Chapter 16

BY 多元函数的极限和连续

1 Def & Theo

1.1 平面点集的基本性质

1. 平面点集：$E \subset R^2$.

2. R^2上的拓扑结构：标准度量$d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$诱导的度量拓扑与积拓扑等价: $(a,b)\times(c,d)$这种等价性在任意有限维向量空间中与箱拓扑等价，但在无限维空间中与箱拓扑不等价

3. 点集的点的分类

$$\begin{array}{cc} \text{内点} & \exists U_{x_0}(r)\subset E \\ \text{外点} & \exists U_{x_0}(r)\cap E=\varnothing \\ \text{界点} & \forall U_{x_0}\cap E\neq\varnothing\wedge U_{x_0}\cap E^c\neq\varnothing \\ \text{聚点} & \forall U^0_{x_0}\cap E\neq\varnothing \\ \text{孤立点} & x_0\text{不是}E\text{的聚点，但是}E\text{的点} \end{array}$$

4. 连通性与区域：具有连通性的集合称为区域。开域是非空连通开集、闭域是非空连通闭集

5. 有界集：$E\subset U_0(r)$

6. 点集的直径：$d(E)=\sup\limits_{x_1,x_2\in E} d(x_1,x_2)$

1.2 R^2的完备性

R^2的有序性被破坏了，在此向量空间上描述完备性不能用单调序列。但可用度量的单调序列描述

1. 点列的极限：$x_n\in R^2, x\in R^2.\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+, n>N^+\to d(x_n,x)<\varepsilon$称$x$是$x_n$的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

   由于拓扑本身是度量拓扑，所以可以采用开集的直径描述$n>N\to x_n\in U_x(\varepsilon)$

2. 柯西准则：

$$\begin{array}{c} R^2\text{上的点列}x_n\text{收敛} \\ \Leftrightarrow\ \exists\varepsilon>0,\exists N\in N^+,\forall p\in N^+\to d(x_n,x_{n+p})<\varepsilon \end{array}$$

3. 闭域套定理：D_n是R^2内的闭域列$\wedge D_n\supset D_{n+1}\wedge \lim_{n\to\infty} d(D_n)=0\Rightarrow\forall n,\exists$唯一$x\in D_n$

   Remark:对于闭集套，上述定理依然成立

4. 聚点定理：R^2的有界无限子集至少有一个聚点

5. 致密性定理：R^2的有界点列必有收敛子列

6. 有限覆盖定理：有界闭域能被一个开域族覆盖，则必能被有限开域族覆盖

   Remark：有界闭集能被开集族覆盖，则必能被有限开集族覆盖

1.3 R^2上的函数

1. $E\subset R^2$,对应法则$f\colon E\to R$称为E上的二元函数，$f(E)$称为值域，E称为定义域.

   f的图像是空间曲面(闭图像定理，是R^3的闭集)

2. 有界：$f(E)$是有界数集，则称为有界函数，否则称无界函数

1.4 R^2上函数的极限

1. f是$D\subset R^2$的二元函数，P_0是D的聚点，A是确定的实数.

$$\exists\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P\in U^0_{P_0}(\delta)\cap D\to|f(P)-A|<\varepsilon$$

   称f在D上当$P\to P_0$时以A为极限

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$$

2. 归结原则(Heine)：

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$$
$$\Leftrightarrow\ \forall E\subset D,P_0\text{是}E\text{的聚点}\to\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A$$

   推论：

$$E_1\subset D,P_0\text{是}E\text{的聚点}.\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)=\mathrm{DNE}\Rightarrow\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=\mathrm{DNE}$$
$$E_1,E_2\subset D,P_0\text{是}E_1,E_2\text{的聚点}.\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)\neq\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_2}}f(P)\Rightarrow\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=\mathrm{DNE}$$
$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A\Leftrightarrow\forall E\in D\wedge P_0\text{是}E\text{的聚点}\to\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A$$

1.5 累次极限

1. 累次极限

$$\left.\begin{array}{c}D\text{在}x,y\text{上的投影分别为}X,Y\\X=\{x|(x,y)\in D\},Y=\{y|(x,y)\in D\}\\x_0,y_0\text{分别是}X,Y\text{的聚点}\\\forall y\in Y\wedge y\neq y_0,\exists\varphi(y)=\lim_{x\to x_0}f(x,y)\\\exists L=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=L$$

2. 累次极限与重极限的存在性没有关系

$$\begin{gathered}
\text{重极限不存在但累次存在}\\
f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\text{在}(0,0)\text{重极限不存在}(y=kx)\\
\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{累次极限不存在，但重极限存在}\\
f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\text{在}(0,0)\\
\lim_{x\to 0}f(x,y)=\begin{cases}0 & y=0\\ \text{DNE} & y\neq 0\end{cases}\\
\to\text{累次极限不存在}\\
\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|<\varepsilon.(\varepsilon=2\delta)\\
\to\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0
\end{gathered}$$

3. 若函数在某点同时存在累次极限和重极限、则他们必然相等

4. $\forall y_0\in[a,b]$, $f(x,y_0)$在$[a,b]$上连续, $\forall x_0\in[a,b]$, $f(x_0,y)$在$[c,d]$上一致连续 $\Rightarrow f$在$[a,b]\times[c,d]$连续

5. 有界闭域上连续函数的象集必为闭区间

6. f在R^2上分别对x,y是连续的，$\forall x_0, f(x_0,y)$是y的单调函数$\Rightarrow f$是R^2上的连续函数

1.6 二元函数连续性

1.

$$\begin{gathered}
\text{二元函数}f\colon D\to R, P_0\in D\\
\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,P\in U_{P_0}(\delta)\cap D\to|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon
\end{gathered}$$

称为f关于集合D在P_0连续

2. f在D任何点都关于D连续，称f在D上连续

   推论：f在孤立点连续

   推论：f关于D在P_0连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=f(P_0)$

3. 全增量：$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\Delta f=0$

4. 偏增量：$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0);\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

5. 连续则对单个变量连续，单个变量都连续不能推出连续

6. 连续函数的局部性质：局部有界性、局部保号性、局部保不等式、四则运算等都成立

7. 复合函数的连续性：

$$\begin{gathered}
u=\varphi(x,y);v=\psi(x,y)\text{在}U_{(x_0,y_0)}\text{有定义，且在该点连续}\\
f(u,v)\text{在}U(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))\text{有定义且在该点连续}\\
\Rightarrow g(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))\text{在}(x_0,y_0)\text{连续}
\end{gathered}$$

1.7 有界闭域上连续函数的性质

1. 有界、最大、最小值定理

$$\text{有界闭域上的连续函数}\begin{cases} f\text{在}D\text{上有界} \\ f\text{在}D\text{上能必能取得最大值、最小值} \end{cases}$$

2. 一致连续性定理：有界闭域上的连续函数，必一致连续

3. 介值性：连续函数的定义域内的任意两点函数值的中间值、必能在定义域内取得

2 Tricks

2.1 对于一些重极限的计算问题

1.

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$
$$\text{根据定义可知，}f\text{的间断点为}y=-x^2.$$
$$\text{为了构造接近间断点处的不同极限，需要给}y\text{增加一个相对}y\text{在}x_0\text{点的无穷小量}$$
$$\text{如在}(0,0)\text{点增加无穷小量}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-x^2}=-x=0$$
$$\text{代入得到}\frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^2+x^3-x^2}=\frac{x^3+x^6(x-1)^3}{x^3}=1+x^3(x-1)^3.$$
$$\lim_{x\to x^0}1+x^3(x-1)^3=1\text{不是累次极限的值}$$

2.

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$
$$f\text{的间断点为}y=-x$$
$$\text{构造间断点处的无穷小量}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x}=-x=0$$
$$\text{代入}\frac{x^2(x^2-x)^2}{x^3+(x^2-x)^3}=\frac{x^4(x-1)^2}{x^3+x^3(x-1)^3}=\frac{x(x-1)^2}{1+(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x^2+3x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+3}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+3}=\frac{1}{3}$$
$$\text{不是累次极限的值，因此必然不存在}$$