Chapter14

BY 幂级数

1 Def & Theo

1.1 幂级数

1. 幂级数：$\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$
2. 幂级数的收敛半径：幂级数的收敛区间是x_0为中心的两边长度相等为R的区间，R为收敛半径

$$\begin{array}{cc} R=0 & \text{仅在}x_0\text{处收敛，其它发散} \\ R=+\infty & \text{在}(-\infty,+\infty)\text{内收敛} \\ R\in R^+ & \text{在}(-R,R)\text{内收敛，}(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)\text{发散}.\pm R\text{处需要进一步判断} \end{array}$$

1.2 幂级数的收敛半径

这里默认了$x_0=0$

1. 阿贝尔定理：

$$x\text{在}\bar{x}\neq 0\text{处收敛}\Rightarrow |x|<|\bar{x}|\text{内收敛且绝对收敛}$$
$$x\text{在}\bar{x}\text{处发散}\Rightarrow |x|>|\bar{x}|\text{发散}$$

2. 根式求半径：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho\wedge\begin{cases}\rho\in R^+\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}\\ \rho=0\Rightarrow R=+\infty\\ \rho=+\infty\Rightarrow R=0\end{cases}$$

3. 根式上极限求半径(柯西-阿达马)：

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\wedge\begin{cases}\rho\in R^+\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}\\ \rho=0\Rightarrow R=+\infty\\ \rho=+\infty\Rightarrow R=0\end{cases}$$

1.3 幂级数在收敛区间内的性质

1. 幂级数在收敛半径内，内闭一致收敛且绝对收敛
2. 阿贝尔：幂级数在收敛半径的端点处收敛，则在$[0,R]\vee[-R,0]$上一致收敛

   Pr：$\sum a_nx^n=\sum a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.\sum a_nR^n$收敛 $\wedge$ $\sum\left(\frac{x}{R}\right)^n$在$[0,\ R]$上递减且一致有界，由阿贝尔判别法在闭区间上一致收敛
3. 幂级数的和函数是$(-R,R)$上的连续函数，若幂级数在端点处收敛，则在此端点处单侧连续
4. 幂级数逐项求导和逐项求积后的幂级数和原幂级数具有相同的收敛半径

$$\text{逐项求导}\quad\sum_1^\infty ia_ix^{i-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$
$$\text{逐项求积}\quad\sum_0^\infty\frac{a_i}{i}x^{i+1}=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots$$

推论：幂级数在收敛半径内可以任意阶求积、求导

推论：幂级数的系数为：$a_0 = f(x_0); a_n = \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}$

5. a幂级数在收敛半径内求导和求积运算和求和极限可交换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_n x^n\right)$$
$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n x^n \mathrm{d}x\right)$$

1.4 幂级数的运算

1. 幂级数相等：在U_{x_0}内具有相同的和函数，称在x_0处相等

2. 幂级数相等⇒对应的同次幂的系数相等

   推论：和函数为奇函数⇒幂级数不含偶次幂;和函数为偶函数⇒幂级数不含奇次幂

3. 幂级数在收敛半径内的线性性：

$$\sum a_n x^n \text{收敛半径为} R_a; \sum b_n x^n \text{收敛半径为} R_b$$
$$\lambda \sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n; |x| < R_a$$
$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n; |x| < \min\{R_a, R_b\}$$
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum_n b_n x^n\right) = \sum c_n x^n; |x| < \min\{R_a, R_b\}$$
$$c_n = \sum_{k=0} a_k b_{n-k} (\text{柯西乘积, 对角线法则})$$

1.5 函数展开成幂级数，泰勒级数

1. 函数在x_0处有任意阶导数，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

   称为f在x_0处的泰勒级数

2. 在开区间上函数等于幂级数的充分条件是余项的极限在开区间内为0

$$f\text{在}x_0\text{处有任意阶导数，}f\text{在}U_{x_0}(r)\text{上等于泰勒级数} \Leftrightarrow \forall x \in U_{x_0}(r), \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

   反例:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} . f^{(n)}(x) = 0$$
$$f\text{的泰勒级数为:} \sum 0 + 0 + \cdots = 0$$
$$\text{但明显} f \text{不为0函数}$$

2 Formula

2.1 一些幂级数的收敛函数

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{1-x} & \sum x^{i-1} = 1 + x + x^2 + \cdots & (-1,1) \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \sum i\,x^{i-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots & (-1,1) \\ \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} & \displaystyle\sum_0^\infty \int_0^x t^n \mathrm{d}t & (-1,1) \end{array}$$

2.2 初等函数的幂级数展开

1. 多项式：$n > \deg(p), R_n(x) = 0 \Rightarrow$ 可以展开成泰勒级数，且在0处展开为自身

2. $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}, x \in R$

$$f^{(n)}(0) = 1.$$
$$\text{拉格朗日余项}: R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \theta \in [0,1]$$
$$R_n(x) \leqslant \frac{e^x}{(n+1)!} |x|^{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$
$$\Rightarrow \text{必能展开成泰勒级数}$$

3. $\sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$$\text{拉格朗日余项：} R_n(x) = \frac{\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

推论:$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

4. $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

$$\text{使用比式判别法：} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{-n}\right| = 1 \to R = 1, \text{收敛域为}(-1,1]$$
$$\text{在}[0,1]\text{使用拉格朗日余项}|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$
$$\text{在}(-1,0)\text{使用柯西余项：} |R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} (1-\theta)^n x^{n+1}\right|$$
$$= \frac{1}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n |x|^{n+1}$$
$$\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$$

5. $(1+x)^\alpha = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \cdots$

$$\text{使用比式判别法}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)} = \frac{\alpha-n}{n+1} = -1$$
$$\to\text{收敛半径为1}$$
$$\text{柯西余项为：}R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}$$
$$|x|<1\to 0<(1+\theta x)^{\alpha-1}<(1+|x|)^{\alpha-1}\leqslant 2^{\alpha-1}\to(1+\theta x)^{\alpha-1}\text{是与}n\text{无关的有界量}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

6. $\arctan x = \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots . x\in[-1,1]$

2.3 函数展成泰勒级数的余项

$$\begin{array}{cl}
\text{积分} & \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t \\
\text{拉格朗日} & \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}. \quad \xi\in(0,x) \\
\text{柯西} & \dfrac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1} \quad \theta\in[0,1] \\
\text{施洛米希}-\text{洛希} &
\end{array}$$

3 Extension

1. 幂级数倒数的估计

$$\frac{1}{\sum a_i x^i}$$

2. 复合函数的幂级数

3. 拉格朗日级数