第八章 一些特殊函数

1 幂级数

定义 1.1. *幂级数.*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

Remark: 如果限制x是复数，则会出现收敛圆. 这样的函数称为解析函数

限制x是实数，则需要讨论收敛区间

定理 1.2. *幂级数在 $|x|<R$内收敛则幂级数在其内的闭区间上一致收敛，收敛函数连续可微且与求导可交换*

$$|x|<R.\text{级数}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\text{收敛}$$
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\ \ |x|<R$$

$$\begin{array}{ll}
1 & \forall\varepsilon>0,\text{幂级数在闭区间}[-R+\varepsilon,R-\varepsilon]\text{上一致收敛}\\
2 & f\text{在}(-R,R)\text{内连续、可微}\\
3 & f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\ (|x|<R)
\end{array}$$

证明.

$$\begin{gathered}
\forall\varepsilon>0.\ |x|<R-\varepsilon\\
\to|c_nx^n|\leqslant|c_n(R-\varepsilon)^n|\leqslant c_n|R|\\
\to\sum c_nx^n\text{绝对收敛}\\
f_n=c_nx^n\text{在}(-R,R)\text{上连续可微, 在0处}f_n'(0)=f(0)=0\\
\to f_n\text{在}(-R,R)\text{上一致收敛}\\
f'=\sum f_n'
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{n|c_n|}=\lim\sup\sqrt[n]{|c_n|}\\
\to f'\text{和}f\text{有相同的收敛区间}
\end{gathered}$$

□

推论 1.3. *幂级数在收敛开区间内有任意阶导数*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)c_nx^{n-k}$$
$$\text{特别的}\qquad f^{(k)}(0)=k!c_k$$

证明.

对$f, f', f''...$使用幂级数的定理可以得到第一式

$f^{(k)}(0) = n!c_nx^{n-n} = n! + 0 + 0... = n!$ □

Remark:

$f^{(k)}(0) = k!c_k$.一方面说明f的幂级数展开式的系数计算方法

如果这些系数给定了，f在收敛区间中心的各阶导数值就可立即计算出

但即使f有任意阶导数,幂级数$\sum c_nx^n$也不一定在任何$x \neq 0$收敛于f.

此时f不能在$x = 0$处展开成幂级数

$f(x) = \sum a_nx^n \rightarrow n!a_n = f^{(0)}(0)$

$\rightarrow a_n = c_n$

定理 1.4. *(Abel). 幂级数在开区间的一个端点收敛，则在此端点连续.*

定理 1.5. $\sum c_n$*收敛*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \ \ (-1 < x < 1)$$
$$\rightarrow \lim_{x\rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

证明.

$s_n = c_0 + \cdots + c_n . s_{-1} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s_{n-1})x^n$

$= (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_nx^n + s_mx^m$

$|x| < 1,$

$\lim_{m\rightarrow\infty} f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_nx^n$

$s = \lim_{n\rightarrow\infty} s_n . \forall\varepsilon > 0, \exists N, n > N$

$\rightarrow |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ □

$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \ \ (|x| < 1)$

let: $\delta \rightarrow x > 1 - \delta$

$\rightarrow |f(x) - s| = |(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)x^n|$

$\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s_n - s| \, |x^n| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$

$\rightarrow \lim_{x\rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

定理 1.6. *如果级数*$\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$*分别收敛于*$A, B, C . c_n = a_0b_n + \cdots + a_nb \rightarrow C = AB$

Remark: 这里没有假设绝对收敛

证明.

$x \in [0, 1]$

let: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$

$x < 1$, f, g, h绝对收敛 $\rightarrow f(x) \cdot g(x) = h(x) . \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$ □

$\lim_{x\rightarrow 1} f(x) = A, \lim_{x\rightarrow 1} g(x) = B, \lim_{x\rightarrow 1} h(x) = C$

$\rightarrow AB = C$

定理 1.7. *若二重序列对其中一个序列绝对收敛，则二重极限可以交换*

$$
\begin{aligned}
& \text{二重序列}\{a_{i,j}\}, i\in N^+, j\in N^+ \\
& \sum_{j=1}^{\infty}|a_{i,j}| = b_i,\ \sum b_i\text{收敛} \\
\rightarrow\quad & \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}
\end{aligned}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
E\text{是}x_0, x_2, \ldots\text{组成的可数集}. \lim_{n\to\infty}x_n = x_0 \\
f_i(x_0) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j} \\
f_i(x_n) = \textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} \\
g(x) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)\ x\in E \\
\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i,j}| = b_i\text{且}\sum b_i\text{收敛}\rightarrow f_i\text{在}x_0\text{连续} \\
x\in E, |f_i(x)| \leqslant b_i \\
\rightarrow g(x)\text{一致收敛} \\
\rightarrow g\text{在}x_0\text{连续}
\end{gathered}
$$

□

$$
\begin{gathered}
\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty}g(x_n) \\
= \lim_{n\to\infty}\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} \\
= \lim_{n\to\infty}\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j} \qquad ???\text{为啥交换}
\end{gathered}
$$

定理 1.8. *Taylor.*

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n
$$

$$
f\text{在}|x| < R\text{内收敛}. -R < a < R. f\text{可在}x = a\text{处展开成幂级数，此幂级数在}|x-a| < R-|a|\text{内收敛}
$$

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ \ (|x-a| < R-|a|)
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a+a)^n \\
& = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m \\
\leftarrow\quad & = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}c_n a^{n-m}\right)(x-a)^m \\
\leftarrow\quad & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left|c_n\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m\right|\text{收敛} \\
\leftarrow\quad & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot(|x-a|+|a|)^n\text{收敛} \\
\leftarrow\quad & |x-a|+|a| < R\text{时绝对收敛}
\end{aligned}
$$

□

Remark: 如果在(-R,R)中两个幂级数收敛于同一个函数，$f^{(k)}(0) = n!c_n$表示两个级数的系数完全相同。但这个条件仍然可减弱

定理 1.9. *两级数收敛区间相同，若两个级数值相同的点的极限点处函数值有极限点在区间内，则系数相等*

$$
\begin{gathered}
\sum a_n x^n\text{和}\sum b_n x^n\text{在开区间}S = (-R, R)\text{上收敛} \\
\text{let}: x\in S, x\rightarrow\sum a_n x^n = \sum b_n x^n. \\
\text{let}: E = \{x\}. \\
\text{若}E\text{有极限点}x'\in S\rightarrow a_n = b_n \Leftrightarrow \forall x\in(-R, R), \text{两级数收敛到同一个函数}
\end{gathered}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
c_n = a_n - b_n \\
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\; x \in S \\
\rightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \\
\\
A = E', B = E / E' \rightarrow B\text{开} \\
\text{若}A\text{是开集} \rightarrow A\text{和}B\text{是不相交的开集} \rightarrow A, B\text{是分离的} \\
S\text{联通} \rightarrow S = A \cup B \rightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \\
\rightarrow A = S \\
f\text{在}S\text{中连续}, A \subset E \rightarrow E = S(f\text{在}S\text{内恒等于}0) \rightarrow c_n = 0 \\
\\
\forall x_0 \in A \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \;\; (|x - x_0| < R - |x_0|) \\
\text{Assume: } \exists n \rightarrow d_n \neq 0 \\
f(x) = (x - x_0)^k g(x) \;\; (|x - x_0| < R - |x_0|) \\
g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x - x_0)^m \\
g\text{在}x_0\text{连续} \wedge g(x_0) = d_k \neq 0 \\
\rightarrow \exists \delta > 0 \rightarrow |x - x_0| < \delta, g(x) \neq 0 \\
\rightarrow \exists x \in U_{x_0}^0(\delta) \rightarrow f(x) \neq 0 \\
x_0\text{是}x\text{的极限点. 矛盾} \\
\rightarrow d_n = 0 \\
\rightarrow\text{使得在任何}x_0\text{处的幂级数成立的}x\text{必在}x_0\text{的领域中}, f(x) = 0 \\
\rightarrow f(x) = 0 \\
\rightarrow A\text{是开集}
\end{gathered}
$$

□

2 指数函数与对数函数

定义 2.1. *指数函数*

$$
E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}
$$

Remark: 比较验敛法表明此级数对任意复数都收敛.

$$
\begin{aligned}
E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= E(z+w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
E(z)E(-z) = E(z - z) = E(0) = 1 \\
\rightarrow \forall z \in C, E(z) \neq 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
x > 0, E(x) > 0 \rightarrow \forall x \in R, E(x) > 0 \\
\lim_{x \to \infty} E(x) = +\infty \\
\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0 \\
\forall x < y \rightarrow E(x) < E(y)
\end{gathered}
$$

$$
\lim_{h \to} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = \frac{\sum_0^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} = E(z)
$$

定理 2.2. $E(z)=e^x$

$$\begin{array}{lc} 1 & n\in N.E(0)=1;E(1)=e \\ & E(n)=E(n-1+1)=E(n-1)e \\ & \to E(n)=e^n \\ 2 & p\in Q.p=\frac{n}{m}\to (E(p))^m=E(mp)=E(n)=e^n \\ & \to E(p)=e^{\frac{n}{m}}=e^p \\ 3 & y\notin Q.\, x^y=\sup x^p \\ & e^x=\sup e^p. \\ & E\text{连续, 单调, 且对有理数都成立} \\ & \to \forall x\in R\to E(x)=e^x \end{array}$$

定理 2.3. *指数函数的性质*

$$\begin{array}{lc} 1 & e^x\text{在}R\text{上连续可微} \\ 2 & (e^x)'=e^x \\ 3 & e^x\text{是}x\text{的严格单调增函数}.e^x>0 \\ 4 & e^{x+y}=e^xe^y \\ 5 & \lim\limits_{x\to\infty}e^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0 \\ 6 & \forall t\in R^+\to \lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0 \end{array}$$

证明.

$$\begin{array}{c} 1,2,3,4,5\text{都已经证明} \\ e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to x^ne^x<\frac{(n+1)!}{x} \end{array}$$

□

定义 2.4. *对数函数(指数函数的反函数)*

$$L\colon R^+\to R, E(L(y))=y, y>0;\vee L(E(x))=x, x\in R$$

$$\begin{array}{c} E\text{连续可微}\to L\text{连续可微} \\ \to L(E(x))=x\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L(E(x)))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \\ L'(E(x))E'(x)=1 \\ \text{let: } y=E(x)\colon\to L'(y)\cdot y=1 \\ L'(y)=\frac{1}{y} \\ \to L(y)=\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y \\ L(E(x))=x.\,\text{let } x=0\to E(x)=1 \\ \to L(1)=0 \\ \to L(y)=\int_1^y\frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array}$$

对数函数的性质

$$\begin{array}{c} L(E(x)\cdot E(y))=L(E(x+y))=x+y=L(E(x))+L(E(y)) \\ \to L(uv)=L(u)+L(v).\,u,v>0 \\ \lim_{x\to+\infty}L(x)=+\infty \\ \lim_{x\to0}L(x)=-\infty \\ x^n=E(nL(x))=e^{n\log x} \\ x^{\frac{1}{m}}=E\big(\frac{1}{m}L(x)\big)=e^{\frac{1}{m}\log x} \\ \to x^\alpha=E(\alpha L(x))=e^{\alpha\log x} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (x^\alpha)'=(E(\alpha L(x)))'=E(\alpha L(x))\cdot\alpha\cdot L'(x)=E(\alpha L(x))\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1} \\ a^x=E(xL(a)), (a^x)'=(E(xL(a)))'=E(xL(a))\cdot(1\cdot L(a)+xL'(a)) \\ =E(xL(a))\cdot L(a) \\ =a^x\cdot\log a \end{array}$$

对数函数增长速度低于任意整数次幂函数

$$\forall a>0\rightarrow \lim_{x\rightarrow +\infty} x^{-a}\log x=0$$
$$\text{Proof:}\forall 0<\varepsilon<a,x>1$$
$$x^{-a}\log x=x^{-a}\int_1^x t^{-1}\mathrm{d}t<x^{-a}\int_1^x t^{\varepsilon-1}\mathrm{d}t$$
$$=x^{-\alpha}\cdot\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}<\frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}$$
$$\rightarrow \lim_{x\rightarrow +\infty} x^{-a}\log x=0$$

3 三角函数

定义 3.1. *正弦，余弦*

$$C(x)=\frac{1}{2}(E(ix)+E(-ix))$$
$$S(x)=\frac{1}{2i}(E(ix)-E(-ix))$$

定理 3.2.

$$\forall z\in C.\cos(z)=C(z).\sin(z)=S(z)$$

证明.

$$E(\bar{z})=\sum_0^\infty\frac{\bar{z}^n}{n!}=\sum_0^\infty\frac{\overline{z^n}}{n!}=\overline{E(z)}$$
$$\text{根据三角函数的定义}\rightarrow E(ix)=C(x)+iS(x)$$
$$x\in R,C(x)\text{和}S(x)\text{是}E(ix)\text{的实部和虚部}$$
$$|E(ix)|^2=E(ix)\overline{E(ix)}=E(ix)E(-ix)=E(ix-ix)=E(0)=1$$
$$\rightarrow |E(ix)|=1$$
$$C(0)=\tfrac{1}{2}(E(0i)+E(-0i))=1$$
$$S(0)=\tfrac{1}{2i}(E(0i)-E(-0i))=\tfrac{1}{2i}0=0$$
$$C'(x)=\left(\tfrac{1}{2}(E(ix)+E(-ix))\right)'$$
$$=\tfrac{1}{2}(iE(ix)-iE(-ix))$$
$$=\tfrac{i}{2}(E(ix)-E(-ix))$$
$$=\tfrac{-1}{2i}(E(ix)-E(-ix))$$
$$=-S(x)$$

$$S'(x)=\tfrac{1}{2i}(E(ix)-E(-ix))$$
$$=\tfrac{1}{2}(iE(ix)+i(E(-ix)))$$
$$=\tfrac{i}{2}(E(ix)+E(-ix))$$
$$=\tfrac{1}{2}(E(ix)+E(-ix))$$
$$=C(x)$$

必然存在$x\in R^+\rightarrow C(x)=0$

$$C(0)=1.C\text{是连续函数}\rightarrow\forall x\in R,C(x)>0$$
$$\rightarrow S'(x)>0\rightarrow S\text{严格增}$$
$$S(0)=0,x>0\rightarrow S(x)>0$$
$$\forall 0<x<y$$
$$\rightarrow S(x)(y-x)<\int_x^y S(t)\mathrm{d}t=C(x)-C(y)\leqslant 2\quad\text{用Eulor公式推}$$
$$S(x)>0\rightarrow\exists y-x>\tfrac{2}{S(x)}\text{上式不成立}$$
$$\rightarrow\exists x\in R^+\rightarrow C(x)=0$$

定义π

$$\begin{aligned}&C\text{连续}\rightarrow E=\{x:C(x)=0\}\rightarrow E\text{是闭集}\\&\rightarrow E\cap R^{+}\text{有最小元素}x_0\ (R^{+}\text{是开集})\\&\pi=2x_0\\&C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\\&\rightarrow E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i\\&E(\pi i)=-1,E(2\pi i)=1\\&\rightarrow E(z+2\pi i)=E(z)E(2\pi i)=E(z)\end{aligned}$$

□

定理 3.3. *E作为复函数的性质*

$$\begin{array}{ll}1 & E\text{是}2\pi i\text{为周期的周期函数}\\2 & C,S\text{是以}2\pi\text{为周期的周期函数}\\3 & 0<t<2\pi\rightarrow E(it)\neq 1\\4 & z\in C.\ |z|=1\rightarrow\exists\text{唯一}t\in[0,2\pi)\rightarrow E(it)=z\end{array}$$

证明.

$$\begin{gathered}1\text{已经证明},2\text{根据定义可证}\\0<t<\tfrac{\pi}{2},E(it)=x+iy.x,y\in R\\E(4it)=(x+iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4ixy(x^2-y^2)\\\text{若}4it\in R\rightarrow x^2-y^2=0\rightarrow x^2+y^2=1\\\rightarrow x^2=y^2=\tfrac{1}{2}\rightarrow E(4it)=-1\end{gathered}$$

□

$$\begin{gathered}0\leqslant t_1\leqslant t_2<2\pi.\\E(it_2)E(it_1)^{-1}=E(it_2-it_1)\neq 1\rightarrow\text{若}t\text{存在},t\text{是唯一的}\\|z|=1,z=\cos x+i\sin x.\cos\text{和}\sin\text{的连续性表明这样的}t\text{存在且唯一}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&\gamma(t)=e(it)\\&\gamma'(t)=ie^{it}\\&\textstyle\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t=2\pi\quad\text{半径为1的圆的周长}\end{aligned}$$

4 复数域的代数完备性

定理 4.1. *任何非常数复系数多项式必有复根*

$$\begin{gathered}a_0,\ldots,a_n\text{是复数},n\in N^{+}.a_n\neq 0\\P(z)=\sum_0^n a_iz^i\\\rightarrow\exists z\in C\rightarrow P(z)=0\end{gathered}$$

证明.

$$\text{不失一般性} a_n = 1$$
$$\mu = \inf |P(z)|. z \in C$$
$$\text{若} |z| = R$$
$$\to |P(z)| \geqslant R^n(1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_n|R^{-n})$$
$$\lim_{n\to\infty} R^n(1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_n|R^{-n}) = \infty$$
$$\to \exists R_0, |z| > R_0 \to |P(z)| > \mu$$
$$|P| \text{在以0为圆心，} R_0 \text{为半径的圆环面上连续} \to \exists z_0, |P(z_0)| = \mu$$

$$\text{Assume: } \mu \neq 0.$$
$$Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0). Q(0) = 1, \forall z, |Q(z)| \geqslant 1$$
$$\to \exists k \in 1 \ldots n \to Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n. b_k \neq 0$$
$$\to \exists \theta \in R, e^{ik\theta} b_k = -|b_k|$$
$$\text{若} r > 0 \wedge r^k |b_k| < 1 \to |1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k |b_k|$$
$$\to |Q(re^{i\theta})| \leqslant 1 - r^k(|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|)$$
$$\lim_{r\to 0} \to (|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|) > 0$$
$$\to |Q(re^{i\theta})| < 1 \text{ 矛盾}$$
$$\to P(z_0) = \mu = 0$$

□

5 Fourier 级数

定义 5.1. *三角多项式和三角级数*

$$\text{三角多项式} \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \ x \in R$$
$$\text{形式2} \qquad f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$
$$\text{其中} a_0, \ldots, a_N; b_1, \ldots, b_N \in C.$$

$$\text{三角级数} \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \ x \in R$$

一些性质

1 任意三角多项式以2π为周期

2 三角级数对于内积是正交的 $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

3 $m \in Z, \int e^{imx} \cdot f(x).2$表示 $\quad c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} \mathrm{d}x. m \leqslant N$

4 三角多项式是f是实的 $\quad \Leftrightarrow c_{-n} = \bar{c_n}, n = 0, \ldots, N$

若f是$[-\pi, \pi]$上的可积函数，对一切整数m,按照3确定的系数c_m称为f的Fourier系数,f称为傅立叶级数

Remark: 研究Fourier级数的精细结构需要在实变函数论里讨论

定理 5.2. *正交函数系，规范正交系*

$$\text{正交函数系} \qquad \{\phi_n\}, n \in N^+. \text{在}[a, b]\text{上满足}$$
$$\int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} \mathrm{d}x = \{ \ 0 \quad m \neq n$$
$$\text{则复函数序列} \phi_n \text{称为} [a, b] \text{上的正交函数系}$$

$$\text{规范正交系} \quad \text{若} \phi_n(x) \text{是正交函数系且} \forall n \in N^+, \int_a^b |\phi_n(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$$

Example:

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}\text{是}[-\pi,\pi]\text{上的规范正交系}.$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\text{是}[-\pi,\pi]\text{上的正规正交系}$$

若ϕ_n是$[a,b]$上的正规正交系且$c_n=\int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\mathrm{d}t.\ n\in N^+$

c_n称为f关于ϕ_n的第n个Fourier系数

$f(x)\sim\sum_1^\infty c_n\phi_n(x)$ 称为f关于ϕ_n的Fourier级数.

这里$\sim$表示c_n的计算方式，不表示级数的收敛性质

定理 5.3. *R可积函数。函数分解在正规正交系上的级数 是 该函数的最佳均方逼近*

$$\phi_n\text{是}[a,b]\text{上的规范正交系}$$
$$s_n(x)=\sum_{m=1}^{n}c_m\phi_m(x)\text{是}f\text{的Fourier级数的第}n\text{个部分和}$$
$$t_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\gamma_m\phi_m(x)$$
$$\rightarrow\int_a^b|f-s_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f-t_n|^2\mathrm{d}x,\text{等式成立}\Leftrightarrow\gamma_m=c_m$$

证明.

$$\text{Fourier系数的定义}: c_n=\int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\mathrm{d}t$$
$$\int f\bar{t_n}=\int f\sum_m\bar{\gamma}_m\overline{\phi_m}=\sum_m c_m\overline{\gamma_m}$$
$$\phi_n\text{是正规正交的}\rightarrow\int|t_n|^2=\int t_n\bar{t_n}=\int(\sum_m\gamma_m\phi_m\sum_m\overline{\gamma_m}\,\overline{\phi_m})$$
$$=\int\sum_m|\gamma_m|^2\phi_m\overline{\phi_m}=\sum_m|\gamma_m|^2$$

$$\rightarrow\int|f-t_n|^2=\int(f-t_n)\overline{(f-t_n)}=\int(|f|^2-f\bar{t_n}-\bar{f}t_n+|t_n|^2)$$
$$=\int|f|^2-\int f\bar{t_n}-\int\bar{f}t_n+\int|t_n|^2$$
$$=\int|f|^2-\sum c_m\overline{\gamma_m}-\sum\overline{c_m}\gamma_m+\sum\gamma_m\overline{\gamma_m}$$
$$=\int|f|^2-\sum|c_m|^2+\sum|\gamma_m-c_m|^2$$
$$((\gamma_m-c_m)\overline{(\gamma_m-c_m)}=|\gamma_m|^2-c_m\overline{\gamma_m}-\overline{c_m}\gamma_m+|c_m|^2)$$
$$\Leftrightarrow\gamma_m=c_m\text{使得积分值最小}$$

$$\gamma_m=c_m,\int|f-t_n|^2\geqslant 0$$
$$\rightarrow\int_a^b|s_n(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{m=1}^n|c_m|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

□

定理 5.4. *Bessel不等式. 傅立叶系数范数平方的级数小于函数范数的平方在区间上的积分*

$$\phi_n\text{是}[a,b]\text{上的正规正交系}$$
$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$$
$$\rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$\text{特别的}\qquad\lim_{n\rightarrow\infty}c_n=0$$

证明.

定理5.3最后已经证明$\forall n \in N^+ \rightarrow \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$

$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |c_m|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$

$f \in \mathfrak{R} \rightarrow |f| \in \mathfrak{R} \rightarrow |f|^2 \in \mathfrak{R}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_m|^2$收敛$\rightarrow \lim_{m\to\infty} |c_m|^2 = 0 \rightarrow \lim_{m\to\infty} c_m = 0$ □

定理 5.5. *$[-\pi,\pi]$上R可积的三角函数系.若函数以2π为周期，傅立叶级数积分区间长度为2π的所有积分相等*

$$f\text{在}[-\pi,\pi]\text{上的}R\text{可积}, f\text{以}2\pi\text{为周期}\rightarrow f\text{在每个有界闭区间都可积}$$
$$f\text{的Fourier级数}c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t$$
$$s_N(x) = s_N(f;x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}\text{是}f\text{的Fourier级数的第}N\text{个部分和}$$
$$\text{Bessel不等式:}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_N(x)|^2 = \sum_{-N}^{N}|c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

定义：Dirichlet核

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = -\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
(e^{ix}-1)D_N(x) &= e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}\\
e^{-\frac{ix}{2}}(e^{ix}-1)D_N(x) &= e^{-\frac{ix}{2}}(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx})\\
\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right)D_N(x) &= e^{i\left(N+1-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}\\
D_N(x) &= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{S(\left(N+\frac{1}{2}\right)x)}{S\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x\\
s_N(f;x) &= \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}\\
&= \sum_{-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}e^{inx}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

定理 5.6. *傅立叶级数的逐点收敛*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in R, \exists \delta > 0, M < \infty. \forall t \in (-\delta,\delta)\\
&|f(x+t) - f(x)| \leqslant M|t|\\
\rightarrow\ &\lim_{N\to\infty} s_N(f;x) = f(x)
\end{aligned}$$

证明.

$$0<|t|\leqslant\pi$$
$$g(t)=\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(\frac{t}{2})};\ g(0)=0$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)\mathrm{d}x=1$$
$$s_N(f;x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(Nt)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(Nt)\mathrm{d}t$$
$$g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\text{和}g(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\text{有界},\ \lim_{N\to\infty}c_n=0$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(Nt)\mathrm{d}t=0$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(Nt)\mathrm{d}t=0$$
$$\to\lim_{N\to\infty}s_N(f;x)=f(x)$$

□

推论 5.7. *傅立叶级数的局部化定理*

$$\text{如果某个开区间}J\text{内的一切}x,\ f(x)=0\to\forall x\in J,\ \lim_{N\to\infty}s_N(f;x)=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t\in U_x(r),\ f(t)=g(t)\to\lim_{N\to\infty}(s_N(f;x)-s_N(g;x))=\lim_{N\to\infty}s_N(f-g;x)=0$$

Remark: 这说明序列$s_N(f,x)$的性质值依赖与函数在局部(领域)内的值。因此两个Fourier级数可以在一个区间内有相同的性质但在另一个区间内完全不同，这与幂级数完全不同

定理 5.8. *2π为周期的连续函数必有三角多项式可以在R上逼近*

$$f\text{以}2\pi\text{为周期，}f\text{连续}\to\forall\varepsilon>0,\forall x\in R,\exists P(x),\ |P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

证明.

$$f(x)=f(x+2\pi)\to e^{ix}\text{是将单位元}T\text{上的函数}$$
$$\text{所有三角多项式}f(x)=\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}\text{构成集合}A\text{一个自伴代数}\mathcal{A}$$
$$\forall f,g\in A,\ f+g=\sum_{-N}^{N}\varphi_ne^{inx}+\sum_{-N}^{N}\gamma_ne^{inx}$$
$$=\sum_{-N}^{N}(\varphi_n+\gamma_n)e^{inx}\in A$$
$$(f(x))^2\in A\to fg\in A \qquad ???\text{没验证}$$
$$\forall f\in A,\ \lambda f=\lambda\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}$$
$$=\sum_{-N}^{N}(\lambda c_n)e^{inx}\in A$$
$$\to A\text{是代数}\mathcal{A}$$
$$f(\bar{x})=\sum c_ne^{in\bar{x}} \qquad ???$$
$$\to\mathcal{A}\text{是自伴的}$$

$$\mathcal{A}\text{能分离}T\text{的点},\ \mathcal{A}\text{不在}T\text{内消失}$$
$$\to\mathcal{A}\text{在}\ell(T)\text{内稠密}$$
$$\to\text{必能逼近}T\text{内的任意连续函数} \qquad \mathrm{Stone-Weierstrass}$$

□

定理 5.9. *Parseval*

$$f,g\text{都是}R\text{可积且周期为}2\pi\text{的函数}$$
$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx};\,g\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_ne^{inx}$$

$$\to\quad\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f;x)|^2\mathrm{d}x=0$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\overline{\gamma_n}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

证明.

$$\|h\|_2=\left(\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\forall\varepsilon>0,\,f\in\mathfrak{R},\,f(\pi)=f(-\pi)$$
$$\to\exists\text{连续且周期}2\pi\text{的函数}h\wedge\|f-h\|_2<\varepsilon$$
$$\to\exists\text{三角多项式}P,\forall x,\,|h(x)-P(x)|<\varepsilon$$
$$\to\|h-P\|_2<\varepsilon$$
$$\text{若}P\text{是}N_0\text{次三角多项式}5.3$$
$$N\geqslant N_0\to\|h-S_N(h)\|_2\leqslant\|h-P\|_2<\varepsilon$$
$$\|S_N(h)-S_N(f)\|_2=\|S_N(h-f)\|_2\leqslant\|h-f\|_2<\varepsilon$$
$$\to\|f-S_N(f)\|_2<3\varepsilon.\ (N\geqslant N_0)$$
$$\to\lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f;x)|^2\mathrm{d}x=0$$

□

$$\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}S_N(f)\bar{g}\mathrm{d}x=\sum_{-N}^{N}c_n\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{-N}^{N}c_n\overline{\gamma_n}$$
$$|\textstyle\int f\bar{g}-\int S_N(f)\bar{g}|\leqslant\int|f-S_N(f)|\,|g|\leqslant(\int|f-S_N|^2\int|g|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lim_{N\to\infty}\textstyle\int|f-S_N|^2=0$$
$$\to\textstyle\int f\bar{g}=\int S_N(f)\bar{g}$$
$$???$$

$$\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\bar{c_n}=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

6 Γ函数

定义 6.1. Γ*函数*

$$0<x<\infty.\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$
$$\text{此积分对}\forall x\in(0,\infty)\text{都收敛},\,x<1\text{时},0\text{和}\infty\text{都需要再考察收敛性}$$

定理 6.2. Γ*函数的性质*

1	$x\in(0,\infty)$	$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
2	$n\in N^+$	$\Gamma(n+1)=n!$
3	$x\in(0,\infty)$	$\log\Gamma(x)$是凸的

证明.

$$
\begin{aligned}
1 \qquad & \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\
& x\Gamma(x)=x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\
& \Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^{x}e^{-t}\mathrm{d}t\\
& =\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}t^2\big)\\
& \ldots\\
2 \qquad & \Gamma(1)=\int_0^\infty t^0e^{-t}\mathrm{d}t\\
& =\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t\\
& =-\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}(-t)\\
& =-(e^{-t}|_0^\infty)\\
& =-(0-1)\\
& =1\\
& \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\\
& \to\Gamma(n+1)=n\cdot(n-1)!=n!
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
3 \qquad & 1<p<\infty\\
& \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=1\\
& \text{Holder不等式}\to\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{x}{q}\right)\leqslant\Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\Gamma(x)^{\frac{1}{q}}\\
& L\Big(\Gamma\Big(\frac{x}{p}+\frac{x}{q}\Big)\Big)\leqslant L\Big(\Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\Gamma(x)^{\frac{1}{q}}\Big)=L\Big(\Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\Big)+L\Big(\Gamma(x)^{\frac{1}{q}}\Big)\\
& =\frac{1}{p}L(\Gamma(x))+\frac{1}{q}L(\Gamma(x))\\
& =L(\Gamma(x))\\
& ???
\end{aligned}
$$

定理 6.3. *满足Γ函数的三特性则必然是Γ函数*

$$
\begin{array}{cc}
 & f\text{在}(0,\infty)\text{上是正值函数}\\
1 & f(x+1)=xf(x)\\
2 & f(1)=1\\
3 & \log f\text{是凸的}\\
\to & f=\Gamma
\end{array}
$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\Gamma\text{满足这三个条件, 需要证明}\Gamma\text{是上述三条件决定的唯一函数}\\
\text{根据1, 只需要做到}x\in(0,1),\ f=\Gamma\text{即可}\\
\varphi=\log f\to\varphi(x+1)=\varphi(x)+\log x.\ x\in(0,\infty)\\
\varphi(1)=\log(f(1))=\log(1)=0\\
\varphi\text{是凸的}.\ x\in(0,1),n\in N^+.\\
\varphi(n+1)=\log(n!)\\
\varphi\text{在}[n,n+1],[n+1,n+1+x],[n+1,n+2]\text{上的差商}\\
\varphi\text{凸}\to\log n\leqslant\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\leqslant\log(n+1)\\
\to\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\log(x(x+1)\cdots(x+n))\\
\to 0\leqslant\varphi(x)-\log\Big(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\Big)\leqslant x\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\\
\lim_{n\to\infty}\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)=0\\
\to\varphi(x)=\log\Big(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\Big)
\end{gathered}
$$

Remark: 此证明得到Γ函数的另一个表达式

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

□

定理 6.4. Beta*函数*

$$x>0,y>0$$
$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

证明.

$$B(1,y)=\tfrac{1}{y}.$$
$$\text{Holder不等式}\to\forall y,B(x,y)\text{是}x\text{的凸函数}$$
$$B(x+1,y)=\tfrac{x}{x+y}B(x,y)$$
$$B(x+1,y)=\textstyle\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x(1-t)^{x+y-1}\mathrm{d}t$$
$$B(x,y)\text{的三个性质}\to\forall y,f(x)=\tfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x,y)$$
$$\to f(x)=\Gamma(x)$$

□

定理 6.5. *一些推论*

$$t=\sin^2\theta\text{作变换}$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
$$x=y=\frac{1}{2}\to\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$t=s^2\text{作变换}$$
$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s\ (x\in(0,\infty))$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\to\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\mathrm{d}s=\sqrt{\pi}$$
$$\to\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

定理 6.6. *Stirling公式*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}}=1$$

证明.

$$t=x(1+u)$$
$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\textstyle\int_{-1}^\infty((1+u)e^{-u})^x\mathrm{d}u$$
$$\text{确定函数}h(u),h(0)=1,-1<u<\infty,u\neq0$$
$$(1+u)e^{-u}=\exp\left(-\tfrac{u^2}{2}h(u)\right)$$
$$\to h(u)=\tfrac{2}{u^2}(u-\log(1+u))$$
$$\to h\text{连续},h\text{单调减，}\ h(-1)=\infty,h(\infty)=0$$
$$u=s\sqrt{\tfrac{2}{x}}$$
$$\Gamma(x+1)=x^xe^{-x}\sqrt{2x}\textstyle\int_{-\infty}^\infty\psi_x(s)\mathrm{d}s$$
$$\psi_x(x)=\begin{cases}\exp\left(-s^2h\left(s\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right) & -\sqrt{\frac{x}{2}}<s<\infty\\ 0 & s\leqslant-\sqrt{\frac{x}{2}}\end{cases}$$

函数$\psi_x(s)$*具有以下性质*

1 $\forall s \in R, \lim_{x\to\infty}\psi_x(s) = e^{-s^2}$
2 $\forall A < \infty$, 在$[-A, A]$上$\psi_x(s)$是一致收敛的
3 $s < 0 \to 0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$
4 $s > 0, x > 1 \to 0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$
5 $\int_0^\infty \psi_1(s)\mathrm{d}s < \infty$

Lebesgue控制收敛定理 $\to x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^\infty \psi_x(s)\mathrm{d}s$关于$s$收敛

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \psi_x(s)\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$$

$\square$

$$\to \lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}} = 1 \qquad ???$$

习题