第五章 本征值，本征向量，不变子空间

本章主要研究有限维向量空间到其自身的线性映射。

F: $R \vee C$
V: F上的向量空间

1 不变子空间

本章引进一些工具进一步理解算子的结构.

空间V可被分解成一些子空间$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n . T \in \mathcal{L}(V). T(U_i) \notin U_i$. 这样，算子在被限制到子空间时，$\operatorname{range} T_{U_i}$却不是$U_i$.但空间存在一些子空间可以使得$\operatorname{range} T_{U_i} \subset U_i$的，这样的V的分解称为V在T的不变子空间

定义 1.1. *不变子空间(invariant subspace)*

$$T \in \mathcal{L}(V). U \text{是} V \text{的子空间}. \forall u \in U, Tu \in U.$$

例 1.2. 一些V的不变子空间

1	$\{0\}$	$\forall u \in U \to u = 0 \to Tu = 0 \to Tu \in U$
2	V	$\forall u \in U \to u = V \to Tu = Tv = \operatorname{range} V \in V = U$
3	$\operatorname{null} T$	$\forall u \in \operatorname{null} T \to Tu = 0 \to Tu \in U$
4	$\operatorname{range} T$	$\forall u \in \operatorname{range} T \to Tu \in \operatorname{range} T = U$

Remark: V是有限维的.$U \neq \{0\}, V . \forall T \in \mathcal{L}(V). F = C$: $\dim V > 1 \to T_U \subset U(5.21). F = R$时: $\dim V > 2 \to \exists T_U \subset U(9.8)$.

Remark: $\operatorname{null} T, \operatorname{range} T$都是不变子空间，但这不是是否存在$\{0\}, V$以外的不变子空间提供结果.

T可逆$\to \operatorname{null} T = \{0\} \wedge \operatorname{range} T = V$

1.1 本征值与本征向量

一维不变子空间

$\forall v \in V, v \neq 0. U = \operatorname{span} v. T(u) \in U \to T(u) = \lambda u$

定义 1.3. *本征值(eigenvalue)*

$$T \in \mathcal{L}(V). \lambda \in F \text{是} T \text{的本征值}: \exists v \in V \to v \neq 0 \wedge Tv = \lambda v$$

Remark: 根据定义: T有一维不变子空间$\Leftrightarrow T$有本征值

定理 1.4. *本征值的等价条件*

V有限维.$T \in \mathcal{L}(V), \lambda \in F$.以下条件等价

1	λ是T的本征值
2	$T - \lambda I$不单
3	$T - \lambda I$不满
4	$T - \lambda I$不可逆

证明.

$$\begin{aligned}\exists v \neq 0 \to Tv = \lambda v \to (T-\lambda I)v = 0 \to T-\lambda I\text{不单}\\ \to T-\lambda I\text{不满}\\ \to T-\lambda I\text{不可逆}\end{aligned}$$

□

定义 1.5. *本征向量(eigenvector)*

$$T \in \mathcal{L}(V).\lambda \in F\text{是}T\text{的本征值}.v \in V\text{是}T\text{对应于}\lambda\text{的本征向量}: v \neq 0 \wedge Tv = \lambda v$$

Remark: $Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T-\lambda I)v = 0. v \neq 0$是$T$对应于$\lambda$的本征向量$\Leftrightarrow v \in \operatorname{null}(T-\lambda I)$

例 1.6. 一些算子的本征向量

$$\begin{array}{ll} & T \in \mathcal{L}(F^2), T(w,z) = (-z,w) \\ 1 & F = R. \\ & T\text{是}R^2\text{中的逆时针旋转}90^\circ\text{的旋转} \\ & \forall v \neq 0 \to Tv = \lambda v\text{不可能成立} \\ & \to T\text{没有特征值和特征向量}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2 & F = C. \\ & Tv = \lambda v \\ & \leftarrow T(w,z) = \lambda(w,z) \\ & -z = \lambda w \wedge w = \lambda z \\ & \to -z = \lambda^2 z \\ & \to -1 = \lambda^2 \\ & \to \lambda = \pm i \\ & \\ & w \in C \wedge w \neq 0 \\ & w_i = (w,-w), w_{-i} = (w,wi) \end{array}$$

定理 1.7. *不同本征值的本征向量线性无关*

$$T \in \mathcal{L}(V).\lambda_1,\ldots,\lambda_m\text{是}T\text{的互不相同的本征值},v_1,\ldots,v_m\text{是对应的特征向量} \to v_1,\ldots,v_m\text{线性无关}$$

证明.

$$\begin{array}{lc} & \text{设}v_1,\ldots,v_m\text{线性相关} \to v_k \in \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_{k-1}) \\ \to & v_k = a_1v_1 + \cdots + a_{k-1}v_{k-1} \\ \to & \lambda_k v_k = \lambda_k a_1 v_1 + \cdots + \lambda_k a_{k-1} v_{k-1} \\ \to & Tv_k = \lambda_k v_k = T(a_1v_1 + \cdots + a_{k-1}v_{k-1}) \\ = & a_1Tv_1 + \cdots + a_{k-1}Tv_{k-1} \\ = & a_1\lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1}v_{k-1} \\ \to & 0 = a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_1 \\ \to & \lambda_k - \lambda_i \neq 0 \to a_i = 0 \\ \to & v_k = 0.\text{矛盾} \\ \to & v_1,\ldots,v_m\text{线性无关} \end{array}$$

□

定理 1.8. *有限维向量空间上的任意算子的本征值个数最多为空间维数*

$$V\text{是有限维的}, \forall T \in \mathcal{L}(V).T\text{的互不相同的本征值个数} \leqslant \dim V$$

证明.

$T\in\mathcal{L}(V).\lambda_1,\dots,\lambda_m$是$T$的互不相同的本征值，$v_1,\dots,v_m$是对应的本征向量.

$$\begin{aligned}&\to v_1,\dots,v_m\text{线性无关}\\&\to \operatorname{length} v\leqslant \dim V\end{aligned}$$

□

1.2 限制算子与商算子

$T\in\mathcal{L}(V).U$是V在T下的不变子空间.U自然地确定了两个算子$T_U\in\mathcal{L}(U)$和$T/U\in\mathcal{L}(V/U)$

定义 1.9. *限制算子(restriction operator), $T|_U$; 商算子(quotient operator), T/U*

$$\begin{array}{cc} & T\in\mathcal{L}(V).U\text{是}V\text{在}T\text{下的不变子空间}\\ \text{限制算子} & T|_U\in\mathcal{L}(U),T|_U(u)=Tu\\ \text{商算子} & T/U\in\mathcal{L}(V/U),T/U(v+U)=Tv+U\end{array}$$

Remark:

1. $\forall u\in U,T|_U(u)=T(u)\in U$.限定算子定义合理
2. $$\begin{aligned}&\forall v+U=w+U\to v-w\in U\\&\to T(v-w)\in U\\&\to Tv-Tw\in U\\&\to Tv+U=Tw+U\\&\to\text{商算子定义合理}\end{aligned}$$

Remark: $T|_U,T/U$给出了比T维数更小的算子，但这仍然不足以完整描述T

例 1.10. $T\in\mathcal{L}(F^2),T(x,y)=(y,0).U=\{(x,0):x\in F\}$

1 $$\begin{gathered}U\text{是}T\text{的不变子空间},T|_U\text{是}U\text{上的零算子}\\ \forall u\in U,u=(x,0)\to Tu=T(x,0)=(0,0)=\mathbf{0}\to T|_U=\mathbf{0}\end{gathered}$$

2 $$\begin{gathered}\text{没有}T\text{的不变子空间}W\to F^2=U\oplus W\\ W\text{是}V\text{的子空间}\to F^2=U\oplus W\\ \dim F^2=2\wedge\dim U=1\to\dim W=1\\ W\text{在}T\text{下不变}\to W\text{的每个非零向量都是}T\text{的本征向量}\\ Tv=\lambda v\to T(x,y)=\lambda(x,y)=(y,0)\\ \to\lambda x=y\wedge y=0\\ \to\lambda=0\\ \to W=\{0\}.\text{矛盾}\end{gathered}$$

3 $$\begin{gathered}T/U\text{是}F^2/U\text{上的零算子}\\ \forall(x,y)\in F^2\\ (T/U)((x,y)+U)=T(x,y)+U=(y,0)+U=0+U\\ \to(T/U)=\mathbf{0}\end{gathered}$$

Remark:这表示$T|_U$和T/U不能完整描述算子T

习题5.A

2 本征向量与上三角矩阵

2.1 多项式作用于算子

算子理论比线性映射理论更为丰富的重要原因是算子能够自乘成为幂。

定义 2.1. *算子的幂*

$$\begin{array}{cc} & T\in\mathcal{L}(V), m\in N^{+} \\ & T^1=T \\ & T^2=T\circ T \\ T^n & T^{n+1}=T^n\cdot T \\ T^0 & T^0=I_V \\ T^{-n} & T^{-n}=(T^{-1})^n \end{array}$$

定理 2.2. *算子的幂的性质*

$$T^mT^n=T^{m+n}; (T^m)^n=T^{mn}$$

定义 2.3. *算子的多项式* $p(T)$

$$\begin{gathered} T\in\mathcal{L}(V). p\in\mathcal{P}(F). z\in F \\ \rightarrow p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m \\ p(T)=a_0I+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_mT^m \end{gathered}$$

例 2.4. 多项式空间上的微分算子

$$\begin{aligned} D\in\mathcal{L}(\mathcal{P}(R)), Dq&=q' \\ p(x)&=7-3x+5x^2 \\ p(D)&=7I-3D+5D^2 \\ (p(D))(q)&=7q-3q'+5q'' \end{aligned}$$

定理 2.5. *p是$\mathcal{P}(F)\rightarrow\mathcal{L}(V)$上的线性映射*

证明. *Obvious.* □

定义 2.6. *多项式的积(product of polynomials)*

$$p, q\in\mathcal{P}(F). pq: (pq)(z)=p(z)q(z)$$

定理 2.7. *多项式的乘积性质*

$$\begin{array}{ccc} & p, q\in\mathcal{P}(F), T\in\mathcal{L}(V) & \\ 1 & (pq)(T)=p(T)q(T) & \text{对算子也成立} \\ 2 & p(T)q(T)=q(T)p(T) & \text{交换律} \end{array}$$

证明.

$$\begin{array}{ll} 1 & p(z)=\sum_0^m a_iz^i, q(z)=\sum_0^n b_iz^i, z\in F \\ & (pq)(z)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n a_ib_jz^{i+j} \\ \rightarrow & (pq)(T)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n a_ib_iT^{i+j}=(\sum_{i=0}^m a_iT^i)(\sum_{j=0}^n b_jT^j) \\ & =p(T)q(T) \end{array}$$ □

$$\begin{array}{ll} 2 & p(T)q(T)=(pq)(T)=(qp)(T)=q(T)p(T) \end{array}$$

2.2 本征值的存在性

复空间上算子的中心结果之一

定理 2.8.

有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值

证明.

$$
\begin{aligned}
&V\text{是}n\text{维向量空间}, n>0. T\in\mathcal{L}(V).\\
&\forall v\in V\wedge v\neq 0\\
&\rightarrow v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv\text{必然线性相关}\\
&\rightarrow\exists a_0,\ldots,a_n\rightarrow 0=a_0v+a_1Tv+\cdots+a_nT^nv\\
&\text{系数多项式}a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_m)\\
&\rightarrow 0=a_0v+a_1Tv+\cdots+a_nT^n\,v\\
&=(a_0I+a_1T+\cdots+a_nT^n)(v)\\
&=(c(T-\lambda_1I)\ldots(T-\lambda_mI))(v)\\
&\rightarrow\exists i\in 1\ldots n\rightarrow(T-\lambda_iI)\text{不单}\\
&\rightarrow T\text{有本征值}
\end{aligned}
$$

□

2.3 上三角矩阵

对于算子而言，只需要取同一个基即可研究算子的矩阵

定义 2.9. *算子的矩阵(matrix of an operator),* $\mathcal{M}(T)$

$$
\begin{gathered}
T\in\mathcal{L}(V), v_1,\ldots,v_n\text{是}V\text{的基}.\\
\mathcal{M}(T,(v_1,\ldots,v_n))=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n}\end{pmatrix}_{n\times n}\\
A_{i,j}\text{定义为:}Tv_k=A_{1,k}v_1+\cdots+A_{n,k}v_n
\end{gathered}
$$

例 2.10. $T\in\mathcal{L}(F^3), T(x,y,z)=(2x+y,5y+3z,8z)$

$$
\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&5&3\\0&0&8\end{pmatrix}
$$

Remark:线性代数的一个中心目标是要证明：给定算子T必定存在V的基使得算子关于此基有一个足够简单的矩阵.

定义 2.11. *矩阵的对角线(diagonal of a matrix)*

$$
\operatorname{diag} M=(A_{1,1},A_{2,2},\ldots,A_{n,n})
$$

定义 2.12. *上三角矩阵(upper-triangular matrix)*

$$
\forall i>j, A_{i,j}=0
$$

$$
\begin{pmatrix}x&\ldots&x\\0&\ddots&\vdots\\0&0&x\end{pmatrix}
$$

定理 2.13. *算子关于某个基成为上三角矩阵的条件*

$$\begin{array}{cc} & T\in\mathcal{L}(V),v_1,\ldots,v_n\text{是}V\text{的基. 以下三条件等价} \\ 1 & T\text{是关于}v_1,\ldots,v_n\text{的矩阵是上三角的} \\ 2 & \forall i=1\ldots n. Tv_i\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ 3 & \forall i\in 1\ldots n.\ \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i)\text{在}T\text{下是不变子空间} \end{array}$$

证明.

$$\begin{gathered} 1\to 2 \\ \mathcal{M}(T)=v_i=A_{1,i}v_1+\cdots+A_{i,i}v_i \\ \mathcal{M}(T)\text{是上三角的} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 3\to 2 \\ Tv_i\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ \to\forall v\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i),Tv=T(a_1v_1+\cdots+a_iv_i) \\ =a_1T(v_1)+\cdots+a_iT(v_i) \\ Tv_1\in\operatorname{span}v_1,\ldots,Tv_i\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ \to Tv\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \end{gathered}$$ □

$$\begin{gathered} 2\to 3 \\ Tv_1\in\operatorname{span}(v_1)\subset\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ Tv_2\in\operatorname{span}(v_1,v_2)\subset\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ \vdots \\ Tv_i\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \\ \to\forall v\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i)\to Tv\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i) \end{gathered}$$

定理 2.14. *复向量空间上的任意算子都存在基使得关于此基有上三角矩阵*

证明.

方法1:

$$\begin{gathered} \text{对}V\text{的维数使用归纳法.} \\ \dim V=1.\text{则结论成立} \\ \dim=n>1.\text{假设对}\dim n-1\text{维空间成立} \\ \lambda\text{是}T\text{的任意本征值(必有至少一个}\lambda\text{)} \\ U=\operatorname{range}(T-\lambda I) \\ T-\lambda I\text{不满}\to\dim U<\dim V \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \leftarrow Tu=(T-\lambda I)u+\lambda u \\ (T-\lambda I)u\in U\wedge\lambda u\in U\to Tu\in U \\ \to U\text{是}T\text{的不变子空间} \\ \to T|_U\text{是}U\text{上的算子} \\ \dim U<\dim V\to U\text{有上三角矩阵} \\ \to Tu_i=(T|_U)(u_i)\in\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_i) \\ V\text{的基}u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n \\ \to\forall k,Tv_k=(T-\lambda I)v_k+\lambda v_k \\ (T-\lambda I)v_k\in U=\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_m) \\ \to Tv_k\in\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_k) \\ \to T\text{关于基}u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n\text{有上三角矩阵} \end{gathered}$$

方法2:

$$\begin{gathered}
\text{对}V\text{的维数使用归纳法}\\
\dim V=1,\text{结论显然成立}\\
\dim V=n>1,\text{设所有}n-1\text{维复向量空间都成立}\\
v_1\text{是}T\text{的任意一个本征向量.}\\
U=\operatorname{span}(v_1),U\text{是}V\text{的不变子空间,且}\dim U=1\\
\dim V/U=n-1\\
\rightarrow V/U\text{具有上三角矩阵}\\
\forall i\in 2\ldots n\rightarrow (T/U)(v_i+U)\in\operatorname{span}(v_2+U,\ldots,v_i+U)\\
Tv_i\in\operatorname{span}(v_2,\ldots v_i)\\
\rightarrow T\text{关于}V\text{的基}v_1,\ldots,v_n\text{具有上三角矩阵}
\end{gathered}$$

□

定理 2.15. *T关于某个基具有上三角矩阵，T可逆当且仅当对角线元素都不是0*

$$T\in\mathcal{L}(V),\boldsymbol{v}\text{是}V\text{的基}.\mathcal{M}(T)\text{是上三角的}.T\text{可逆}\Leftrightarrow\operatorname{diag}\mathcal{M}(T)\text{中没有}0$$

证明.

$$\rightarrow\quad\begin{gathered}
\boldsymbol{v}\text{是}V\text{的基且}\mathcal{M}(T,\boldsymbol{v})\text{是上三角阵}\\
\text{对角线上的元素没有}0\rightarrow T\text{可逆}\\
Tv_1=\lambda_1v_1\\
\lambda_1\neq 0\rightarrow T(v_1/\lambda_1)=v_1\rightarrow v_1\in\operatorname{range}T\\
\exists a\in F\rightarrow T(v_2/\lambda_2)=av_1+v_2\rightarrow v_2\in\operatorname{range}T\\
\cdots\\
\boldsymbol{v}\in\operatorname{range}T\\
\boldsymbol{v}\text{是}V\text{的基}\rightarrow V\subset\operatorname{range}T\rightarrow\operatorname{range}T=V\rightarrow T\text{满}\\
\rightarrow T\text{可逆}
\end{gathered}$$

□

$$\rightarrow\quad\begin{gathered}
T\text{可逆}\rightarrow\text{对角线上元素没有}0\\
\operatorname{null}T=\{0\}\\
Tv_1\neq 0\rightarrow A_{1,1}\neq 0\\
\text{设}\exists i\in 2\ldots n,\lambda_i=0.\\
\operatorname{range}(T\,(\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i)))\subset\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_{i-1})\\
\rightarrow T\text{在}\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_i)\text{上不单. 矛盾}\\
\rightarrow\forall i\in 1,\ldots,n\rightarrow A_{i,i}\neq 0
\end{gathered}$$

Remark: 目前没有方法从算子的矩阵精确计算算子本征值的方法(但可以计算数值解).

定理 2.16. *若T关于V的某个基v是上三角矩阵，T的所有本征值是矩阵的对角线上的元素*

证明.

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}\text{是}V\text{的基，}T\text{关于此基有上三角矩阵}\\
\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\ldots&*\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}.\lambda\in F\\
\mathcal{M}(T-\lambda I)=\mathcal{M}(T-\lambda I)=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda&\cdots&*\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\lambda_n-\lambda\end{pmatrix}\\
(T-\lambda I)\text{不可逆}\Leftrightarrow\lambda=\lambda_1,\ldots,\lambda_n\text{中的某一个}\\
\rightarrow\lambda\text{是}T\text{的本征值}\Leftrightarrow\lambda=\lambda_1,\ldots,\lambda_n
\end{gathered}$$

□

例 2.17. $T\in\mathcal{L}(F^3),T(x,y,z)=(2x+y,5y+3z,8z).T$的本征值

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \operatorname{eig} T = \operatorname{diag} \mathcal{M}(T) = (2, 5, 8)$$

Remark: 一旦知道算子的本征值，可以利用Gauss消元法求出本征向量

习题5.B

3 本征空间与对角矩阵

定义 3.1. *对角矩阵(diagonal matrix)*

$$\forall i \neq j, A_{i,j} = 0$$

定义 3.2. *本征空间(eigenspace), $E(\lambda, T)$*

$$T \in \mathcal{L}(V) \wedge \lambda \in F. T\text{相应与}\lambda\text{的本征空间}$$
$$E(\lambda, T) = \operatorname{null}(T - \lambda I)$$

$E(\lambda, T)$是T的相应于λ的全体本征向量和0向量构成的集合

例 3.3. $T \in \mathcal{L}(V), V$的基v_1, v_2, v_3的矩阵是对角阵.$E(\lambda_1, T) = \operatorname{span}(v_1), E(5, T) = \operatorname{span}(v_2, v_3)$

定理 3.4. *本征空间之和是直和*

$$V\text{是有限维的}.T \in \mathcal{L}(V).\lambda_1, \ldots, \lambda_m\text{是}T\text{的互异的本征值}$$
$$E(\lambda_1, T) + \cdots + E(\lambda_m, T)\text{是直和}$$
$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim V$$

证明.

$$\begin{array}{rl} u_1 + \cdots + u_m = 0, u_i \in E(\lambda_i, T) & \\ \to u_i = 0 & \text{不同特征值的特征向量是线性无关的} \\ \to E(\lambda_1, T) + \cdots + E(\lambda_n, T)\text{是直和} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \\ = \dim(E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)) \leqslant \dim V \end{array}$$

□

定义 3.5. *可对角化(diagonalizable)*

$$T \in \mathcal{L}(V)\text{称为可对角化}: \exists\text{基}\boldsymbol{v} \to \mathcal{M}(T, \boldsymbol{v})\text{是对角阵}$$

例 3.6. $T \in \mathcal{L}(R^2), T(x, y) = (41x + 7y, -20x + 74y)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 41 & 7 \\ -20 & 74 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{M}(T, ((1, 4), (7, 5))) = \begin{pmatrix} 69 & 0 \\ 0 & 46 \end{pmatrix}$$

定理 3.7. *可对角化的充要条件*

V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$.$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$是$T$所有互异的本征值.下列条件等价

1 T可对角化

2 V有由T的本征向量构成的基

3 V有在T下不变的一维子空间$U_1,\ldots,U_n\to V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_n$

4 $V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$

5 $\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_m,T)$

证明.

$1\Leftrightarrow 2$ 算子$T\in\mathcal{L}(V)$,关于V的基$v_1,\ldots,v_n$有对角矩阵$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow Tv_i=\lambda_i v_i\to v_i$是本征向量

$2\to 3$ V有一个由T的本征向量组成的基$v_1,\ldots,v_n$

$\forall i, U_i=\operatorname{span}(v_i)$.

$\to T|_{U_i}\in\mathcal{L}(U_i)$

$V=\operatorname{span} v_i$

$\to V=\bigcup_1^n U_i$

$3\to 2$ V在T下不变的一维子空间$U_1,\ldots,U_n\wedge V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$

$\to U_1=\operatorname{span}(v_1),\ldots,U_n=\operatorname{span}(v_n)$

$\to Tv_i=\lambda_i v_i$

$\to v_i$是本征向量

$\to V=\operatorname{span}\boldsymbol{v}$

$2\to 4$ V有一个由T的本征向量$\boldsymbol{v}$组成的基$\to\forall v\in V, v\in\operatorname{span}\boldsymbol{v}$

$V=E(\lambda_1,T)+\cdots+E(\lambda_n,T)$

$\to V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_n,T)$

$4\to 5$ 和是直和$\to$和的维数等于维数的和

$5\to 2$ $\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_n,T)$

$E(\lambda_i,T)=\operatorname{null}(T-\lambda I)\to E(\lambda_i,T)$是子空间

$\to E(\lambda_i,T)=\operatorname{span}\boldsymbol{v}_i$

$\to(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$是$T$的一组本征向量

$\dim V=\sum E(\lambda_i,T)$

$\to V=\operatorname{span} v_1,\ldots,v_n$

$a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0, v_i\in E(\lambda_i,T)$

$\to v_i$线性无关

$\operatorname{length}\boldsymbol{v}=\dim V\to V$有基$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$是V的本征向量

□

Remark: 并非所有算子都可对角化，即使是复向量空间

例 3.8. 复向量空间上不可对角化的算子

$$T\in\mathcal{L}(C^2), T(w,z)=(z,0)$$

$$T(x,y)=\lambda(x,y)\to y=\lambda x, 0=\lambda y$$
$$\to\lambda^2x=0,\lambda y=0\to\lambda=0$$
$$E(0,T)=\operatorname{null}(T-0I)=\operatorname{null}T=\operatorname{span}((w,0))$$
$$V\neq E(0,T)\to T\text{不可对角化}$$

定理 3.9. *互异的本征值有空间的维数个，则可对角化*

$$T\in\mathcal{L}(V).T\text{有}\dim V\text{个互异的本征值}\rightarrow T\text{可对角化}$$

证明.

$$\begin{aligned}
T\in\mathcal{L}(V),\lambda_1,\ldots,\lambda_{\dim V}&\text{是}T\text{的互异的本征值}\\
v_i&\text{是}\lambda_i\text{对应的一个本征向量}\\
\rightarrow&\boldsymbol{v}\text{线性无关}\wedge\operatorname{length}\boldsymbol{v}=\dim V\\
&\rightarrow\boldsymbol{v}\text{是}V\text{的基}\\
\rightarrow&\text{可对角化(事实上使用这个基即可生成对角阵)}
\end{aligned}$$

□

Remark: 逆命题不成立

$$\begin{aligned}
T\in\mathcal{L}(F^3).T(z_1,z_2,z_3)&=(4z_1,4z_2,5z_3)\\
\mathcal{M}(T)&=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix}\\
(\mathcal{M}(T)-\lambda I)&=0\rightarrow\lambda=4,\lambda=5
\end{aligned}$$

例 3.10. 求基使得算子对角化

$$T\in\mathcal{L}(F^3),T(x,y,z)=(2x+y,5y+3z,8z)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}2&1&0\\&5&3\\&&8\end{pmatrix}&\rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=8\\
\rightarrow\exists v_1,v_2,v_3\in V\rightarrow V=\operatorname{span}\boldsymbol{v}&\wedge\mathcal{M}(T,\boldsymbol{v})\text{是对角阵}\\
T(x,y,z)&=\lambda(x,y,z)\\
\rightarrow(2x+y,5y+3z,8z)&=(2x,2y,2z)\\
\rightarrow 2x+y=2x\rightarrow y=0;8z&=2z\rightarrow z=0;\text{let: }x=1\\
v_1&=(1,0,0)\\
\\
(2x+y,5y+3z,8z)&=(5x,5y,5z)\\
5y+3z&=5y\rightarrow z=0\\
2x+y&=5x\rightarrow y=3x\\
\rightarrow v_2&=(1,3,0)\\
\\
(2x+y,5y+3z,8z)&=(8x,8y,8z)\\
2x+y&=8x\rightarrow y=6x\\
5y+3z&=8y\rightarrow y=z\\
\rightarrow v_3&=(1,6,6)\\
\\
\mathcal{M}(T,\boldsymbol{v})&=\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

习题5.C