Chapter13

BY 函数列与函数项级数

1 Def&Theo

1.1 函数列

1. 定义在同一数集E上的函数序列$\{f_n\}$称为E上的函数列

2. 函数列的收敛性：点收敛：在x_0处数列$f_n(x_0)$收敛

$$\begin{array}{cc} x_0\text{点收敛} & \text{在}x_0\text{处数列}f_n(x_0)\text{收敛} \\ I\text{区间收敛} & \text{在}I\text{内每一点都收敛} \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\text{称为极限函数}$$

3. 一致收敛性：在D上一致收敛于f

$$\begin{array}{lc} & f_n\text{和极限函数}f\text{都在数集}D\text{上},\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+\wedge n>N\wedge\forall x\in D \\ \to & |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \\ \text{记} & f_n\rightrightarrows f, x\in D \end{array}$$

4. 一致收敛则收敛；收敛不一定一致收敛

5. 柯西准则：

$$\begin{array}{lc} & f_n\text{在}D\text{上一致收敛} \\ \Leftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+\wedge n,m>N\wedge\forall x\in D\to|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \\ \text{Pr} & \text{必要：}|f_n-f_m|\leqslant|f_n-f|+|f_m-f| \\ & \text{充分：}\lim_{m\to\infty}|f_n-f_m|\leqslant\varepsilon \end{array}$$

6.

$$\text{函数在区间}D\text{上一致收敛}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$
$$\text{函数在区间}D\text{上不一致收敛}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|>0$$

7. 内闭一致收敛：f_n, f在区间I上有定义，任意有界闭区间$[a,b]\subset I$, f_n在$[a,b]$上一致收敛于f

1.2 函数项级数

1. 函数项级数：函数列的和函数:$\sum f_n(x)=f$

2. 函数项级数的收敛：

$$\begin{array}{cc} x_0\text{点收敛} & \text{在}x_0\text{处数项级数}\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_0)\text{收敛} \\ I\text{区间收敛} & \text{在}I\text{内每一点都收敛} \\ \text{记为} & \sum_{i=1}^{\infty}f_n(x)=f(x) \end{array}$$

3. 函数项级数的一致收敛性：

$$S_n=\sum_1^n f_i(x)$$
$$\text{函数列}S_n\text{在}D\text{上一致收敛}$$
$$\text{函数列}S_n\text{在}D\text{上内闭一致收敛}$$

4. 柯西准则：

$$\text{函数项级数在}D\text{上一致收敛}\Leftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon>0,\exists N\in N^+,\forall n>N\wedge\forall p\in N^+,\forall x\in D\to|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

5. 函数项级数收敛的必要条件:

$$\text{函数项级数}\sum u_n\text{在}D\text{上收敛}\Rightarrow u_n\rightrightarrows\mathbf{0},x\in D$$

6. 函数项级数一致收敛的充要条件:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=0$$

1.3 函数项级数的一致收敛性的判别法

1. 魏尔斯特拉斯，M判别法：

$$\sum u_n(x)\text{是}D\text{上的级数，}\sum M_n\text{是收敛的正项级数}$$
$$\forall x\in D\wedge|u_n(x)|\leqslant M_n$$
$$\Rightarrow\sum u_n(x)\text{在}D\text{上一致收敛}$$

2. 阿贝尔判别法：

$$\begin{cases}\sum f_n\text{在}I\text{上一致连续}\\ \forall x\in I,g_n(x)\text{是单调的}\\ \{g_n\}\text{在}I\text{上一致有界.}(\exists M>0,\forall x\in I,\forall n\in N^+,|g_n(x)|\leqslant M)\end{cases}\Rightarrow\sum f_ng_n\text{在}I\text{上一致收敛}$$

3. 狄利克雷判别法：

$$\begin{cases}S_n=\sum_1^n f_k\text{在}I\text{上一致有界}\\ \forall x\in I,\{g_n\}\text{单调}\\ g_n\rightrightarrows 0,x\in I\end{cases}\Rightarrow\sum f_ng_n\text{在}I\text{上一致收敛}$$

2 一致收敛函数列和函数项级数的性质

2.1 函数列

1. 一致收敛的函数列在点x_0处的极限可交换：$\lim_n(\lim_{x\to x_0}f_n(x_n))=\lim_{x\to x_0}(\lim_n f_n(x))$

$$f_n\text{在}(a,x_0)\cup(x_0,b)\text{上一致收敛于}f\wedge\forall n,\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to x_0}f(x)(\text{暗示了这两个极限的存在性})$$
$$\text{Remark: 左右极限也成立}$$

2. 函数列f_n在I上一致收敛，且f_n都连续则极限函数f在I上连续

   推论: 各项连续的函数列在I上的极限函数不连续⇒函数列不一致连续x^n在$(-1,1]$在1处不连续

   推论：连续函数在区间内闭一致收敛于f,则f在开区间内连续

3. 一致收敛且连续的函数列，积分与极限可交换:$\int \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_n \int f_n(x)\mathrm{d}x$

4. 收敛 连续可微的函数列 导数列一致收敛，则求导和极限可交换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

   Remark：这里可以推出$f_n \rightrightarrows f$

   推论：f_n在区间I上,若$x_0 \in I$是f_n的收敛点，且$\{f_n'\}$在I上内闭一致收敛,则f在I上可导且

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

2.2 函数项级数

1. 连续性：在有界闭区间上一致收敛，连续，则和函数在闭区间上连续

$$\sum\Big(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right)$$

2. 可逐项求积：在有界闭区间上一致收敛，连续，则无限求和 和 积分可交换

$$\sum\left(\int_a^b u_n\right) = \int_a^b\left(\sum u_n\right)$$

3. 可逐项求导：在有界闭区间上都有连续的导函数，在有界闭区间上收敛，

   导函数序列在闭区间上一致收敛

$$\text{在闭区间}D\text{上}\ f\begin{cases}\text{收敛}\\ \text{有连续的导函数}\\ f'\text{一致收敛}\end{cases} \Rightarrow \sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n\right)$$

3 Remark

这里重要的是没有求出极限函数或和函数的情况下判断极限函数的性质

特别是与极限运算是否可交换的关系