Chapter 5

BY 导数和微分

1 Def

1. 导数：$\lim_{x\in D\cap U_{x_0},x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\in R$
2. 可导必连续：定义$\Rightarrow\Delta y$和Δx是同阶无穷小, $x_n\to x_0\Rightarrow y_n\to y_0$
3. 费马：f在U_{x_0}有定义，在x_0可导.x_0为f的极值点$\to f'(x_0)=0$
4. 充要条件: f在x_0可导$\Leftrightarrow U_{x_0}$内存在在x_0连续的函数$H.f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$
5. 与可去间断点的关系: f在x_0处可导$\Leftrightarrow g=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$x_0$处是可去间断点
6. 对数求导法：$(\ln f)'=\frac{f'}{f}\Rightarrow f'=f\times(\ln f)'$
7. 参变量：$y=y(t);x=x(t);\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$
8. 高阶导数：f在x_0处n阶导数$f^{(n)}(x)$可导, 极限$\lim\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{x-x_0}$存在，则为$f$的$n+1$阶导数
9. 微分：f在x_0处的线性主部.$\mathrm{d}y=A\,\mathrm{d}x+o(x)$.
10. 一阶微分不变性：复合函数$\mathrm{d}(f\circ g)=f'(g)\mathrm{d}g=f'(g)g'\mathrm{d}x$.

2 Formula

基本性质

1	$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$
2	$(f\times g)'=f'g+fg'$
3	$(f_1\times f_2\times\ldots\times f_n)'=\sum_{i=1}^{n}\left(f_i'\times\prod_{j\neq i}f_j\right)$
4	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
5	$f'=\frac{1}{(f^{-1})'}$
6	$(f\circ g)'=f'(g)\times g'$

初等函数的导数公式

1	$c'=0$
2	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
3	$(a^x)'=a^x\ln a;[(e^x)'=e^x]$
4	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};\left[(\ln x)'=\frac{1}{x}\right]$
5	$(\sin x)'=\cos x;(\cos x)'=-\sin x$
6	$(\tan x)'=\sec^2 x;(\cot x)'=-\csc^2 x$
7	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};(\mathrm{arccot}\, x)=\frac{-1}{1+x^2}$
9	$(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{ch}\, x;(\mathrm{ch}\, x)'=\mathrm{sh}\, x;$
10	$(\mathrm{th}\, x)'=\mathrm{sech}^2\, x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x};(\mathrm{cth}\, x)'=-\mathrm{csch}^2\, x=\frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$
11	$(\mathrm{arcsh}\, x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};(\mathrm{arcch}\, x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
12	$(\mathrm{arcth}\, x)'=\frac{1}{1-x^2};(\mathrm{arccth}\, x)'=\frac{1}{1-x^2}$

高阶导数

1	$(fg)^{(n)}=\sum_{1}^{n}C_n^i f^{(i)}g^{(n-i)}$
2	$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=x(t)\\y'(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=x(t)\\y''(t)=\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}=\frac{y''x'-y'x''}{(x')^3}\end{cases}$
3	$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

3 Tricks

1.

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\\
&= \frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}
$$

2. 切线方程：$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

3. $(e^x f(x))'=e^x f(x)+e^x f'(x);(e^{-x}f(x))'=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$