# 第四章 连续性

## 1 函数的极限

**定义 1.1.** $X,Y$是度量空间.$E\subset X$, $f: E\to Y$. $p\in E'$.

$$\exists q\in Y.\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0.\forall x\in(0<d_X(x,p)<\delta)\to d_Y(f(x),q)<\varepsilon$$

*记为:* $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$

*Remark:* $p\in E'$.但$p$不一定是$E$的点；$p\in E$也可能$\lim_{x\to p}f(x)\neq f(p)$

**定理 1.2.** *Heine. 函数在p连续等价于任意收敛于p的序列极限可以穿透函数*

$$\lim_{x\to p} f(x)=q\Leftrightarrow\forall\{p_n:\lim p_n=p\},\lim f(p_n)=q$$

*证明.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}f(x)&=p\\
\lim p_n=p&\to d_X(p_n,p)<\delta\\
&\to p_n\in 0<x<\delta\\
&\to d_Y(f(p_n),q)<\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall\{p_n:\lim p_n=p\}.\lim f(p_n)=q\\
&\text{Assume:} \lim_{x\to p}f(x)\neq q\\
&\to\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x\in(0<d_X(x,p)<\delta)\to d_Y(f(x),q)>\varepsilon\\
&\text{let:}\ \delta_n=\frac{1}{n}.\text{取}x_n\text{为满足上述条件的}x.\\
&\to\lim p_n\neq p.\text{矛盾}\\
&\to\lim_{x\to p}f(x)=q
\end{aligned}$$

□

*推论 1.3. f在p有极限则唯一*

**定义 1.4.** *函数的逐点-四则运算*

$$\begin{array}{lll}
f+g & (f+g)(x)=f(x)+g(x) & \\
f-g & (f-g)(x)=f(x)-g(x) & \\
f\times g & (f\times g)=f(x)\times g(x) & \\
f/g & (f/g)(x)=f(x)/g(x) & D=\{g(x)\neq 0\}\\
\lambda f & (\lambda\times f)(x)=\lambda\times f(x) & \\
f>g & \forall x\in D. f(x)>g(x) &
\end{array}$$

**定理 1.5.** $E\in X$，$X$是度量空间，$p$是$E$的极限点, $f$，$g$是复函数.$\lim_{x\to p}f(x)=A,\lim_{x\to p}g(x)=B$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}(f+g)(x)&=\lim_{x\to p}f(x)+\lim_{x\to p}g(x)=A+B\\
\lim_{x\to p}(fg)(x)&=\lim_{x\to p}f(x)\cdot\lim_{x\to p}g(x)=AB\\
B\neq 0\to\lim_{x\to p}(f/g)(x)&=\frac{\lim_{x\to p}f(x)}{\lim_{x\to p}g(x)}=\frac{A}{B}
\end{aligned}$$

## 2 连续函数

**定义 2.1.** $X,Y$是度量空间.$E\subset X$, $p\in E$. $f: E\to Y$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0.d_X(x,p)<\delta\wedge x\in E\to d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon$$

$$\begin{array}{ll} \text{满足上述条件} & f\text{在}p\text{点连续} \\ \forall x\in E.f\text{在}x\text{连续} & f\text{在}E\text{上连续} \end{array}$$

*Remark:* $f$在$p$点连续要求$f$在$p$必须有定义。

$p$是$E$的孤立点 $\rightarrow f$在$p$连续.$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,d_X(x,p)<\delta\rightarrow x=p\rightarrow d_Y(x,p)=d_Y(p,p)=0<\varepsilon$

**定理 2.2.** $p$是$E$的极限点. $f$在$p$连续$\Leftrightarrow\lim_{x\rightarrow p}f(x)=f(p)$

*证明.*

$$\begin{aligned} f\text{在}p\text{连续}\rightarrow & d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon \\ \rightarrow & \lim_{x\rightarrow p}f(x)=f(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x\rightarrow p}f(x)=f(p) \\ \rightarrow & d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon \\ \rightarrow & f\text{在}p\text{连续} \end{aligned}$$

□

**定理 2.3.** *连续函数的复合是连续函数*

$$X,Y,Z\text{是度量空间。}E\subset X,\ f\colon E\rightarrow Y.g\colon\text{range } f\rightarrow Z.h\colon h(x)=f(g(x)),x\in E$$
$$f\text{在}p\in E\text{连续}\wedge g\text{在}f(p)\text{连续}\rightarrow h(p)=g(f(p))\text{在}p\text{连续}$$

*证明.*

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon>0,f\text{在}p\text{连续}\rightarrow & \forall\delta_1>0,\exists\delta_0>0,d_X(x,p)<\delta_0\rightarrow d_Y(f(x),f(p))<\delta_1 \\ g\text{在}f(p)\text{连续}\rightarrow & \forall\varepsilon>0,d_Y(f(x),f(p))<\delta_1\rightarrow d_Z(g(f(x)),g(f(p)))<\varepsilon \\ \rightarrow & d_X(x,p)<\delta\rightarrow d_Z(g(f(x)),g(f(p)))<\varepsilon \\ \rightarrow & h\text{在}p\text{点连续} \end{aligned}$$

□

**定理 2.4.** $X,Y$是度量空间，$f\colon X\rightarrow Y$.

$$f\text{在}X\text{上连续}\Leftrightarrow\forall\text{开集}G_Y\subset Y,\{f^{-1}(G_Y)\}\text{是}X\text{中的开集}$$

*证明.*

$$\begin{aligned} & f\text{在}X\text{上连续，}\forall G_Y\in\mathcal{T}(Y). \\ & p\in X,f(p)\in G_Y. \\ G_Y\text{开}\rightarrow & \forall\varepsilon>0,d_Y(f(p),y)<\varepsilon\rightarrow y\in G_Y \\ f\text{在}p\text{连续}\rightarrow & \exists\delta>0,d_X(x,p)<\delta\rightarrow d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon \\ \rightarrow & d_X(x,p)<\delta\rightarrow x\in f^{-1}(G_Y) \\ \rightarrow & U_x(\delta)\subset f^{-1}(G_Y) \\ \rightarrow & x\text{是}f^{-1}(G_Y)\text{的内点} \\ \rightarrow & G_Y\in\mathcal{T}(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall G_Y\in Y,\{f^{-1}(G_Y)\}\in\mathcal{T}(X) \\ & \forall p\in X.\forall\varepsilon>0,G_Y=\{y\colon d(y,f(p))<\varepsilon\}.G_Y\in\mathcal{T}(Y) \\ \rightarrow & \{x\colon x=f^{-1}(G_Y)\}\in\mathcal{T}(X) \\ \rightarrow & \exists\delta>0,d_X(x,p)<\delta\rightarrow x\in f^{-1}(G_Y) \\ \rightarrow & f(x)\in G_Y \\ \rightarrow & d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon \\ \rightarrow & f\text{在}p\text{点连续} \\ & p\text{的任意性}\rightarrow f\text{在}X\text{上连续} \end{aligned}$$

□

*推论* **2.5.** 度量空间$X,Y.f\colon X\rightarrow Y$是连续的$\Leftrightarrow\forall$闭集$F_Y\subset Y\rightarrow\{x\colon f^{-1}(F_Y)\}$是$X$中的闭集

*Remark:* $\forall E\in Y.f^{-1}(E^c)=(f^{-1}(E))^c$

**定理 2.6.** $f,g$是度量空间$X$上的复连续函数 $\rightarrow f+g.fg$在$X$上连续. $f/g$在$g(x)\neq 0$上连续

*证明.*

$$\begin{aligned}\forall p\in X,\lim_{x\rightarrow p}(f+g)(x)&=\lim f(x)+\lim g(x)=f(p)+g(p)\\ \lim_{x\rightarrow p}(fg)(x)&=\lim f(x)\times\lim g(x)=f(p)\times g(p)\\ \lim_{x\rightarrow p}(f/g)(x)&=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{f(p)}{g(p)}\end{aligned}$$

□

**定理 2.7.** *向量值函数连续* $\Leftrightarrow$ *每个分量都连续*

1. $\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$连续 $\Leftrightarrow f_1(x)$连续 $\wedge\cdots\wedge f_n(x)$连续
2. 连续向量函数$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:X\rightarrow R^n\rightarrow\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}$连续

*证明.*

$$\begin{aligned}&\text{取}R^n\text{上的度量为范数}\\ &|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant|\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(y)|\\ &=\left(\sum^n(|f_i(x)-f_i(y)|^2)\right)^{1/2}<\varepsilon\\ &\rightarrow\boldsymbol{f}\text{在}x\text{处连续}\rightarrow f_i\text{在}x\text{处连续}\\ f_i\text{在}x\text{处连续}\rightarrow d(\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{f}(y))&=\left(\sum^n|f_i(x)-f_i(y)|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant(n\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\varepsilon\\ &\rightarrow\boldsymbol{f}\text{在}x\text{处连续}\end{aligned}$$

□

2.对每个运算进行分量计算易证

**例 2.8.**

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}\in R^k.\Phi(\boldsymbol{x})=x_i.|\Phi_i(\boldsymbol{x})-\Phi_i(\boldsymbol{y})|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\rightarrow\Phi\text{在}R^k\text{上连续}\\ &f(x)=x\text{连续}\rightarrow x^n\text{连续}\rightarrow\text{单项式}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}\text{在}R^k\text{上连续} && \text{单项式连续}\\ &\forall c\in R,f(x)=c\text{连续}\rightarrow\text{多项式}c_1x_1^{n_1}\ldots c_kx_k^{n_k}\text{在}R^k\text{上连续} && \text{多项式连续}\\ &p_1,p_2\in\mathcal{P}(R).p_2(x)\neq 0.f(x)=\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\text{在}R^k\text{上连续} && \text{有理分式连续}\\ &f(x)=|x|.||x|-|y||\leqslant|x-y|\text{成立}.f\text{在}R^k\text{上连续} && \text{范数连续}\\ &g(x)\text{在}R^k\text{上连续}\rightarrow f(x)=|g(x)|\text{在}R^k\text{上连续} && \text{连续函数的范数连续}\end{aligned}$$

# 3 连续性与紧性

**定义 3.1.** *有界函数。*

$$f:E\rightarrow R^k.\exists M\in R.\forall x\in E\rightarrow|f(x)|\leqslant M$$

*称f为有界的。*

**定理 3.2.** *紧度量空间E映入到度量空间的连续映射那么值域集合f(E)是紧的*

$$\text{度量空间}X,Y.\text{紧集}E\subset X.f\text{在}E\text{上连续}\rightarrow f(E)\subset Y\text{是紧的}$$

*证明.*

$$\begin{aligned}&\text{设}\{G_\alpha\}\text{是}f(X)\subset Y\text{的一个开覆盖.}\\ &f\text{连续}\rightarrow f^{-1}(G_a)\text{是开的}\\ E\text{紧}\rightarrow\{f^{-1}(G_a)\}&\text{有有限子覆盖}\rightarrow X\subset\bigcup_{i=1}^n\{f^{-1}(G_i)\}\\ f(f^{-1}(G_i))\subset G_i&\rightarrow f(X)\subset\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_i)\\ &\rightarrow f(X)\text{有一个有限子覆盖}\\ &\rightarrow f(X)\text{是紧的}\end{aligned}$$

Remark: $f(f^{-1}(G_a))\subset G_a$.它对$G\subset Y$成立.但对$G\subset X$有$f^{-1}(f(G))\supset G$.等号不一定成立 $\square$

**定理 3.3.** $f$是把紧度量空间$X$映入$R^k$内的连续映射，那么$f(X)$是闭的且有界.因此$f$有界

*证明.*

$f(X)\to R^k$连续$\to f(X)$紧$\to f(X)$有界$\wedge$闭 $\square$

**定理 3.4.** 紧度量空间$X$上的连续实函数$f$必能取到最大最小值

$$M=\sup_{x\in X} f(x).m=\inf_{x\in X} f(x).\exists r,s\in X\to f(r)=M, f(s)=m.$$

*证明.*

$f(X)$是闭的实数集$\to \sup(f(X))\in f(X).\inf(f(X))\in f(X)$ 2.28上确界一定在闭集内 $\square$

**定理 3.5.** *紧度量空间X映到度量空间Y的连续1-1映射满射，逆映射$f^{-1}$是Y映满X的连续映射*

*证明.*

$$\begin{gathered}
f^{-1}(f(x))=x\\
\forall \text{开集} G\subset X.G^c \text{是} X \text{的闭集}\to G^c \text{是紧的} \quad 2.35\text{紧集的闭子集是紧集}\\
\to f(G^c)\subset Y \text{是紧的}\to f(G^c)\text{是闭的}\\
f\text{是一一的且满}\to f(G)=(f(G^c))^c\\
f(G^c)\text{是闭的}\to f(G)\text{是开的}\\
\to\forall G\subset X, f(G)\subset \mathcal{T}(Y)\\
\to f^{-1}\text{是连续的}
\end{gathered}$$

$\square$

**定义 3.6.** *一致连续*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\wedge d_X(x,y)<\delta\to d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$$

*Remark: 一致连续指集合上的性质，连续指逐点性质。连续$\delta(\varepsilon,x)$.一致连续$\delta(\varepsilon)$.*

***推论 3.7.*** *一致连续的函数连续*

**定理 3.8.** *紧度量空间X映入度量空间Y的连续函数一致连续*

*证明.*

$$\begin{gathered}
\text{紧度量空间} X \text{映入度量空间} Y \text{的函数} f \text{连续}\\
\forall\varepsilon>0.\\
f\text{连续}\to\forall p\in X.\Phi(p)\colon q\in X\wedge d_X(p,q)<\Phi(p)\to d_Y(f(p),f(q))<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{逐点配}\delta\\
J(p)=\left\{q\in X\colon d_X(p,q)<\frac{1}{2}\Phi(p)\right\}\to J(p)\text{是度量诱导的邻域}\to J(p)\text{开}\\
d_X(p,p)=0<\frac{1}{2}\Phi(p)\to p\in J(p)\\
\to\{J(p)\}\text{是} X \text{的一个开覆盖}\\
\to J(p)\text{有一个有限子覆盖} \qquad \text{必有有限子覆盖}\\
\delta=\frac{1}{2}\min(\Phi(p_1),\ldots,\Phi(p_2))\wedge\delta>0 \qquad \text{有最小}\delta\\
\forall p,q\in X\wedge d_X(p,q)<\delta\to\exists m\to p\in J(p_m) \qquad d(p,q)\leqslant d(p,p_m)+d(p_m,q)\\
\to d_X(p,p_m)<\frac{1}{2}\Phi(p_m) \qquad \text{控制} d(p,q)\leqslant\delta\\
\to d_X(q,p_m)\leqslant d_X(p,q)+d_X(p,p_m)<\delta+\frac{1}{2}\Phi(p_m)\leqslant\Phi(p_m).\\
\to d_Y(f(p),f(q))\leqslant d_Y(f(p),f(p_m))+d_Y(f(q),f(p_m))<\varepsilon \qquad \text{这样的}\delta\text{对应的} f \text{必}<\varepsilon\\
\to f\text{一致连续}
\end{gathered}$$

$\square$

**定理 3.9.** *$R^1$上非紧集上函数不满足紧集定理的例子*

1. 在$E$上连续但不有界的函数
2. 在$E$上连续有界但没有最大值的函数
3. $E$有界，在$E$上有连续但不一致连续的函数

*Example:*

1. $$f(x) = \frac{1}{x - x_0}. (x \in (x_0, +\infty))$$
$$x_0 \in E'. x_0 \notin E. f(x)\text{在}E\text{上连续但无界}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0. x \in E \wedge |x - x_0| < \delta. \exists t \in E \to |t - x| < \delta$$
$$|f(t) - f(x)| = \frac{1}{x_0 + \frac{1}{n} - x_0} - \frac{1}{x_0 + x - x_0} = n - \frac{1}{x} > M$$
$$\to f\text{不一致连续}$$

2. $$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2}. x \in (x_0, +\infty)$$
$$0 < g(x) < 1 \to g\text{有界}$$
$$\sup_{x \in E} g(x) = 1.\text{但}\forall x \in E. g(x) < 1 \to g(x)\text{无最大值}$$

3. Remark: $E$的有界性是必须的，否则定义在整数上的函数$f$连续
$\to f$一致连续。这样的$E$上不存在不一致连续的函数.

**例 3.10.** 紧集上1-1映射的逆映射是连续的。紧性是不可或缺的

$$X = [0, 2\pi). Y = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\boldsymbol{f}: X \to Y. \boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t). \boldsymbol{f}\text{满}$$
$$\text{但}\boldsymbol{f}^{-1}\text{在}(1, 0) = f(0)\text{处不连续}(\lim_{t \to 1, 0} \boldsymbol{f}^{-1}(t) = 2\pi, \boldsymbol{f}^{-1}(1, 0) = 0).$$

# 4 连续性与连通性

**定理 4.1.** $f$是把连通的度量空间$X$映入度量空间$Y$内的连续映射，$E$是$X$的连通子集$\to f(E)$连通

*证明.*

反证: $A, B$是$Y$的两个分离的不空子集，$f(E) = A \cup B$
$$\text{let}: G = E \cap f^{-1}(A). H = E \cap f^{-1}(B)$$
$$\to E = G \cup H, G \neq \varnothing, H \neq \varnothing$$
$$A \subset \bar{A} \to G \subset f^{-1}(\bar{A}). f\text{连续} \to f^{-1}(\bar{A})\text{闭}$$
$$\to \bar{G} \subset f^{-1}(\bar{A})$$
$$f(H) = B \wedge \bar{A} \cap B = \varnothing \to \bar{G} \cap H = \varnothing$$
$$\text{同理} \to G \cap \bar{H} = \varnothing$$
$$\to G, H\text{是分离的.这与}E\text{是连通的矛盾}$$
$$\to f(E)\text{连通}$$

□

**定理 4.2.** *介值定理。f是 $[a, b]$ 上的连续实函数.* $f(a) < f(b). \forall c \in (f(a), f(b)). \exists x \in (a, b) \to f(x) = c$

*证明.*

$[a, b]$连通 $\to f([a, b])$连通 $\to \forall t \in (f(a), f(b)). \exists t \in f(\{(a, b)\}) \to f(x) = t$ □

**注意 4.3.** 定理4.2的逆命题不成立

$$x_1 < x_2. f(x_1), f(x_2)\text{之间的任意}c\text{都}\exists x \in (x_1, x_2), f(x) = c \to f\text{连续}$$

# 5 间断

$x \in X. f$在$x$不连续则称为$f$在$x$点间断

**定义 5.1.** *左右极限。*

$$\begin{array}{cc}
f\text{定义在开区间且}(a,b)\text{上} & \\
\forall x, a \leqslant x < b.(x,b)\text{中的满足}t_n \to x\text{的序列}t_n & \\
f(t_n) \to q & f(x^+) = q \quad \text{右极限} \\
\forall x, a < x \leqslant b.(a,x)\text{中的满足}t_n \to x\text{的序列}t_n & \\
f(t_n) \to q & f(x^-) = q \quad \text{左极限}
\end{array}$$

*推论* **5.2.** $f$在$x$连续$\Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p) \Leftrightarrow \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = f(p)$

**定义 5.3.** *间断点的分类。第一类间断和第二类间断*

$f$定义在$(a,b)$上，在$x$间断

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $f(x^+), f(x^-)$都存在 | 第一类间断 | 简单间断 | $f(x^+) \neq f(x^-) \vee f(x^+) = f(x^-) \neq f(x)$ |
| 2. | 有一个不存在 | 第二类间断 | | |

**例 5.4.** 一些函数的间断点

1. $f(x) = \begin{cases} 1, x\text{是有理数} \\ 0, x\text{是无理数} \end{cases}$ $\quad f$在每个点$x$上发生第二类间断.$f(x^+), f(x^-)$不存在
2. $f(x) = \begin{cases} x, x\text{是有理数} \\ 0, x\text{是无理数} \end{cases}$ $\quad f$在0处连续, 其它的每个点发生第二类就间断
3. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -3 < x < -2 \\ -x-2, & -2 \leqslant x < 0 \\ x+2, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$ $\quad f$在0处简单间断，在其余点连续
4. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad f(0^+), f(0^-)$不存在$\to f$在(0)处发生第二类间断，其余点连续

# 6 单调函数

主要是在开区间上的函数

**定义 6.1.** $f$是$(a,b)$上的实函数.$\forall x, y \wedge a < x < y < b \to f(x) \leqslant f(y)$。称$f$在$(a,b)$上单调增

**定理 6.2.** *开区间上的单调函数只有简单间断点. 即对每个点的左右极限都存在*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

$$a < x < y < b \to f(x^+) \leqslant f(y^-)$$

*证明.*

$$\begin{array}{c}
x \in (a,b) \\
\text{集合}\{f(t): t \in (a,x)\}\text{的元素以}f(x)\text{为上界} \to A = \sup\{f(t): t \in (a,x)\} \\
A \leqslant f(x) \\
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \wedge a < x - \delta < x \to A - \varepsilon < f(x-\delta) \leqslant A \\
f\text{单调} \to f(x-\delta) \leqslant f(t) \leqslant A \\
\to |f(t) - A| < \varepsilon \ (x - \delta < t < x) \\
\to f(x^-) = A \\
\text{同理}f(x^+) = B\text{也存在} \\
\\
a < x < y < b \to f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t) \\
f(x^-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t) \\
\to f(x^+) \leqslant f(y^-)
\end{array}$$

□

*推论* **6.3.** *区间上的单调函数没有第二类间断点*

**定理 6.4.** *区间上的单调函数至多有可数个第一类间断点*

*证明.*

$$\begin{array}{c}\text{单调增函数}f\text{，}E\text{是}f\text{间断点的集合}\\ E\text{的每个点}x\to f(x^-)<r(x)<f(x^+).r(x)\in Q\qquad Q\text{在}R\text{中稠密}\\ (\forall x_1<x_2\to f(x_1^+)\leqslant f(x_2^-))\to(x_1\neq x_2\to r(x_1)\neq r(x_2))\\ \to r\colon E\to Q\text{的一个单射}\to\operatorname{card}E\leqslant\operatorname{card}Q=\omega\end{array}$$

□

**注意 6.5.** 单调函数的间断点不一定是孤立点

在给定开区间(a,b)上的任意可数子集E总能构造函数f在a，b上单调且在E上间断且其它点不间断

$$\begin{array}{c}E\text{的点可以排成序列}\{x_n\}.c_n\text{是一个正数序列且}\sum c_n\text{收敛}\\ f(x)=\sum_{x_n<x}c_n\ (a<x<b)\\ f\text{具有性质:}\\ 1.\,f\text{在}(a,b)\text{上单调增}\\ 2.\,f\text{在}E\text{的每个点上间断}.\,f(x_n^+)-f(x_n^-)=c_n\\ f\text{在其它点上连续}\\ \forall x\in(a,b).\,f(x)=f(x^-)\qquad\qquad\text{左连续}\end{array}$$

# 7 无穷极限与在无穷远点的极限

广义实数系下的邻域定义使得极限可以趋于无穷

**定义 7.1.** $-\infty,+\infty$的邻域

$$\begin{array}{l}\forall c,x>c\text{的实数集}(c,+\infty)\quad+\infty\text{的邻域}\\ \forall c,x<c\text{的实数集}(-\infty,c)\quad-\infty\text{的邻域}\end{array}$$

**定义 7.2.** *广义实数系下极限的定义*

$$\begin{array}{c}f\text{是定义在}E\text{上的实函数，}A\text{和}x\text{都在广义实数系中}.\forall U_A(r),\exists U_x(r)\to U_A(r)\cap U_x(r)\neq\varnothing\\ \forall t\in U_x(r),t\neq x\to f(t)\in U\colon\lim_{t\to x}f(t)=A\end{array}$$

**定理 7.3.** *广义实数系下，极限的四则运算*

$$\begin{array}{lc}1. & \lim f(t)=x\to\lim f(t)=y\to x=y\\ 2. & \lim(f+g)(t)=A+B\\ 3. & \lim(fg)(t)=AB\\ 4. & \lim\frac{f}{g}(t)=\frac{A}{B}\end{array}$$

*Remark:* $\infty-\infty,0\cdot\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{A}{0}$没有定义

# 习题

1. Proof or Disproof: $f\colon R^1\to R.\forall x\in R^1,\lim_{h\to0}(f(x+h)-f(x-h))=0.$ Proof: $f$连续

$$\begin{array}{c}\forall x\in R.\lim f(x+h)-f(x-h)=0\to\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|h|<\delta\to|f(x+h)-f(x-h)|<\varepsilon\\ \text{重要的问题在于说明}|h|<\delta\to|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon\\ |f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)|\geqslant||f(x+h)-f(x)|-|f(x-h)-f(x)||\\ =||f(x+h)-f(x)|-|f(x-h)-f(x)||\\ \to|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon\wedge|f(x)-f(x-h)|<\varepsilon\\ \to|h|<\delta\to|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon\to f\text{在}x\text{的右极限等于}f(x)\\ |h|<\delta\to|f(x)-f(x-h)|<\varepsilon\to f\text{在}x\text{的左极限等于}f(x)\\ \to f\text{在}x\text{连续}\end{array}$$

2. Proof: $f$是度量空间$X$映入度量空间$Y$的连续映射.Proof:$\forall E\in X\to f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$.举例真包含存在

$f\colon R^+\to R.\,f(x)=\frac{x}{1+x}.\,\overline{R^+}\ =R^+\cup\{0\}.\,f(R^+)=(0,1).\,f(\overline{R^+})=[0,1).\,\overline{f(R^+)}=[0,1]$

3. Proof: $f$是度量空间$X$上的连续实函数,$Z(f)=\{x\in X\colon f(x)=0\}$.Proof: $Z(f)$是闭集

$\{0\}\in R$上的闭集$\to f^{-1}(\{0\})\in X$是闭集

4. Proof: $f,g$是度量空间$X$映入度量空间$Y$的连续映射,$E$是$X$的稠密子集.

   a. Proof: $f(E)$在$f(X)$中稠密.

$$
\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0,\exists\sigma>0,\forall y\in|x-y|<\delta\to|f(y)-f(x)|<\varepsilon\\
\forall t\in\{|x-y|<\delta\}\wedge t\neq x\\
x<t<y\\
\to|f(y)-f(t)+f(t)-f(x)|<\varepsilon\\
\to|f(y)-f(t)|+|f(t)-f(x)|<\varepsilon\\
\to|f(y)-f(t)|<\varepsilon\wedge|f(t)-f(x)|<\varepsilon\\
???
\end{gathered}
$$

   b. Proof: $\forall x\in E,\,g(x)=f(x)$. Proof:$\forall p\in X,\,g(p)=f(p)$

$$
\begin{gathered}
\forall x\in X.p<x<q\\
\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall y\in|y-x|<\delta\to|f(y)-f(x)|<\varepsilon\\
\forall y-x\in\delta,\exists p\in E\wedge p\in|y-x|<\delta\\
\to|f(y)-g(p)|+|f(x)-g(p)|<\varepsilon\\
\text{由于}f\text{收敛}\to f\text{是cauchy的}\\
\to|f(y)-g(p)|<\varepsilon.\\
\to|f(y)-g(p)|+|f(x)-g(p)|<2\varepsilon\\
\to g(x)=f(x)
\end{gathered}
$$

   Remark: 这说明连续映射被定义域的稠密子集确定

5. Proof: $f$是闭集$E\subset R^1$上的连续实函数.

   a. Proof:$\exists R^1$上的连续实函数$g\to\forall x\in E,\,g(x)=f(x)$

$$
\begin{gathered}
E\text{闭}\to E^c\text{开}\to E^c\text{是至多可数个开区间的并}\\
\forall(a,b)\in E^c.f(a),f(b)\text{都存在}\to\text{let:}\forall x\in(a,b),\,g(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{a-x}{b-a}f(b)\\
\lim_{x\to a^+}(x-a)f(a)+(b-x)f(b)=\lim_{x\to a^-}\frac{b-a^-}{b-a}f(a)+\frac{a-a^-}{b-a}f(b)\\
=1^-f(a)=f(a)\\
\lim_{x\to b^-}\frac{b-b^-}{b-a}f(a)+\frac{b^--a}{b-a}f(b)=1^+f(b)=f(b)\\
\to f\text{在}(a,b)\text{上连续}
\end{gathered}
$$

   b. Proof: $E$不是闭集,结论可能不成立

   $E=(0,1).\,f(x)=\frac{1}{x}.\,f(0)$不能被定义.定义任意$f(0)=y\in R$都不能使得其连续

   c. Proof: 对于向量值函数$\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$证明此结论

   $R^n$中的闭集$E,E^c=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$.　度量拓扑
   $\to$二重插值函数进行插值得到的曲面边界　积拓扑
   箱拓扑

   d. Proof: 对于任意度量空间$X.\,E\subset X$证明此结论

   ???

6. Proof: $f$定义在$E$上, $f$的图像是$(x,f(x))$组成的集. 特别的$E\subset R$且$f(x)\in R$. $f$的图像$\subset R^2$

E是紧的. Proof: $f$在$E$上连续$\Leftrightarrow\{(x,f(x))\}$是紧的

$$f\text{在}E\text{上连续}\rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall y\in\{|y-x|<\delta\}\rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$$
$$E\text{是紧的}\rightarrow\forall\{G_a\}\wedge E\subset\vee\bigcup G_a\rightarrow E\subset\bigcup G_i$$
$$\rightarrow f(E)\text{是紧的}$$
$$\forall x\in E.\exists U_x\rightarrow f(U_x)\text{是开集}$$
$$\rightarrow f(x)\in f(U_x)\rightarrow(x,f(x))\in U_x\times f(U_x)$$
$$\text{由于}E\text{的紧性}\rightarrow\text{至多有}\forall\text{开覆盖}\{U_x\times f(U_x)\}\text{必有子覆盖}U_x\text{和}f(U_x)$$
$$\rightarrow(x,f(x))\subset\bigcup U_i\times f(U_i)$$

积拓扑$\Leftrightarrow$度量拓扑

对于$R^n\rightarrow R^n$上的函数.

$$E\text{紧}\rightarrow E\text{有界且}E\text{闭}\rightarrow f(E)\text{闭且有界}\rightarrow f(E)\text{紧}$$

7. $E\subset X$. $f$是定义在$X$上的函数. $f$在$E$上的约束$g$是定义在$E$上的函数且$\forall x\in E, g(x)=f(x)$

$$f,g\colon R^2\rightarrow R.\ f(0,0)=0, g(0,0)=0;\ f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4};\ g(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^6}.$$

a. Proof: $f$在$R^2$上有界

$$f(x)=\tfrac{xy^2}{x^2+y^4}\ x^2+y^4\geqslant2\sqrt{x^2y^4}=2|x|\ y^4$$
$$\rightarrow\tfrac{1}{2}\leqslant\tfrac{xy^2}{x^2+y^4}\leqslant\tfrac{1}{2}$$
$$\rightarrow f\text{有界}$$

b. Proof: $f$在$(0,0)$不连续

$$\text{line: }y=x^{1/2}.$$
$$f(x,x^{1/2})=\tfrac{x^2}{x^2+x^2}=\tfrac{1}{2}\neq0$$
$$\lim_{x\rightarrow0}f(x,x^{1/2})=\tfrac{1}{2}\neq0\rightarrow f\text{在}(0,0)\text{不连续}$$

c. Proof: $g$在$U_{(0,0)}(r)$中无界

$$g(x,y)=\tfrac{xy^2}{x^2+y^6}.\forall U_{(0,0)}(r).\ \text{let }r<1.\forall x<1,x^n<x$$
$$g(x,x^{1/2})=\tfrac{x^2}{x^2+x^3}=\tfrac{1}{1+x}$$
$$\text{let: }0<x<y<1\rightarrow\tfrac{xy^2}{x^2+y^6}\geqslant\tfrac{xy^2}{y^2+y^6}=\tfrac{x}{1+y^4}\geqslant\tfrac{x}{2y^4}$$
$$\forall n\in N^+,\forall x,\tfrac{x}{2y^4}\geqslant n\rightarrow x\geqslant2ny^4\rightarrow y^4\leqslant\tfrac{x}{2n}$$
$$y\leqslant\sqrt[4]{\tfrac{x}{2n}}\in U_{(0,0)}.$$
$$\rightarrow\forall U_{(0,0)}(r),g(U)\text{无界}$$

d. Proof: $f,g$在$R^2$中任意直线$Ax+By+C=0$上连续

$f$: $f$在除了$(0,0)$之外都连续.let: $Ax+By=0$

$$f(x,kx)=\tfrac{xk^2x^2}{x^2+k^4x^4}=\tfrac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}$$
$$\lim_{x\rightarrow0}f(x,kx)=\lim_{x\rightarrow0}\tfrac{k^2x}{1+k^4x^2}=\tfrac{\lim k^2x}{1+\lim k^4x^2}=0$$
$$\rightarrow\text{任意不垂直的直线上都连续}$$
$$f(0,x)=0\text{连续}$$
$$\rightarrow f\text{在所有直线上都连续}$$

$g$:

$$g(x,kx)=\tfrac{k^2x^3}{x^2+k^6x^6}=\tfrac{k^2x}{1+k^6x^4}$$
$$\lim_{x\rightarrow0}g(x,kx)=0$$
$$g(0,x)=0$$
$$\rightarrow g\text{在所有过原点的直线上连续}$$

Remark: 必须考虑领域，用直线趋近二维平面上的点仍然是不够的，使用任意序列

8.

a. $f$是$R$中有界集$E$上的一致连续函数. Proof: $f$在$E$上有界

$$f\text{一致连续}$$
$$\rightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in |p-x| < \delta \wedge |p-y| < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
$$f\text{一致连续} \rightarrow f\text{连续}$$
$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in |y-x| < \delta \rightarrow d(y, x) < \varepsilon$$
$$\text{设} f(E)\text{无界}: \forall M \in R, \exists x \in E, f(x) > M+1$$
$$f\text{在}E\text{上连续}, \forall y \in E, f(y) = M \in R$$
$$y \in f(U_x(\delta)) \wedge y \neq x. d(x, y) < \delta. \text{但} |f(x) - f(y)| > 1$$
$$f(E)\text{上无界} \rightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| > M \qquad ???$$
$$U_x\text{中}, \forall y \in U. f(y) = m \in R. \text{但} d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - f(y)$$
$$\text{而} f(x)\text{是可以取到任意的}R\text{，所以} d(f(x), f(y)) > 1$$
$$\text{但此时} x, y \in U_x. \rightarrow d(x, y) < \delta$$
$$???$$

b. $E$无界. Proof: $f$可能在$E$上无界

$$f(x) = \sqrt{x}.$$
$$f(x) = f([0,1]) \cup f((1, +\infty))$$
$$f\text{在}[0,1]\text{上必一致连续}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}. x > 1 \rightarrow x^{-1/2} < 1$$
$$\rightarrow f'(x) < \frac{1}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \exists x, y \in \{|x-p| < \delta, |y-p| < \delta\} \rightarrow |f(x) - f(y)|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}\delta < \varepsilon$$
$$\rightarrow \delta = \frac{1}{2}\varepsilon. |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$\rightarrow f\text{在}R\text{上一致连续}$$
$$\text{但} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$$

9. Proof: $f$一致连续$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset X \wedge \operatorname{diam} E < \delta \rightarrow \operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$

$$f\text{一致连续} \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
$$\forall E \subset X, \operatorname{diam} E \in \delta \rightarrow \forall x, y \in E, d(x, y) \leqslant \delta$$
$$\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon \rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset X \wedge \operatorname{diam} E < \delta \rightarrow \operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$$
$$\rightarrow \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \rightarrow \forall f(x), f(y) \in f(E), d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
$$\text{由于}E\text{选取的任意性} \rightarrow U_{x,y} \subset E_\alpha \rightarrow \forall d(x, y) < \operatorname{diam} E < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

10. Proof: $f$不一致连续，$\exists \varepsilon > 0, \exists \{p_n\}, \{q_n\}, d_X(p_n, q_n) \rightarrow 0$, 但$d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$

$$f\text{不一致连续} \rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) > \varepsilon$$

11. Proof: 度量空间$X, Y$, $f: X \rightarrow Y \wedge f$一致连续. Proof: $\{x_n\}$是Cauchy序列$\rightarrow \{f(x_n)\}$是柯西的

$$f\text{一致连续} \rightarrow \forall \varepsilon > 0. \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
$$x_n\text{是Cauchy序列} \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall i, j > N, d(x_i, x_j) < \varepsilon$$
$$\forall \nu > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall i, j > N \rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon$$
$$\rightarrow d(f(x_i), f(x_j)) < \nu$$
$$\rightarrow f(x_n)\text{是Cauchy的}$$

12. Proof: 一致连续函数的一致连续函数是一致连续函数

$$
\begin{gathered}
f,g\text{一致连续}\\
\forall x,y\in X,d(x,y)<\delta\to d(f(x),f(y))<\varepsilon\\
\forall p,q\in Y,d(p,q)<\varepsilon\to d(g(p),g(q))<\nu\\
\to d(x,y)<\delta\to d(f(x),f(y))<\varepsilon\\
\to d(g(f(x)),g(f(x))<\nu
\end{gathered}
$$

13. Proof:$E$是度量空间$X$的稠密子集.$f$是$E$上的一致连续实函数.Proof: $f$有一个从$E$到$X$的连续延拓

$$
\begin{gathered}
\text{let:}\forall x\in E,g(x)=f(x)\\
\forall x,y\in E,x\neq y,d(x,y)>0\\
E\text{稠密}\to\forall x<y\in E,\exists t\in E\to x<t<y\\
\text{let:}\forall p\in X,U_{pE}\big(\tfrac{1}{n}\big)\text{是}p\text{在}X\text{中的开集与}E\text{的交集}\\
f\text{一致连续}\to\operatorname{diam}U_p\big(\tfrac{1}{n}\big)<\delta\to\operatorname{diam}f\Big(U_p\big(\tfrac{1}{n}\big)\Big)<\varepsilon\\
\bigcap_n\overline{U_p\big(\tfrac{1}{n}\big)}\text{是闭集序列}\to\operatorname{card}\bigcap_n\overline{U_p\big(\tfrac{1}{n}\big)}\\
\text{let: }f(p)=f\Big(\bigcap_n\overline{U_p\big(\tfrac{1}{n}\big)}\Big)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\forall y\in d(y,x)<\delta\\
d(f(x),f(y))\leqslant d(f(x),f(p))+d(f(p),f(q))+d(f(q),f(y))\\
=3\varepsilon\\
\to g\text{连续}
\end{gathered}
$$

Proof: $f$的值域换成$R^k$、紧度量空间，完备度量空间、任意度量空间上述结论是否成立

14. Proof: $I=[0,1].f\colon I\to I\wedge f$连续. Proof: $\exists x\in I,f(x)=x$

$$
\begin{gathered}
\forall x\in I,f(x)\neq x\\
\forall x\in I,f\text{连续}\to\forall\varepsilon>0,\forall y\in d(y,x)<\delta\to d(f(x),f(y))<\varepsilon\\
\to\forall f(x)\in f(I),f(x)\neq x\in I\to f(I)\in I\\
\text{但}f(x)\subset I\text{矛盾}
\end{gathered}
$$

15. Proof: $f\colon X\to Y.\forall$开$G\subset X\to f(G)\subset Y$开.称$f$为开映射. Proof: $f\colon R^1\to R^1$的连续开映射都单调

$$
\begin{gathered}
\forall G_X\subset X,f(G_X)\text{是开集}\to f^{-1}\text{是连续函数}\\
f\text{连续}\to f^{-1}(G_Y)\subset X\text{是开集}\\
f\text{不单调}\to\exists x,y,z\in X\wedge x<y<z,f(x)\leqslant f(z)\wedge f(y)\geqslant f(z)\\
f\text{连续}\to[x,y]\text{内必有}p\wedge f(p)=f(z)\qquad\text{介值定理}\\
\text{但此时}f^{-1}(f(p))=f^{-1}(f(z))\to f^{-1}\text{不能构成(单值)函数}
\end{gathered}
$$

16. Exp: $[x]$表示不超过$x$的最大整数,$(x)=x-[x]$.函数$[x]$与$(x)$的间断点

$$
\begin{gathered}
\forall x\in R,[x]<M\to[x]<x<M\to[x]\text{有界}\to[x]\text{必没有第二类间断点}\\
[x]\text{在每个整数处}\lim_{x\to Z^-}[x]=x-1.\lim_{x\to Z^+}[x]=x.[Z]=x\\
\to[x]\text{在每个整数处左不连续}\\
[x]\text{在每个整数处右连续}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(x)=x-[x].(x-[x])\leqslant 1\to(x)\text{必没有第二类间断点}\\
(x)\text{在每个整数处}\lim_{x\to Z^-}[x]=1,\lim_{x\to Z^+}[x]=0,(Z)=0\\
(x)\text{在整数处简单间断}\\
(x)\text{在}Z\text{上左不连续}\\
(x)\text{在}Z\text{上右连续}
\end{gathered}
$$

17. Proof: $f\colon(a,b)\to R$. Proof: $f$简单间断的点是至多可数的

$$
\begin{gathered}
E\text{是间断点的集合}\\
\forall f(x)\text{简单间断}\to\forall q\in Q,f(x^-)<q<f(x^+).S\subset Q\\
\to\varphi\colon E\to S\subset Q.\varphi(x)=q\\
\lim_{x\to x^-}\varphi(x)=t_1\to\exists U_{x^-}(r),f(U_{x^-})\text{是存在的}\\
\to\exists l\in(a,x)\wedge f(l)<q\\
\exists r\in(x,b)\wedge f(r)>q\\
\{(l,q,r)\}\text{是可数集}\to\forall x\in E,x\to(l,q,r)\text{是一个一一映射}
\end{gathered}
$$

18. Proof: $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin Q\\ \frac{1}{n} & x\in Q.x=\frac{m}{n}\end{cases}$.在每个无理点连续，在每个有理点简单间断

$$\begin{gathered}\forall x\notin Q.\,f(x)=0.\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0.\forall y\in d(y,x)<\delta\to d(f(y),f(x))<\varepsilon\\ \leftarrow d(f(y),0)<\varepsilon\\ \leftarrow f(y)\to 0\\ \forall x\in R,\text{let: }f(x)>\varepsilon.\text{而这种点是有限的}\big(\tfrac{1}{2}\text{一个}\to\tfrac{1}{3}\text{两个}\to\tfrac{1}{4}\text{四个}\ldots\big)\\ \forall\varepsilon>0,\varepsilon>\tfrac{1}{n}.\,f(x)>\tfrac{1}{n}.\text{这样的}x\text{是有限的}\tfrac{n(n+1)}{2}\text{个}\\ \to f(x)<\varepsilon\\ \to f(x)=0\\ \to\text{在无理点连续}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\forall x\in Q.\,f(x)=\tfrac{1}{n}\neq 0\text{故间断且}\lim_{x\to -}=0,\lim_{x\to +}=0\\ \to f(x)\text{简单间断}\end{gathered}$$

19. Proof: $f\colon R\to R.\forall c\in(f(a),f(b)),\exists x\in(a,b),f(x)=c.\ \forall r\in Q,\{x\colon f(x)=r\}$都是闭集. Proof: $f$连续

$$\begin{gathered}\forall x_n\to x_0.\exists r\to f(x_n)>r>f(x_0)\to(\exists t_n\to t)\to(f(t_n)\to r)\\ \to\forall r\in Q,\{x\colon f(x)=r\}\text{闭}\to\{x\colon f(x)\notin Q\}\text{开}.(\text{开集的任意并})\\ \lim_{n\to\infty}f(t_n)=r\to r\text{是}f(t_n)\text{的极限点}\\ ???\end{gathered}$$

20. $E$是度量空间$X$的非空子集。$x\in X$到$E$的距离$\rho_E(x)=\inf_{z\in E}d(x,z)$

a. Proof: $\rho_E(x)=0\Leftrightarrow x\in\bar{E}$

$$\begin{gathered}x\in\bar{E}\to\rho_E(x)=0\\ p\in E,x\in E'\to d(x,p)\leqslant d(x_n,x)+d(x,p)\leqslant\varepsilon\\ \to d(x,p)\leqslant\varepsilon\to d(x,p)=0\\ \to\forall x\in\bar{E}\to\rho_E(x)=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\rho_E(x)=0\\ \inf_{z\in E}d(x,z)=0\\ x\notin E'\to\exists U_x(r)\subset E'^c\\ d(x,z)\geqslant r+0>0\\ \to\text{矛盾}\\ \to x\in\bar{E}\end{gathered}$$

b. Proof: $x,y\in X,|\rho_E(x)-\rho_E(y)|\leqslant d(x,y)$

$$\begin{gathered}\forall z\in E.\,\rho_E(x)=\inf_{z\in E}d(x,z)\\ d(x,z)+d(y,z)\leqslant d(x,y)\\ |\rho_E(x)-\rho_E(y)|=|\inf_{z\in E}d(x,z)-\inf_{z\in E}d(y,z)|\\ x\in\bar{E}\vee y\in\bar{E}\to\rho_E(x)=0\vee\rho_E(y)=0\\ y\in\bar{E}\to\rho_E(x)=\inf_{y\in E}d(x,y)\leqslant d(x,y)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}x\notin\bar{E}\wedge y\notin\bar{E}\to|\rho_E(x)-\rho_E(y)|\\ =|\inf_{z\in E}d(x,z)-\inf_{z\in E}d(y,z)|\\ \forall z\in E,d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)\\ \to|\inf_{z\in E}d(x,z)-\inf_{z\in E}d(y,z)|\leqslant d(x,y)\end{gathered}$$

事实上$\rho_E(x)=\rho_{\bar{E}}(x)$.实数具有最小上界性，这导致了可以直接用

c. Proof: $\rho_E$是$X$上的一致连续函数

$$\forall x,y\in X.\,\rho_E(x)\leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(x,z)$$
$$\to\rho_E(x)\leqslant d(x,y)+\rho_E(y)$$
$$\forall\varepsilon>0,\text{let: }\delta=\varepsilon.\,d(x,y)<\delta\to d(\rho_E(x),\rho_E(y))\leqslant d(x,y)=\delta$$
$$\to\rho_E\text{在}X\text{上一致连续}$$

21. 度量空间$X.K,F\subset X\wedge K\cap F=\varnothing.K$紧$\wedge F$闭

    a. Proof: $p\in K,q\in F.\exists\delta>0\to d(p,q)>\delta$

$$\rho_F(x)\text{是}X\text{上的一致连续正函数.}$$
$$K\text{紧}\to K\text{闭}\to K=\bar{K}.\,F=\bar{F}$$
$$K\cap F=\varnothing\to\bar{K}\cap\bar{F}=\varnothing$$
$$\to\forall p\in\bar{K},q\in\bar{F}.d(p,q)>0$$
$$\text{若}\inf(d(p,q))=0\to\rho_F(p)=0\to p\in\bar{F}\wedge p\in\bar{K}$$
$$\to p\in\bar{F}\cap\bar{K}\text{矛盾}$$
$$\to d(p,q)>\delta$$
$$???\text{没用到紧集的性质}$$

    b. Proof: $K,F$闭, 但都不紧. 结论可能不成立

    ???

22. 度量空间$X.A,B\subset X\wedge A\cap B=\varnothing\wedge A,B\,\text{close}.\,f(p)=\frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p)+\rho_B(p)}$

    a. Proof: $f$是$X$上的连续函数且range $f=[0,1]$

$$\rho_A(p)\text{连续}\wedge\rho_B\text{连续}\to\frac{\rho_A}{\rho_A+\rho_B}\text{仅可能在}\rho_A+\rho_B\text{为0的点上间断}$$
$$\text{但闭集}A\cap B=\varnothing\to\forall p,\rho_A+\rho_B>0$$
$$\to f\text{在}X\text{上连续}$$
$$p\in A.\,\rho_A=0\to f(p)=0\to0\in\text{range }f$$
$$p\in B.\,f(p)=1\to1\in\text{range }f$$
$$\rho_A(p)\leqslant\rho_A+\rho_B\to\text{range }f\subset[0,1].$$
$$f\text{连续}\to f\text{必能取到最大最小值}\to\text{range }f=[0,1]$$

    Remark: 这是习题3的逆命题. 任意闭集必为某个实函数在闭集上的原像集

    b. $V=f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right),W=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$.Proof: $V,W$都开$\wedge V\cap W=\varnothing\wedge A\subset V,B\subset W$

$$f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\to\frac{\rho_A}{\rho_A+\rho_B}<\frac{1}{2}\to\rho_B>\rho_A$$
$$\forall p,\,\rho_B(p)>\rho_A(p)$$
$$\inf_{b\in B}d(p,b)>\inf_{a\in A}d(p,a)$$
$$\to d(p,b)>d(p,a)$$
$$\text{根据定义}p\in X\text{是开集}$$
$$\text{同理}V,W\text{都是开集}$$

$$\forall p\in V\cap W\to d(p,b)>d(p,a)\wedge d(p,a)>d(p,b)$$
$$\text{开集是做不到的}$$
$$\to V\cap W=\varnothing$$

$$\forall x\in A,\,\rho_A=0\to d(x,b)>d(x,a)\to x\in V$$
$$\to A\subset V$$
$$\text{同}\to B\subset W$$

    Remark: 正规性: 一对不相交的闭集必能用一对不相交的开集覆盖

23. 凸函数: $f:R\to R.\forall x,y\in(a,b).\lambda\in(0,1)\to f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

    a. Proof: 凸函数是连续的

$$f\text{在}(a,b)\text{上都有定义。}$$
$$\forall\varepsilon>0, x,y\in d(p,q)<\delta.$$
$$f(x+h)\leqslant f(x)+f(h)$$
$$f\Big(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}h\Big)\leqslant\tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2}f(h)$$
$$\lim_{\lambda\to 1}f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lim_{\lambda\to 1}\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$\lim_{\lambda\to 1}f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant f(x)$$
$$\text{let: }y>x\to\lambda x+(1-\lambda)y>x$$

$$\lim_{\lambda\to 1}f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(x)$$
$$=0$$
$$\leftarrow f(x+h)\leqslant f(x)$$
$$\leftarrow f(x-h)\leqslant f(x)$$
$$\to\lim_{p\to x}f(p)=f(x)$$
$$\to f\text{连续}$$

b. Proof: $g$增$g\circ f$是凸的

$$g\text{增}\to\forall x,y\in R.x<y\to g(x)\leqslant g(y)$$
$$\forall x<y.\,f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$g(f(\lambda x+(1-\lambda)y))\leqslant g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$$
$$\to g\circ f\text{是凸的}$$

c. Proof: $f$凸$, a<s<t<u<b\to\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leqslant\frac{f(u)-f(s)}{u-s}\leqslant\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$

这个结论套进二阶导数显然是成立的.用技巧构造这个表达式

$$g(x)=\frac{f(x)-f(s)}{x-s}$$
$$\exists p>s\to f(x)-f(s)=f(\lambda s+(1-\lambda)p)-f(s)$$
$$\leqslant(\lambda-1)f(s)+(1-\lambda)f(p)$$
$$???$$

24. Proof: $f$是$(a,b)$上的连续实函数。$\forall x,y\in(a,b).f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Proof: $f$凸

$$\text{需要用}\tfrac{1}{2}\text{映射到}(0,1)\text{的单调函数}$$
$$\forall x,y\in(a,b).\,f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
$$\lambda p+(1-\lambda)q=\frac{x+y}{2}$$
$$\to\frac{x+t}{2}\text{是单调增函数}\to f\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(t)}{2}$$
$$x+t\cong\lambda x+(1-\lambda)y.\,y>x.$$
$$\to t=(\lambda-1)x+(1-\lambda)y$$
$$y=\frac{t+(1-\lambda)x}{1-\lambda}$$
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=f\Big(\frac{\lambda\,x+(1-\lambda)y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{f(x)+f\Big(\frac{t+(1-\lambda)x}{1-\lambda}\Big)}{2}$$
$$\to 2f\Big(\frac{\lambda x+(1-\lambda)y}{2}\Big)\leqslant f(x)+f\Big(x+\frac{t}{1-\lambda}\Big)$$
$$???$$

25. $A,B\subset R^k.A+B$为一切$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$的集$\boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in B$.

a. Proof: $K$是$R^k$中的紧集。$C$是$R^k$的闭集. Proof: $K+C$闭

$$\forall\boldsymbol{z}\notin K+C, F=\boldsymbol{z}-C=\{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\colon\boldsymbol{z}\notin K+C\wedge\boldsymbol{y}\in C\}$$
$$\to F\cap K=\varnothing$$
$$\to\exists\delta>0,\forall p\in K,\forall q\in F\to d(p,q)>\delta$$
$$\to\forall\boldsymbol{z}\notin\overline{K+C}$$
$$\boldsymbol{z}\in(K+C)^c\to\boldsymbol{z}\in(\overline{K+C})^c$$
$$(\overline{K+C})\text{闭}\to(\overline{K+C})^c\text{开}\to(K+C)^c\text{是开集}$$
$$\to K+C\text{是闭集}$$

b. Proof: $a \notin Q.C_1=Z^+.C_2=na.n\in C_1$. Proof: $C_1,C_2$是$R$的闭集,但$C_1+C_2$不闭

$$C_1=Z^+.C_1^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}(n-1,n).\text{是可数个开区间之并}$$
$$\text{开集的任意并是开集}\rightarrow C_1^c\text{开}\rightarrow C_1\text{闭}$$
$$C_2=na.C_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}((n-1)a,na)\rightarrow C_2^c\text{开}\rightarrow C_2\text{闭}$$
$$C_1+C_2=\{n+ma:n,m\in Z^+\}$$
$$a\notin Q\rightarrow a\neq\frac{x}{y}.x,y\in N$$
$$\rightarrow\forall m,ma\neq n$$
$$\rightarrow x,y\in(n,n+1).$$
$$[ma]\in(0,1)$$
$$\forall m\neq n,ma\neq na$$
$$\text{设}na-ma=s\in N$$
$$\rightarrow(n-m)a=s$$
$$a=\frac{n-m}{s}\in Q.\text{矛盾}$$
$$\rightarrow ma-na\notin Z$$
$$\rightarrow[ma]\text{是在}(0,1)\text{中是稠密的}.$$
$$x,y\in(0,1).x<y.\forall[ma]\notin(x,y)$$
$$\rightarrow\forall m,ma\notin(n+x,n+y)$$
$$\rightarrow ma-n>x-y$$
$$ma>x-y+n$$
$$a>\frac{x-y+n}{m}=\frac{x-y}{m}+\frac{n}{m}$$
$$\rightarrow x-y\text{必不是有理数}$$
$$\text{但}Q\text{在}R\text{中是稠密的}\rightarrow\text{必有}[ma]\in(x,y)$$
$$\rightarrow\forall x,y>N.\exists ma+n\in(x,y)$$
$$\rightarrow n>N,\text{必可选取一个序列使得它与}n(n,n+1)\text{中的值}<\varepsilon$$
$$ma\text{可数}\rightarrow ma\text{所有极限点}(0,1)\text{中必有极限点不在}ma\text{中}$$
$$\rightarrow C_1+C_2\text{不闭}$$

26. $X,Y,Z$是度量空间，$Y$紧.$f:X\rightarrow Y.g:Y\rightarrow Z\wedge g$是$1-1$且连续的。$h=g\circ f$

a. Proof: $h$一致连续$\rightarrow f$一致连续

$$Y\text{紧}\rightarrow g(Y)\subset Z\text{紧}$$
$$\rightarrow h(X)\subset Z\text{紧}$$
$$g:1-1\rightarrow g^{-1}\text{存在且连续}$$
$$\rightarrow g^{-1}(g(Y))\subset Y\text{紧}$$

$$f(x)=g^{-1}(h(x))$$
$$h(X)\text{紧}\rightarrow g^{-1}(h(x))\text{紧}\rightarrow f(X)\text{是紧的}$$
$$h\text{一致连续，}g^{-1}(h(x))\text{是紧集上的函数故}g^{-1}\circ h\text{是一致连续的}$$
$$\rightarrow f=g^{-1}\circ h\text{是一致连续的}$$

b. Proof: $h$连续$\rightarrow f$连续

$$g:1-1\rightarrow g^{-1}\text{存在且连续}$$
$$h\text{连续}\rightarrow\forall G_Y\subset Y,h^{-1}(G_Y)\text{是开集}$$
$$h=g\circ f$$
$$g^{-1}\text{连续}\rightarrow g^{-1}\circ h\text{连续}$$
$$\rightarrow f=g^{-1}h\text{连续}$$
$$???\text{没用紧性?}$$