Linear Algebra Done Right

BY SHELDON AXLER

2020-4-11

第一章

1 $\mathbb{F}^n$

定义 1.1. *复数：复数是一个有序对* $(a,b), a,b\in\mathbb{R}$*。写作：* $a+bi$

定义 1.2. *复数集：* $\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$

定义 1.3. *复数运算*

$$\begin{array}{rl} \text{加法} & (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ \text{乘法} & (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{array}$$

注意 1.4. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{a+bi\,|\,a\in\mathbb{R},b=0\}$与$\mathbb{R}$同构，并且运算也保持了除序关系外的相容性，故在放弃序关系的条件下认为$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

复数性质(验证AMD成立)：

1. 交换律

$$\forall a,b\in\mathbb{C}\rightarrow a+b=b+a, ab=ba$$

2. 结合律

$$\forall a,b,c\in\mathbb{C}\rightarrow (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$$

3. 加法逆元

$$\forall a\in\mathbb{C}, \exists -a\in\mathbb{C}\rightarrow a+(-a)=0$$

4. 乘法逆元

$$\forall a\in\mathbb{C}\wedge a\neq 0, \exists \tfrac{1}{a}\in\mathbb{C}\rightarrow a\tfrac{1}{a}=1$$

5. 分配律

$$\forall a,b,c\in\mathbb{C}\rightarrow a(b+c)=ab+ac$$

证明.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
&= (c+a)+(d+b)i \\
&= (c+di)+(a+b)i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (ca-db)+(da+cb)i \\
(c+di)(a+bi) &= (ca-db)+(cb+da)i
\end{aligned}
$$

其余类似易证 □

因此，复数集及运算构成了域$(1=1+0i, 0=0+0i)$

定义 1.5. *域$\mathbb{F}$：满足上述5条性质的集合，至少包含零元和幺元的集合及其加法和乘法运算*

Remark:最小的域$F_{\min}=\{0,1\}, 1+1=0$
域中的元素叫做标量

定义 1.6. *组（tuple）：$n\in\mathbb{N}$，长度为n的组是n个有序元素的整体，n为组长度*

Remark:定义长度为0的组做平凡结果

定义 1.7. *组的相等关系：长度n相等且对应元素相等*

定义 1.8. $\mathbb{F}^n$*:以$\mathbb{F}$中的元素做每个位置上的元素，并且长度为n的组的集合*

$$\mathbb{F}^n=\{(x_1,x_2,\ldots x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{F}\wedge i\in 0\ldots n\}$$

其中x_i叫作$\boldsymbol{x}$的第i个坐标。

定义 1.9. $\mathbb{F}^n$*上的加法*

$$(x_1,\ldots x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

定义 1.10. $\mathbb{F}^n$*上的标量乘法*

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

性质:

1. $\mathbb{F}^n$上的加法具有交换律，易证

2. $\forall x \in \mathbb{F}^n, \exists -x \in \mathbb{F}^n \rightarrow x + (-x) = 0$,namely 加法逆元存在

习题1.A

1.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di)=1 &\rightarrow \begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc=0 \end{cases} \\
a=0 &\rightarrow \begin{cases} -bd=1 \\ bc=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d=-1/b \\ c=0 \end{cases} \\
b=0 &\rightarrow \begin{cases} ac=1 \\ ad=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=1/a \\ d=0 \end{cases} \\
a\neq 0 \wedge b\neq 0 &\rightarrow \frac{a}{b}c-d=\frac{1}{b} \\
& \quad d+\frac{b}{a}c=0 \rightarrow \\
\frac{1}{b} &= \frac{a}{b}c+\frac{b}{a}c \\
&= \frac{a^2+b^2}{ab}c \\
c &= \frac{a}{a^2+b^2} \\
d+\frac{b}{a}c=0 &\rightarrow d+\frac{b}{a}\frac{a}{a^2+b^2}=0 \\
&= d+\frac{b}{a^2+b^2}=0 \\
d &= \frac{-b}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

综上:

$$
c=\frac{a}{a^2+b^2} \qquad d=\frac{-b}{a^2+b^2}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) \\
(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) &= (1-3)+(-2\sqrt{3}i)=-2-2\sqrt{3} \\
(-2-2\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) &= (2+6)+(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})i=8+0i
\end{aligned}
$$

3.

令$x^2=i, x=(a+bi)$

$$\begin{aligned} x^2=(a+bi)(a+bi) &= (a^2-b^2)+(2ab)i \\ a^2-b^2 &= 0 \\ &\rightarrow \\ a &= \pm b \\ 2ab &= 1 \\ &\rightarrow \\ a &= b \\ ab &= \frac{1}{2} \\ &\rightarrow \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

4. 略
5. 略
6. 略
7. 略
8. 略
9. 略
10. 略
11. 略
12. 略
13. 略
14. 略
15. 略
16. 略

2 向量空间

由于$\mathbb{F}^n$上的加法具有交换律、 结合律和单位元， 标量乘法具有结合律、 $\mathbb{F}$中的单位元做标量乘法不变、标量乘法具有结合律。据此可以形成一个代数结构。

定义 2.1. *$\mathbb{F}^n$上的加法和标量乘法*

- *加法：二元函数，* $f(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) \to \mathbb{F}^n$, $f(x, y) \to x + y$
- *标量乘法：二元函数,* $f(\mathbb{F}, \mathbb{F}^n) \to \mathbb{F}^n$, $f(\lambda, x) \to \lambda x$

定义 2.2. *向量空间 $\mathbb{V}$ (vector space)：集合 $\mathbb{F}^n$及上的加法和标量乘法，满足：*

$$\begin{aligned}
\textit{加法交换律} \quad & \forall x, y \in \mathbb{V} \to x + y = y + x \\
\textit{加法结合律} \quad & \forall x, y, z \in \mathbb{V} \to (x + y) + z = x + (y + z) \\
\textit{标量乘法结合律} \quad & \forall x \in \mathbb{V}, \forall a, b \in \mathbb{F} \to (ab)x = a(bx) \\
\textit{加法单位元} \quad & \exists \mathbf{0} \in \mathbb{V}, \forall x \in \mathbb{V} \to x + \mathbf{0} = x \\
\textit{加法逆元} \quad & \forall x \in \mathbb{V}, \exists y \in \mathbb{V} \to x + y = \mathbf{0} \\
\textit{乘法单位元} \quad & \exists \mathbf{1} \in \mathbb{V}, \forall x \in \mathbb{V} \to \mathbf{1}x = x \\
\textit{分配律} \quad & \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}, \forall a \in \mathbb{F} \to a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y} \\
& \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, \forall a, b \in \mathbb{F} \to (a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

记法 2.3. *向量空间中的元素称为向量(vector)或点(point)*

Remark: 向量空间的标量乘法依赖$\mathbb{F}$，在确切需要指明$\mathbb{F}$时，写作$\mathbb{F}$上的向量空间$\mathbb{V}$

- 实向量空间(real vector space):$\mathbb{R}^n$
- 复向量空间(complex vector space):$\mathbb{C}^n$

Remark：最小的向量空间:$\{0\}$,空集上的空间不是向量空间。

Q:$\mathbb{F}_{\min} = \{0, 1\}$, $\mathbb{V}_{\mathbb{F}_{\min}^1} = \{0, 1\}$.所以向量空间并非定义在域上？？？

例 2.4. $\mathbb{F}^\infty$:定义$\mathbb{F}^\infty$为$\mathbb{F}$中的所有(可数)无穷序列的集合：

$$\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{F}, i \in \mathbb{N}\}$$

定义加法：$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$

定义乘法：$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$

易证：$\mathbb{F}^\infty$为$\mathbb{F}$上的向量空间

例 2.5. $\mathbb{F}^S$:集合S到$\mathbb{F}$上的所有函数的集合

加法：$\forall x \in S, \forall f, g \in \mathbb{F}^S \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

乘法：$\forall x \in S, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall f \in \mathbb{F}^S \to (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

易证：$\mathbb{F}^S$是$\mathbb{F}$上的向量空间。

Q:若$S=\varnothing$则是平凡的。定义域为空，无法构成函数？(Munkres)

若$S\neq\varnothing$：加法单位元：0函数$0\colon S\to F, 0(x)\to 0$

加法逆元:$-f\colon S\to F, (-f)(x)=-(f(x))$

Remark:$\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^\infty\subset\mathbb{F}^S$，可以将函数$f$看成是$(\ldots)\to F$的函数。$\mathbb{F}^\infty\to S=\mathbb{N}$

Q:$\mathbb{F}^\infty$中的把集合$S=\mathbb{N}$，可是$\mathbb{F}^S$在每个向量上有无穷个函数...如果直接这样划定一个等价关系...，貌似有点希望

推论 2.6. *$\mathbb{V}$中的加法单位元唯一*

证明. *假定单位元$0,0'$*

$$0'=0'+0=0+0'=0$$ □

推论 2.7. *$\mathbb{V}$中的加法逆元唯一*

证明. *假设x,y都是元素a的逆元*

$$x=x+0=x+(a+y)=(a+x)+y=0+y=y$$ □

推论 2.8. $0\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{V}\to 0x=\mathbf{0}$

证明.

$$\mathbf{0}=0x+(-0x)=(0+0)x+(-0)x=0x+0x+(-0)x=0x$$ □

推论 2.9. $\forall x\in\mathbb{F},\mathbf{0}\in\mathbb{V}\to x\mathbf{0}=\mathbf{0}$

证明.

$$\mathbf{0}=x\mathbf{0}+(-x\mathbf{0})=x(\mathbf{0}+\mathbf{0})+(-x\mathbf{0})=x\mathbf{0}+x\mathbf{0}+(-x\mathbf{0})=x\mathbf{0}$$ □

推论 2.10. $-1\in\mathbb{F},\forall x\in\mathbb{V}\to x+(-1x)=\mathbf{0}$

证明.

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=0x=\mathbf{0}$$ □

习题1.B

1. 证明：$\forall x \in \mathbb{V} \to -(-x) = x$

$$-(-v) = -1(-1(v)) = (-1-1)v = 1v = v$$

2. 证明：$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, a\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \to a = 0 \vee \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

   逆否命题：$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, a \neq 0 \wedge \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \to a\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

   反证：$a\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

   $(1=0) \to (\forall a \in \mathbb{F} \to a = 1a = 0a = 0)$与定义中$\mathbb{F}$至少为$\{0,1\}$矛盾。

$$1 = \frac{1}{y}\frac{1}{x}xy = \frac{1}{y}\frac{1}{x}0 = 0$$

   参考：Rudin P6命题1.16中的做法。域的公理M4中了$1 \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{F}_{\min} = \{0,1\}$。这样如果上式成立可以推出$1 = 0$导致矛盾。所以关键在于从$\mathbb{F}$的定义中证明$1 \neq 0$。

3. 设$\forall x, y \in \mathbb{V}$，证明$\exists_1 a \in \mathbb{V} \to x + 3a = y$

   $x + 3a = y \to \frac{y-x}{3} = a \in \mathbb{V}$　根据$\mathbb{F}$封闭和$\mathbb{V}$的定义和逆元唯一性。

4. 空集不是向量空间。空集不满足定义?

   加法单位元$\mathbf{0}$不存在。所以向量空间不要求乘法逆元的存在性?

5. 证明：向量空间定义2.2中的存在加法逆元条件可以替换为$\forall x \in \mathbb{V} \to 0x = \mathbf{0}$

$$(\forall x \in \mathbb{V}, \exists y \in \mathbb{V} \to x + y = \mathbf{0}) \to x + y = 0x = \mathbf{0}\text{分配律???}$$

$$(\forall x \in \mathbb{V} \to 0x = \mathbf{0}) \to \forall x \in \mathbb{V}, x + -x = 0x = \mathbf{0}, -x \in \mathbb{V}, \text{封闭性}$$

6. 在集合$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$上，并使用通常情况下的运算，对于涉及无穷的运算。定义：$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x + \infty &= \infty \\
x - \infty &= -\infty \\
x > 0 &\to x\infty = \infty, x - \infty = -\infty \\
x = 0 &\to x\infty = 0, x\infty = 0 \\
x < 0 &\to x\infty = -\infty, x - \infty = \infty \\
\infty + \infty &= \infty \\
\infty - \infty &= 0 \\
-\infty - \infty &= -\infty
\end{aligned}$$

   验证$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$是否为$\mathbb{R}$上的向量空间

证明. 记$R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$x + y = y + x \quad x \in \mathbb{R}, y \notin R \rightarrow \begin{cases} x + \infty = \infty + x = \infty \\ x + -\infty = -\infty + x = -\infty \end{cases}$$

$$x \notin \mathbb{R}, y \notin \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \infty + \infty = \infty \\ \infty - \infty = 0 \end{cases}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \notin \mathbb{R} \begin{cases} x + y + \infty = \infty = x + \infty \\ x + y - \infty = -\infty = x - \infty \end{cases}$$

$$x \in R, y \notin R, z \notin R \begin{cases} x + \infty + \infty = \infty = x + \infty \\ (x + \infty) - \infty = 0 \neq x + 0 = x \end{cases}$$

所以不是向量空间 □

3 子空间

定义 3.1. *子空间(subspace)：* $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$*并且在*$\mathbb{V}$*的加法和标量乘法下*$\mathbb{U}$*也是向量空间，称*$\mathbb{U}$*是*$\mathbb{V}$*的子空间。也称线性子空间。*

定理 3.2. *判断子空间的条件：*

1. *加法单位元：* $0 \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \mathbb{U} \neq \varnothing$
2. *加法封闭性：* $\forall x, y \in \mathbb{U} \rightarrow x + y \in \mathbb{U}$
3. *标量乘法封闭性：* $\forall a \in \mathbb{F}, \forall x \in \mathbb{U} \rightarrow ax \in \mathbb{U}$

证明. *若*$\mathbb{U}$*是*$\mathbb{V}$*的子空间，则满足1，2，3。*
$\mathbb{U}$*满足1，2，3*$\rightarrow$

1. *交换律：* $x + y = y + x \in \mathbb{U}$
2. *结合律：* $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 \in \mathbb{U}, \mathbb{U} \neq \varnothing$
4. $\forall x \in \mathbb{U}, -1x \in \mathbb{U} \rightarrow x + -1x = 0$
5. $1 \in \mathbb{F}, \forall x \in \mathbb{U} \rightarrow 1x \in \mathbb{U}$
6. $a\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$
   $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ □

例 3.3. 一些子空间

1. $\{(x_1, x_2, 0): x_1, x_2 \in \mathbb{F}\}$是$\mathbb{F}^3$的子空间
2. $b \in \mathbb{F}, \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4: x_3 = 5x_4 + b\}$是$\mathbb{F}^4$子空间$\Leftrightarrow b = 0$

3. $C^{[0,1]}$是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的子空间

4. $\mathbb{R}$上全体可微函数的集合是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$的子空间

5. 区间(0,3)上满足$f'(2)=b$的实可微函数的集合是$\mathbb{R}^{(0,3)}$的子空间$\Leftrightarrow b=0$

6. $\left\{c_n\colon \lim\limits_{n\to\infty} c_n=0\right\}$是$\mathbb{C}^{\infty}$的子空间

3.1 子空间的和

通常情况下，子空间的和具有一些较好的性质。

定义 3.4. *子集的和(sum of subsets)*
设$U_1,U_2,\ldots U_n$都是V的子集，定义$U_1,U_2,\ldots U_n$的和为：

$$U_1+U_2+\cdots+U_n=\{u_1+\cdots+u_n\colon u_1\in U_1,\ldots u_n\in U_n\}$$

即各子集中元素所有可能的和 形成的集合。

例 3.5. 子空间和

1. 设$U=\{(x,0,0)\colon x\in\mathbb{F}\}, W=\{0,x,0\colon x\in\mathbb{F}\}, U\subset\mathbb{F}^3, W\subset\mathbb{F}^3$

$$U+W=\{(x,y,0)\colon x,y\in F\}$$

2. $U=\{(x,x,y,y)\in\mathbb{F}^4\colon x,y\in F\}, W=\{(x,x,x,y)\in\mathbb{F}^4\colon x,y\in F\}$

$$U+W=\{(x,x,y,z)\in\mathbb{F}^4\colon x,y,z\in F\}$$

定理 3.6. *子空间的和是包含这些子空间的最小子空间*

证明.

$$0\in U_1,\ldots,0\in U_n\to 0\in U_1+U_2+\cdots+U_n$$

$$\forall x,y\in\sum U, x+y\in\sum U$$

$$\forall a\in F,\forall x\in\sum U\to a\,x\in\sum U$$

故 3.2$\sum U$是$\mathbb{V}$的子空间。

$$\forall i\in\{1\ldots n\}, U_i\subset\sum U$$

$$\forall S\subset\mathbb{V}\wedge\forall i\in\{1\ldots n\}, U_i\subset S\to\sum U\in S$$

所以$\sum U$是$\mathbb{V}$中包含U_i的最小子空间。（还没证明这个子空间唯一） □

定义 3.7. *直和(direct sum):*

设$U_1,...U_n$是空间$\mathbb{V}$的子空间。

若$\sum U_i$中的每个元素都可以被唯一地表示成$u=u_1+\cdots+u_n$。则称为直和。使用符号$\oplus$

$$U_1\oplus U_2\oplus...U_n$$

例 3.8.

1. 设$U=\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3: x,y\in F\}$,$W=\{(0,0,x)\in\mathbb{F}^3: x\in F\}$,则$U+W=U\oplus W$
2. 设$U_j=\{(0,...x_j,...,0)\in\mathbb{F}^n: x_j\in F\}$,则$\mathbb{F}^n=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_n$
3. 设$U_1=\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3: x,y\in F\}$,$U_2=\{(0,0,x)\in\mathbb{F}^3: x\in F\}$,$U_3=\{(0,x,x)\in\mathbb{F}^3: x\in F\}$,证明$U_1+U_2+U_3$不是直和

 证明. $$(0,0,0)=(0,1,0)+(0,0,1)+(0,-1,-1)$$ □

定理 3.9. *$\sum U$是直和$\Leftrightarrow 0=\sum u_j, u_j=0$且此表示法唯一*

证明. $\sum U$*是直和*$\rightarrow 0=0+...+0$

0*表示法唯一*$\rightarrow\sum U$是直和

$$\forall\boldsymbol{x}\in\sum U,\boldsymbol{x}=\sum x_i,\boldsymbol{x}=\sum y_i$$

$$\mathbf{0}=x-x=\sum(x_i-y_i)\rightarrow x_i-y_i=0\rightarrow x\text{表示法唯一}$$ □

定理 3.10. *U,W是$\mathbb{F}$的子空间,* $U\oplus W\Leftrightarrow U\cap W=\{0\}$

证明.

$U\oplus W\rightarrow U\cap W=\{0\}$

$$\begin{aligned}\forall x\in U\cap W &\qquad 0=x-x(\cap\rightarrow x\in U,-x\in V)\\ 0\text{的表示唯一} &\ \rightarrow\ x=0\end{aligned}$$

$U\cap W=\{0\}\rightarrow U\oplus W$

$$\begin{aligned}U\cap W=\{0\} &\qquad 0=u+w\\ u=-w\in W(\text{空间对标量乘法封闭}) &\ \rightarrow\ u,w\in U\cap W=\{0\}\end{aligned}$$

根据 3.9$\rightarrow U\oplus W$ □

Remark:集合与子空间的对比:

集合	子空间
并	和
不交并	直和
不相交	交为{0}

习题1.C

1. 判断是否为$\mathbb{F}^3$的子空间:

   a. $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1+2x_2+3x_3=0\}$

   Y.

$$
\begin{gathered}
0\in\mathbb{U}\\
\forall x,y\in\mathbb{U}, x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
x_1+y_1+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=x_1+2x_2+3x_3+y_1+2y_2+3y_3=0\rightarrow\\
x+y\in\mathbb{U}\\
\forall x\in\mathbb{U}, a\,x=(a\,x_1,a\,x_2,a\,x_3)\\
a\,x_1+2(a\,x_2)+3(a\,x_3)=a(x_1+2x_2+3x_3)=0\rightarrow\\
a\,x\in\mathbb{U}
\end{gathered}
$$

   b. $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1+2x_2+3x_3=4\}$

   N,$\mathbf{0}\notin\mathbb{U}$

   c. $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1\,x_2\,x_3=0\}$

   N

$$
\begin{gathered}
0\in\mathbb{U}\\
\forall x,y\in\mathbb{U}, x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
(x_1+y_1)\,(x_2+y_2)(x_3+y_3)=\\
x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3+x_1y_2y_3+y_1x_2y_3+y_1y_2x_3\\
\text{令}x_1=0,x_2,x_3\neq0\rightarrow=y_1x_2x_3+y_1x_2y_3+y_1y_2x_3\\
\text{再令}y_2,y_3=0\rightarrow=y_1x_2x_3\neq0\rightarrow\\
x+y\notin\mathbb{U}
\end{gathered}
$$

   d. $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1=5x_3\}$

   Y

$$
\begin{gathered}
0\in\mathbb{U}\\
\forall x,y\in\mathbb{U}, x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
x_1+y_1=5x_3+5y_3=5(x_3+y_3)\rightarrow\\
x+y\in\mathbb{U}\\
\forall x\in\mathbb{U}, a\,x=(a\,x_1,a\,x_2,a\,x_3)\\
a\,x_1=a\,5x_3=5(a\,x_3)\rightarrow\\
a\,x\in\mathbb{U}
\end{gathered}
$$

2. 验证3.3

3. 证明区间$(-4,4)$上$\mathbb{U}=\{f\in\mathbb{R}^{(-4,4)}\colon f'(-1)=3f(2)\}$是$\mathbb{R}^{(-4,4)}$的子空间

   $\mathbf{0}=f\colon(-4,4)\rightarrow0,\ f'(-1)=0=3f(2)=3\times0=0$
   $\rightarrow\mathbf{0}\in\mathbb{U}$
   $\forall f,g\in\mathbb{U},(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=3f(2)=3g(-2)=3(f+g)(-2)$
   $\rightarrow f+g\in\mathbb{U}$
   $\forall f\in\mathbb{U},(a\,f)'(-1)=a\,f'(-1)=a\,3\,f(2)=3\,(a\,f(2))$
   $\rightarrow a\,f\in\mathbb{U}$

4. $b\in R$,证明：$\mathbb{U}=\{f\in C^{[0,1]}\colon \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=b\}$是$R^{[0,1]}$的子空间$\Leftrightarrow b=0$

$b=0\rightarrow \mathbb{U}\subset R^{[0,1]}$
$\mathbf{0}=f\colon[0,1]\rightarrow 0,\int_0^1 0\mathrm{d}x=0\rightarrow f\in\mathbb{U}$
$\rightarrow\mathbf{0}\in\mathbb{U}$
$\forall f,g\in\mathbb{U},\int_0^1(f+g)\mathrm{d}x=\int f\mathrm{d}x+\int g\mathrm{d}x=0+0=0$
$\rightarrow f+g\in\mathbb{U}$
$\forall f\in\mathbb{U},\int a\,f=a\int f=a\,0=0$
$\rightarrow a\,f\in\mathbb{U}$

$\mathbb{U}\subset R^{[0,1]}\rightarrow b=0$
$\mathbf{0}\in\mathbb{U}\rightarrow\int 0\mathrm{d}x=b\in\mathbb{U}\rightarrow b=0$

5. 证明或证伪：R^2是$\mathbb{C}^2$上的子空间

$$\begin{gathered}\mathbf{0}=(0+0i,0+0i)\in R^2\\ \forall x,y\in R^2,x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in R^2\\ \forall x\in R^2,ax=(ax_1,ax_2)\in R^2\\ R^2\rightarrow\mathbb{R}^2\subset\mathbb{C}^2\end{gathered}$$

6.

a. 证明或证伪：$\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\colon a^3=b^3\}$是$\mathbb{R}^3$的子空间

$a^3=b^3\rightarrow a=b$
$\mathbf{0}=(0,0,0)\in\mathbb{U}$
$\forall x,y\in\mathbb{U},x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$
$x_1+y_1=x_2+y_2$
$\rightarrow x+y\in\mathbb{U}$
$\forall x\subset\mathbb{U},ax=(ax,ay,az)\rightarrow ax=ay$
$\rightarrow ax\in\mathbb{U}$

b. 证明或证伪：$\mathbb{U}=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\colon a^3=b^3\}$是$\mathbb{C}^3$的子空间

$a^3=b^3\rightarrow b_0=a,b_1=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a,b_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a$
令$b=b_1,\mathbb{U}=\left\{\left(a,b_1=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a,c\right)\right\}$
$0=(0,0,0)\in\mathbb{U}$
$\forall x,y\in\mathbb{U},x+y=(x_1+x_2,x_{a1}+y_{a1},c_1+c_2)$
$x_{a1}+y_{a1}=-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}x_1-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}x_2$
$=-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}(x_1+x_2),(x+y)_{a1}=x_{a1}+y_{a1}$
$\rightarrow x+y\in\mathbb{U}$
$\forall x\subset\mathbb{U},ax=a(x,b_x,z)=(ax,ab_x,az)$
$ab_x=acx=cax=b_{ax}$
$\rightarrow ax\in\mathbb{U}$

7. 举例：给出一个$\mathbb{R}^2$的非空子集$U=\{x\colon\forall x,y\in\mathbb{U}\rightarrow x+y\in\mathbb{U},-x\in\mathbb{U}\}$,但不是$\mathbb{R}^2$的子空间。

$U = \{(x, y) \in R^2 \colon x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$

$\forall x, y \in \mathbb{U}, x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in U$ ，没有0元的空间，满足加法、标乘。

8. 举例：给出一个$\mathbb{R}^2$的非空子集$U = \{x \colon \forall x \in \mathbb{U}, a \in \mathbb{F} \rightarrow ax \in \mathbb{U}\}$,但不是$\mathbb{R}^2$的子空间。

   $U = \{(x, y) \in R^2 \colon x = 0 \vee y = 0\}$

   两个相互垂直的平面，加法出现不在这两个平面上的点。

9. 证明或证伪： 周期函数集$U = \{f \colon f \colon R \rightarrow R, \exists a > 0, \forall x \in R \rightarrow f(x) = f(x + a)\}$是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$的子空间。

$$\begin{gathered}
\mathbf{0} \in U \\
\forall f, g \in U, f + g = f(x + a) + g(x + b) \\
f = \sin, g = -\tan \rightarrow \sin(x) + \tan(x) \\
0 = \sin(0) + \tan(0), \sin(t) + \tan(t) = 0 \rightarrow \\
\sin(t) + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 0 \rightarrow \sin(t)(1 + \sec(x)) = 0 \\
x = -\pi x \\
\forall f \in U, af = af(x + a) \\
\rightarrow af \in U \\
???
\end{gathered}$$

   大概是构造一个超越函数，使得$t = \infty$

10. $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$为$\mathbb{V}$的子空间，证明：$\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$为$\mathbb{V}$的子空间。

$$\begin{gathered}
\mathbf{0} \in \mathbb{U}_1, \mathbf{0} \in \mathbb{U}_2 \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 \\
\forall x, y \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2, x + y \in \mathbb{U}_1, x + y \in \mathbb{U}_2 \rightarrow x + y \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 \\
\forall x \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2, ax \in \mathbb{U}_1, ax \in \mathbb{U}_2 \rightarrow ax \subset \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2
\end{gathered}$$

11. 证明：$\forall i \in S, \mathbb{U}_i \subset \mathbb{V} \rightarrow \bigcap\limits_{i \in S} \mathbb{U}_i \subset \mathbb{V}$

$$\begin{gathered}
\forall i \in S, \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{U}_i \rightarrow \mathbf{0} \in \textstyle\bigcap_{i \in S} \mathbb{U}_i \\
\forall x, y \in \textstyle\bigcap_{i \in S} \mathbb{U}_i \Leftrightarrow \forall i \in S, x, y \in \mathbb{U}_i \rightarrow x + y \in \mathbb{U}_i \rightarrow x + y \in \textstyle\bigcap_{i \in S} \mathbb{U}_i \\
\forall x \in \textstyle\bigcap_{i \in S} \mathbb{U}_i \Leftrightarrow \forall i \in S, x \in \mathbb{U}_i \rightarrow ax \in \mathbb{U}_i \rightarrow ax \in \textstyle\bigcap_{i \in S} \mathbb{U}_i
\end{gathered}$$

12. 证明：$\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \vee \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$

$$\begin{gathered}
\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \vee \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1 \\
\mathbb{U}_1 \not\subset \mathbb{U}_2 \wedge \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{V} \\
x \in \mathbb{U}_1, y \in \mathbb{U}_2 \rightarrow x + y \notin \mathbb{U}_1, x + y \notin \mathbb{U}_2 \\
(\text{根据定义，若} x + y \in \mathbb{U}_1, \text{那么} y \in \mathbb{U}_1, \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2) \\
\rightarrow x + y \notin \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \vee \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{V} \\
\forall x, y \in \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \rightarrow x + y \in \mathbb{U}_2 \\
\forall x \in \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \rightarrow ax \in \mathbb{U}_2
\end{gathered}$$

13. 证明：$\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \subset \mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_3 \wedge \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_3$

$$\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_3 \wedge \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_3 \to \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_3 \subset \mathbb{V}$$

$$\begin{gathered} \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \subset \mathbb{V} \to \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_3 \wedge \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_3 \\ \mathbb{U}_1 \not\subset \mathbb{U}_3 \vee \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{U}_3 \to \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \not\subset \mathbb{V} \\ \forall x \neq 0 \in \mathbb{U}_1, \forall y \neq 0 \in \mathbb{U}_3, x + y \notin \mathbb{U}_1 \wedge x + y \notin \mathbb{U}_3 \to x + y \notin \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3 \\ \text{设} x + y \in \mathbb{U}_2 \to \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{U}_1 \\ ??? \end{gathered}$$

14. 证明：验证3.5第二条

15. 计算：设$\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$,求$\mathbb{U} + \mathbb{U}$

$$\begin{gathered} \forall x, y \in \mathbb{U} + \mathbb{U}, x \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{U} \to x + y \in \mathbb{U} \\ \forall x \in \mathbb{U} + \mathbb{U}, ax = a(x_1 + x_2) \to x \in \mathbb{U} \to ax \subset \mathbb{U} \\ \to \mathbb{U} + \mathbb{U} = \mathbb{U} \end{gathered}$$

16. 证明或证伪：$\forall \mathbb{U}, \mathbb{W} \subset \mathbb{V} \to \mathbb{U} + \mathbb{W} = \mathbb{W} + \mathbb{U}$

$$\forall x \in \mathbb{U} + \mathbb{W} \to x = u + w = w + u \in \mathbb{W} + \mathbb{U}$$

17. 证明或证伪：$\forall \mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3 \subset \mathbb{V} \to (\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2) + \mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_1 + (\mathbb{U}_2 + \mathbb{U}_3)$

$$\forall x \in (\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2) + \mathbb{U}_3 = (u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3) \in \mathbb{U}_1 + (\mathbb{U}_2 + \mathbb{U}_3)$$

18. 证明：$\forall \mathbb{U} \subset \mathbb{V} \to \{0\} + \mathbb{U} = \mathbb{U}$（加法单位元），哪些子空间有逆元?

$$\begin{gathered} \forall x \in \mathbb{U}, x + \mathbf{0} = x \in \mathbb{U} \to \{\mathbf{0}\} + \mathbb{U} = \mathbb{U} \\ \forall \mathbb{U}, \mathbb{W} \subset \mathbb{V}, \mathbb{U} + \mathbb{W} = \{0\} \to \mathbb{U} = \mathbb{W} = \{0\} \to \{0\}\text{有逆元} \end{gathered}$$

19. 证明或反例：$\forall \mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{W} \subset \mathbb{V} \wedge \mathbb{U}_1 + \mathbb{W} = \mathbb{U}_2 + \mathbb{W} \to \mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$

$$\mathbb{W} = \mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{U}_1 = \{\mathbf{0}\}, \mathbb{U}_2 = \{(x, 0), x \in R\}$$

20. 构造：$\mathbb{U} = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in F\}$,构造$\mathbb{W} \to \mathbb{U} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{F}^4$

$$\mathbb{W} = \{(0, x, 0, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in F\}$$

$$\begin{gathered} u \neq 0 \wedge w \neq 0 \wedge u + w = 0 \to (x, x, y, y) + (0, a, 0, b) = 0 \\ (x, x + a, y, y + b) = 0 \to \\ x = 0, y = 0 \to u = 0 \wedge w = 0 \to \mathbb{U} \oplus \mathbb{W} \\ \forall x \in \mathbb{F}^4, x = (a, b, c, d) = (a, a + b - a, c, c + d - c) \\ = (a, a, c, c) + (0, b - a, 0, d - c) \end{gathered}$$

21. 构造：$\mathbb{U} = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in \mathbb{F}^5 : x, y \in F\}$，构造$\mathbb{W} \subset \mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}^5 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$

$$\begin{gathered} \mathbb{W} = \{(0, 0, x, y, z) \in \mathbb{F}^5 : x, y \in F\} \\ 0 = (x, y, x + y, x - y, 2x) + (0, 0, a, b, c) = (x, y, x + y + a, x - y + b, 2x + c) \\ \to x = 0, y = 0 \to a = 0, b = 0, c = 0 \to \mathbb{W} \oplus \mathbb{U} \\ \forall (a, b, c, d, e) \in \mathbb{F}^5 \to (a, b, c + a + b - a - b, d + a - b - a + b, e + 2a - 2a) \\ = (a, b, a + b, a - b, 2a) + (0, 0, c - a - b, d - a + b, e - 2a) \end{gathered}$$

22. 构造：$\mathbb{U}=\{(x,y,x+y,x-y,2x)\in\mathbb{F}^5\colon x,y\in F\}$，找出$\mathbb{F}^5$的三个子空间$\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2,\mathbb{W}_3\rightarrow\mathbb{F}^5=\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}_1\oplus\mathbb{W}_2\oplus\mathbb{W}_3$

$$\begin{gathered}\mathbb{W}_1=(0,0,x,0,0),\mathbb{W}_2=(0,0,0,x,0),\mathbb{W}_3=(0,0,0,0,x)\\ \mathbb{W}_1\oplus\mathbb{W}_2\oplus\mathbb{W}_3=(0,0,a,b,c)\oplus\mathbb{U}\\ \forall(a,b,c,d,e)\in\mathbb{F}^5\rightarrow(a,b,c-a-b+a+b,d-a+b+a-b,e-2a+2a)\\ =(a,b,a+b,a-b,2a)+(0,0,c-a-b,0,0)+(0,0,0,d+a-b,0)\\ +(0,0,0,0,e-2a)\end{gathered}$$

23. 证明或反例：$\mathbb{U}_1,\mathbb{U}_2,\mathbb{W}\subset\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{V}=\mathbb{U}_1\oplus\mathbb{W}\wedge\mathbb{V}=\mathbb{U}_2\oplus\mathbb{W}\rightarrow\mathbb{U}_1=\mathbb{U}_2$

$\mathbb{W}\neq\mathbb{V}$,要不然没啥意思了$\{0\}\oplus\{0\}\oplus\mathbb{V}=\mathbb{V}$

$$\begin{gathered}\forall v\in\mathbb{V},\ v=u_1+w=u_2+w\\ v-w=u_1=u_2\in\mathbb{U}_1,\in\mathbb{U}_2\\ \forall u_1\in\mathbb{U}_1\rightarrow u_1+w=v=u_2+w,u_1=u_2\in\mathbb{U}_2\end{gathered}$$

24. 证明：偶函数$\mathbb{U}_e=\{f\in R^R:\forall x\in R,f(-x)=f(x)\}$,奇函数$\mathbb{U}_o=\{f\in R^R\colon\forall x\in R,f(-x)=-f(x)\}$。证明：$R^R=\mathbb{U}_e\oplus\mathbb{U}_o$

$$\begin{gathered}\mathbb{U}_e\cap\mathbb{U}_o=\{f\colon f(-x)=f(x)=-f(x)\rightarrow f(x)=0\}\\ \rightarrow\mathbf{0}=\mathbb{U}_e\cap\mathbb{U}_o\\ \forall f,g\in\mathbb{U}_e,(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)\\ \rightarrow f+g\in\mathbb{U}_e\\ \forall f\in\mathbb{U}_e,(af)(-x)=af(-x)=af(x)=(af)(x)\\ \rightarrow af\in\mathbb{U}_e\\ \rightarrow U_e\Rightarrow\mathbb{U}_e\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\forall f,g\in\mathbb{U}_o,(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)\\ \rightarrow f+g\in\mathbb{U}_o\\ \forall f\in\mathbb{U}_o,(af)(-x)=af(-x)=a-f(x)=-af(x)=-(af)(x)\\ \rightarrow af\in\mathbb{U}_o\\ \rightarrow U_o\Rightarrow\mathbb{U}_o\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}f(x)=\tfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\tfrac{f(x)-f(-x)}{2}\\ g=\tfrac{f(x)+f(-x)}{2},h=\tfrac{f(x)-f(-x)}{2}\\ g(-x)=\tfrac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)\rightarrow g\in\mathbb{U}_e\\ h(-x)=\tfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)\rightarrow h\in\mathbb{U}_o\end{gathered}$$