15. 略
16. 略

2 向量空间

由于$\mathbb{F}^n$上的加法具有交换律、结合律和单位元，标量乘法具有结合律、$\mathbb{F}$中的单位元做标量乘法不变、标量乘法具有结合律。据此可以形成一个代数结构。

定义 2.1. $\mathbb{F}^n$ *上的加法和标量乘法*

- *加法：二元函数，* $f(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) \to \mathbb{F}^n$, $f(x, y) \to x + y$
- *标量乘法：二元函数,* $f(\mathbb{F}, \mathbb{F}^n) \to \mathbb{F}^n$, $f(\lambda, x) \to \lambda x$

定义 2.2. *向量空间* $\mathbb{V}$ *(vector space)：集合* $\mathbb{F}^n$ *及上的加法和标量乘法，满足：*

$$\begin{aligned}
\text{加法交换律} \quad & \forall x, y \in \mathbb{V} \to x + y = y + x \\
\text{加法结合律} \quad & \forall x, y, z \in \mathbb{V} \to (x + y) + z = x + (y + z) \\
\text{标量乘法结合律} \quad & \forall x \in \mathbb{V}, \forall a, b \in \mathbb{F} \to (ab)x = a(bx) \\
\text{加法单位元} \quad & \exists \mathbf{0} \in \mathbb{V}, \forall x \in \mathbb{V} \to x + \mathbf{0} = x \\
\text{加法逆元} \quad & \forall x \in \mathbb{V}, \exists y \in \mathbb{V} \to x + y = \mathbf{0} \\
\text{乘法单位元} \quad & \exists \mathbf{1} \in \mathbb{V}, \forall x \in \mathbb{V} \to \mathbf{1}x = x \\
\text{分配律} \quad & \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}, \forall a \in \mathbb{F} \to a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y} \\
& \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, \forall a, b \in \mathbb{F} \to (a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

记法 2.3. *向量空间中的元素称为向量(vector)或点(point)*

Remark: 向量空间的标量乘法依赖$\mathbb{F}$，在确切需要指明$\mathbb{F}$时，写作$\mathbb{F}$上的向量空间$\mathbb{V}$

- 实向量空间(real vector space):$\mathbb{R}^n$
- 复向量空间(complex vector space):$\mathbb{C}^n$

Remark：最小的向量空间:$\{0\}$,空集上的空间不是向量空间。

Q:$\mathbb{F}_{\min} = \{0, 1\}, \mathbb{V}_{\mathbb{F}^1_{\min}} = \{0, 1\}$.所以向量空间并非定义在域上？？？

例 2.4. $\mathbb{F}^\infty$:定义$\mathbb{F}^\infty$为$\mathbb{F}$中的所有(可数)无穷序列的集合：

$$\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \,|\, x_i \in \mathbb{F}, i \in \mathbb{N}\}$$

定义加法：$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$

定义乘法：$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$

易证：$\mathbb{F}^\infty$为$\mathbb{F}$上的向量空间

例 2.5. $\mathbb{F}^S$:集合S到$\mathbb{F}$上的所有函数的集合

加法：$\forall x \in S, \forall f, g \in \mathbb{F}^S \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

乘法：$\forall x \in S, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall f \in \mathbb{F}^S \to (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

易证：$\mathbb{F}^S$是$\mathbb{F}$上的向量空间。

Q:若$S=\varnothing$则是平凡的。定义域为空，无法构成函数？(Munkres)

若$S\neq\varnothing$：加法单位元：0函数$0\colon S\to F, 0(x)\to 0$

加法逆元:$-f\colon S\to F, (-f)(x)=-(f(x))$

Remark:$\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^\infty\subset\mathbb{F}^S$，可以将函数$f$看成是$(\ldots)\to F$的函数。$\mathbb{F}^\infty\to S=\mathbb{N}$

Q:$\mathbb{F}^\infty$中的把集合$S=\mathbb{N}$，可是$\mathbb{F}^S$在每个向量上有无穷个函数...如果直接这样划定一个等价关系...，貌似有点希望

推论 2.6. *$\mathbb{V}$中的加法单位元唯一*

证明. *假定单位元$0,0'$*

$$0'=0'+0=0+0'=0$$

□

推论 2.7. *$\mathbb{V}$中的加法逆元唯一*

证明. *假设x,y都是元素a的逆元*

$$x=x+0=x+(a+y)=(a+x)+y=0+y=y$$

□

推论 2.8. $0\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{V}\to 0x=\mathbf{0}$

证明.

$$\mathbf{0}=0x+(-0x)=(0+0)x+(-0)x=0x+0x+(-0)x=0x$$

□

推论 2.9. $\forall x\in\mathbb{F},\mathbf{0}\in\mathbb{V}\to x\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$

证明.

$$\mathbf{0}=x\mathbf{0}+(-x\mathbf{0})=x(\mathbf{0}+\mathbf{0})+(-x\mathbf{0})=x\mathbf{0}+x\mathbf{0}+(-x\mathbf{0})=x\mathbf{0}$$

□

推论 2.10. $-1\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{V}\to x+(-1x)=\mathbf{0}$

证明.

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=0x=\mathbf{0}$$

□

习题1.B

1. 证明：$\forall x \in \mathbb{V} \to -(-x) = x$

$$-(-v) = -1(-1(v)) = (-1 -1)v = 1v = v$$

2. 证明：$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, a\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \to a = 0 \vee \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

   逆否命题：$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, a \neq 0 \wedge \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \to a\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

   反证：$a\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

   $(1 = 0) \to (\forall a \in \mathbb{F} \to a = 1a = 0a = 0)$与定义中$\mathbb{F}$至少为$\{0, 1\}$矛盾。

$$1 = \frac{1}{y}\frac{1}{x}xy = \frac{1}{y}\frac{1}{x}0 = 0$$

   参考：Rudin P6命题1.16中的做法。域的公理M4中了$1 \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{F}_{\min} = \{0,1\}$。这样如果上式成立可以推出$1 = 0$导致矛盾。所以关键在于从$\mathbb{F}$的定义中证明$1 \neq 0$。

3. 设$\forall x, y \in \mathbb{V}$，证明$\exists_1 a \in \mathbb{V} \to x + 3a = y$

   $x + 3a = y \to \frac{y-x}{3} = a \in \mathbb{V}$ 根据$\mathbb{F}$封闭和$\mathbb{V}$的定义和逆元唯一性。

4. 空集不是向量空间。空集不满足定义?

   加法单位元$\mathbf{0}$不存在。所以向量空间不要求乘法逆元的存在性?

5. 证明：向量空间定义2.2中的存在加法逆元条件可以替换为$\forall x \in \mathbb{V} \to 0x = \mathbf{0}$

$$(\forall x \in \mathbb{V}, \exists y \in \mathbb{V} \to x + y = \mathbf{0}) \to x + y = 0x = \mathbf{0}\text{分配律???}$$

$$(\forall x \in \mathbb{V} \to 0x = \mathbf{0}) \to \forall x \in \mathbb{V}, x + -x = 0x = \mathbf{0}, -x \in \mathbb{V}, \text{封闭性}$$

6. 在集合$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$上，并使用通常情况下的运算，对于涉及无穷的运算。定义：$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} x + \infty & = & \infty \\ x - \infty & = & -\infty \\ x > 0 & \to & x\infty = \infty, x - \infty = -\infty \\ x = 0 & \to & x\infty = 0, x\infty = 0 \\ x < 0 & \to & x\infty = -\infty, x - \infty = \infty \\ \infty + \infty & = & \infty \\ \infty - \infty & = & 0 \\ -\infty - \infty & = & -\infty \end{array}$$

验证$\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$是否为$\mathbb{R}$上的向量空间

证明. 记$R^*=R\cup\{-\infty,+\infty\}$

$$x+y=y+x \qquad x\in\mathbb{R}, y\notin R\rightarrow \quad \begin{cases} x+\infty=\infty+x=\infty \\ x+-\infty=-\infty+x=-\infty \end{cases}$$

$$x\notin\mathbb{R}, y\notin\mathbb{R}\rightarrow \quad \begin{cases} \infty+\infty=\infty \\ \infty-\infty=0 \end{cases}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z) \quad x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z\notin\mathbb{R} \quad \begin{cases} x+y+\infty=\infty=x+\infty \\ x+y-\infty=-\infty=x-\infty \end{cases}$$

$$x\in R, y\notin R, z\notin R \quad \begin{cases} x+\infty+\infty=\infty=x+\infty \\ (x+\infty)-\infty=0\neq x+0=x \end{cases}$$

所以不是向量空间 □

3 子空间

定义 3.1. *子空间(subspace)：* $\mathbb{U}\subset\mathbb{V}$*并且在*$\mathbb{V}$*的加法和标量乘法下*$\mathbb{U}$*也是向量空间，称*$\mathbb{U}$*是*$\mathbb{V}$*的子空间。也称线性子空间。*

定理 3.2. *判断子空间的条件：*

1. *加法单位元：* $0\in\mathbb{U}\Leftrightarrow\mathbb{U}\neq\varnothing$
2. *加法封闭性：* $\forall x,y\in\mathbb{U}\rightarrow x+y\in\mathbb{U}$
3. *标量乘法封闭性：* $\forall a\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{U}\rightarrow ax\in\mathbb{U}$

证明. *若*$\mathbb{U}$*是*$\mathbb{V}$*的子空间，则满足1，2，3。*

$\mathbb{U}$*满足1，2，3*$\rightarrow$

1. *交换律：* $x+y=y+x\in\mathbb{U}$
2. *结合律：* $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $0\in\mathbb{U},\mathbb{U}\neq\varnothing$
4. $\forall x\in\mathbb{U},-1x\in\mathbb{U}\rightarrow x+-1x=0$
5. $1\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{U}\rightarrow 1x\in\mathbb{U}$
6. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}\in\mathbb{U}$

$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}\in\mathbb{U}$ $\square$

例 3.3. 一些子空间

1. $\{(x_1,x_2,0)\colon x_1,x_2\in\mathbb{F}\}$是$\mathbb{F}^3$的子空间
2. $b\in\mathbb{F}$, $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{F}^4\colon x_3=5x_4+b\}$是$\mathbb{F}^4$子空间$\Leftrightarrow b=0$
3. $C^{[0,1]}$是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的子空间
4. $\mathbb{R}$上全体可微函数的集合是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$的子空间
5. 区间(0,3)上满足$f'(2)=b$的实可微函数的集合是$\mathbb{R}^{(0,3)}$的子空间$\Leftrightarrow b=0$
6. $\left\{c_n\colon \lim\limits_{n\to\infty}c_n=0\right\}$是$\mathbb{C}^{\infty}$的子空间