第五章 微分法

本章集中在研究闭区间和开区间上的实函数，除了向量函数。这是因为向量空间的拓扑与实函数拓扑完全具有本质区别

1 实函数的导数

定义 1. f是定义在$[a,b]$上的实函数，$\forall x\in[a,b],\varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}(a<t<b,t\neq x)$

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)$$

若f'在x点极限存在称f在x可导。若在$[a,b]$上都可导，称f'是f在$[a,b]$上的导函数

Remark: 对于开区间内的函数可以定义类似导数，但不能定义$f'(a),f'(b)$

定理 2. *闭区间内的点x。可导一定连续*

证明.

$$\begin{aligned}f(t)-f(x)&=\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}(t-x)\\ \to\lim\nolimits_{t\to x}(f(t)-f(x))&=f'(x)\cdot 0=0\\ \to\lim\nolimits_{t\to x}f(t)&=f(x)\end{aligned}$$

□

定理 3. *闭区间的两个函数在某个点可微，则逐点 和函数、积函数、除函数都可微*

$$\begin{gathered}f,g\colon[a,b]\to R.x\in[a,b].f,g\text{在}x\text{可微}\\ (f+g)'=f'+g'\\ (fg)'=f'g+fg'\\ (f/g)'=\frac{gf'-g'f}{g^2}\\ \text{上述各个运算都是逐点运算}g^2\text{不是}g\circ g\end{gathered}$$

证明.

1. $$\begin{gathered}(f+g)'=\lim\nolimits_{t\to x}\tfrac{f(t)+g(t)-f(x)-g(x)}{t-x}=\lim\nolimits_{t\to x}\left(\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}+\tfrac{g(t)-g(x)}{t-x}\right)\\ \text{若}f',g'\text{都存在}\to(f+g)'=f'+g'\end{gathered}$$

2. $$\begin{gathered}h=fg.h(t)-h(x)=f(t)[g(t)-g(x)]+g(x)[f(t)-f(x)]\\ \lim\nolimits_{t\to x}\tfrac{h(t)-h(x)}{t-x}=\lim\nolimits_{t\to x}\left(\tfrac{f(t)[g(t)-g(x)]}{t-x}+\tfrac{g(t)[f(t)-f(x)]}{t-x}\right)\\ \lim\nolimits_{t\to x}f(t)=f(x);\lim\nolimits_{t\to x}g(t)=g(x)\\ \text{且}f',g'\text{都存在，利用积的极限等于极限的积}\\ \to=f(x)\cdot\lim\nolimits_{t\to x}\tfrac{g(t)-g(x)}{t-x}+g(x)\cdot\lim\nolimits_{t-x}\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\\ =f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\end{gathered}$$

□

3. $$\begin{gathered}h=f/g.\tfrac{h(t)-h(x)}{t-x}=\tfrac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\tfrac{g(t)-g(x)}{t-x}\right]\\ \lim\nolimits_{t\to x}\tfrac{h(t)-h(x)}{t-x}=\tfrac{1}{g(x)\cdot\lim_{t\to x}g(t)}[g(x)f'(x)-f(x)g']\\ =\tfrac{gf'-fg'}{g^2}\end{gathered}$$

例 4. 一些函数的导函数

1. c $\quad f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\frac{0}{t-x}=\frac{0}{\lim_{t-x}t-x}.\forall t_n\in U_x^0(r).\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=0$恒成立
$$\to \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=0.\,\text{Heine}.$$
2. x $\quad f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{t-x}{t-x}=\lim_{t-x}1=1$
3. x^n $\quad x^n=x\cdot x\cdots x\to x^n$可微.$(x^2)'=x'x+xx'=2x$
$$(x^3)'=x'x^2+x2x=x^2+2x^2=3x^2$$
$$(x^{n+1})'=x^n+nx^n=(n+1)x^n$$
4. $\mathcal{P}(R)$ $\quad \sum a_ix^i$是可微的. $(ax^n)'=a'x^n+anx^{n-1}=anx^{n-1}=a(x^n)'$
5. $\frac{p}{q}$ $\quad$ 除了在$q=0$的点不可微其余点都可微.

定理 5. *复合函数导数。链式法则。*

$$f\text{在}[a,b]\text{上连续，}f'\text{在}x\in[a,b]\text{存在}.g\colon I\to R.\,\text{range}\,f\subset I.\,g\text{在}f(x)\text{可微}\to g\circ f\text{在}x\text{可微}$$
$$(g\circ f)'=g'\circ f\cdot f'$$

证明.

$$y=f(x).t\in[a,b],s\in I.$$
$$f(t)-f(x)=(t-x)(f'(x)+u(t))$$
$$g(s)-g(y)=(s-y)(g'(y)-v(s))$$
$$\lim_{t\to x}u(t)=0.\lim_{t\to y}v(t)=0$$
$$\text{let}\colon s=f(t)$$
$$h(t)-h(x)=g(f(t))-g(f(x))$$
$$=[f(t)-f(x)]\cdot[g'(y)+v(s)]$$
$$=(t-x)\cdot[f'(x)+u(t)]\cdot(g'(y)+v(s))$$
$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=(g'(y)+v(s))\cdot(f'(x)+u(t))$$
$$f\text{连续}\to\lim_{t\to x}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

□

例 6.

1. $$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
$$x\neq 0\to f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$
$$x=0.\text{导函数无定义}.\lim\frac{t\sin\frac{1}{t}-0}{t}=\sin\frac{1}{t}\text{不存在}.$$

2. $$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
$$x\neq 0\to f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(\frac{1}{t})}{t}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{1}{t}=0\to f'(0)=0$$
$$\to f\text{在任意点可微但}f\text{的导函数不连续}.\text{由于}\cos\frac{1}{x}\text{在}x=0\text{处发散}$$

2 中值定理

定义 7. f是在度量空间X上的实函数，f在$p\in X$取得局部极大值。$\exists\delta>0,\forall q\in d(p,q)<\delta\wedge q\in X.f(q)\leqslant f(p)$.

定理 8. *Fermat.* $f\colon [a,b] \to R. x \in [a,b]. f$在$x$处取得局部极大值且$f'(x)$存在$\to f'(x) = 0$

证明.

$$
\begin{aligned}
& a < x - \delta < x < x + \delta < b \\
\forall t \in (x - \delta, x). \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x}. f(t) \leqslant f(x). t - x \leqslant 0 & \to \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \geqslant 0 \\
& \to f'(x) \geqslant 0 \\
\forall t \in (x, x + \delta). \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x}. f(t) \leqslant f(x). t - x \geqslant 0 & \to \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant 0 \\
& \to f'(x) \leqslant 0 \\
& \to f'(x) = 0
\end{aligned}
$$

□

定理 9. *一般中值定理*

$$
\begin{gathered}
f, g\colon [a,b] \to R. f\text{连续}. f, g\text{在}(a,b)\text{上可微} \to \exists x \in (a,b) \\
\to (f(b) - f(a)) g'(x) = (g(a) - g(b)) f'(x)
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\text{let: } h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x) \\
h\text{在}[a,b]\text{连续}, h\text{在}(a,b)\text{可微} \\
h(a) = f(b) g(a) - f(a) g(b) = h(b) \\
h(x) = c \to \forall x \in (a,b). h'(x) = 0 \\
h(x) \neq c \to \exists p, q \in [a,b], \forall x \in [a,b]. h(x) \leqslant h(p), h(x) \geqslant h(q) \\
\text{若}\exists h(x) > h(a) \to h(x) \leqslant h(p). h\text{连续} \wedge h'(p)\text{存在} \to h'(p) = 0 \\
\exists h(x) < h(a) \to h(x) \geqslant h(q). h\text{连续} \wedge h'(q)\text{存在} \to h'(q) = 0 \\
\to \exists x \in (a,b), h'(x) = 0 \\
h'(x) = \lim_{t \to x} \tfrac{(f(b) - f(a)) g(t) - (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(x) + (g(b) - g(a)) f(x)}{t - x} \\
= \lim_{t \to x} (f(b) - f(a)) \tfrac{(g(t) - g(x))}{t - x} + (g(b) - g(a)) \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \\
= (f(b) - f(a)) g'(x) - (g(b) - g(a)) f'(x) \\
0 = \cdots \to \text{原式成立}
\end{gathered}
$$

□

定理 10. *罗尔.*

$$
\begin{gathered}
f\colon [a,b] \to R. f\text{在}(a,b)\text{可微} \\
\to \exists x \in (a,b) \to f(b) - f(a) = (b - a) f'(x)
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\text{let: } g(x) = x \\
(f(b) - f(a)) g'(x) = (g(b) - g(a)) f'(x) \\
\to f(b) - f(a) = (b - a) f'(x)
\end{gathered}
$$

□

定理 11. *导数与单调性*

1. $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geqslant 0 \to f$单调增
2. $f'(x) = 0 \to f = c$
3. $f'(x) \leqslant 0 \to f$单调减

证明.

$$
\begin{gathered}
f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x) \\
f'(x) \geqslant 0 \wedge x_2 \geqslant x_1 \to f(x_2) \geqslant f(x_1) \to f\text{增}
\end{gathered}
$$

□

3 导数的连续性

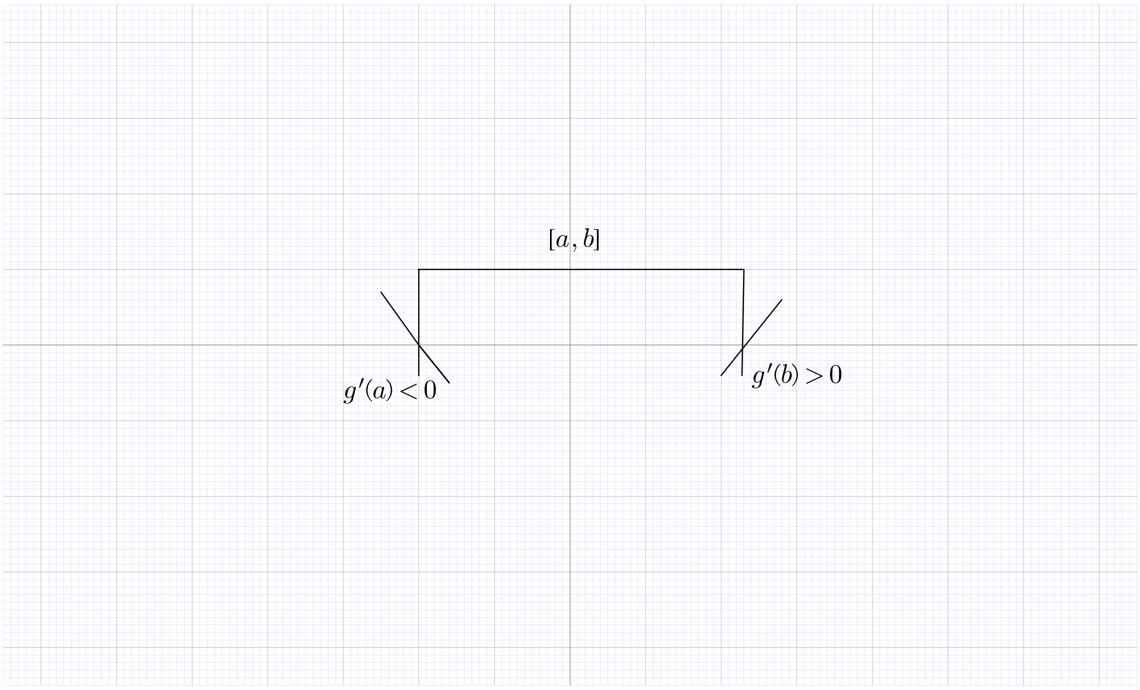
通过例6. 导函数可以处处存在但不连续

定理 12. *闭区间上都可微的可导实函数有中间值性质*

$$
\begin{gathered}
f\colon [a,b] \to R \wedge f\text{在}[a,b]\text{可微}. \forall \lambda \in (f'(a), f'(b)) \\
\to \exists x \in (a,b) \to f'(x) = \lambda
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
g(t) = f(t) - \lambda t \\
g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 \to \exists t_1 \in (a,b) \to g(t_1) < g(a) \\
g'(b) = f'(b) - \lambda > 0 \to \exists t_2 \in (a,b) \to g(t_2) < g(b) \\
g\text{必能在}[a,b]\text{取得最大最小值} \to \exists x \in (a,b) \to g'(x) = 0. \\
\to f'(x) = \lambda
\end{gathered}
$$



$\square$

推论 13. f在$[a,b]$可微，f'在$[a,b]$必不能有简单间断。但有可能第二类间断

4 L' Hospital 法则

定理 14. L'Hospital.

$$
\begin{gathered}
f, g\colon (a,b) \to R. f, g\text{可微} \wedge \forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0 \\
\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0\right) \vee \lim_{x\to a} g(x) \pm \infty \\
\to \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A
\end{gathered}
$$

证明.

$$A\in R.\exists q\wedge A<q,\exists r\wedge A<r<q.$$
$$\to\exists c\in(a,b)\to\forall x\in(a,c).\frac{f'(x)}{g'(x)}<r$$
$$(f(x)-f(y))g'(t)=(g(x)-g(y))f'(t)$$
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}<r$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)-f(y)}{\lim_{x\to a}g(x)-g(y)}=\frac{f(y)}{g(y)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\leqslant r<q$$

$$A\in\{-\infty,+\infty\}.c_1\in(a,y),a<x<c_1\to g(x)>g(y)\wedge g(y)>0$$
$$\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\cdot\frac{f'(t)}{g'(t)}<\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\cdot r$$
$$\to\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}<\frac{r\cdot(g(x)-g(y))}{g(x)}$$
$$\to\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}<\frac{rg(x)-rg(y)}{g(x)}=r-r\frac{g(y)}{g(x)}$$
$$\to\frac{f(x)}{g(x)}<r-r\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}.(a<x<c_1)$$

□

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}<\lim_{x\to a}\left(r-r\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to\exists c_2\in(a,c_1)\to\frac{f(x)}{g(x)}<q.(a<x<c_2)$$
$$\to\forall q>A.\exists c_2\wedge a<x<c_2\to\frac{f(x)}{g(x)}<q$$
$$\text{同理:}\to A\in R.p<A,\exists c_3\to p<\frac{f(x)}{g(x)}.(a<x<c_3)$$

$$\to\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

微积分学教程

$$\to\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

5 高阶导数

定义 15. *函数f的导函数*f'是可微的那么$(f')'$称作二阶导数

f在$(),[]$上可微$\to\exists f':(),[]\to R$是f的导函数　　1阶导数

n阶导数:　　$f^{(n-1)}:(),[]\to R.$可微$\to(f^{(n-1)})'$是n阶导数

注意 16. 高阶导数在某一点x可微必须让所有低于此阶数的导函数在x的领域内可微.

注意 17. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x.\,\mathrm{let}:x=g(t).\mathrm{d}y=y'_x\cdot x'_t\mathrm{d}t=y'_x\mathrm{d}x.$称为微分形式不变性，但对高阶导数无效

6 Taylor定理

定理 18. *Taylor中值定理.*

$$f:[a,b]\to R.n\in N^+,f^{(n-1)}\text{在}[a,b]\text{上连续},f^{(n)}(t)\text{在}(a,b)\text{存在}.\alpha,\beta\in[a,b]\wedge\alpha\neq\beta$$
$$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$$

$$\to\exists x\in(a,b)\to f(\beta)=P(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

注意 **19.** *$n=1$时,$\exists x\in(a,b)\to f(\beta)=\frac{f(\alpha)}{0!}(\beta-\alpha)^0+\frac{f'(x)}{1!}(\beta-\alpha)\to f(\beta)-f(\alpha)=f'(x)(\beta-\alpha)$*

即罗尔中值定理

证明.

$$
\begin{aligned}
&M\colon f(\beta)=P(\beta)+M(\beta-\alpha)^n\\
&\text{let: } g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n.t\in[a,b]\\
&g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!M.t\in(a,b)\\
&P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)\text{对}k=0,\ldots,n-1\text{成立}\\
&g(\alpha)=g'(\alpha)=\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0\\
&g(\beta)=f(\beta)-P(\beta)-M(\beta-\alpha)^n=0\\
&\to\exists x_1\in(\alpha,\beta)\to g'(x)=0\\
&g^{(n-1)}(\alpha)=g^{(n-1)}(\beta),\exists x_{n-1}\in(\alpha,\beta)\to g^n(x_{n-1})=0\\
&g^{(n)}(\alpha)=0,g^{(n)}(\beta)=f^{(n)}(\beta)-n!M=0\\
&\to\exists x_n\in(\alpha,\beta)\to g^n(x_n)=0
\end{aligned}
$$

□

7 向量函数的微分法

注意 20. 极限的定义可以无缝迁移到$f\colon[a,b]\to C$的函数的

复函数 $f(t)=f_1(t)+i\,f_2(t)\Leftrightarrow f'(t)=f_1'(t)+i\,f_2'(t)$

向量值函数 $\lim_{t\to x}\left|\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(x)}{t-x}-\boldsymbol{f}'(x)\right|=0.\,\boldsymbol{f}'$也是$R^k$中的向量值函数

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{f}\text{可微}\Leftrightarrow f_i\text{都可微}\\
\boldsymbol{f}\text{可微}\to\boldsymbol{f}\text{连续}\\
\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\text{可微}\to\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\text{可微}\\
\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\text{可微}\\
\text{但中值定理和}L'\text{Hospital法则对向量值函数不一定成立}
\end{gathered}
$$

例 21.

中值定理对复函数不一定成立

$$
\begin{aligned}
&f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x\\
&f(2\pi)-f(0)=1-1=0\\
&f'(x)=i\,e^{ix},\forall x\in R,|\,f'(x)|=1\\
&\to\text{罗尔中值定理不成立}
\end{aligned}
$$

L'Hospital法则对复函数不一定成立

$$
\begin{aligned}
&(0,1).\,f(x)=x,\,g(x)=x+x^2e^{i/x^2}\\
&\forall x\in R,|\,e^{it}|=1\\
&\to\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+x^2e^{i/x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x\,e^{i/x^2}}\\
&=\frac{1}{1+\lim x\,|1|}=1\\
&g'(x)=1+\left(2x-\frac{2i}{x}\right)e^{i/x^2}\ (0<x<1)\\
&|\,g'(x)|\geqslant\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geqslant\frac{2}{x}-1\\
&\to\forall x\in(0,1),\,g'(x)\neq0\\
\\
&\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\frac{1}{|\,g'(x)|}\leqslant\frac{x}{2-x}\\
&\to\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2-x}=0
\end{aligned}
$$

定理 22. *实闭区间上的连续向量函数在开区间内可微则具有范数中值定理*

$$\boldsymbol{f}:[a,b]\to R^k.\ \boldsymbol{f}\text{在}[a,b]\text{连续}\wedge\boldsymbol{f}\text{在}(a,b)\text{可微}\to\exists x\in(a,b)\to|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)|\leqslant(b-a)|\boldsymbol{f}'(x)|$$

证明.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}&=\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a).\\
\text{let: }\varphi(t)&=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(t),t\in[a,b]. && \text{内积}\\
&\to\varphi\text{是}[a,b]\text{上的连续实函数}\wedge\varphi\text{在}(a,b)\text{可微}\\
&\to\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(x)=(b-a)\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}'(x)\\
\varphi(b)-\varphi(a)&=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a))\\
&=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}=|\boldsymbol{z}|^2\\
|\boldsymbol{z}|^2&=(b-a)|\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}'(x)|\leqslant(b-a)|\boldsymbol{z}|\,|\boldsymbol{f}'(x)| && \text{Schwarz不等式}\\
&\to|\boldsymbol{z}|\leqslant(b-a)|\boldsymbol{f}'(x)|
\end{aligned}$$

□

习题

1. Proof: $f:R\to R.\forall x,y\in R,|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$. Proof: $f=c$

$$\begin{aligned}
&\forall x,y\in R.\ |f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\\
&|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\\
&\forall\varepsilon^2>0,d(x,y)<\varepsilon^2\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon\\
&\to f\text{在}R\text{上一致连续}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{let: }x,y\in U_p(r).d(x,y)<r\to\text{assume: }f(x)\neq f(y)\\
&|f(x)-f(y)|\leqslant r^2\\
&???
\end{aligned}$$

2. Proof: $f:(a,b)\to R.\forall x\in(a,b),f'(x)>0$. Proof: f在(a,b)严格单调增

$g=f^{-1}(x)$. Proof: g可微, 且$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}.x\in(a,b)$

$$\begin{aligned}
&f'(x)>0.\forall x,y>0,t\in(x,y)\to f(x)-f(y)=f'(t)(x-y)\\
&x>y\wedge f'(t)>0\to f(x)-f(y)>0\\
&\to f\text{在}(a,b)\text{内严格单调增}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f\text{在}(a,b)\text{内严格单调增}\to\forall x,y\in R.x\neq y\to f(x)\neq f(y)\\
&\to f^{-1}\text{是函数(且连续)}\\
&g=f^{-1}(x).\lim_{p\to x}\frac{g(p)-g(x)}{p-x}=\frac{f^{-1}(p)-f^{-1}(x)}{p-x}\\
&f'(x)=\lim_{p\to x}\frac{f(p)-f(x)}{p-x}\\
&f\text{连续}\to\lim_{p\to x}\frac{g(f(p))-g(f(x))}{f(p)-f(x)}=\lim_{p\to x}\frac{p-x}{f(p)-f(x)}=\lim_{p\to x}\left(\frac{f(p)-f(x)}{p-x}\right)^{-1}=(f'(x))^{-1}
\end{aligned}$$

3. Proof: $g:R\to R.|g'|\leqslant M.f(x)=x+\varepsilon g(x)$. Proof: $\exists\varepsilon(M)\in R,f$是$1-1$的.

$$\forall x,y\in R.g'\text{存在}\to g\text{连续}.$$
$$f(x)=x+\varepsilon g(x)\to f\text{连续}$$
$$f(x)=x+\varepsilon g(x)=f(y)=y+\varepsilon g(y)$$
$$x+\varepsilon g(x)=y+\varepsilon g(y)$$
$$x-y=\varepsilon(g(y)-g(x))$$
$$-\varepsilon=\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$
$$|g'|\leqslant M$$
$$\to\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\leqslant M$$
$$\to g(y)-g(x)\leqslant f'(c)(y-x)$$
$$\leftarrow f(y)=f(x)\to x=y$$
$$\to-\varepsilon=g'(x)$$
$$f\text{是单的}$$

$$f\text{满}\to\forall y\in R.\exists x\in R\to f(x)=y$$
$$x+\varepsilon g(x)=y$$
$$\varepsilon=\frac{y-x}{g(x)}=$$
$$???$$

4. Proof: $C_0,\ldots C_n\in R.\sum_0^n\frac{C_i}{i+1}=0$.Proof: $\sum_0^n C_i x^i=0$在$(0,1)$至少有一个实根.

$$\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{3}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=0$$
$$f(x)=C_0x^0+C_1x^1+\ldots+C_nx^n=0$$
$$C_0=f(0),C_1=\frac{f'(0)}{1!},C_2=\frac{f^{(2)}(0)}{2!},\ldots,C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
$$\frac{C_0}{1}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=0$$
$$\to\frac{f(0)}{1!}+\frac{f^1(0)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(0)}(0)}{(n+1)!}=0$$
$$C_1x^0+\cdots+C_nx^{n+1}=0$$
$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$???$$

5. Proof: $\forall x>0,\ f'(x)$存在. $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.\ g(x)=f(x+1)-f(x)$. Proof: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.\ f'(x+\delta)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x+\delta)=f(x+1)-f(x)=0=g(x)$$

6. Assume:

1 $f(x)$在$[0,+\infty)$连续
2 f在$(0,+\infty)$可微
3 $f(0)=0$
4 f'单调递增

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\,(x>0)$$

Proof: g单调递增

$$g(x)-g(y)=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}=\frac{yf(x)-xf(y)}{xy}$$
$$x>y\to\frac{g(x)}{g(y)}=\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{y}{f(y)}=\frac{y}{x}\cdot\frac{f(x)}{f(y)}$$
$$\to f'\text{单调增}\to f'(x)\geqslant f'(y)$$
$$\frac{x}{y}\cdot\frac{g(x)}{g(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$$
$$???$$

7. Proof:

$f'(x), g'(x)$都存在，$g'(x)\neq 0, f(x)=g(x)=0$

Proof: $\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

这似乎是减弱了f,g连续的条件

???

但这对复函数也成立

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f(t)-f(x)}{g(t)-g(x)}=\lim_{t\to x}\frac{\frac{f(t)-f(x)}{t-x}}{\frac{g(t)-g(x)}{t-x}}$$

$$=\frac{\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}}{\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

???

8. f'在$[a,b]$上连续$,\varepsilon>0, a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b$. Proof: $\exists\delta, 0<d(x,t)<\delta\to\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\varepsilon$

f'在$[a,b]$一致连续

$\to\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, d(x,y)<\delta\to d(f'(x),f'(y))<\varepsilon$

$\to|f'(x)-f'(y)|<\varepsilon$

$$\exists\nu\in(t,x)\to f'(\nu)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$$d(x,t)<\delta\to\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|$$

$$=|f'(\nu)-f'(x)|$$

$$d(\nu,x)<d(t,x)<\delta$$

$$\to|f'(\nu)-f'(x)|<\varepsilon$$

Remark: f'在$[a,b]$上连续$\to f$在$[a,b]$上一致可微

9. Example: $f:R\to R$, f连续$.\forall x\neq 0, f'(x)$存在$.\lim_{x\to 0}f'(x)=3. f'(0)$是否存在

设$f'(0)$不存在$\to\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$不存在

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

???

10. f,g是$(0,1)$上的复可微函数$. f(x)\to 0, g(x)\to 0. f'(x)\to A, g'(x)\to B\neq 0$. Proof: $x\to 0\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

???

11. Proof:f在x的某个领域内有定义$, f''(x)$存在. Proof:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)$$

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)+f(x-h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x-h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{h}$$

$$=\frac{f'(x)}{h}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)}{h}$$

???

12. Compute: $f(x)=|x|^3$. Compute: $f'(x), f''(x). f'''(0)$不存在

$$f(x)=x^3, x\geqslant 0; -x^3, x<0.$$
$$f'(x)=3x^2, x\geqslant 0; -3x^2, x<0.$$
$$f''(x)=6x, x\geqslant 0; -6x, x<0$$
$$f'''(x)=6, x\geqslant 0; -6, x<0$$
$$\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} f'''(x)=\text{DNE}$$
$$\rightarrow f'''(0)\text{不存在}$$

13. $a, c\in R. c>0. f: [-1,1]\rightarrow R. f(x)=\begin{cases} x^a \sin(|x|^{-c}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$

a. Proof: $a>0\Leftrightarrow f$连续

$$a>0. x^a\text{连续}, |x|\text{连续}\rightarrow |x|^{-c}\text{连续}\rightarrow \sin(|x|^{-c})\text{连续}\rightarrow x^a\sin(|x|^{-c})\text{在}x\neq 0\text{上连续}$$
$$\lim_{x\rightarrow 0} x^a \sin(|x|^{-c})\leqslant \lim_{x\rightarrow 0} x^a=0$$
$$\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} f(x)=0$$
$$\rightarrow f\text{在}[-1,1]\text{上连续}$$

$$f\text{连续}\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} x^a \sin(|x|^{-c})=0$$
$$\text{let } a=0\rightarrow f(x)=\sin(|x|^{-c})\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} f(x)=\text{DNE}$$
$$\text{let } a<0\rightarrow f(x)=x^a\sin(|x|^{-c})$$
$$\rightarrow x^a>x\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} x^a=+\infty\rightarrow f\text{在}0\text{不连续}$$
$$\rightarrow a>0$$

b. Proof: $a>1\Leftrightarrow f'(0)$存在

$$a>0. f'(x)=a x^{a-1}\sin(|x|^{-c})+x^a\cos(|x|^{-c})\cdot -c|x|^{-c-1}\cdot |x|'$$
$$a>1\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} x^{a-1}=0\wedge \lim_{x\rightarrow 0} x^a=0$$
$$\rightarrow f'(x)=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(x)}{x}=f'(x)\text{是存在的}$$

c. Proof: $a\geqslant 1+c\Leftrightarrow f'$有界

d. Proof: $a>1+c\Leftrightarrow f'$连续

e. Proof: $a>2+c\Leftrightarrow f''(0)$连续

f. Proof: $a\geqslant 2+2c\Leftrightarrow f''$有界

g. Proof: $a>2+2c\Leftrightarrow f''$连续

14. Proof: $f: (a,b)\rightarrow R. f$在(a,b)上可微. Proof: f'单调增$\Leftrightarrow f$凸

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$f\text{单调增}\rightarrow y>x. f'(y)>f'(x)$$
$$???$$

15. $a\in R. f$是(a,∞)的二次可微函数$. M_0, M_1, M_2$是$|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$在$(a,\infty)$的最小上界.

Proof: $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$

16. f在$(0,\infty)$上二次可微, f''在$(0,\infty)$上有界. $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=0$. Proof: $\lim_{x\rightarrow\infty} f'(x)=0$

17. f是$[-1,1]$上的三次可微实函数. $f(-1)=0,\ f(0)=0,\ f(1)=0,\ f'(0)=0$. Proof: $\exists x\in(-1,1)\rightarrow f^{(3)}(x)\geqslant 3$

18. Proof: f是$[a,b]$上的实函数, $n\in N^+$. $\forall t\in[a,b],\ f^{(n-1)}$存在. let α,β是Taylor定理中的形式. $\forall t\in[a,b], t\neq\beta. Q(t)=\frac{f(t)-f(\beta)}{t-\beta}. f(t)-f(\beta)=(t-\beta)Q(t)$. 在$t=\alpha$处微分$n-1$次得到

$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n$.这是泰勒定理的另一形式

19. $f\colon(-1,1) \to R$. $f'(0)$存在. $-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$. $\lim \alpha_n = 0, \lim \beta_n = 0$.

    $D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$

    a. Proof: $a_n < 0 < \beta_n \to \lim D_n = f'(0)$

    b. Proof: $0 < a_n < \beta_n \wedge \left\{\frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}\right\}$有界 $\to \lim D_n = f'(0)$

    c. Proof: f'在$(-1,1)$连续 $\to \lim D_n = f'(0)$

    d. Example: f在$(-1,1)$可微 $\wedge$ f'在0不连续.$\lim a_n = 0; \lim b_n = 0$. $\lim D_n$存在, 但$\lim D_n \neq f'(0)$.

20. Example: 举一个由Taylor定理推出来的，且对于向量值函数也成立.

21. Example:

    E是R上的闭子集.R上有一个实函数f, f的零点集是E.$\forall$闭集$E \subset R$.
    是否存在函数f, f在R上可微，或n次可微，甚至任意次可微?

22. $f\colon(-\infty, \infty) \to R$. $f(x) = x$.x是f的不动点

    a. Proof: f可微，$\forall t \in R$. $f'(t) \neq 1$. Proof: f最多有一个不动点

    b. Proof: $f(t) = t + (1 + e^t)^{-1}$. Proof: $\forall t \in R$. $0 < f'(t) < 1$. 但$f(t)$没有不动点.

    c. Proof: $\exists A < 1, \forall t \in R, |f'(t)| < A$. Proof: f有不动点x, $x = \lim x_n$, x_1是任意实数且$x_{n+1} = f(x_n)$.

    d. Proof: c中的方法能够按照曲折的道路$(x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_3) \to (x_3, x_3) \to \cdots \to$实现

23. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$.有三个不动点α, β, γ. $-2 < \alpha \leftarrow 1; 0 < \beta < 1, 1 < \gamma < 2$.$\forall x_1 \in R, x_{n+1} = f(x_n)$

    a. Proof: $x_1 < \alpha$. Proof: $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

    b. Proof: $\alpha < x_1 < \gamma$. Proof: $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$

    c. Proof: $\gamma < x_1$. Proof: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

24. $\alpha > 1$. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$. $g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x}$. f, g都是以$\sqrt{\alpha}$为$(0, \infty)$内的唯一不动点.比较f, g的收敛速度

25. 牛顿切线数值法问题...不管了

26. Proof: f在$[a,b]$上可微，$f(a) = 0$. $\exists A \in R, \forall x \in [a,b] \to |f'(x)| \leqslant A|f(x)|$.Proof: $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$

27. ODE初值问题先不管

28. 一阶PDE问题先不管

29. PDE不管