第七章 函数序列与函数项级数

这里的结论易于推广到向量值函数甚至是一般度量空间内的映射。但这里仅局限于复值函数。

最重要的目标——交换极限

1 主要问题

定义 1.1. *函数序列的极限*

$$\begin{aligned} & n = N^{+}.\{f_n\}\text{是}E\text{上的函数序列} \\ & \forall x \in E,\, f_n(x)\text{收敛} \\ \text{逐点收敛} \quad & \to f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \ (x \in E) \end{aligned}$$

定义的函数f称为函数序列f_n的极限函数，f_n逐点收敛于f

$$\begin{aligned} & n \in N^{+},\, \{f_n\}\text{是}E\text{上的函数序列} \\ & \forall x \in E,\, \sum_{1}^{n} f_i(x)\ \ x \in E\text{收敛} \\ \text{函数项级数} \quad & \to f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f_n(x)\ x \in E \end{aligned}$$

称为f_n的和函数。$\sum f_n(x)$称为函数项级数

注意 1.2. 主要问题

1. f_n连续. f连续? $\quad \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$?
2. f_n可微. f可微?
3. f_n可积. f可积?
4. f_n'与f'的关系 $\quad \lim_{x\to x_0} \frac{\lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$?
5. $\int f_n$与$\int f$的关系 $\quad \lim_{n\to\infty} U(P, f_n, \alpha) - L(P, f_n, \alpha) < \varepsilon \Leftrightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$?

例 1.3. 交换极限导致不同的结果

$$1 \quad m=1,2,\ldots;n=1,2,\ldots$$
$$s_{m,n}=\frac{m}{m+n}$$
$$\forall n\in N^{+},\ \lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1$$
$$\to \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1$$

$$\forall m\in N^{+},\ \lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0$$
$$\to \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0$$

$$2 \qquad x\in R,n\in N$$
$$f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$
$$\forall n\in N,\ f_n(0)=0\to \lim_{n\to\infty} f(0)=0$$
$$x\neq 0,\ f_n(x)=1+x^2$$
$$\to \quad f\text{不连续(连续函数的和函数可以不连续)}$$

$$3 \qquad m\in N^{+}$$
$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$$
$$m!x\in Z\to f_m(x)=1,\forall m!x\notin Z\to f_m(x)=0$$
$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x)$$
$$x\notin Q\to\forall m,\ f_m(x)=0\to f(x)=0$$
$$x\in Q,x=\frac{p}{q},m\geqslant q\to m!x\in Z\to f_m(x)=1\to f(x)=1$$
$$\to\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}=\begin{cases}0 & x\text{是无理数}\\ 1 & x\text{是有理数}\end{cases}$$
$$\text{可积函数的极限函数不一定}R\text{可积}$$

$$4 \qquad x\in R,n\in N^{+}$$
$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$
$$f'(x)=0$$

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx$$
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n'(x)=\mathrm{DNE}\neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0)=\infty\neq 0$$
$$\text{可微函数的极限函数不一定可微}$$

5

$$0 \leqslant x \leqslant 1. n \in N^{+}$$
$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$$
$$\forall x \in (0,1],\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$f_n(0) = 0$$
$$\to f(x) = 0$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2n+2}(1-x^2)^{n+1}\mid_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$
$$\to \int_0^1 f_n(x) = \frac{n^2}{2n+2}. \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = +\infty$$
$$\text{let: } g_n = nx(1-x^2)^n. \lim_{n\to\infty} g_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

积分的极限和极限的积分即使两者都有限也不一定相等

2 一致收敛性

定义一个更强的收敛性使得在这种情况下必可以交换极限

定义 2.1. *函数序列的一致收敛性*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^{+}, n \geqslant N$$
$$\forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

称函数序列f_n在E上一致收敛于函数f

Remark: 一致收敛是$\forall x \in E$找出的$N \in N^{+}. N(\varepsilon)$.逐点收敛是对每个x找出的$N \in N^{+}. N(x,\varepsilon)$

Remark: 一致收敛$\to$逐点收敛

$$\sum_1^n f_i(x) = s_n(x)$$

若s_n在E上一致收敛,称$\sum f_n(x)$在E上一致收敛

定理 2.2. *一致收敛性的Cauchy准则*

$$f_n\colon E \to R\text{一致收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^{+} \to m, n \geqslant N, x \in E \to d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

证明.

$$
\begin{gathered}
f_n\text{一致收敛}\to \text{Cauchy}\\
f_n\text{一致收敛到}f\to\exists N\to n>N, x\in E\to|f_n-f|<\varepsilon\\
n>N, m>N\to|f_n-f_m|=|f_n-f+f-f_m|\leqslant|f_n-f|+|f_m-f|<2\varepsilon\\
\to f_n\text{是Cauchy的}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f\text{是Cauchy的}\to f_n\text{一致收敛}\\
\forall x\in E\to \lim_{n\to\infty}f_n(x)\text{存在}\\
\leftarrow g: E\to R, g(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\text{构成的函数是极限函数}\\
\forall\varepsilon>0,\exists N, m,n>N\to d(f_m,f_n)<\varepsilon\\
\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g\\
\to d(f_m,g)<\varepsilon\\
f_m\text{一致收敛于}g
\end{gathered}
$$

□

定义 2.3. *函数项级数一致收敛⇔和函数差的极限趋于0*

$$
\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ (x\in E)\\
M_n=\sup_{x\in E}|f_n-f|
\end{gathered}
$$

$$
f_n\text{一致收敛于}f\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}M_n=0
$$

证明. ??? □

定理 2.4. *(Weierstrass判别法)*

$$
\begin{gathered}
f_n\text{是}E\text{上的函数序列}, |f_n|\leqslant M_n\\
\sum M_n\text{收敛}\to\sum f_n\text{一致收敛}
\end{gathered}
$$

Remark: 逆命题不为真

证明.

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum M_n\text{收敛}\to\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+, m,n>N\\
&\quad\to|\textstyle\sum_n^m f_i(x)|\leqslant\sum_n^m M_i<\varepsilon\ (x\in E) && \text{比较判别法}\\
&\qquad\to f_i\text{一致收敛} && \text{Cauchy}
\end{aligned}
$$

□

3 一致收敛性与连续性

定理 3.1. *一致收敛的函数序列。E内的极限点的极限过程和函数项极限过程可以交换*

$$
\begin{gathered}
\text{度量空间内的集合}E\text{上}f_n\text{一致收敛与}f. x\text{是}E\text{的极限点}\\
\lim_{t\to x}f_n(t)=A_n\\
\to A_n\text{收敛}\wedge\lim_{t\to x}f(t)=\lim_{n\to\infty}A_n\\
\Leftrightarrow\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}f_n(t)
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0, f_n\text{一致收敛}\to\exists N, m,n>N\to|f_m-f_n|<\varepsilon\\
&\to\lim_{t\to x}|f_m(t)-f_n(t)|=|A_m-A_n|\leqslant\varepsilon\\
&\to A_n\text{是Cauchy的}\to A_n\text{收敛与}A\\
&|f(t)-A|\leqslant|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-A_n|+|A_n-A|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\exists n\to\forall t\in E\to|f(t)-f_n(t)|<\varepsilon && \text{一致收敛}\\
&|A_n-A|<\varepsilon && A_n\text{收敛}\\
&\lim_{t\to x}f_n(t)=A_n\to\exists U_x^0(r)\to\forall t\in U_x^0(r)\to|f_n(t)-A_n|<\varepsilon && \text{极限定义}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\to|f(t)-A|\leqslant 3\varepsilon\\
&\to\lim_{t\to x}f(t)=A
\end{aligned}
$$

□

定理 3.2. *项函数连续. 一致收敛 → 极限函数连续*

$$f_n\text{在}E\text{上连续}, f_n\text{一致收敛于}f\to f\text{在}E\text{上连续}$$

Remark: 逆命题不成立

证明.

$$
\begin{aligned}
&\forall x\in E, f\text{一致连续}\\
&\to\lim_{x\to t}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}f_n(x)\\
&\to\lim_{x\to t}f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}f_n(x)\\
&f_n\text{连续}\to\lim_{x\to t}f_n(x)=f_n(t)\\
&\to\lim_{x\to t}f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)\\
&\to f\text{连续}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.3. *在这种情况下，项函数连续，极限函数连续 → 函数序列一致收敛*

$$
\begin{gathered}
f_n\text{是紧集}K\text{上的函数序列}\\
f_n\text{在}K\text{上逐点收敛于连续函数}f\\
\forall x\in K, n\in N^+, f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)\\
\to\\
K\text{上}f_n\to f\text{是一致的}
\end{gathered}
$$

证明.

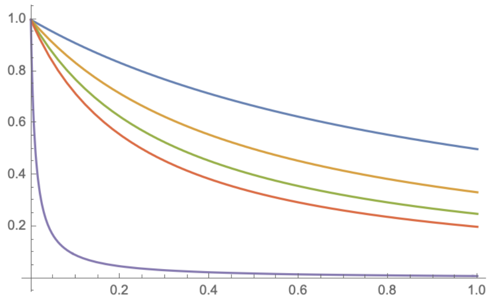
$$g_n=f_n-f\to g_n\text{连续}.\forall x\in K, \lim_{n\to\infty}g_n(x)=0, g_n\geqslant g_{n+1}$$

$$
\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0, K_n\text{是}g_n\geqslant\varepsilon\text{的一切}x\in E\text{的集合}. g_n\text{连续}\to K_n\text{闭}\to K_n\text{紧}\\
g_n\geqslant g_{n+1}\to K_n\supset K_{n+1}\\
\forall x\in K, \lim_{n\to\infty}g_n(x)=0\to\exists n>N, x\in K_n\Rightarrow x\notin\bigcap K_n\to\bigcap K_n=\varnothing\\
\to\exists N\to K_N=\varnothing\\
\to\forall x\in K, n\geqslant N\to 0\leqslant g_n(x)<\varepsilon\\
\to g_n\text{一致收敛}
\end{gathered}
$$

Remark: 紧性是必要的。开集之交为空不能导出必有开集为空

$$
\begin{gathered}
f_n(x)=\frac{1}{nx+1}. x\in(0,1)\\
\lim_{n\to\infty}f_n=0\ (x\in(0,1)).\text{但}f_n(x)\text{不一致收敛}
\end{gathered}
$$

$\square$



$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, 在0处不一致收敛

定义 3.4. *X是度量空间,$\ell(X)$表示X为定义域的复连续有界函数的集s.*

Remark: X紧则f必有界

$$\text{上确范数}(\infty) \qquad \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$
$$h = f + g \to |h| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\| + \|g\|$$
$$\to \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

此范数可以诱导出函数空间$\ell(X)$上的度量.

定理 3.5. *2.3的等价描述*

$$\ell(X)\text{的度量}, f_n\text{收敛于}f \Leftrightarrow f_n\text{在}X\text{上一致收敛到}f$$

Remark: $\ell(X)$的闭子集称为一致闭的, 集合$\mathcal{A} \in \ell(X)$的闭包称为一致闭包

定理 3.6. *在上述度量下, $\ell(X)$是完备度量空间.*

证明.

$$
\begin{aligned}
&f_n\text{是Cauchy的}\\
&\to \forall\varepsilon>0, m,n>N \to \|f_n-f_m\|<\varepsilon\\
&\to f_n\text{有逐点收敛函数}f \quad 2.2\\
&\to f_n\text{一致收敛于}f \quad 2.2\\
&f_n\text{连续}\to f\text{连续}\\
&\to \exists n \to |f(x)-f_n(x)|<1 \to f\text{有界}\\
&\to f\in \ell(X)\\
&\to \ell(X)\text{是完备的} \quad \text{Cauchy序列收敛于内部}
\end{aligned}
$$

□

f_n在X上一致收敛于$f \to \lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$ Cauchy序列收敛到度量收敛的函数

4 一致收敛性与积分

定理 4.1. *RS可积的函数项序列。一致连续 → 极限函数RS可积且积分值极限与交换前一致*

$$
\begin{gathered}
\alpha\text{在}[a,b]\text{上单调增}.\ [a,b]\text{上}f_n\in\Re(\alpha).\\
\text{在}[a,b]\text{上}f_n \overset{\text{一致}}{\to} f\\
\to f\in\Re(\alpha)\\
\int_a^b f\mathrm{d}\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}\alpha
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_n=\sup_{x\in[a,b]}|f_n-f|\\
f_n-\varepsilon_n\leqslant f\leqslant f_n+\varepsilon_n\\
\int_a^b(f_n-\varepsilon_n)\mathrm{d}\alpha\leqslant \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha\leqslant \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha\leqslant \int_a^b(f_n+\varepsilon_n)\mathrm{d}\alpha\\
0\leqslant \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha-\underline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha\leqslant 2\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]\\
\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\to \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}\alpha=\int f\mathrm{d}\alpha
\end{gathered}
$$

□

推论 4.2. *函数项级数若一致收敛则可以与积分交换。* 逐项积分再求和与和函数直接积分相等

$$
\begin{gathered}
f_n\text{在}[a,b]\text{上}f_n\in\Re(\alpha)\\
f(x)=\sum_1^\infty f_n(x)\ (x\in[a,b])\text{一致收敛}\\
\to\int_a^b f\mathrm{d}\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_1^n\int_a^b f_n\mathrm{d}\alpha
\end{gathered}
$$

5 一致收敛性与微分

$f_n'\to f'$需要较强的假设

定理 5.1. *可微函数序列在区间内某点收敛，导函数序列在闭区间一致收敛 则极限函数在区间上一致收敛。导函数在区间上收敛于极限函数的导数*

$$
\begin{gathered}
f_n\text{是}[a,b]\text{上的可微函数序列}\\
\exists x_0\in[a,b],\ f_n(x_0)\text{收敛}\\
f_n'\text{在}[a,b]\text{上一致收敛}\to f_n\text{在}[a,b]\text{上一致收敛于}f\\
\wedge f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\ \ x\in[a,b]
\end{gathered}
$$

证明.

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,n,m\geqslant N\to|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon$$
$$|f_n'(t)-f_m'(t)|<\tfrac{\varepsilon}{b-a}$$
$$\forall x,t\in[a,b]\to|f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)|\leqslant\tfrac{|x-t|\varepsilon}{(b-a)}\leqslant\varepsilon$$
$$\to|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leqslant 2\varepsilon$$
$$\to|f_n(x)-f_m(x)|<2\varepsilon$$
$$\to f_n\text{是Cauchy的}\to f_n\text{在}[a,b]\text{上一致收敛于}f$$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$
$$\phi_n(t)=\tfrac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x},\phi(t)=\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$$
$$\lim_{t\to x}\phi_n(t)=f_n'(x)$$
$$|\phi_n(t)-\phi_m(t)|\leqslant\tfrac{\varepsilon}{b-a}$$
$$\to\phi_n\text{对于}t\in[a,b],t\neq x\text{都一致收敛}$$
$$f_n\text{一致收敛于}f\to\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\tfrac{\lim f_n(t)-\lim f_n(x)}{t-x}=\phi(x)$$
$$\phi_n\text{一致收敛于}\phi$$
$$\text{根据定义:}\lim_{t\to x}\phi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

Remark: 如果f_n'是连续的. 可以利用微积分基本定理和一致连续相对积分的可交换性得到一个较短证明 □

定理 5.2. *R上具有处处不可微的实连续函数*

证明.

$$\varphi(x)=|x|.x\in[-1,1]$$
$$\varphi(x+2)=\varphi(x),x\in R$$
$$\forall s,t\in R,|\varphi(s)-\varphi(t)|\leqslant|s-t|$$
$$\varphi\text{在}R\text{上连续}$$
$$f(x)=\textstyle\sum_0^\infty\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx)$$
$$|\varphi(x)|\leqslant 1\to f(x)\text{在}R\text{上都一致收敛}$$
$$\to f(x)\text{在}R\text{上连续}$$
$$\forall x\in R,\forall m\in N^+,\text{let: }\delta_m=\pm\tfrac{1}{2}\cdot 4^{-m}$$
$$\text{其中符号使得}4^mx\text{和}4^m(x+\delta_m)\text{之间没有整数,这必然能做到因为}4^m|\delta_m|=\tfrac{1}{2}$$ □
$$\gamma_n=\tfrac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^nx)}{\delta_m}$$
$$n>m,4^n\delta_m\text{是偶数}\to\gamma_n=0.0\leqslant n\leqslant m$$
$$|\gamma_n|\leqslant 4^n$$
$$|\gamma_m|=4^m$$
$$\to\left|\tfrac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|=\left|\textstyle\sum_0^m\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right|\geqslant 3^m-\textstyle\sum_0^{m-1}3^n=\tfrac{1}{2}(3^m+1)$$
$$\to\lim_{m\to\infty}f'(x)=+\infty$$
$$\to f\text{在}x\text{不可微}$$

6 等度连续的函数族

每个有界复数序列必有收敛子序列。在此讨论函数序列类似结论是否正确

定义 6.1. *逐点有界，一致有界*

	f_n是E上的函数序列	
逐点有界	$\forall x\in E$, $f_n(x)$有界.	$\forall n\in N^+,\forall x\in E,\exists\phi(x)\to|f_n(x)|<\phi(x)$.
一致有界	f_n在E上有最大的界M	$\forall n\in N^+,\forall x\in E,\exists M\in R^+\to|f_n(x)|<M$

Remark: f_n在E上逐点有界，E_1是E的可数子集. 总是存在子序列$f_{n_k}\to f_{n_k}$对于每个$x\in E_1$收敛.

Remark: f_n是某个紧集上的一致有界的连续函数序列，也未必有在E上逐点收敛的子序列.

例 6.2. 一致有界的函数序列不一定具有收敛子序列

$$f_n(x)=\sin nx.\, x\in[0,2\pi].n\in N^+.\ |f_n(x)|<2\to f\text{一致有界}$$
$$\text{Assume:}\, n_k\to\sin n_k\,x\text{对于}\forall x\in[0,2\pi]\text{收敛}$$
$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_k\,x-\sin n_{k+1}x)^2=0\ x\in[0,2\pi]$$
$$\to\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}(\sin n_kx-\sin n_{k+1}\,x)^2\mathrm{d}x=0\qquad\text{有界收敛序列的Lebesgue定理}$$
$$\text{但}\int_0^{2\pi}(\sin n_kx-\sin n_{k+1}x)^2\mathrm{d}x=2\pi$$
$$\text{矛盾}\to\forall n_k,\sin n_kx\text{序列都在}[0,2\pi]\text{上不收敛}$$

例 6.3. 收敛序列不一定具有一致收敛子序列。 即使加上序列在紧集上一致有界也有反例。(例题7.6)

$$x\in[0,1].n\in N^+$$
$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$$
$$\to\forall x,n\to|f_n|\leqslant1\to f_n\text{在}[0,1]\text{上一致有界}$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$
$$\text{但}f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\left(1-n\frac{1}{n}\right)^2}=1$$
$$\to\text{没有子序列在}[0,1]\text{上一致收敛.在}x\in[0,\delta]\text{内必然}|f_n-f|=1>\varepsilon$$

定义 6.4. *等度连续(函数族)*

$$f\text{是度量空间}X\text{的集合}E\text{上的函数}.\mathcal{F}\text{是}f\text{的族}.$$
$$\text{等度连续}\quad\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,d(x,y)<\delta,x,y\in E,f\in\mathcal{F}\to d(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Remark: $\forall f\in\mathcal{F}$, f一致连续

定理 6.5. *逐点有界的复函数值序列必有收敛子序列*

$$f_n\text{在可数集}E\text{上逐点有界}$$
$$\exists f_{n_k}\in f_n\to\forall x\in E,f_{n_k}(x)\text{收敛}$$

证明.

$$x_i\text{是}E\text{的点的序列}.f_n(x_1)\text{有界}\to\exists\text{子序列}f_{1,k}\to\lim_{k\to\infty}f_{1,k}(x_1)\in R$$
$$S_1\colon f_{1,1},f_{1,2},\ldots$$
$$S_2\colon f_{2,1},f_{2,2},\ldots$$
$$\vdots$$
$$S_i\text{满足}$$

1. $n=2,3,\ldots\to S_n$是S_{n-1}的子序列
2. $k\to\infty.\{f_{n,k}(x_n)\}$收敛.$(f_n(x_n)$有界$\to S_n$存在)
3. 每个S_n中函数出现的次序是确定的.S_1中f_i在f_j之前$\to S_n$中f_i也在f_j之前

$$f_i,f_j\in S_m,S_n,m>n\to i_m>j_m\to i_n>j_n$$
$$S\colon f_{1,1},f_{2,2},f_{3,3},\ldots$$
$$S\text{去掉前}n-1\text{项是}S_n\text{的子序列}$$
$$\to\lim_{n\to\infty}\{f_{n,n}(x_i)\}\text{对于每个}x_i\in E\text{都收敛}\qquad 2$$

□

定理 6.6. *函数项在紧集上连续。 f_n连续有界，f_n一致收敛$\to$函数项组成的函数族等度连续*

$$K\text{是紧度量空间},f_n\in\mathscr{C}(K),f_n\text{在}K\text{上一致收敛}\to f_n\text{在}K\text{上等度连续}$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0,\{f_n\}\text{一致收敛}\\
\exists N\in N^+\to\|f_n-f_N\|<\varepsilon\\
f_n\text{在}K\text{上连续}\to f_n\text{在}K\text{上一致连续}\\
\to\forall i\in N^+,\forall d(x,y)<\delta,|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon\\
\text{对于这样的}\delta\to|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant|f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_n(y)|\\
\leqslant 3\varepsilon\\
\to\{f_n\}\text{等度连续}
\end{gathered}
$$

□

定理 6.7. *紧集上的连续有界函数序列。 逐点有界且等度连续 →一致有界且含有一致收敛的子序列*

$$
\begin{array}{cc}
 & K\text{是紧集},f_n\in\ell(K),n\in N^+.f_n\text{在}K\text{上逐点有界且等度连续}\\
\to & f_n\text{在}K\text{上一致有界}\\
\to & f_n\text{含有一致有界的子序列}
\end{array}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,d(x,y)<\delta\to|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon\\
K\text{紧}\to\exists p_1,\ldots,p_r\in K.\forall x\in K,\exists p_i\to d(x,p_i)<\delta\\
f_n\text{逐点有界}\to\exists M_i<\infty\to|f_n(p_i)|<M_i\\
M=\max(M_1,\ldots,M_r)\\
\forall x\in K\to|f_n(x)|<M+\varepsilon\\
\to f\text{在}K\text{上一致有界}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
E\text{是}K\text{的可数稠密子集}\\
f_n\text{有一个子序列}f_{n_i}\to\forall x\in E,f_{n_i}(x)\text{收敛}\\
\text{let: }g_i=f_{n_i}\\
\leftarrow g_i\text{在}K\text{上一致收敛}
\end{gathered}
$$

□

$$
\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,V(x,\delta)=U_x(\delta)\cap K\\
E\text{在}K\text{中稠密},K\text{是紧的}\to E\text{的有限子集}x_1,\ldots,x_m\\
\to K\subset\bigcup_1^m V(x_i,\delta)\\
\forall x\in E,g_i(x)\text{收敛},\exists N\to|g_i(x_s)-g_j(x_s)|<\varepsilon\\
|g_i(x)-g_j(x)|\leqslant|g_i(x)-g_i(x_s)|+|g_i(x_s)-g_j(x_s)|+|g_j(x_s)-g_j(x)|<3\varepsilon\\
\to g_i(x)\text{在}K\text{上一致有界}
\end{gathered}
$$

7 Stone-Weierstrass定理

定理 7.1. *(Weierstrass) 有界闭区间上的连续复函数必有多项式序列可以逼近.(构造勒让德多项式,正交多项式系能够逼近任意闭区间上的连续函数)*

$$
\begin{array}{cc}
 & f\text{是}[a,b]\text{上的连续复函数}\\
\to & \exists P_n\in\mathcal{P}(C)\to\lim_{n\to\infty}P_n=f\\
 & \text{且在}[a,b]\text{上一致收敛}
\end{array}
$$

$$
f\text{是}[a,b]\text{上的连续实函数,}P_n\in\mathcal{P}(R)\text{有类似结论}
$$

证明.

$$[a,b]=[0,1].\,f(0)=f(1)=0$$
$$g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))\ x\in[0,1]$$
$$\to g(0)=g(1)=0$$
$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ f(x) & [0,1]\end{cases}\qquad f\text{延拓到}R$$
$$\to f(x)\text{在}R\text{上一致连续.在闭区间内连续，区间外任意}\delta\text{的}\varepsilon=0\qquad f\text{在}R\text{上一致连续}$$
$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n,\,n\in N^+\qquad\text{勒让德多项式}$$
$$\text{其中}c_n\text{的值}\to\int_{-1}^1 Q_n(x)\mathrm{d}x=1.\,n\in N^+\qquad\text{勒让德多项式的系数}$$
$$\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geqslant2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\qquad\text{缩区间}$$
$$\geqslant2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\qquad\text{伯努利不等式缩}$$
$$\to c_n<\sqrt{n}$$
$$(1-x^2)^n\geqslant1-nx^2\qquad\text{伯努利不等式}$$
$$\leftarrow(1-x^2)^n-1-nx\text{在}x=0\text{处等于}0\text{，并且在}(0,1)\text{内导数都是正的}\qquad\text{导数也能证}$$
$$\forall\delta>0,\forall x\in[\delta,1]\to Q_n(x)\leqslant\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\qquad\delta^2<\delta\to1-\delta^2>1-\delta$$
$$\to\text{在}\delta\leqslant|x|\leqslant1\text{中}Q_n\text{一致收敛到}0\qquad Q_n(x)=\sqrt{n}(1-x^2)\leqslant\sqrt{n}(1-x)$$

$$x\in[0,1],P_n(x)=\int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t$$
$$f:t<-x\vee t>1-x\to f(x+t)=0$$
$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 f(t)Q_n(t-x)\mathrm{d}t$$
$$\to P_n\in\mathcal{P}(C)\wedge f:R\to R.\to P_n\in\mathcal{P}(R)$$

$$\forall\varepsilon>0,\delta>0,|y-x|<\delta\to|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad f\text{在有界闭区间上连续}$$
$$M=\sup|f(x)|.$$
$$Q_n\geqslant0\to\forall x\in[0,1],n>N$$
$$\to|P_n(x)-f(x)|=\left|\int_{-1}^1(f(x+t)-f(t))Q_n(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_{-1}^1|f(x+t)-f(t)|Q_n(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t+\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t+2M\int_{\delta}^1 Q_n(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant\varepsilon$$

$\to f$必然可以被多项式序列任意逼近
(需要使用区间变换和其它变换使得成为f变换到任意连续函数)

□

定义 7.2. *代数。一致闭包*

$$\begin{array}{cc} & \text{集合}E\text{上的复函数族}\mathcal{A}\\ 1 & \forall f,g\in\mathcal{A},f+g\in\mathcal{A}\\ 2 & \forall f,g\in\mathcal{A},fg\in\mathcal{A}\\ 3 & \forall c\in C,\forall f\in\mathcal{A},cf\in\mathcal{A}\\ \to & \mathcal{A}\text{是代数}\end{array}$$

一致闭

$$\mathcal{A}\text{有性质:}\forall f_n\in\mathcal{A}\wedge E\text{上}f_n\overset{\text{一致}}{\to}f\to f\in\mathcal{A}.\text{称}\mathcal{A}\text{是一致闭的}$$

一致闭包

$$\mathcal{B}\text{是}\mathcal{A}\text{内所有一致收敛函数序列的极限函数组成的集.称}\mathcal{B}\text{是}\mathcal{A}\text{的一致闭包}$$

Remark: Weierstrass 定理可以重新叙述

$$[a,b]\text{上的连续函数的集是}[a,b]\text{上多项式集的一致闭包}$$

定理 7.3. *有界函数的代数的一致闭包是一致闭的代数*

证明.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}\text{是有界函数的代数}, \mathcal{B}\text{是}\mathcal{A}\text{的一致闭包} \\
& f \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{B} \to \{f_n\} \in \mathcal{A}, \{g_n\} \in \mathcal{A}, f_n \to f, g_n \to g \\
\to \quad & f_n + g_n \to f + g, f_n g_n \to fg, cf_n \to cf \\
\to \quad & f + g \in \mathcal{B}, fg \in \mathcal{B}, cf \in \mathcal{B} \\
\to \quad & \mathcal{B}\text{是代数}
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
& f_n, g_n \in \mathcal{B} \to f_{i,m} \in \mathcal{A}, g_{i,m} \in \mathcal{A} \to f_{i,m} \to f_i, g_{i,m} \to g_i \\
& f_n\text{一致收敛与}f \to f_{i,m}\text{的序列使用对角线手法也可以收敛到}f \\
\to \quad & \to f \in \mathcal{B} \\
& \to \mathcal{B}\text{是一致闭的} \\
& ???\text{这里书上用了}\mathcal{A}\text{的极限点(函数)是闭的的概念证明}
\end{aligned}
$$

定义 7.4. *分离、消失*

分离(代数中的函数可以分辨出E的两个点不同)

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}\text{是}E\text{上的函数族}. \\
\mathcal{A}\text{能分离}E\text{中的点} \quad & \forall x_1, x_2 \in E \wedge x_1 \neq x_2 \to \exists f \in \mathcal{A} \to f(x_1) \neq f(x_2)
\end{aligned}
$$

消失(代数中的所有函数在某个点都映射到0)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\text{不在}E\text{上消失} \quad & \forall x \in E, \exists g \in \mathcal{A} \to g(x) \neq 0 \\
A\text{在}E\text{的}x_0\text{消失} \quad & \exists x_0 \in E, \forall g \in A, g(x) = 0
\end{aligned}
$$

Remark:

1. *所有一元多项式的代数在R上必然能够分离R*$(f(x) = x \in \mathcal{A}, x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq x_2)$.

2. *在R上必然不消失*$f(x) = x \in \mathcal{A}, \forall x \neq 0 \to f(x) \neq 0; g(x) = x + 1 \in \mathcal{A}, g(0) = 1.$

3. *存在不能分离点的代数.* $\mathcal{A} = \{[-1,1]\text{上的偶次多项式}\}. \forall f \in \mathcal{A}, x \neq -x, \text{但}f(x) = f(-x)$

定理 7.5. *代数能分离E上的点也不再E的点消失，则必含有函数f使得对任意两个不同的点的值等于两个任意不同的常数*

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}\text{是}E\text{上的函数的代数}. \mathcal{A}\text{能分离}E\text{的点}, \mathcal{A}\text{不再}E\text{上消失} \\
\to \quad & \exists f \in \mathcal{A} \to \forall x_1, x_2 \in E \wedge x_1 \neq x_2, c_1 \neq c_2 \in F \wedge f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2
\end{aligned}
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& \text{分离} \wedge \text{不消失} \to \forall x_1, x_2 \in E \wedge x_1 \neq x_2 \to g(x_1) \neq g(x_2), h(x_1) \neq 0, k(x_2) \neq 0 \\
& u = gk - g(x_1)k, v = gh - g(x_2)h \\
\to \quad & u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}, u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0, v(x_1) \neq 0 \\
& f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)} \to f \in \mathcal{A} \\
& f\text{具有上述所有性质}
\end{aligned}
$$

□

定理 7.6. *(Stone-Weierstrass).紧集上的实连续函数代数. 分离且不消失 则 一致闭包是紧集上的所有连续函数*

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}\text{是紧集}K\text{上的实连续函数的代数}. \mathcal{A}\text{能分离}K\text{的点}. \mathcal{A}\text{不在}K\text{的点消失} \\
\to \quad & \mathcal{A}\text{的一致闭包}\mathcal{B} = \{K\text{上的所有实连续函数}\}
\end{aligned}
$$

证明.

Step1:$f \in \mathcal{B} \to |f| \in \mathcal{B}$

$$a = \sup |f(x)|\ x \in K$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_1, \ldots, c_n \in R \to |\sum_1^n c_i y^i - |y||< \varepsilon.\ y \in [-a, a]$$
$$\mathcal{B}\text{是代数} \to g = \sum_1^n c_i f_i \in \mathcal{B}$$
$$\to |g(x) - |f(x)|| < \varepsilon.\ x \in K$$
$$\mathcal{B}\text{是一致闭的} \to |f| \in \mathcal{B}$$

Step2: $f, g \in \mathcal{B}. \max(f, g) \in \mathcal{B}, \min(f, g) \in \mathcal{B}$

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$
$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$
$$\to \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{B}$$

Step3: $\forall f: K \to R, f\text{连续}. \forall x \in K, \forall \varepsilon > 0 \to \exists g_x \in \mathcal{B} \wedge g_x(x) = f(x) \wedge g_x(t) > f(t) - \varepsilon.\ (t \in K)$

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}, \mathcal{A}\text{满足}7.5 \to \mathcal{B}\text{也满足}7.5$$
$$\to \forall y \in E, \exists h_y \in \mathcal{B} \to h_y(x) = f(x), h(y) = f(y)$$
$$h_y\text{连续} \to \exists\text{开集}J_y, y \in J_y \to h_y(t) > f(t) - \varepsilon.\ t \in J_y$$
$$K\text{紧} \to \exists y_1, \ldots, y_n, K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}$$
$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n})$$

$$\leftarrow \quad g_x \in \mathcal{B}$$
$$\leftarrow \quad g_x(x) = h_{y_i}(x) = f(x)$$
$$\leftarrow \quad g_x(t) > f(t) - \varepsilon . t \in K$$

Step4: 给定K上的连续实函数f和实数$\varepsilon > 0$，$\exists h \in \mathcal{B} \to |h(x) - f(x)| < \varepsilon.\ (x \in K)$

因为$\mathcal{B}$*一致闭，所以与此定理为等价命题*

$$\forall x \in K, \exists g_x \to g_x(x) = f(x) \wedge g_x(t) > f(t) - \varepsilon$$
$$g_x\text{连续} \to \exists\text{开集}V_x, x \in V_x \to g_x(t) < f(t) + \varepsilon.\ (\forall t \in V_x)$$
$$K\text{紧} \to K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$$
$$h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}) \to h \in \mathcal{B}$$
$$h(t) > f(t) - \varepsilon$$
$$h(t) < f(t) + \varepsilon$$
$$\to h(t) = f(t)$$
$$\to h(t)\text{是}f\text{在}\mathcal{A}\text{中的逼近}$$

Remark: 此定理对复代数不成立，即把定义域和值域换成C

Remark: 增加自伴条件$f \in \mathcal{A} \to \bar{f} \in \mathcal{A}$*则此定理在*$C$*上的代数也成立。* □

定理 7.7. *复代数增加自伴条件后也成立Stone-Weierstrass定理*

$$\mathcal{A}\text{是紧集}K\text{上的复连续函数的自伴代数}.$$
$$\mathcal{A}\text{能分离}K\text{的点}, \mathcal{A}\text{不再}K\text{的点消失}$$
$$\to \quad \mathcal{A}\text{的一致闭包}\mathcal{B}\text{是}K\text{上的所有复连续函数}$$

证明.

$$\mathcal{A}_R\text{是}K\text{上所有属于}\mathcal{A}\text{的实函数的集}$$
$$\forall f \in \mathcal{A}, f = u + iv. u, v\text{是实函数}. 2u = f + \bar{f}$$
$$\mathcal{A}\text{是自伴的} \to \bar{f} \in \mathcal{A}. u \in \mathcal{A}_R$$
$$x_1 \neq x_2 \to \exists f \in \mathcal{A}, f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$$
$$\to \mathcal{A}_R\text{能分离}K\text{的点}.$$
$$x \in K, \exists g \in \mathcal{A} \to g(x) \neq 0$$
$$\exists \lambda \in C \to \lambda g(x) > 0.$$
$$f = \lambda g, f = u + iv \to u(x) > 0 \to \mathcal{A}_R\text{不在}K\text{上消失}$$
$$\to \mathcal{A}_R\text{可以使用SW定理}$$
$$\to K\text{上的实连续函数必在}\mathcal{A}_R\text{的一致闭包中}$$
$$f = u + iv, f\text{连续} \to u, v\text{实连续} \to u, v \in \mathcal{B}_R$$
$$\to f \in \mathcal{B}(\mathcal{A}\text{的一致闭包})$$

□

习题