第十章 微分形式的积分

积分可以在不同的对象上进行研究。

第六章R-S积分理论研究在在实轴的自区间上的积分

第十一章可以将积分理论延伸到测度空间而不仅是实轴的子空间上的积分

本章研究欧氏空间中的积分理论， 关于不同变量函数的积分。 例如线积分、 变量替换公式、 微分形式的结构。 微分形式主要用来叙述Stokes定理， 它相当于微积分基本定理的推广到n维欧式空间的形式。

1 积分

定义 1.1.

$$
\begin{array}{ll}
k-\text{方格} & I^k \subset R^k. I^k = \{\boldsymbol{x}: x_i \in [a_i, b_i]\} \\
f\text{是}I^k\text{上的实连续函数} & f = f_k \\
 & f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \mathrm{d}x_k \\
 & f_k\text{在}I^k\text{上一致连续} \rightarrow f_{k-1}\text{存在且连续} \\
\text{累次积分} & \int_{I^k} f(x) \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \mathrm{d}x_1
\end{array}
$$

定理 **1.2.** *每个k方格上的实连续函数，累次积分的值与积分顺序无关*

$$\forall f \in \mathscr{C}(I^k), L(f) = L'(f). L(f)\text{是一种累次积分，}L'f\text{是另一种累次积分}$$

证明.

$$
\begin{array}{c}
h(\boldsymbol{x}) = h_1(x_1) \cdots h_k(x_k). h_i \in \mathscr{C}([a_i, b_i]) \\
\rightarrow L(h) = \prod_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i) \mathrm{d}x_i = L'(h) \\
\text{设}\mathcal{A}\text{是所有这些函数}h\text{的一切有限和组成的集合} \\
\forall g \in \mathcal{A} \rightarrow L(g) = L'(g). \\
\mathcal{A}\text{是}I^k\text{上的代数} \\
\rightarrow \mathcal{A}\text{内必有函数序列可以逼近}I^k\text{上的连续函数} \quad \text{Stone}-\text{Weierstrass定理} \\
V = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i). \\
f \in \mathscr{C}(I^k). \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{A}, \|f - g\| < \frac{\varepsilon}{V} \\
\text{范数}\|f\| = \max_{\boldsymbol{x} \in I^k} |f(\boldsymbol{x})| \\
\rightarrow |L(f-g)| < \varepsilon, |L'(f-g)| < \varepsilon \\
\rightarrow L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f) \\
\rightarrow |L(f) - L'(f)| = |L(f-g) + L'(g-f)| < 2\varepsilon
\end{array}
$$

□

定义 1.3. *支集*

$$R^k\text{上一个实函数或复函数}f\text{的支集}:=f(x)\neq 0\text{的一切点的集的闭包}$$
$$f\text{是具有紧支集的连续函数，}I^k\text{是含有}f\text{的支集的}k-\text{方格}$$
$$\to\int_{R^k}f=\int_{I^k}f\ (I^k\text{上这些点为0})$$

现在把R^k上积分的定义扩充到带有紧支集的连续函数的极限函数上取。这正是Lebesgue积分

例 1.4.

$$k-\text{单形}\qquad Q^k=\{\boldsymbol{x}\in R^k\colon x_1+\cdots+x_k\leqslant 1\wedge x_i>0\}$$
$$f\in\ell(Q^k),f\text{在}Q^k\text{之外定义为0将扩充为}I^k\text{上的函数}$$
$$\to\int_{Q^k}f=\int_{I^k}f$$
$$\text{积分}\int_{I^k}f\text{可能不连续，需要证明它连续且累次积分可交换}$$
$$\delta\in(0,1),\varphi(t)=\begin{cases}1 & t\leqslant 1-\delta\\ \frac{1-t}{\delta} & 1-\delta<t\leqslant 1\\ 0 & 1<t\end{cases}$$
$$F(x)=\varphi(x_1+\cdots+x_k)f(\boldsymbol{x})\ \ (\boldsymbol{x}\in I^k)\to F\in\ell(I^k)$$
$$\boldsymbol{y}=(x_1,\ldots,x_{k-1}),\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y},x_k).$$
$$S=\{x_k\colon\boldsymbol{y}\in I^{k-1}\wedge F(\boldsymbol{y},x_k)\neq f(\boldsymbol{y},x_k)\}$$
$$\to S\text{是空间或长度小于}\delta\text{的开区间}$$
$$\varphi\in[0,1]\to|F_{k-1}(\boldsymbol{y})-f_{k-1}(\boldsymbol{y})|\leqslant\delta\|f\|\ \ (y\in I^{k-1})$$
$$\lim_{\delta\to 0}f_{k-1}\text{为连续函数序列的一致极限}.\ f_{k-1}\in\ell(I^{k-1})$$
$$\to\int_{I^k}f\text{存在}\wedge\left|\int_{I^k}F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{I^k}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\right|\leqslant\delta\|f\|$$
$$\to\text{累次积分的次序无关}$$

2 本原映射

本原映射研究对带有可逆导数的ℓ'的映射的局部的性质

定义 2.1. *本原映射*

$$\text{开集}E\subset R^n.\boldsymbol{G}\colon E\to R^n.m\in N^+,\text{实函数}g\colon E\to R$$
$$\text{本原映射}G\qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\sum_{i\neq m}x_i\boldsymbol{e}_i+g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_m\ \ (\boldsymbol{x}\in E)$$
$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+[g(\boldsymbol{x})-x_m]\boldsymbol{e}_m$$
$$\text{Remark}\qquad\text{这表明本原映射只改变一个坐标}$$

$$g\text{在}\boldsymbol{a}\in E\text{可微}\to G\text{在}\boldsymbol{a}\text{也可微}$$
$$G'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & & \vdots\\ (D_1g)(\boldsymbol{a}) & \cdots & (D_mg)(\boldsymbol{a}) & \cdots & (D_ng)(\boldsymbol{a})\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$
$$J_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{a})=\det\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{a})=(D_mg)(\boldsymbol{a})$$

定义 2.2. *对换*

$$\begin{array}{ll}
\text{对换} & R^n\text{上，只把标准基的某一对成员交换，其它成员不变的线性算子} \\
& B(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3+x_4\boldsymbol{e}_4)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_4+x_3\boldsymbol{e}_3+x_4\boldsymbol{e}_4 \\
& \text{因此对换也可以看成交换坐标而不是基向量} \\
\text{射影} & P_0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}; P_m\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_m\boldsymbol{e}_m
\end{array}$$

定理 2.3. *连续可微函数在零处为零。那么在零的领域内函数可被表示成本原映射和对换的复合。*

$$\begin{array}{ll}
& \text{开集}E\subset R^n. \boldsymbol{F}\colon E\to R^n. \boldsymbol{F}\in\ell'. \boldsymbol{0}\in E, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}. \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{0})\text{可逆} \\
\to & \exists U_{\boldsymbol{0}}(r)\subset R^n, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=B_1\cdots B_{n-1}\boldsymbol{G}_n\circ\cdots\circ\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}). \\
& B_i\text{是对换或恒等算子}; \boldsymbol{G}_i\text{是本原映射}
\end{array}$$

证明.

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1. 1\leqslant m\leqslant n-1\text{做归纳假定} \\
V_m\text{是}\boldsymbol{0}\text{的领域}, \boldsymbol{F}_m\in\ell'(V_m), \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{F}_m'(\boldsymbol{0})\text{可逆} \\
P_{m-1}\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x})=P_{m-1}\boldsymbol{x} \ \ (\boldsymbol{x}\in V_m) \\
\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x})=P_{m-1}\boldsymbol{x}+\sum_{i=m}^n\alpha_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \\
\alpha_i\in\ell'(V_m) \\
\boldsymbol{F}_m'(\boldsymbol{0})\boldsymbol{e}_m=\sum_{i=m}^n(D_m\alpha_i)(\boldsymbol{0})\boldsymbol{e}_i \\
\boldsymbol{F}_m'(\boldsymbol{0})\text{可逆}\to\sum_{i=m}^n(D_m\alpha_i)(\boldsymbol{0})\boldsymbol{e}_i\neq\boldsymbol{0} \\
B_m\text{是交换}m\text{与}k\text{的对换} \\
\text{let: }\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+[\alpha_k(\boldsymbol{x})-x_m]\boldsymbol{e}_m \ \ (\boldsymbol{x}\in V_m) \\
\to\boldsymbol{G}_m\in\ell'(V_m), \boldsymbol{G}\text{是本原映射} \\
(D_m\alpha_k)(\boldsymbol{0})\neq 0\to\boldsymbol{G}_m'(\boldsymbol{0})\text{可逆} \\
\to\exists U_m\subset V_m\wedge\boldsymbol{0}\in U_m \\
\boldsymbol{G}_m\colon U_m\to V_{m+1}\text{的}1-1\text{映射，}\boldsymbol{G}_m^{-1}\text{在}V_{m+1}\text{中连续可微 \ 反函数定理} \\
\text{let: }\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{y})=B_m\boldsymbol{F}_m\circ\boldsymbol{G}_m^{-1}(\boldsymbol{y}) \ \ (\boldsymbol{y}\in V_{m+1}) \\
\to\boldsymbol{F}_{m+1}\in\ell'(V_{m+1}); \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}; \boldsymbol{F}_{m+1}'(\boldsymbol{0})\text{可逆} \\
\boldsymbol{x}\in U_m, P_m\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x}))=P_mB_m\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x}) \\
=P_m[P_{m-1}\boldsymbol{x}+\alpha_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_m+\cdots] \\
=P_{m-1}\boldsymbol{x}+\alpha_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_m \\
=P_m\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x}) \\
\to P_m\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{y})=P_m\boldsymbol{y} \ \ (\boldsymbol{y}\in V_{m+1}) \\
\to\text{对于}m+1\text{成立} \\
\\
B_mB_m=I. \boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x}). \\
\Leftrightarrow\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x})=B_m\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{x})) \ \ (\boldsymbol{x}\in U_m) \\
\to\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1=B_1\boldsymbol{F}_2\circ\boldsymbol{G}_1 \\
=B_1B_2\boldsymbol{F}_3\circ\boldsymbol{G}_2\circ\boldsymbol{G}_1 \\
=\cdots \\
=B_1\cdots B_{n-1}\boldsymbol{F}_n\circ\boldsymbol{G}_{n-1}\circ\cdots\circ\boldsymbol{G}_1 \\
\boldsymbol{F}_n=P_{m-1}\boldsymbol{x}+\sum_{i=m}^n\alpha_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i\text{是本原映射} \\
\to\boldsymbol{F}\text{可被分解成对换和本原映射的复合}
\end{array}$$

□

3 单位的分割

单位的分割使得在全局中利用局部信息

定理 3.1.

$$
\begin{array}{cc}
 & K\text{是}R^n\text{的紧子集，}\{V_\alpha\}\text{是}K\text{的开覆盖。}\\
\to & \text{必有函数}\psi_1,\ldots,\psi_s\in\ell(R^n)\text{满足}\\
1 & \forall i\in 1\ldots s\to\psi_i\in[0,1]\\
2 & \psi_i\text{的支集属于某个}V_\alpha\\
3 & \forall \boldsymbol{x}\in K,\psi_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\psi_s(\boldsymbol{x})=1
\end{array}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\forall\boldsymbol{x}\in K,\text{指标函数}\alpha(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in V_{\alpha(\boldsymbol{x})}.\\
\to\exists\text{开球}B_{\boldsymbol{x}},\text{开球}W_{\boldsymbol{x}}\wedge\overline{B_{\boldsymbol{x}}}\subset W(\boldsymbol{x})\subset\overline{W(\boldsymbol{x})}\subset V_{\alpha(\boldsymbol{x})}\\
\to\varphi_1,\ldots,\varphi_s\in\ell(R^n),\text{在}B(\boldsymbol{x}_i)\text{上}\varphi_i(\boldsymbol{x})=1,\text{在}W_{\boldsymbol{x}}\text{之外}\varphi(\boldsymbol{x}_i)=0\\
\\
K\text{紧}\to K\text{中一系列点}\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s,K\subset U_{\boldsymbol{x}_1}(r)\cup\cdots\cup U_{\boldsymbol{x}_s}(r)\\
\psi_1=\varphi_1;\psi_{i+1}=(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1}\\
\psi_1+\cdots+\psi_i=1-(1-\varphi_i)\cdots(1-\varphi_i)\\
\psi_1+\cdots+\psi_{i+1}=1-(1-\varphi_i)\cdots(1-\varphi_i)+(1-\varphi_{i+1})(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i)\\
\to\textstyle\sum_{i=1}^s\psi_i(\boldsymbol{x})=1-\prod_{i=1}^s(1-\varphi_i(\boldsymbol{x}))\ (\boldsymbol{x}\in R^n)\\
\forall\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_i)\to\varphi_i(\boldsymbol{x})=1\to\textstyle\prod_{i=1}^s(1-\varphi_i(\boldsymbol{x}))=0\\
\to\psi_1+\cdots+\psi_s=1
\end{gathered}
$$

□

推论:

$f\in\ell(R^n),f$的支集位于K内$.\ f=\sum_{i=1}^s\psi_i f.\ \psi_i f$的支集在某个$V_\alpha$中

4 变量代换

重积分中的变量代换的作用，在这里仅讨论具有紧支集的连续函数。

定理 4.1. *变量代换公式*

$$
\begin{array}{cc}
 & T\text{是把开集}E\subset R^k\text{映入}R^k\text{中的}1-1\ell'\text{映射}\\
 & \forall\boldsymbol{x}\in E,J_T(\boldsymbol{x})\neq 0.\,f\text{是}R^k\text{上的连续函数，}f\text{的支集是紧的且位于}T(E)\text{内}\\
\to & \displaystyle\int_{R^k}f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int_{R^k}f(T(\boldsymbol{x}))\,|\,J_T\,|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{array}
$$

Remark:

$$
\begin{gathered}
\text{根据反函数定理，}J_T(\boldsymbol{x})\neq 0\to T^{-1}\text{是}T(E)\text{上的连续函数，因此上式右端的被积函数在}E\text{中有紧支集}\\
|\,J_T\,|\text{的绝对值。}k=1\text{时}T\text{是}R\to R\text{的}1-1\ell'\text{映射}.\,J_T(x)=T'(x)\\
T\text{是递增的，那么对于具有紧支集的一切连续函数}f\\
\to\textstyle\int_R f(y)\mathrm{d}y=\int_R f(T(x))T'(x)\mathrm{d}x\\
\text{如果}f\text{是减函数}\to T'(x)<0.\,f\text{在支集内部为正}\to\textstyle\int_R f(y)\mathrm{d}y\text{是正的,但}\int_R f(T(x))T'(x)\mathrm{d}x\text{是负的}\\
\to\textstyle\int_R f(y)\mathrm{d}y=-\int_R f(T(x))T'(x)\mathrm{d}x=\int_R f(T(x))\,|\,T'(x)\,|\,\mathrm{d}x\\
\text{这是因为现在的积分是}R^k\text{的子集上的积分，但没有对这些子集配置方向或定向}
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\text{若}T\text{是本原映射且}T\in\ell'.\text{那么变量替换公式是成立的}\\
T\text{是交换两个坐标的线性映射时，积分变换依然成立}\\
\text{若定理对变换}P,Q\text{成立，}S(\boldsymbol{x})=P(Q(\boldsymbol{x}))\\
J_P(Q(\boldsymbol{x}))J_Q(\boldsymbol{x})=\det P'(Q(\boldsymbol{x}))\det Q'(\boldsymbol{x})\\
=\det P'(Q(\boldsymbol{x}))Q'(\boldsymbol{x})\\
=\det S'(\boldsymbol{x})=J_S(\boldsymbol{x})\\
\to|J_P(Q(\boldsymbol{x}))\times J_Q(\boldsymbol{x})|=|J_S(\boldsymbol{s})|\\
\int f(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z}=\int f(P(\boldsymbol{y}))|J_P(\boldsymbol{y})|\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\
=\int f(P(Q(\boldsymbol{x})))|J_P(Q(\boldsymbol{x}))||J_Q(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
=\int f(S(\boldsymbol{x}))|J_S(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{gathered}
$$

□

$$
\begin{gathered}
\forall\boldsymbol{a}\in E,U_{\boldsymbol{a}}\subset E,\text{在}U\text{中}\\
T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{a})+B_1\cdots B_{k-1}G_k\circ G_{k-1}\circ\cdots\circ G_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\\
\to T(\boldsymbol{x})\text{在}U_{\boldsymbol{a}}\text{的局部内都满足积分变换公式}\\
\forall\boldsymbol{y}\in T(E)\text{必在开集}V_{\boldsymbol{y}}\subset T(E)\text{里，使得对支集在}V_{\boldsymbol{y}}\text{中的一切连续函数}f\text{，换元公式都成立}\\
f\text{是具有紧支集}K\subset T(E)\text{的连续函数，因为}\{V_{\boldsymbol{y}}\}\text{覆盖了}K\\
\to f=\sum\psi_i f,\psi_i\text{连续，并且每个}\psi_i\text{的支集在某个}V_y\text{内}\\
\to\forall\psi_i f,\text{换元公式是成立的}\\
\to\sum\psi_i f\text{换元公式是成立的}
\end{gathered}
$$

5 微分形式

这里的目标是得到Stokes定理。

之前都是讨论在开集上的可微函数和导数，这样避免了在边界点上遇到的困难

但是Stokes定理叙述需要在紧集上讨论可微函数才便于讨论

约定:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{f}\text{是紧集}D\subset R^k\text{到}R^n\text{内的}\ell'\text{映射或}\ell''\text{映射}\\
\text{存在开集}W\subset R^k\text{到}R^n\text{的}\ell'\text{或}\ell''\text{映射}\boldsymbol{g}.\text{使得}D\subset W\wedge\boldsymbol{x}\in D\text{时}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})
\end{gathered}
$$

定义 5.1.

$$
\begin{gathered}
E\text{是}R^n\text{中的开集，}E\text{中的}k-\text{曲面是从紧集}D\subset R^k\text{到}E^n\text{内的的}\ell'\text{映射}\Phi\\
D\text{叫}\Phi\text{的参数域。}D\text{中的点记为:}\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_k)\\
\text{限定}D\text{是}k-\text{方格}I^k\text{或者}k-\text{单形}Q^k\text{。(这个限制不会对理论失去一般性)}\\
E\text{中的}k-\text{曲面定的定义是}E\text{中的映射，而不是}E\text{的子集}\\
\text{这与曲线的定义}\gamma\text{的定义是一致的}.1-\text{曲面恰好就是连续可微的曲线}
\end{gathered}
$$

定义 5.2. *微分形式*

$$
\begin{gathered}
E\text{是}R^n\text{中的开集，}E\text{中的}(k\geqslant 1)\text{次的微分形式，简称}E\text{中的}k-\text{形式}:=\\
\omega=\sum a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\
\text{指标}i_1,\ldots,i_k\text{各自从1到}n\text{独立变化作符号表示的函数，}E\text{中的每个}k-\text{曲面}\\
\int_\Phi\omega:=\int_D\sum a_{i_1\cdots i_k}(\Phi(\boldsymbol{u}))\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{u}.\ D\text{是}\Phi\text{的参数域}\\
\text{规定一个数}\omega(\Phi)=\int_\Phi\omega.\\
\text{假定}a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\text{都是}E\text{内的实连续函数}\\
\phi_1,\ldots,\phi_n\text{是}\Phi\text{的分量}\\
\to\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}=\text{是}(u_1,\ldots,u_k)\to(\phi_{i_1}(\boldsymbol{u}),\ldots,\phi_{i_k}(\boldsymbol{u}))\text{上的映射所确定的}\\
\text{如果}a_{i_1}\cdots a_{i_k}\text{都属于}\ell'\text{活着}\ell''\text{，就说}k-\text{形式}\omega\text{属于}\ell'\text{类或}\ell''\text{类}\\
E\text{中的}0-\text{形式规定是}E\text{中的一个连续函数}
\end{gathered}
$$

例 5.3.

1 $$\gamma\text{是}R^3\text{中的}1-\text{曲面}(\ell'\text{类曲线})\text{，参数域是}[0,1]$$

$$\omega = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t))\mathrm{d}t$$

$$= \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0)$$

$$\text{注意到这里}\int_\gamma \omega\text{只依赖与}\gamma(0)\text{和终点}\gamma(1)$$

$$\text{特别的,如果}\gamma\text{是闭曲线}\int_\gamma \omega = 0.(\text{这对任何恰当的}1-\text{形式的}\omega\text{都是成立的})$$

$$1-\text{形式的积分通常称为线积分或曲线积分}$$

$$a>0, b>0.\ \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)\ \ (t\in[0,2\pi]).\ \gamma\text{是}R^2\text{中的闭曲线}$$

$$\int_\gamma x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} a\cos t\mathrm{d}(b\sin t) = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t = \pi ab$$

$$\int_\gamma y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} b\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t) = ab\int_0^{2\pi} -\sin^2 t\mathrm{d}t = -\pi ab$$

$$\int_\gamma x\mathrm{d}y\text{是}\gamma\text{围成区域的面积，这是Green定理的特殊情形}$$

$$D{:}\ r\in[0,1];\ \theta\in[0,\pi];\ \varphi\in[0,2\pi]\text{确定的}3-\text{方格}$$

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (x,y,z);\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

$$\int_\Phi \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \int_D J_\Phi = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{这里}\Phi\text{把}D\text{印满}R^3\text{的闭单位球，在}D\text{的内部，这个映射是}1-1\text{的，但在边界点不是这样}$$

$$\text{积分}\int_\Phi \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\text{是球的体积}$$

定理 5.4. *曲面积分的初等性质*

$$\omega,\omega_1,\omega_2\text{是}E\text{中的}k-\text{形式}$$

$$\omega_1=\omega_2 \Leftrightarrow E\text{中的任意}k-\text{曲面}\Phi, \omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$$

$$\text{特别的}\omega=0\text{表示}E\text{中的每个曲面}\Phi,\omega(\Phi)=0$$

线性性 $$\int_\Phi c\omega = c\int_\Phi \omega$$

$$\omega = \omega_1+\omega_2 \to \int_\Phi \omega = \int_\Phi \omega_1 + \int_\Phi \omega_2$$

$$\text{特殊的}\int_\Phi -\omega = -\int_\Phi \omega\text{确定的}k-\text{形式}$$

$$\text{考虑}k-\text{形式}\omega = a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\bar\omega\text{是对调}x_{i_m}\text{和}x_{i_n}\text{两个坐标的}k-\text{形式}$$

$$\to \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} = -\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_m},\ldots,x_{i_n},\ldots,x_{i_k})} \to \bar\omega = -\omega$$

$$\to \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$$

$$\text{特别的}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i = 0$$

定义 5.5. *基本k-形式*

$$i_1,\cdots,i_k\in N^+.1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$$
$$I\text{是}k\text{元有序组}(i_1,\ldots,i_k).\text{称}I\text{为递增的}k-\text{指标}$$
$$\mathrm{d}x_I=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$
$$\text{称为}\mathrm{d}x_I\text{叫做}R^n\text{中的基本}k-\text{形式}$$
$$\text{恰好有}\frac{n!}{k!(n-k)!}\text{个基本}k\text{形式}$$

重要的是，任意k形式都可以用基本k形式表示

$$\forall k\text{形式}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots dx_{j_k}=\varepsilon(j_1,\ldots,j_k)\,\mathrm{d}x_J$$
$$\text{这是由于必然存在重排使得}j_i\text{排成基本}k\text{形式}$$

例如

$$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_5\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2=-\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_5$$
$$\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$$

k-形式的定义和标准表示

$$\begin{array}{cc}\text{定义} & \omega=a_{i_1}\cdots a_{i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\ \text{标准表示} & \omega=\sum_I b_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I\end{array}$$

例如

$$x_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1-x_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\text{是}R^3\text{中的2形式}$$
$$\text{标准表示}:\omega=(1-x_1)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+(x_2+x_3)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$$

定理 5.6.

$$\omega=\sum_I b_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I$$
$$\text{是}E\subset R^n\text{中的}k\text{形式}\omega\text{的标准表示。如果在}E\text{中}\omega=0,\text{那么对于每个递增}k\text{指标}I\text{和}\forall\boldsymbol{x}\in E,b_I(\boldsymbol{x})=0$$
$$\text{Remark: 微分形式}\omega\text{的原始定义}\omega=\sum a_{i_1}\cdots a_{i_k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$
$$\text{这种类似的命题对原始定义(因为没有规定指标递增)不成立}.\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1=0$$

证明.

$$\text{假定}\exists\boldsymbol{v}\in E\text{和某个递增指标}J=\{j_1,\ldots,j_k\}.\text{使得}b_J(\boldsymbol{v})>0$$
$$b_J\text{连续}\rightarrow\exists h>0,|x_i-v_i|\leqslant h\text{的任意}\boldsymbol{x}\in R^n,\text{都有}b_J(\boldsymbol{x})>0$$
$$D\text{是}R^n\text{中的}k\text{方格}:|u_r|\leqslant h\text{时}\boldsymbol{u}\in D.$$
$$\Phi(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}+\textstyle\sum_{r=1}^k u_r\boldsymbol{e}_{j_r}\ (\boldsymbol{u}\in D)$$
$$\rightarrow\Phi\text{是}E\text{中的}k\text{曲面，参数域是}D,\ \forall\boldsymbol{u}\in D,b_J(\Phi(\boldsymbol{u}))>0$$
$$\rightarrow\textstyle\int_\Phi\omega=\int_D b_J(\Phi(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\boldsymbol{u}>0$$
$$\rightarrow\omega(\Phi)\neq0.\text{与假设矛盾}$$
$$\rightarrow b_I(\boldsymbol{x})=0$$
$$\tfrac{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}=1$$
$$\text{对于其余的增指标}I\neq J\text{来说，至少有一个}u_i\text{与函数无关},\text{因此都为}0$$

□

6 闭形式与恰当形式

7 向量分析

习题