Chapter 9

BY 定积分

1 Def

1. 分割

$$\text{闭区间}[a,b]\text{上有}n-1\text{个点为}a=x_0,\ldots,x_n=b$$
$$[a,b]\text{区间分割为}n\text{个小闭区间}\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$$
$$\text{这些分点或者小闭子区间称为}[a,b]\text{的分割}$$
$$\text{分割的模}\|T\|=\max\{\Delta_i\}$$

2. 积分和、黎曼和

$$f\text{是}[a,b]\text{上的函数.对于}[a,b]\text{的一个分割}\{\Delta\}$$
$$\text{取任意点}\xi_i\in\Delta_i$$
$$\text{黎曼和、积分和称为：}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Remark：积分和 和分割T有关也和中间的点ξ_i的选取有关

3. R积分

$$f\text{是}[a,b]\text{上的函数，}J\in R$$
$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\text{分割}T,\forall\xi_i\in T\wedge\|T\|<\delta\rightarrow\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$$
$$\text{称函数}f\text{在区间}[a,b]\text{上黎曼可积}$$
$$\text{记为：}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=J$$

4. 牛顿-莱布尼兹公式

$$\begin{array}{ll} & f\text{在}[a,b]\text{上连续，且在}[a,b]\text{上存在原函数}F,\text{则}f\text{在}[a,b]\text{上可积}\\ \wedge & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\\ \text{Pr} & F(b)-F(a)=\sum (F(x_i)-F(x_{i-1}))\\ & =\sum F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum f(\eta_i)\Delta_i\\ & \text{由于}f\text{在}[a,b]\text{连续}\rightarrow f\text{一致连续}\\ & \rightarrow|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\\ & \rightarrow\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-\{F(b)-F(a)\}\right|\\ & =\sum (f(\xi_i)-f(\eta_i))\Delta x_i\\ & <\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)b-a<\varepsilon \end{array}$$

5. 可积的必要条件

闭区间上可积必有界　逆命题不成立(狄利克雷函数)

6. 达布上下和

$$S=\sum\max_{x\in\Delta x_i}f(x)\Delta x_i;s=\sum\min_{x\in\Delta x_i}f(x)\Delta x_i$$

7. 可积的充要条件

$$f\text{在}[a,b]\text{上}R\text{可积}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{分割}T\text{使得}S(T)-s(T)<\varepsilon$$
$$f\text{在}[a,b]\text{上}R\text{可积}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{分割}T\rightarrow\sum\omega_i\Delta x_i<\varepsilon;\omega_i=M-m;$$

8. 可积的充分条件；可积函数类

    a. 连续则可积；利用一致连续可证

    b. 闭区间上只有有限间断点的有界函数，则f在闭区间上可积(加入断点为分割点即可)

    c. 闭区间上单调函数可积(单调则有界，使分割小于$\frac{\delta}{f(b)-f(a)}$即可证)

9. 定积分的性质

    a. 线性性:$\int(a\,f(x)+b\,g(x))\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x+b\int g(x)\mathrm{d}x$

    b. 积函数可积:f,g可积$\Rightarrow f\cdot g$可积(但积分值一般不等)

    c. 区间可加性:$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$

    d. 保不等式:$f\geqslant 0\rightarrow\int_a^b f\geqslant 0$; $f<g\Rightarrow\int f\leqslant\int g$

    e. 绝对可积性:f可积$\rightarrow|f|$可积. Pr: $||f(x')|-|f(x'')||\leqslant|f(x')-f(x'')|$

10. 积分中值定理

$$\text{第一中值定理}$$
$$f\text{在}[a,b]\text{连续}\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]\wedge\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$
$$\text{推广形式}$$
$$f,g\text{在}[a,b]\text{连续},g\text{在}[a,b]\text{上不变号}\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]\wedge\int_a^b f\cdot g=f(\xi)\int_a^b g$$
$$\text{Remark: 用拉格朗日证明必有在}(a,b)\text{内的}\xi\text{复合上述条件}$$

$$\text{第二中值定理}$$
$$f\text{在}[a,b]\text{上可积}\begin{cases}g\text{在}I\text{上减}\wedge g\geqslant 0\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]\wedge\int_a^b f\cdot g=g(a)\int_a^\xi f\\ g\text{在}I\text{上增}\wedge g\geqslant 0\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]\wedge\int_a^b f\cdot g=g(b)\int_\eta^b f\end{cases}$$
$$\text{推论}\qquad f\text{在}[a,b]\text{可积},g\text{单调}\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]\wedge\int_a^b fg=g(a)\int_a^\xi f+g(b)\int_\xi^b f$$

11. 微积分学基本定理:

$$\text{可积必连续}\quad f\text{可积}\Rightarrow F(x)=\int_a^x f\text{连续}$$
$$\text{连续必可导}\quad f\text{连续}\Rightarrow F(x)=\int_a^x f\text{可导}$$

12. 定积分的换元积分法和分部积分法

$$\text{换元}\quad f\text{在}[a,b]\text{上连续},\varphi'\text{在}[\alpha,\beta]\text{上可积}\wedge\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,\varphi[a,b]\subseteq[a,b]$$
$$\Rightarrow\qquad\int_a^b f=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\cdot\varphi'\mathrm{d}x$$

$$\text{分部}\quad u,v\text{都是}[a,b]\text{上的可谓函数}\wedge u',v'\text{在}I\text{上可积}$$
$$\Rightarrow\qquad\int_a^b uv'\mathrm{d}x=uv\,|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x$$

13. 泰勒公式的积分型余项

$$
\begin{gathered}
\text{推广的分部积分公式}\\
\int_a^b uv^{(n+1)} = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)} v]|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)} v
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{构造泰勒公式}\\
\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\\
=[(x-t)^n f^{(n)} + n(x-t)^{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + n!f]|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x 0\, f\\
=n!f(x) - n!\left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(x-x_0)^n}\right]\\
=n!R_n(x)\\
\to R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}\\
\text{使用推广的第一中值定理} \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n \mathrm{d}x\\
=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\text{为拉格朗日余项}\\
\text{直接使用第一微分中值定理} \Rightarrow\\
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-x_0)\\
=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\text{为柯西余项}
\end{gathered}
$$

2 Trick

3 Formula

1. 沃利斯公式

$$
\begin{gathered}
J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x\\
= -\sin^{n-1}x \cdot \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x \mathrm{d}x\\
=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\\
=(n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n\\
\Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}\\
J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2};\ J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1;\\
\Rightarrow J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\
J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\\
J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x\\
\text{Wallis公式:}\ \frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{2m!!}{(2m-1)!!}\right]\cdot\frac{1}{2m+1}
\end{gathered}
$$

2. 变限积分的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$