第二章 基础拓扑

1 有限集、可数集、不可数集

定义 1.1. *函数:集合A,B。对应关系f使得$\forall x\in A$,都有唯一的$y\in B$与x对应。称对应关系f为映射。A为f的定义域,$\{f(x): x\in A\}\subset B$称f的值域。*

定义 1.2. *单射、满射、1-1映射*

$$\begin{array}{rl}
\text{映射定义} \to f(A)\subset B & \\
\text{若} f(A)=B & \text{满射}\\
\text{若只有唯一的} x \text{与} f(x) \text{对应, 记为} f^{-1}(y)=x & \\
E\subset B. f^{-1}(E)=\{x\in A: f(x)\in E\} & \\
\forall y\in B, f^{-1}(y)=x & 1-1\\
\forall x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2) & 1-1\\
\forall f(x_1)\neq f(x_2)\to x_1\neq x_2 & \text{单射}
\end{array}$$

定义 1.3. *等价关系*

两个集合A,B.笛卡尔集$A\times B$的子集$\sim$满足:

1. $A\sim A$

2. $A\sim B\to B\sim A$

3. $A\sim B\wedge B\sim C\to A\sim C$

称为等价关系

定理 1.4. *A,B上存在1-1映射是A,B的等价关系*

$$\begin{array}{cc}
\text{关系}: A\times B=\{(x, f(x)): x\in A, f(x)\in B\} & \\
f(x)=x\in f: A\to A.\forall x_1\neq x_2. f(x_1)\neq f(x_2) & \\
\to f: 1-1 & \\
(x, f(x))\in\sim & A\sim A
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\forall x\in A\times B\to & \\
f(x)=y, f^{-1}: (y)=x & \\
\forall y_1\neq y_2\to x_1\neq x_2\to f^{-1}(f(x_1))\neq f^{-1}(f(x_2)) & \\
\to f^{-1}\in 1-1 & \\
\to (f(x), f^{-1}(f(x)))\in\sim & A\sim B\to B\sim A
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
f(x)=y, g(y)=z & \\
x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)\to y_1\neq y_2 & \\
\to g(y_1)\neq g(y_2) & \\
\to g\circ f\in 1-1 & \\
g f(x)=g(f(x))=g(y)=z & \\
\to (x, g\circ f(x))\in\sim & A\sim B\wedge B\sim C\to A\sim C
\end{array}$$

定义 1.5. *集合的基数:*

任意集合A

1. A是有限的：$\exists n\in N^+, A\sim\{i, i<n\}$.特殊的$\varnothing\sim\varnothing$
2. A是无限的: A不是有限的
3. A是可数的：$A\sim N^+$
4. A是不可数的：A不是有限的$\wedge A$不是可数的
5. A至多可数的：A是有限的$\vee$A是可数的

Remark: 有限集A的真子集S不存在f:A->S的1-1映射；但是无限集可以。

定理 1.6. A是无限的$\Leftrightarrow A$与它的一个真子集等价

证明. 略 □

定义 1.7. *序列：定义域为正整数函数。习惯上$x(n)$: x_n*

若函数x的值域 $\{x(n)\}\subset A$.称 $\{x(n)\}$ 为A上的序列。

定理 1.8. *可数集的无限子集也可数*

$$\operatorname{card} A=\omega\rightarrow\forall S\subset A\wedge\exists n\in N^+, \operatorname{card} S>n\rightarrow\operatorname{card} S=\omega$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card} A=\omega\rightarrow A\text{的元素可以构成一个序列}\{a_n\}\\
&\exists E\subset A\rightarrow\forall e\in E, e\in a\rightarrow e=a_i\\
&x N-N: x(e)=x(a_i)=i\\
&E\text{中的元素有}\forall e\in E, e=a_{x(e)}\\
&\text{集合元素的唯一性}\rightarrow\forall e_1\neq e_2\rightarrow a_{i1}\neq a_{i2}\\
&\rightarrow i1\neq i2\\
&\rightarrow x\in 1{-}1\\
&\rightarrow E\sim A
\end{aligned}$$

□

Remark: 可数集是最小的无限集

定义 1.9. *集族. 集合A,Ω. $f: A\rightarrow\{E: E\subset\Omega\}$, $f(a)=E$.或称E_a称 $\{E_a\}$ 为集族。*

定义 1.10. *在无限多的集合上扩展运算：并，交。*

$$\begin{aligned}
A=\{E_a\}.E_a\text{的并}S &: \forall x\in S,\exists E_a\in A\rightarrow x\in E_a\\
S &= \bigcup_{a\in A} E_a\\
\text{有限并：}S &= \bigcup_{n=1}^{m} E_n=E_1\cup\ldots\cup E_n\\
\text{可数并：}S &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=E_1\cup\cdots\cup E_n\cup\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_a\text{的交}S &: \forall x\in S,\forall E_a\rightarrow x\in E_a\\
S &= \bigcap_{a\in A} E_a\\
\text{有限交}S &= \bigcap_{n=1}^{m} E_n=E_1\cap\cdots\cap E_n\\
\text{可数交}S &= \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=E_1\cap\cdots\cap E_n\cap\cdots
\end{aligned}$$

定理 1.11. *集合运算的性质*

$$\begin{array}{rr}
A\cap B=B\cap A & A\cup B=B\cup A\\
(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) & (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\
A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\
A\cap B\subset A & A\subset A\cup B\\
A\cap\varnothing=\varnothing & A\cup\varnothing=A
\end{array}$$

定理 1.12. *可数集的可数并可数。*$\omega\times\omega=\omega$

证明. *Cantor对角线法则. 构造:*

let: $\{a_{1,i}\}=x_1,\{a_2,i\}=x_2,\ldots$

$$\begin{array}{lll}
a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots\\
a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\text{排列}S\text{：}a_{1,1},a_{1,2},a_{2,1},a_{1,3},a_{2,2},a_{3,1},\ldots\\
\{a_{j,n}\colon n\in N^+\}\text{中的元素互不相同}\\
T=\{a_{1,1},a_{1,2},a_{2,1},\ldots\}\rightarrow\exists f\colon Z\rightarrow T\wedge f\in 1-1\\
x_1\in T\rightarrow T\text{中至少有无限个元素}\rightarrow\operatorname{card}T=\omega
\end{array}$$

□

定理 1.13. *可数集上的*$n\in N^+$*维向量元素构成的集合是可数的。*

证明. *1维向量空间*$(x)\rightarrow x$*可数*

$$\begin{array}{r}
n\rightarrow v=(x_1,\ldots,x_n)\\
\text{排列}S\colon x_{1,1},x_{2,1},\ldots x_{n,1},x_{2,1},\ldots\\
x\in S\rightarrow S\text{至少可数}\\
f\colon N\rightarrow S\wedge f\in 1-1\rightarrow S\text{至多可数}\\
\rightarrow\operatorname{card}S=\omega
\end{array}$$

□

推论 1.14. Q*可数*

定理 1.15. *存在不可数集*

证明. *Cantor对角线手法:*

$$\begin{array}{r}
A=\{x\colon x=\{x_i\colon i\in\{0,1\}\}\}\text{不可数}\\
\forall E\subset A\wedge\operatorname{card}E=\omega\rightarrow\exists E\text{的排列}\colon\{e_1,e_2,\ldots\}\\
\text{序列}s\colon\{\{s_i\}\colon s_i\neq e_i,i\in\{0,1\}\}.s\in A\\
\rightarrow s\notin E\\
\rightarrow E\subseteq A\\
\text{若}\operatorname{card}A=\omega\wedge A\subset A\rightarrow A\subseteq A\text{矛盾}\\
\rightarrow A\text{不可数}
\end{array}$$

□

Remark: R*不可数*

2 度量空间

定义 2.1. *度量。集合*X*，函数*$f\colon X\times X\rightarrow R$*满足*

1. $x\neq y\rightarrow f(x,y)>0;f(x,x)=0$

2. $f(x,y)=f(y,x)$

3. $\forall x,y,z\in X\rightarrow f(x,z)\leqslant f(x,y)+f(y,z)$

称f为X上的度量。

定义 2.2. *度量空间。集合X和X上的度量函数构成度量空间*

Remark: 度量空间集合的子集Y连通X上的度量函数也构成度量空间

定义 2.3. *度量拓扑。$\mathcal{T}$*

开区间： $a,b\in R,a<b{:}\,a<x<b{:}\,(a,b).(a,b)\in\mathcal{T}$

闭区间： $a,b\in R,a<b{:}\,a\leqslant x\leqslant b{:}\,[a,b]$

例 2.4. 一些拓扑的例子与定义

半开区间	$a\leqslant x<b{:}\,[a,b)$	$a<x\leqslant b{:}\,(a,b]$	不开不闭
$k-$方格	$a_i\leqslant x_i\leqslant b_i{:}\,\{x{:}\,x=(x_1,\ldots,x_n),a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$		闭
开球	$x\in R^k,r>0.\,\{y\in R^k{:}\,\lvert y-x\rvert<r\}$		开
闭球	$x\in R^k,r>0.\,\{y\in R^k{:}\,\lvert y-x\rvert\leqslant r\}$		闭
凸集	$E\in R^k.\forall x,y\in E,0<\lambda<1\rightarrow\lambda x+(1-\lambda)y\in E$		

定义 2.5. *度量空间中一些子集*

X是度量空间

1.	$x\in X.U_x(r)=\{y\in X{:}\,d(x,y)<r,r>0\}$	x的邻域
2.	$\forall U_x,\exists y\in U_x\wedge y\in E\wedge y\neq x$	x是E的极限点
3.	$x\in E\wedge x$不是E的极限点	x是E的孤立点
4.	$\forall$极限点$x_E\in E$	E是闭的
5.	$\exists U_x\subset E$	x是E的内点
6.	$\forall x\in E,x$是E的内点	E是开的
7.	$E^c=\{x{:}\,x\notin E\wedge x\in X\}$	E的余集(补集)
8.	E是闭的$\wedge\forall x\in E,x$是E的极限点	E是完全的
9.	$\exists M\in R,\exists y\in X\rightarrow\forall x\in E,d(x,y)<M$	E是有界的
0.	$\forall x\in X\rightarrow x\in E\vee x$是$E$的极限点	E在X中稠密

定理 2.6. *邻域是开集*

证明.

$$\begin{aligned}
&E=U_x(r)\\
&\rightarrow\forall y\in E,d(x,y)<r\\
&\rightarrow d(y,x)=r-h\\
\forall z\in U_y(h),\,&d(z,x)+d(z,y)\leqslant d(x,y)=r\\
&\rightarrow U_y(r)\subset U_x(r)\\
&\rightarrow y\text{是}E\text{的内点}\\
&\rightarrow E\text{是开集}
\end{aligned}$$

□

定理 2.7. *极限点的邻域内有无穷多E的点*

$$x\text{是}E\text{的极限点，}\ \forall r>0,\operatorname{card}(U_x(r)\cap E)-\{x\}=\infty$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\text{假设}\mathrm{card}(U_x(r)\cap E)<\infty\\
&\to y\in U_x(r)\cap E-\{x\},\min(d(x,y))=d_0>0\quad\text{度量定义}\\
&\to U_x(d_0)\cap E=\varnothing\\
&\text{与极限点定义}\{U_x(d_0)\cap E\}-\{x\}\neq\varnothing\text{矛盾}\\
&\to \mathrm{card}(U_x(r)\cap E)=\infty
\end{aligned}
$$

Remark: 有限集没有极限点 □

例 2.8. 一些R^2的拓扑

	闭	开	完全	有界	
$\{x\in R^2: \lvert x\rvert<1\}$	0	1	0	1	
$\{x\in R^2: \lvert x\rvert\leqslant 1\}$	1	0	1	1	
$E,\mathrm{card}\,E<\infty$	1	0	0	1	
Z	1	0	0	0	
$\left\{\frac{1}{n}: n\in N^+\right\}$	0	0	0	1	$0\notin\frac{1}{n}$, 但0是极限点
R^2	1	1	1	0	
(a,b)	0	0	0	1	(a,b)在R^1中开，在R^2中不开不闭

定理 2.9.

$$\left(\bigcup_{a\in A}E_a\right)^c=\bigcap_{a\in A}(E_a^c)$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&L=(\textstyle\bigcup_{a\in A}E_a)^c, R=\bigcap_{a\in A}(E_a^c)\\
&\forall x\in L: \forall a\in A, x\notin E_a\\
&\to\forall a\in A, x\in E_a^c\\
&\to x\in\textstyle\bigcap E_a^c\\
&\to L\subset R\\
&\forall x\in R: \forall a\in A, x\notin E_a\\
&\to x\notin\textstyle\bigcup E_a\\
&\to x\in(\textstyle\bigcup E_a)^c\\
&\to R\subset L
\end{aligned}
$$

□

定理 2.10. *验证拓扑定义的合理性*

$$E\text{是开集}\Leftrightarrow E^c\text{是闭集}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&E^c\text{闭}\to\forall x\in E\to x\notin E^c\\
&\to x\text{不是}E^c\text{的极限点}\\
&\to\exists U_x(r)\cap E^c=\varnothing\\
&\to U_x(r)\subset E\\
&\to x\text{是}E\text{的内点}\\
&\to E\text{是开集}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\text{开}\to\forall x\text{是}E^c\text{的极限点},\forall U_x(r)\in E^c\\
&\to\forall U_x(r)\cap E^c\neq\varnothing\\
&\to\forall U_x(r)\not\subset E\\
&\to x\text{不是}E\text{的内点}\\
&\to x\in E^c\\
&\to E^c\text{是闭集}
\end{aligned}
$$

Remark: A是开集$\Leftrightarrow A^c$是闭集 □

定理 2.11. *验证拓扑定义的合理性*

1. 开集的任意并是开集 $\forall A, \{x_i\colon x_i \in \mathcal{T}, i \in A\} \to \bigcup_{i\in A} x_i \in \mathcal{T}$
2. 闭集的任意交是闭集 $\forall A, \{x_i, x_i \in \mathcal{T}^c, i \in A\} \to \bigcap_{i\in A} x_i \in \mathcal{T}^c$
3. 开集的有限交是开集 $\forall x_i \in \mathcal{T}, \bigcap_{i=1}^n x_i \in \mathcal{T}$
4. 闭集的有限并是闭集 $\forall x_i \in \mathcal{T}^c, \bigcup_{i=1}^n x_i \in \mathcal{T}^c$

证明. G表示开集，F表示闭集

1.
$$\begin{gathered} G = \bigcup_a G_a \\ \forall x \in G \to \exists a \in A, x \in G_a \\ \to \exists U_x(r) \in G_a \subset G \wedge U_x(r) \subset G_a \subset G \\ \to x\text{是}G\text{的内点} \\ \to G\text{是开集} \end{gathered}$$

2.
$$\begin{array}{cc} (\bigcap_a F_a)^c = \bigcup_a (F_a^c) & 2.9 \\ F_a\text{闭} \to F_a^c\text{开} & \\ \to \bigcup_a (F_a^c)\text{开} & 1 \\ \to \bigcap_a F_a\text{闭} & 2.10 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{cc} H = \bigcap_{i=1}^n G_i & \\ \forall x \in H \to \forall i \in \{1 \ldots n\}, x \in G_i & \\ \to \forall i, \exists U_x(r_i) \in G_i & \text{内点定义} \\ \text{let}\colon r = \min(r_1, \ldots, r_n) & \\ U_x(r) \to \forall i, U_x(r) \in G_i & \\ \to U_x(r) \subset H & \\ \to x\text{是内点} & \\ \to H\text{是开集} & \end{array}$$

$\square$

4.
$$\begin{array}{cc} (\bigcup_{i=1}^n F_i)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c) & \\ F_i^c\text{开} \to \bigcap_{i=1}^n (F_i^c)\text{开} & \\ \to \bigcup_{i=1}^n F_i\text{闭} & 2.10 \end{array}$$

例 2.12. 反例：开集的任意交不是开集、闭集的任意并不是闭集的

$$\begin{array}{cc} G = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in N^+\right\} & G \\ G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\text{是开集, 但}G = \{0\}\text{不是开集} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \forall r \in (-1, 1), F = \{x_r\colon x_r = r\} & F \\ \forall x \in F . x_r = \{r\}\text{是闭集，但}F = (-1, 1)\text{不是闭集} & \end{array}$$

定义 2.13. *闭包. X是度量空间，$E \subset X$, E'是E的所有极限点集合. $\bar{E} = E \cup E'$称为E的闭包*

定理 2.14. *闭包与拓扑的关系*

1. $\bar{E}$闭
2. $E=\bar{E} \Leftrightarrow E$闭
3. $\forall$闭$F \subset X \wedge E \subset F \rightarrow \bar{E} \subset F$

证明.

1. $\forall x \in E^c, x$不是E的点，也不是E的极限点
$$\begin{aligned}&\rightarrow \exists U_x(r), U_x(r) \cap E = \varnothing\\ &\rightarrow U_x(r) \subset E^c\\ &\rightarrow x\text{是}E^c\text{的内点}\\ &\rightarrow E^c\text{开}\\ &\rightarrow E\text{闭}\end{aligned}$$

2. $$E=\bar{E} \rightarrow E\text{闭} \qquad 1$$
$$E\text{闭} \rightarrow \forall x \in E', x \in E \rightarrow \bar{E} = E \cup E' = E$$ □

3. $$\begin{aligned}&F\text{闭} \rightarrow F' \subset F\\ &\forall x \in E' \colon \forall U_x^0(r) \cap E \neq \varnothing\\ &\rightarrow \forall U_x^0(r) \cap F \neq \varnothing\\ &\rightarrow x \in F'\\ &E \subset F \rightarrow E' \subset F'\\ &E \subset F \wedge E' \subset F'\\ &\rightarrow \bar{E} = E \cup E' \subset F \cup F' = F\end{aligned}$$

定理 2.15. *有上界的实数集E上确界在$\bar{E}$中*

$$\forall E \subset R, E \neq \varnothing, E\text{上有界} \rightarrow \sup E \in \bar{E}$$

证明.

$$\begin{aligned}y \in E \ &: \quad y \in E \cup E' = \bar{E}\\ y \notin E \ &: \quad \forall r > 0, \exists x \in E \rightarrow y - r < x < y\\ &\rightarrow \forall U_y(r) \cap E = \{x\} \cup \cdots \neq \varnothing\\ &\rightarrow y \in E'\\ &\rightarrow y \in E \cup E' = \bar{E}\end{aligned}$$ □

Remark: E闭 $\rightarrow \sup E \in E$

定义 2.16. *相对拓扑*

度量空间的子空间Y也是度量空间那么可以在X的子集Y上定义拓扑

$$E \subset Y \subset X. \forall x \in E, \exists r > 0, y \in Y \wedge d(x,y) < r \rightarrow y \in E$$

称E相对Y是开的

定理 2.17. *相对拓扑与拓扑的关系*

$$Y \subset X. E\text{相对}Y\text{是开的} \Leftrightarrow \exists\text{开集}G \rightarrow E = G \cap Y$$

证明.

$$\begin{aligned}
E\text{相对}Y\text{是开集：} &\forall x\in E,\exists r_x\to d(x,y)<r_x\wedge y\in Y\to y\in E\\
V_x &= \{y\in X: d(x,y)<r_x\}\\
&\to V_x\text{是开集} && \text{定义}\\
G &= \bigcup_{x\in E} V_x\to G\text{是开集}\\
\\
\forall x\in E\to d(x,x) &= 0<r_x\to x\in V_x\\
&\to E\subset G\cap Y && \forall x\in V_x, x\in Y\to x\in E\\
\\
\forall x\in E &\to V_x\cap Y\subset E && \{y\in Y: d(x,y)<r_x\}\\
&\to G\cap Y\subset E\\
&\to E=G\cap Y\\
\\
E=G\cap Y: &\forall x\in E,\exists U_x(r)\subset G && E\subset G\text{导致}U_x\text{在}G\text{中}\\
&\to U_x(r)\cap Y\subset E\\
&\to E\text{相对}Y\text{是开集} && \text{定义}
\end{aligned}$$

□

3 紧集

定义 3.1. *开覆盖。度量空间中，E是X的子集。E的开覆盖指X的一组开子集$\{G_a\}\to E\subset\bigcup_a G_a$*

定义 3.2. *紧。度量空间X的子集K叫做紧的，如果K的每个开覆盖都有有限子覆盖*

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

定理 3.3. *设$K\subset Y\subset X$, K关于X是紧的$\Leftrightarrow K$关于Y是紧的。*

证明.

$$\begin{aligned}
&K\text{关于}X\text{是紧的}\\
&\exists\{G_i\}\to K\subset\bigcup_i^n G_a\\
&G_a\cap Y\text{相对}Y\text{开}\\
&\to\bigcup_i^n(G_a\cap Y)\text{相对}Y\text{开}\\
&K\subset Y\to\forall x\in K, x\subset Y\\
&\to\exists i<N, x\in G_i\\
&\to x\in G_i\cap Y\\
&\to x\in\bigcup_{i=1}^n(G_i\cap Y)\\
&\to K\subset\bigcup_{i=1}^n(G_i\cap Y)\\
&\to\{G_i\cap Y\}\text{是}Y\text{中}E\text{的一组有限开覆盖}\\
\\
&K\text{关于}Y\text{是紧的}\\
&\to\exists\{G_i\subset Y\}\to K\subset\bigcup_i^n G_i\\
&G_i\text{相对}Y\text{开}\to\exists H_i\subset X\to H_i\cap Y=G_i\quad 2.17\\
&\to G_i\subset H_i\\
&\to K\subset\bigcup_{i=1}^n H_i
\end{aligned}$$

□

Remark: 紧集本身就是紧度量空间，不必考虑它在什么空间内。单独地开区间与闭区间的性质不够强。但紧度量空

间的性质具有足够强。

定理 3.4. *度量拓扑下的紧子集都是闭集*

证明.

$$\begin{gathered}K\text{是度量空间}X\text{的紧子集}.\\ \forall x\in K^c, y\in K.U_x(r_x),U_y(r_y)\text{是两个邻域},r_x,r_y<\frac{1}{2}d(x,y)\\ K\text{紧}\rightarrow\exists\{G_i\in X\},K\subset\bigcup_i G_i\\ \rightarrow\text{在}K\text{中存在有限多个点}y_i\rightarrow K\subset\bigcup_i U_{yi}(r_{yi})\\ \text{let}: r=\min(r_{yi})\\ U_x(r)\cap K=\varnothing\\ \rightarrow U_x(r)\subset K^c\\ \rightarrow x\text{是}K^c\text{的内点}\rightarrow K^c\text{是开集}\\ \rightarrow K\text{是闭集}\end{gathered}$$

□

定理 3.5. *度量拓扑下紧集的闭子集都是紧集*

证明.

$$\begin{gathered}K\text{是紧集，}E\subset K\text{。且}E\text{是闭集}\\ E\text{的开覆盖}\{G_{E\alpha}\}\cup\{G_{K\beta}\}\text{是}K\text{的开覆盖}\\ K\text{紧}\rightarrow\exists\{G_{Si}\}\subset\{G_{E\alpha}\}\cup\{G_{K\beta}\}\wedge K\subset\bigcup_i G_{Si}\qquad\text{应该需要在这里用闭集的性质}\\ \rightarrow E\subset K\subset\bigcup_i G_{Si}\\ \rightarrow E\text{紧}\qquad\text{但这里似乎没用到}E\text{是闭集}\\ \\ \text{但这么用闭集似乎是循环论证}\\ ???\qquad\text{度量拓扑性质太强了...有界闭集都是紧的}\end{gathered}$$

□

Remark: *度量拓扑：F是闭的，K是紧的$\rightarrow F\cap K$是紧的*

$$\begin{array}{rc}
K\text{是紧的}\rightarrow K\text{是闭的} & 3.4\\
\rightarrow F\cap K\text{是闭的} & \text{闭集的任意交是闭集}\\
F\cap K\subset K\rightarrow F\cap K\text{是紧的} & 3.5
\end{array}$$

定理 3.6. *度量拓扑：有限紧集的交不空$\rightarrow$这些紧集的任意交不空*

证明.

$$\begin{array}{c}
\text{取}\{K_a\}\text{的一个集}K_1, G_a=K_a^c\\
\text{设}\bigcap_a K_a=\varnothing\\
\rightarrow\forall x\in K_1,\forall a,x\notin K_a,(\text{任意交不空}\rightarrow\exists K_1)\\
\rightarrow\exists K_a^c\rightarrow x\in K_a^c\rightarrow x\in G_a\\
K_1\text{紧}\rightarrow\exists\{G_{ki}\colon i\in\{1\ldots n\}\},K_1\subset\bigcup_i G_{ki}\\
\rightarrow K_1\notin\bigcap_{i=1}^n G_{ki}^c=\bigcap_{i=1}^n K_i\\
\bigcap_{i\in\{1\}\cup\{ki\}}K_i=\varnothing\text{与假设矛盾}\\
\rightarrow\bigcap_a K_1\neq\varnothing
\end{array}$$

□

Remark: *设$\{K_n\}$是非空紧集的序列,$K_{n+1}\subset K_n$，那么$\bigcap_{i=1}^\infty K_n$是非空的*

定理 3.7. *度量拓扑中，紧集的无限子集的极限点都在紧集自身中*

$$E\text{是紧集}K\text{的无限子集，}E\text{在}K\text{中有极限点}$$

证明.

$$\begin{array}{c}
E\text{在}K\text{中没有极限点}\rightarrow\forall x\in E,\forall U_x(r),\rightarrow E\cap U_x(r)=\{x\}\vee\varnothing\\
E\text{是无限集}\rightarrow\bigcup_{x\in E}\{U_x(r)\}\text{是}E\text{的开覆盖}\\
\forall x_i,\bigcup_{i=1}^n U_x(r)=\{x_i\colon i=1\ldots n\}\subseteq E\\
\rightarrow E\text{不是紧的.矛盾}
\end{array}$$

□

例 3.8. 不使用这些集合的紧性证明.(论证这些集合是紧的合理性)

1. R^1中的闭区间序列$\{I_n\colon I_{n+1}\subset I_n\}$之交不是空集

$$\begin{array}{c}
I_n=[a_n,b_n],a_n\leqslant a_{n+1},b_n\geqslant b_{n+1}\\
E=\{a_n\},\forall a_n,a_n\leqslant b_n\leqslant b_1\\
\rightarrow E\text{有界。let}\colon x=\sup E\\
\text{由定义},a_n\leqslant x,\text{满足左部分。}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\text{Assume}\colon\exists b_n<x,b_n\geqslant a_n\rightarrow x>b_n\geqslant a_n & \\
\rightarrow x\neq\sup E & \\
\rightarrow b_n\geqslant x & \\
\rightarrow a_n\leqslant x\leqslant b_n\rightarrow x\in\bigcap_i^\infty I_n & \text{这里论证的是}\forall n,x\in I_n
\end{array}$$

2. R^k中的k-方格序列$\{I_n\colon I_{n+1}\subset I_n\}$之交不是空集

根据1. let: $E_i=\{a_{i,j}\colon j\in N^+\}$

$$x_i=\sup E_i$$
$$\rightarrow a_{i,j}\leqslant x_i\leqslant b_{i,j}$$
$$\rightarrow (x_i)\in\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$$

3. 度量拓扑中，k-方格是紧集

$$I\text{是}k-\text{方格}\{(x_1,\ldots,x_n)\colon a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$$
$$R^k\text{上}x,y\text{的度量}d=\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)}$$
$$\rightarrow x\in I,y\in I\rightarrow d(x,y)\leqslant d(a,b)$$
$$\text{设}I\text{不是紧集}\rightarrow\exists\{G_a\},I\subset\bigcup_a G_a\wedge I\subset\bigcup_{ai} G_{ai}$$
$$\text{令}c_i=\tfrac{a_i+b_i}{2},\text{闭区间的笛卡尔积集}\textstyle\prod_i^k[a_i,c_i],\prod_i^k[c_i,b_i]\text{分割出}2^k\text{个}k\text{方格}Q_i$$
$$\exists Q_i\subset\{Q_i\},Q_i\text{不能被有限覆盖.let }Q_1=Q_i$$
$$\text{重复以上操作得到一组序列}\{I_n\},\text{满足:}$$

$$I\supset I_1\supset I_2\supset\cdots$$
$$I_n\text{不能被}\{G_a\}\text{有限子覆盖}$$
$$\forall x,y\in I_n,d(x,y)\leqslant 2^{-n}d(a,b)$$

$$\exists x\in I_n\rightarrow x\in G_a\rightarrow\exists r>0,d(x,y)<r\rightarrow y\in G_a \qquad 2.$$
$$\text{但}\forall r,\exists n\in N^+\rightarrow 2^{-n}d(a,b)<r \qquad \text{阿基米德}$$
$$\rightarrow I_n\subset G_a\text{ 与非紧性矛盾}$$
$$\rightarrow I\text{是紧的}$$

定理 3.9. *R^k中度量拓扑的三性质等价*

$$R^k\text{中的子集}E\text{的三个性质等价}$$

1. E是闭的且有界
2. E是紧的
3. E的每个无限子集在E内有极限点

$$1\rightarrow 2$$
$$E\text{有界且闭}\rightarrow\exists k\text{方格}I,E\subset I$$
$$I\text{是紧的},E\text{是闭的}\wedge E\subset I\rightarrow E\text{是紧的} \qquad 3.5$$

$$2\rightarrow 3 \qquad 3.7$$

$$3\rightarrow 1$$
$$\text{Assume }E\text{无界}\rightarrow\forall n\in N^+,\exists x_n\in E,d(x_n,0)>n$$
$$\text{而这种}\{x_n\}\text{在}R^k\text{中没有极限点}$$
$$\rightarrow\{x_n\}\text{在}E\text{中没有极限点.矛盾}$$
$$\rightarrow E\text{有界}$$

$$\text{Assume }E\text{不闭}\rightarrow\exists x\notin E,x\text{是}E\text{的极限点}$$
$$\rightarrow\forall U_x^0(r)\cap E\neq\varnothing$$
$$\text{取}|x_i-x|<1/n$$
$$\rightarrow\{x_i\}\text{是无限集，且极限点为}x \qquad R^k\text{中保证无限}$$
$$\rightarrow x\in E.\text{矛盾}$$
$$\rightarrow E\text{闭}$$

Remark: $1\Leftrightarrow 2$*是Heine-Borel定理*

Remark: 在任意度量空间中 $2 \Leftrightarrow 3$ 但 $1 \to 2, 1 \to 3$ 不一定成立.如无限维度量空间$\mathcal{L}^2$中有这样的例子。

定理 3.10. *致密性定理（Weierstrass）*R^k的无限有界子集在R^k中有极限点

证明.

$$\begin{aligned}
&E\text{是}R^k\text{的有界无限子集} \to \exists I \to E \subset I \subset R^k \\
&\quad I\text{是紧的} \to E\text{在}I\text{中有极限点} \\
&\quad\quad \to E\text{在}R^k\text{中有极限点} \qquad 3.7
\end{aligned}$$

□

4 完全集

E是闭集$\wedge \forall x \in E, x$是$E$的极限点

定理 4.1. R^k*中的非空完全集不可数*

证明.

$$\begin{gathered}
A\text{是}R^k\text{中的非空完全集} \\
\to A \neq \varnothing \\
\forall x \in A, x \in A' \to \exists\{x_i\} \subset A \\
\to \text{card } A = \infty \\
\text{Assume: card } A = \omega \\
A \to \{x_1, x_2, \dots\}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
U_{x1}(r_1) \qquad \text{数学归纳法} \\
\text{Assume: } U_{xn}(r_n) \cap A \neq \varnothing \\
\forall x \in A, x \in A' \to \exists U_{x,n+1}(r_{n+1}) \\
\to \overline{U_{x,n+1}}(r_{n+1}) \subset U_{x,n} \\
x_n \notin \overline{U_{x,n+1}(r_{n+1})} \\
U_{x,n+1} \cap A \neq \varnothing \\
\to U_{x,n} \xrightarrow{\text{generate}} U_{x,n+1}\text{是可以执行下去的}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{Let: } K_n = \overline{U_n} \cap A \\
\overline{U_n}\text{是有界闭集} \to \overline{U_n}\text{是紧集} \\
x_n \notin K_{n+1} \to \forall y \in A, y \notin \bigcap_1^\infty K_n \\
K_n \subset P \to \bigcap_1^\infty K_n = \varnothing.\text{矛盾} \\
\to \text{card } A \neq \omega
\end{gathered}$$

□

Remark: 闭区间$[a,b] (a<b)$是不可数的.特殊的，实数R是不可数的。

定义 4.2. R*中有不含开区间的完全集. Cantor集*

$E_0 = [0,1]$
$E_{0+1} = [0,1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$
$E_{1+1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$
$E_{i+1} = \bigcup [a,b] - \left(\frac{b-a}{3}, \frac{2(b-a)}{3}\right)$

得到集合序列

E_n具有性质

$$E_{n+1} \subset E_n$$
$$E_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [a,b], b-a = 3^{-n}$$

Cantor集定义
$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_n$$
$$\to P \neq \varnothing$$
$$\to P\text{是紧集}$$

3.6紧集有限交不空 $\to$ 任意交不空
每个区间都是闭集，闭集任意交是闭集
有界 $\wedge$ 闭 $\to$ 紧

$$\text{设}(a,b) \subset P, \to (a,b) \subset \left[\frac{3n+1}{3^n}, \frac{3n+2}{3^n}\right]$$
$$\to \text{但这样的闭区间不存在}$$
$$\to (a,b) \not\subset P$$

$$\forall x \in P, \forall U_x(r).\text{Let}: I_n = [a,b], x \in [a,b]$$
$$\exists n \in N^+ \to I_n \in U_x(r)$$
$$x_n\text{是上述一系列}I_n\text{的另一个端点}b$$
$$\to x_n \in P, x\text{是}x_n\text{的极限点}$$
$$\to P\text{是完备的}$$

5 连通集

定义 5.1. *集合A,B的分离。*$A \cap \bar{B} = \varnothing \wedge \bar{A} \cap B = \varnothing$

定义 5.2. *连通集。*$E \subset X, \forall A \cup B = E, A$与$B$不是分离的

Remark: A, B是分离的 $\to A \cap B = \varnothing. A, B$是连通的 $\nrightarrow A \cap B \neq \varnothing.[0,1],(1,2)$

定理 5.3. R的连通子集

$$E\text{是连通的} \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \forall z, x < z < y \to z \in E$$

证明.

$$\forall z, x < z < y \to z \in E \to E\text{是连通的}$$
$$\text{Assume}: x \in E, y \in E, \exists z \in (x,y) \wedge z \in E$$
$$\to A_z = E \cap (-\infty, z), B_z = E \cap (z, +\infty)$$
$$x \in A_z, y \in B_z \wedge A_z, B_z\text{是分离的}$$
$$\to E\text{不是连通的}$$

□

$$E\text{连通} \to \forall z, x < z < y \to z \in E$$
$$\text{设}\exists z \notin E \to E = ((-\infty, z) \cup (z, -\infty)) \cap E$$
$$E = ((-\infty, z) \cap E) \cup ((z, +\infty) \cap E)$$
$$\text{但}(-\infty, z) \cap E\text{与}(z, +\infty) \cap E\text{分离}.\text{矛盾}$$
$$\to z \in E$$

习题

1. Proof: $\forall A$. Proof: $\varnothing \subset A$

   $\varnothing = \{\forall x \rightarrow x \notin \varnothing\}$
   $\forall x \in \varnothing \rightarrow x \in A \quad \forall x \in \varnothing$, 本身是0，所以命题整体是真值是1
   ???

2. Proof: $\exists a_0, \ldots a_n, z$满足$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$. z称为代数数.Proof: 所有代数数是可数的.

   $\ldots$

3. Proof: 存在不是代数数的实数

   设不存在，$f: P \rightarrow R$. f是$1-1$的。$\operatorname{card} P = \omega \neq \operatorname{card} R > \omega$矛盾。

4. Proof: 所有无理实数不可数

   设L可数：$R = Q \cup L$. $\operatorname{card} R = \operatorname{card} Q + \operatorname{card} L = \omega + \omega = \omega$矛盾

5. Example: E是一个实数集，有三个极限点

   $\left\{\frac{1}{n}: n \in N^+\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} - 1: n \in N^+\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} - 2: n \in N^+\right\}$

6. E'是E的极限点的集.

   Proof: E'是闭集.

   $\forall x \in E', \forall U_x^0(r), U_x^0(r) \cap E \neq \varnothing$
   $\forall y \in (E')^c: \exists U_y(r) \cap E' = \varnothing$

   Proof: $E' = \overline{(E)}'$

7. Proof: $A_1, A_2, \ldots$是某度量空间的子集

   a. $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Proof: $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$

   b. $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Proof: $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^\infty \overline{A_i}$

8. Proof or Disproof: 开集$E \subset R^2$的每个点一定是E的极限点. 闭集$F \subset R^2$的每个点一定是F的极限点

   $\forall x \in E, \exists U_x(r) \subset E$
   $\rightarrow U_x \cap E = U_x$
   U_x中有无穷多个点$\rightarrow x$是E的极限点

   $\{(0,0)\} \in F \subset R^2$.但$F$没有极限点

9. E°表示E的所有内点组成的集合。称为E的内部

a. Proof: E°开

$$
\begin{gathered}
E^\circ = \varnothing \to E^\circ\text{开} \\
E^\circ \neq \varnothing . \forall x \in E^\circ, \exists U_x(r) \subset E^\circ \\
\to U_x(r/2) \subset U_x(r) \subset E^\circ \\
\to x\text{是}E^\circ\text{的内点} \\
\to E^\circ\text{开}
\end{gathered}
$$

b. Proof: E开$\Leftrightarrow E = E^\circ$

$$
\begin{gathered}
E\text{开} \to E = E^\circ \\
E\text{开}: \forall x \in E, \exists U_x \subset E \\
\to x\text{是}E\text{的内点} \\
\to x \in E^\circ
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
E = E^\circ \to E\text{开} \\
E^\circ: \forall x \in E^\circ, \exists U_x \subset E^\circ \\
\to U_x \subset E \\
\to E\text{是开的}
\end{gathered}
$$

c. $G \subset E \wedge G$开$\to G \subset E^\circ$

$$
\begin{gathered}
G\text{开}: \forall g \in G, \exists U_g \subset G \\
U_g \subset E \\
U_g\text{开} \to \forall u \in U_g, \exists U_u \subset U_g \\
\to U_u \subset E \\
\to u\text{是}E\text{的内点} \\
\to u \subset E^\circ \qquad G\text{的点的邻域中的点都在}E\text{的内部} \\
\to U_g \subset E^\circ \qquad \text{邻域都在}E\text{的内部} \\
\to g \in E^\circ \qquad G\text{的点}g\text{在}E\text{的内部} \\
\to G \subset E^\circ
\end{gathered}
$$

d. $(E^\circ)^c = \overline{(E^c)}$

$$
\begin{gathered}
\overline{(E^c)} \subset (E^\circ)^c: \\
\overline{(E^c)} = E^c \cup (E^c)' \qquad x \in E^c \\
E^\circ \subset E \to (E^\circ)^c \supset E^c \\
\to x \in E^c \to x \in (E^\circ)^c \\
\forall x \in (E^c)': \forall U_x^0 \cap E^c \neq \varnothing \qquad x \in (E^c)' \\
\to U_x^0 \cap (E^\circ)^c \neq \varnothing \\
\to x\text{是}(E^\circ)^c\text{的极限点} \\
E^\circ\text{开} \to (E^\circ)^c\text{闭} \to ((E^\circ)^c)' \subset (E^\circ)^c \\
\to x \in (E^\circ)^c \\
\to \overline{(E^c)} \subset (E^\circ)^c
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(E^\circ)^c \subset \overline{(E^c)}: \\
\forall x \in (E^\circ): \exists U_x^0 \subset E \\
\forall x \in (E^\circ)^c: \forall U_x^0 \cap E^c \neq \varnothing \\
\to x \in (E^c)' \\
x \in \overline{(E^c)} \\
\to (E^\circ)^c \subset \overline{(E^c)}
\end{gathered}
$$

$$
\to (E^\circ)^c = \overline{(E^c)}
$$

e. Proof or Disproof: $E^\circ = (\bar{E})^\circ$

$$
\begin{gathered}
E^\circ \subset (\bar{E})^\circ: \\
E \subset \bar{E} \rightarrow E^\circ \subset (\bar{E})^\circ \\
(\bar{E})^\circ \subset E^\circ: \\
\forall x \in (\bar{E})^\circ: \exists U_x \subset \bar{E} \\
\rightarrow U_x \cap \bar{E} \neq \varnothing \\
\rightarrow x \in (\bar{E})'
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\Leftrightarrow (E^\circ)^c \subset ((\bar{E})^\circ)^c \\
\overline{E^c} \subset \overline{((\bar{E})^c)} \\
E^c \cup (E^c)' \\
(\bar{E})^c \cup ((\bar{E})^c)' \\
\forall x \in E^c, x \in
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{E} = ((E^c)^\circ)^c \\
(\bar{E})^\circ = (((E^c)^\circ)^c)^\circ \\
(((E^c)^\circ)^c)^\circ \\
\forall x \in (\bar{E})^\circ, \exists U_x \subset \bar{E} \\
U_x \subset ((E^c)^\circ)^c \\
U_x \cap (E^c)^\circ = \varnothing \\
\rightarrow x \notin ((E^c)^\circ)' \\
x \in U_x \rightarrow x \in (E^c)^\circ \\
???
\end{gathered}
$$

f. Proof or Disproof: $\bar{E} = \overline{(E^\circ)}$

$$
\begin{gathered}
\overline{E^\circ} \subset \bar{E}: \\
E^\circ \subset E \rightarrow \overline{E^\circ} \subset \bar{E}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{E} \not\subset \overline{E^\circ} \\
\forall x \in \bar{E}, x \in E \vee x \in E' \\
x \in E: x \in E^\circ: x \in \overline{E^\circ} \\
x \notin E^\circ: \text{无法推断出} x \in \overline{E^\circ}
\end{gathered}
$$

10. X是无穷集。$\forall x, y \in X, d(x, y) = 1, (x \neq y); 0(x = y)$

a. Proof: d是一个度量

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{l}{d(x,x) = 0; d(x,y) = 1 > 0} \\
d(x,y) = d(y,x) & \\
x = y = z & d(x,y) + d(y,z) = d(x,z) \\
& 0 + 0 = 0 \\
x \neq y = z \neq x & d(x,y) + d(y,z) = d(x,z) \\
& 1 + 0 = 1 \\
x \neq y = z = x & d(x,y) + d(y,z) > d(x,z) \\
& 1 + 0 > 0 \\
x = y \neq z & d(x,y) + d(y,z) = d(x,z) \\
& 0 + 1 = 1 \\
x \neq y \neq z \neq x & d(x,y) + d(y,z) > d(x,z) \\
& 1 + 1 > 1 \\
\multicolumn{2}{l}{\rightarrow d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)}
\end{array}
$$

b. 给出此度量诱导的拓扑

开集 $\{(a,b): d(a,b)<r\}: r\leqslant 1\rightarrow\{a\}$即所有单点集为开集.$r>1$: 全集为开集

由开集公理：任意集为开集

闭集 任意集

c. 给出紧集

集合X总有有限子覆盖，最小的开集为单点集。

$\{G_x: \operatorname{card} G_i=1\}$为一个集合的开覆盖。有限子覆盖即为有限集

有限集

11. $x,y\in R^1$，验证是否为度量

a. $d(x,y)=(x-y)^2$

$$\forall x=y \quad x-y=0\rightarrow d(x,y)=0$$
$$\forall x\neq y \quad x-y\neq 0\rightarrow d(x,y)=(x-y)^2>0$$
$$d(x,y)=d(y,x)$$
$$\forall x,y,z \quad d(x,y)+d(y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2$$
$$=x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz$$
$$d(x,z)=x^2+z^2-2xz$$
$$\Leftrightarrow 2y^2-2xy-2yz+2xz\geqslant 0$$
$$y^2-(x+z)y+xz\geqslant 0$$
$$\rightarrow(y-x)(y-z)\geqslant 0$$

不能恒成立$\rightarrow d$不是度量

b. $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$

$$\forall x=y \quad d(x,y)=0$$
$$\forall x\neq y \quad d(x,y)>0$$
$$d(x,y)=d(y,x)$$
$$\forall x,y,z \quad d(x,y)+d(y,z)=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}$$
$$d(x,z)=\sqrt{|x-z|}$$

设$|x-y|\vee|y-z|\geqslant|x-z|$则必然成立

$$|x-y|<|x-z|\wedge|y-z|<|x-z|$$
$$\text{let}: p=|x-y|, q=|y-z|$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{p}+\sqrt{q}\geqslant\sqrt{p+q}$$
$$\leftarrow\sqrt{2pq}\geqslant 0$$

$$\rightarrow d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$$

c. $d(x,y)=|x^2-y^2|$

$$\forall x=y \quad d(x,y)=0$$
$$\forall x\neq y \quad x=-y=1: 1^2-(-1)^2=0$$

$\rightarrow$不是度量

d. $d(x,y)=|x-2y|$

$d(1,2)=|1-4|=3. d(2,1)=|2-2|=0$

e. $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

$$
\begin{array}{ll}
\forall x = y & d(x,y) = 0 \\
\forall x \neq y & d(x,y) > 0 \\
& d(x,y) = d(y,x) \\
\forall x,y,z & d(x,y)+d(y,z) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|}
\end{array}
$$

$$d(x,z) = \frac{|x-z|}{1+|x-z|}$$

$$\frac{x}{1+x}\text{在}[0,+\infty)\text{上是增函数}$$

$$\rightarrow\text{若}|x-y| \geqslant |x-z| \cup |y-z| \geqslant |x-z|\text{则必然成立}$$

$$|x-y| < |x-z| \wedge |y-z| < |x-z|:$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} + \frac{a-x}{1+(a-x)} \geqslant \frac{a}{1+a}$$

$$\leftarrow \frac{x(1+(a-x))+(a-x)(1+x)}{(1+x)(1+(a-x))} \geqslant \frac{a}{1+a}$$

$$\leftarrow \frac{x+ax-x^2+a+ax-x-x^2}{1+a-x+x+ax-x^2} \geqslant \frac{a}{1+a}$$

$$\leftarrow \frac{-2x^2+2ax+a}{-x^2+ax+a+1} \geqslant \frac{a}{1+a}$$

$$\leftarrow \frac{-2x^2+(2x+1)a}{-x^2-x+(x+1)(a+1)} \geqslant \frac{a}{1+a}$$

$$\frac{(1+a)(-2x^2+(2x+1)a)}{-x^2-x+(x+1)(a+1)} \geqslant a$$

$$\frac{-2x^2+(2x+1)a-2ax^2+(2x+1)a^2}{-x^2-x+(x+1)(a+1)} \geqslant a$$

$$\frac{-2\frac{x^2}{a}+2x+1-2x^2+(2x+1)a}{-x^2-x+(x+1)(a+1)} \geqslant 1$$

$$d(x,y)+d(y,z) = \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$$

$$= \frac{x(1+y)+y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$d(x,z) = \frac{x+y}{1+x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+2xy}{1+x+y+xy} \geqslant \frac{x+y}{1+x+y}$$

12. Proof: $K \subset R^1, K = \left\{\frac{1}{n}: n \in N^+\right\} \cup \{0\}$.由定义直接证明$K$是紧集.

$$
\begin{gathered}
\text{设}\{G_\alpha\}\text{是}K\text{的任意开覆盖} \\
K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha \\
\forall x \in K, x \in \bigcup_\alpha G_\alpha \\
\rightarrow \exists \alpha, x \in G_\alpha \\
0 \in K \rightarrow \exists G_\alpha, 0 \in G_\alpha \\
G_\alpha = (a,b), a < 0 \wedge b > 0 \\
\forall b > 0, \exists N \in N^+, n > N \rightarrow \frac{1}{n} < b \\
\rightarrow n > N, \left\{\frac{1}{n}\right\} \subset G_\alpha \\
\text{此时在}n < N\text{的}G\text{最多为}N\text{个} \\
\text{则最多有}N+1\text{个开集覆盖了}K \\
\rightarrow K\text{紧}
\end{gathered}
$$

13. Example: $E \subset R, E$的极限点可数

$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{i + \frac{1}{n}: n \in N^+\right\}$ 极限点是正整数.所以可数

14. Example: 构造$(0,1)$的开覆盖，但没有有限子覆盖

$(0,1) = \{G_{\alpha \in (0,1)}\}, G_\alpha = (0,\alpha)$

15. Proof:

度量空间中$\{K_\alpha\}$是一组闭子集。$\forall\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha,i}\neq\varnothing\nrightarrow\bigcap_{\alpha} K_a\neq\varnothing$

$\{[n,+\infty)\}$是R中的闭子集,但$\bigcap_{N^+}[n,+\infty)=\varnothing$

度量空间中$\{K_\alpha\}$是一组有界子集。$\forall\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha,i}\neq\varnothing\nrightarrow\bigcap_{\alpha} K_a\neq\varnothing$

$\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)$是一组有界子集，但$\bigcap_{N^+}\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)=\varnothing$

16. Proof: Q中定义度量$d(x,y)=|x-y|.E=\{x\in Q{:}\,2<x^2<3\}$.Proof: E是Q中的有界闭集，但E不是紧集. Proof or Disproof: E是开集

$$\begin{gathered}
E\text{有界:}\\
\forall x\in E, x^2>2\rightarrow x>1\vee x<-1\\
x^2<3<4\rightarrow 0<x<2\vee 0>x>-2\\
\rightarrow 1<x<2\vee -2<x<-1\\
\forall x,y\in E.d(x,y)\leqslant d(1,2)=d(-1,-2)=1\\
\rightarrow E\text{有界}\\
E\text{闭:}\\
Q\text{的极限点是}R\rightarrow\forall x\in E'\not\subset Q \qquad\qquad R=Q\cup\neg Q\\
\rightarrow\forall x\in E'\rightarrow x\in E\\
\rightarrow E\text{闭}\\
E\text{紧:}\\
\left\{\left(2,\frac{3}{n}\right)^Q\right\}\text{是}E\text{的开覆盖，但没有有限子覆盖}\qquad\text{稠密性}\\
E\text{开:}\\
\forall x\in E,\sqrt{2}<x<\sqrt{3},\\
\rightarrow\exists r\in Q, U_x(r)\subset E\\
\rightarrow E\text{开}
\end{gathered}$$

17. Proof or Disproof: E是闭区间$[0,1]$中十进制表示只有4和7的所有实数。

    a. E可数

       Cantor对角线手法：不可数

    b. E稠密

$$\begin{gathered}
\forall x,y\in E.\wedge x\neq y.\\
x-y\in R.(x-y){:}\,0.\dot{7}-0.\dot{4}=3.\dot{3}\\
\rightarrow\text{如果不认为小数位0不包含于此集合，则不稠密}\\
\text{否则}\rightarrow\forall r>0,\exists n\in N^+\rightarrow\frac{5}{10^n}<r\rightarrow 000\ldots444\in(0,r)\\
\rightarrow\text{在0处稠密}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{在}[0,1]\text{中不稠密}\\
1\in[0,1]\text{但不是}E\text{的点也不是}E\text{的极限点}
\end{gathered}$$

    c. E紧

$$\begin{gathered}
\forall x\in E'.\forall U_x^0\cap E=\varnothing \qquad U_{0.0\ldots4},U_{0.7\ldots}\text{的开集的附近都有无数}E\text{中的数}\\
x'=\sum_1^\infty\frac{4a_n+7(1-a_n)}{10^n}\in E\\
\rightarrow E\text{是闭集}\\
\rightarrow E\text{是紧集}
\end{gathered}$$

    d. E完全

$$\begin{gathered}
\text{不完全:}\\
U_4(0.3)\text{中只有}4.07,4.04\text{但这不是数码只有4，7}
\end{gathered}$$

18. Proof or Disproof: R^1中存在不含无理数的不空完全集

$$E=R-Q$$
$$\forall x\in E, U_x^0\cap E\neq\varnothing \quad \text{无理数是稠密的}$$
$$\rightarrow x\text{是}E\text{的极限点}$$
$$\rightarrow x\text{是完全集}$$

19. Proof:

a. 闭集$A,B\subset X, A\cap B=\varnothing\rightarrow A,B$是分离的

$$A\cap B=\varnothing$$
$$A=\bar{A}\rightarrow\bar{A}\cap B=\varnothing$$
$$B=\bar{B}\rightarrow A\cap\bar{B}=\varnothing$$
$$\rightarrow A,B\text{分离}$$

b. 开集$A,B\subset X, A\cap B=\varnothing\rightarrow A,B$是分离的

$$A=A^\circ, B=B^\circ$$
$$\text{Assume: }\bar{A}\cap B\neq\varnothing$$
$$\rightarrow\exists x\in A'\wedge x\in B$$
$$\text{但}A'\in A\rightarrow x\in A\wedge x\in \text{B矛盾}$$
$$\rightarrow\bar{A}\cap B=\varnothing$$
$$\rightarrow A,B\text{分离}$$

c. $\forall x\in X, \forall\delta>0, A=\{y: d(x,y)<\delta\}, B=\{y: d(x,y)>\delta\}$. Proof: A,B是分离的

$$\text{由定义}A\text{开}$$
$$\forall y\in B, d(x,y)>\delta, E=\{2\delta<d(x,y)<3\delta\}\text{是开集}$$
$$\forall d\in E, d\in B\rightarrow E\subset B\rightarrow y\text{是}B\text{的内点}$$
$$\rightarrow B\text{是开集}$$
$$A\cap B=\varnothing$$
$$\rightarrow A,B\text{是分离的}$$

d. 至少含有两个点的连通度量空间不可数

$$E\text{是连通度量空间.}$$
$$x\neq y\in E$$
$$d(x,y)=r>0$$
$$??? \qquad \text{这都是啥啥啥}$$

20. Proof or Disproof: 连通集的闭包和连通集的内部为连通集

$$\text{连通集的闭包是连通集:}$$
$$E\text{是连通集:}\ E=X\cup Y\text{是}E\text{的一个分割}(X\cap Y=\varnothing)$$
$$E\subset X\vee E\subset Y\rightarrow E\subset X$$
$$\rightarrow\bar{E}\subset\bar{X}$$
$$X\cap Y=\varnothing\rightarrow\bar{E}\cap Y=\varnothing\rightarrow Y=\varnothing$$
$$\rightarrow E\text{不是闭集}, \bar{E}\text{为连通集}$$

Munkres.$P115$

内部不一定为连通集: $\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(x,y): (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$

21. $A,B\subset R^k\wedge A,B$是分离的. $a\in A, b\in B, t\in R$定义$p(t)=(1-t)a+tb$

$A_0=p^{-1}(A), B_0=p^{-1}(B)$

a. Proof: A_0,B_0是分离的

$$A_0, B_0\text{分离：}\overline{A_0}\cap B_0=\varnothing\wedge A_0\cap\overline{B_0}=\varnothing$$
$$\to\forall x\in A_0\to x\notin B_0, x\in B_0\to x\notin A_0$$
$$\text{设}A_0\cup B_0=R^k$$
$$\to\forall x\in R^k, x\in A_0\cup B_0$$
$$\text{设}x\in A_0, x\notin B_0$$
$$\text{设}x\text{是}A_0\text{的孤立点}.\exists U_x^0\in B\to x\in A\cap\bar{B}\text{矛盾}$$
$$\text{设}x\text{是}A_0\text{的边界点}.x\in A_0'\to x\in B_0'\to\text{矛盾}$$
$$???$$

b. Proof: $\exists t_0\in(0,1)\to p(t_0)\notin A\cup B$

c. Proof: R^k的凸子集是连通集

22. 含有可数稠密子集的度量空间称为：可分的。Proof: R^k是可分的

Q是稠密的$\wedge\operatorname{card}Q=\omega\to R$是可分的

$R^k=\omega^k=\omega\to R^k$是可分的

23. X的一组开子集$\{V_a\}$是X的基：$\forall x\in X,\forall G\subset X\wedge x\in G,\exists\alpha\to x\in V_\alpha\subset G$. X中的开集是V的一些并。Proof: 每个可分度量空间有可数基.

$$X\text{是可分的}:\exists S\subset X,\operatorname{card}S=\omega,\forall x\in X, x\in S\vee x\in S'$$
$$\forall x\in X, x\in S'\to\exists y\in S\to d(x,y)<\delta$$
$$\exists G\in X, G=d(p,q)<\delta\to G=\bigcup^\infty d(s_1,s_2)<\delta$$
$$s_1,s_2\in S\to\operatorname{card}\{(s_1,s_2)\}=\omega$$
$$\to X\text{具有可数基}$$

24. 度量空间X，每个无限子集都有极限点. Proof: X是可分的。

$$\text{无限子集有极限点}\to\text{有界}$$
$$\forall\delta>0, x_1\in X.\text{选取}x_2\in X\wedge d(x_1,x_2)>\delta$$
$$\text{总是选取这样的}x_{i+1}\text{构成}\{x_i\}\text{这个集合有极限点}\to x_\infty$$
$$\text{由于是度量空间：}n\delta>N\to\text{执行至多有限步后}X\text{被覆盖}$$
$$\to\text{此时}x_i\text{为有限的}$$
$$\text{由于}\delta\text{的任意性}\to\text{取极限可得}X\text{是可分的}$$
$$???\text{抄了一下提示。。。}$$

25. Proof: 紧度量空间K具有可数基，因此K可分。

K紧$\to\exists\{G_i\}, K\in\bigcup G_i$

???

26. 度量空间X中的每个无限子集有极限点. Proof: X是紧的.

???

27. 凝点:度量空间X中$E\subset X$，$\operatorname{card}\{\forall U_x^0\cap E\}>\omega$.称$x$为$E$的凝点

$E\subset R^k\wedge E$不可数。P是E的所有凝点的集。Proof: P完全；E中最多有可数多个点不在P中。

这里得狂用选择公理

???

28. Proof: 可分度量空间里每个闭子集是一个完全集（或空集）和一个至多可数集的并。

29. Proof: R^1中的每个开集是至多可数个不相交的开区间的并.

30. 仿照4.1.Proof:

$R^k=\bigcup_1^\infty F_n, F_i$是$R^k$的闭子集，$\exists F_i,(F_i)^o\neq\varnothing$

等价的描述:G_n是R^k的稠密开子集，$n\in N^+\to\bigcap_1^\infty G_n\neq\varnothing$

Remark: 这是Baire定理的一个特殊情形.