第九章 实向量空间上的算子

1 复化

1.1 向量空间的复化

实向量空间是复向量空间的子空间

定义 1.1. *V的复化(complexification of V), V_C*

		V是实向量空间
复化		$V_C = V \times V$. V_C的元素是有序对$(u, v), u, v \in V$, 记做: $u + iv$
加法	$u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$	$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$
标乘	$a, b \in R, u, v \in C$	$(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$

定理 1.2. *V_C是复向量空间*

1 $\quad x + y = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2) \in V_C$

2
$$\begin{aligned} x + y &= (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2) \\ &= (u_2 + u_1) + i(v_2 + v_1) = y + x \end{aligned}$$

3 $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$

4
$$\begin{aligned} \mathbf{0} + i\mathbf{0} \in V_C, (\mathbf{0} + i\mathbf{0}) &+ (v + iu) \\ &= (\mathbf{0} + v) + i(\mathbf{0} + u) = v + iu \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} &\forall x \in V_C, -x = (-u - iv); \\ x + -x &= (u + iv) + (-u - iv) \\ &= (u - u) + i(v - v) \\ &= \mathbf{0} + i\mathbf{0} \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} &1 \in R \\ (1 + i0)(u + iv) &= (1u - 0v) + i(1v + 0u) \\ &= u + iv \end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned} &(a + ib)((\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q})) \\ &= (a + ib)((\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}) + i(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q})) \\ &= (a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}) - b(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q})) + i(a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}) + b(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p})) \\ &= (a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{p} - b\boldsymbol{v} - b\boldsymbol{q}) + i(a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{p}) \\ &= (a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) + i(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}) + (a\boldsymbol{p} - b\boldsymbol{q}) + i(a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{p}) \\ &= (a + ib)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + (a + ib)(\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((a + ib) + (c + id))(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) &= ((a + c) + i(b + d))(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) \\ &= (a + c)\boldsymbol{u} - (b + d)\boldsymbol{v} + i((a + c)\boldsymbol{v} + (b + d)\boldsymbol{u}) \\ &= a\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v} - d\boldsymbol{v} + i(a\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}) \\ &= a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v} + i(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}) + c\boldsymbol{u} - d\boldsymbol{v} + i(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{u}) \\ &= (a + ib)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + (c + id)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

定理 1.3. *V的基是V_C的基*

V是实向量空间

1 $\quad \boldsymbol{v}$是V的基 $\quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$是复空间的基

2 $\quad \dim V_C = \dim V$

证明.

1 $\boldsymbol{v}$是实向量空间V的基

$$
\begin{gathered}
\text{复向量空间}V_C\text{中}\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_n)\\
v_1,\ldots,v_n,iv_1,\ldots,iv_n\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_n)\\
\rightarrow V_C=\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_n)\\
v_1,\ldots,v_n\text{在复向量空间}V_C\text{中线性无关，}\boldsymbol{\lambda}\in C\\
\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=\mathbf{0}\\
\rightarrow\operatorname{Re}(\lambda_1)v_1+\cdots+\operatorname{Re}(\lambda_n)v_n=0\\
\rightarrow\operatorname{Im}(\lambda_1)v_1+\cdots+\operatorname{Im}(\lambda_n)v_n=0\\
v_1,\ldots,v_n\text{在}V\text{中是线性无关的}\\
\rightarrow\operatorname{Re}\lambda_1=\cdots=\operatorname{Re}\lambda_n=0\\
\rightarrow\operatorname{Im}\lambda_1=\cdots=\operatorname{Im}\lambda_n=0\\
\rightarrow v_1,\ldots,v_n\text{在}V_C\text{上是线性无关的}
\end{gathered}
$$

□

2 $\dim V_C=\dim\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_n)=\operatorname{length}\boldsymbol{v}$

1.2 算子的复化

定义 1.4. *算子的复化(complexification of T), T_C*

$$
\begin{gathered}
V\text{是实向量空间，}T\in\mathcal{L}(V).\\
T\text{的复化}:T_C\quad T_C(u+iv)=Tu+iTv.u,v\in V
\end{gathered}
$$

Remark: 这样定义的算子是复空间内的线性算子$T_C(\lambda(u+v))=\lambda T(u)+\lambda T(v)$

例 1.5. A是n阶实方阵$Tx=Ax.T_Cz=Az$

这样可以将T_C是T在C上的推广

定理 1.6. $\mathcal{M}(T_C)=\mathcal{M}(T)$

$$\boldsymbol{v}\text{是实向量空间}V\text{的基}.T\in\mathcal{L}(V),\ \mathcal{M}(T,\boldsymbol{v})=\mathcal{M}(T_C,\boldsymbol{v})$$

对于复空间上的算子根据舒尔定理，必有一维不变子空间

而实空间上的算子可能不具有一维不变子空间

定理 1.7. *每个算子都有一维或二维不变子空间*

$$\text{非零有限维向量空间上的每个算子都有一维或二维不变子空间}$$

证明.

$$
\begin{gathered}
\text{非零有限维复向量空间上的每个算子都有本征值}\rightarrow\text{复空间上每个算子都有一维不变子空间}\\
\text{设}V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V).T\text{的复化}T_C\text{有本征值}a+bi\\
\rightarrow T_C(u+iv)=(a+bi)(u+iv)\\
=T(u)+iT(v)=(au-bv)+(av+bu)i\\
Tu=au-bv;Tv=av+bu\\
U=\operatorname{span}(u,v);1\leqslant\dim U\leqslant2\\
T(u+v)=T(u)+T(v)\in\operatorname{span}(u,v)\\
\rightarrow U\text{是}V\text{的不变子空间}
\end{gathered}
$$

□

1.3 复化的极小多项式

$$(T_C)^n(u+iv)=T^nu+iT^nv$$

定理 1.8. *复化的极小多项式等于原实算子的极小多项式*

$$V\text{是实向量空间，}T\in\mathcal{L}(V).T_C\text{的极小多项式等于}T\text{的极小多项式}$$

证明.

$$\begin{gathered}p\in\mathcal{P}(R)\text{是}T\text{的极小多项式}\\ p(T_C)=\sum a_iT_C^i=\sum a_i(T^n+iT^n)=(p(T))_C\\ \rightarrow p(T_C)=(p(T))_C=(0)_C=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}q\in\mathcal{P}(C),q(T_C)=0,q\text{是首一多项式}\\ \forall u\in V,(q(T_C))(u)=0\\ r\text{表示}q\text{的第}j\text{个系数的实部的多项式}\\ r\text{是首一多项式且}r(T)=0.\\ \deg q=\deg r\geqslant\deg p\\ \rightarrow p\text{是极小多项式}\end{gathered}$$

□

1.4 复化的本征值

定理 1.9. *T_C的实本征值*

$$V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V).\lambda\in R.\lambda\text{是}T_C\text{是的本征值}\Leftrightarrow\lambda\text{是}T\text{的本征值}$$

证明.

法1

$$\begin{gathered}\lambda\text{是}T\text{的本征值。}\exists v\in V,v\neq0.Tv=\lambda v\\ \rightarrow T_Cv=\lambda v\rightarrow\lambda\text{是}T_C\text{的本征值}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{设}\lambda\text{是}T_C\text{的本征值}.\exists u,v\in V\text{且}u+iv\neq0\\ T_C(u+iv)=\lambda(u+iv)\\ \rightarrow Tu=\lambda u\wedge Tv=\lambda v\\ u\neq0\vee v\neq0\rightarrow\lambda\text{是}T\text{的本征值}\end{gathered}$$

法2

$$\begin{gathered}T\text{的所有实本征值是}T\text{的极小多项式的实零点}.\\ T_C\text{的极小多项式}=T\text{的极小多项式}\\ \rightarrow T\text{的实本征值是}T_C\text{的实本征值}\end{gathered}$$

□

定理 1.10. $T_C-\lambda I,T_C-\bar{\lambda}I$

$$\begin{gathered}V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V).\lambda\in C.i\in N,u,v\in V\\ (T_C-\lambda I)^i(u+iv)=0\Leftrightarrow(T_C-\bar{\lambda}I)^i(u-iv)=0\end{gathered}$$

证明.

$$\begin{gathered}\text{对}i\text{使用归纳法},i=0.(T_C-\lambda I)^0=I_V\\ \rightarrow I(u+iv)=0\Leftrightarrow I(u-iv)=0\\ \rightarrow u+iv=0\Leftrightarrow u-iv=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{设}i\geqslant1\text{且定理对}i-1\text{都成立}.\text{设}(T_C-\lambda I)^i(u+iv)=0\\ \rightarrow(T_C-\lambda I)^{j-1}(T_C-\lambda I)(u+iv)=0\\ (T_C-\lambda I)(u+iv)=(Tu-au+bv)+i(Tv-av-bu)\\ (T_C-\bar{\lambda}I)(u+iv)=T_C(u+iv)-\bar{\lambda}I(u+iv)\\ =Tu+iTv-(a-ib)(u+iv)\\ =Tu+iTv-((au-bv)+i(av+bu))\\ =(Tu-au+bv)+i(Tv-av-bu)\\ \rightarrow(T_C-\bar{\lambda}I)^{i-1}((Tu-au+bv)-i(Tv-av-bu))\\ =0\end{gathered}$$

□

定理 1.11. *T_C的非实本征值成对出现*

$$V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V).\lambda\in C.\lambda\text{是}T_C\text{的本征值}\Leftrightarrow\bar{\lambda}\text{是}T_C\text{的本征值}$$

证明. 1.10的明显结论 □

定理 1.12. *λ的重数等于$\bar{\lambda}$的重数*

$$\begin{gathered}T\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V),\lambda\in C\text{是}T_C\text{的本征值}\\ \lambda\text{的重数等于}\bar{\lambda}\text{的重数}\end{gathered}$$

证明.

$$\begin{gathered}u_1+iv_1,\ldots,u_n+iv_n\text{是广义本征空间}G(\lambda,T_C)\text{的基}\\ u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n\in V.\\ \to u_1-iv_1,\ldots,u_n-iv_n\text{是广义本征空间}G(\bar{\lambda},T_C)\text{的基}\quad 1.10\\ \to\lambda\text{和}\bar{\lambda}\text{的本征值的重数相同}\end{gathered}$$ □

例 1.13. $T\in\mathcal{L}(R^3),T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,x_2-x_3,x_2+x_3)$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T)&=\begin{pmatrix}2&&\\&1&-1\\&1&1\end{pmatrix}\\ T-\lambda I&=0\to 2\text{是本征值}\\ \det\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-1\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}&=(2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)-(1\times-1\times(2-\lambda))\\ &=-\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda+4\\ \lambda&=2;\lambda=1-i;\lambda=1+i\end{aligned}$$

定理 1.14. *奇数维向量空间上的算子都有本征值*

证明.

$$\begin{gathered}V\text{是奇数维实向量空间，}T\in\mathcal{L}(V).\\ T_C\text{的非实本征值是成对出现的并且重数相同}\\ \to T_C\text{的非实本征值的重数之和为偶数}\\ \dim T_C=T_C\text{所有本征值的重数之和}\\ \to T_C\text{必有实本征值}\end{gathered}$$ □

1.5 复化的特征多项式

定理 1.15. *T_C的特征多项式的系数都是实数*

证明.

$$\begin{gathered}\text{设}\lambda\text{是}T_C\text{的非实本征值，重数为}m\to\bar{\lambda}\text{也是}T_C\text{的重数为}m\text{的本征值}\\ \to T_C\text{的特征多项式}(z-\lambda)^m(z-\bar{\lambda})^m\\ (z-\lambda)^m(z-\bar{\lambda})^m=((z-\lambda)(z-\bar{\lambda}))^m\\ =(z^2-\lambda z-z\bar{\lambda}+\lambda\bar{\lambda})^m\\ =(z^2-2(\operatorname{Re}\lambda)z+|\lambda|^2)^m\in\mathcal{P}(R)\\ \to T_C\text{的特征多项式系数都是实数}\end{gathered}$$ □

定义 1.16. *实算子的特征多项式(characterristic polynomial)*

$$V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V).T\text{的特征多项式是}T_C\text{的特征多项式}$$

例 1.17. $T\in\mathcal{L}(R^3), T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,x_2-x_3,x_2+x_3)$

$$T_C\text{的本征值是}2,1-i,1+i.$$
$$\begin{aligned}T_C\text{的特征多项式}p(z)=&(z-2)(z-1-i)(z-1+i)=(z-2)(z^2-(1+i)z-(1-i)z+(1+i)(1-i))\\=&(z-2)(z^2-z-iz-z+iz+(1+i)(1-i))\\=&(z-2)(z^2-2z+2)\\=&z^3-4z^2+6z-4\end{aligned}$$

定理 1.18. *特征多项式的次数和零点*

$$\begin{array}{cc} & V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V)\\ 1 & T\text{的特征多项式系数都是实数}\\ 2 & T\text{的特征多项式的次数为}\dim V\\ 3 & T\text{的所有本征值是}T\text{的特征多项式的所有实零点}\end{array}$$

定理 1.19. *哈密顿-凯莱定理*

$$V\text{是实向量空间。}T\in\mathcal{L}(V).q\text{是}T\text{的特征多项式}\rightarrow q(T)=\mathbf{0}_V$$

证明.

$$\begin{array}{c}T\text{的特征多项式是}T_C\text{的特征多项式}\\ \text{由复空间中的哈密顿凯莱定理}p(T_C)=p(T)=\mathbf{0}_V\end{array}$$
□

定理 1.20. *实向量空间中。特征多项式是极小多项式的多项式倍*

$$\begin{array}{cc} & V\text{是实向量空间},T\in\mathcal{L}(V)\\ 1 & T\text{的极小多项式次数最多为}\dim V\\ 2 & T\text{的特征多项式是}T\text{的极小多项式的多项式倍}\end{array}$$

证明.

根据复空间上的哈密顿凯莱定理可得1，2 □

9.A

2 实内积空间上的算子

这里给出实内积空间上，正规算子的刻画。并使用正规算子的刻画描述实内积空间上的等距同构

2.1 实内积空间上的正规算子

定理 2.1. *非自伴的正规算子*

$$\begin{array}{cc} & V\text{是二维实内积空间},T\in\mathcal{L}(V).\text{三条件等价}\\ 1 & T\text{是正规的但不是自伴的}\\ 2 & T\text{关于}V\text{的每个规范正交基的矩阵有}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\wedge b\neq 0\\ 3 & T\text{关于}V\text{的某个规范正交基具有矩阵}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\wedge b>0\end{array}$$

证明.

$$1\to 2$$
$$T\text{是正规的但不自伴.}e_1,e_2\text{是}V\text{的规范正交基}$$
$$\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$
$$\|Te_1\|=a^2+b^2;\|T^*e_1\|=a^2+c^2$$
$$T\text{正规}\to TT^*=T^*T\to\langle Te_1,Te_1\rangle=\langle T^*Te_1,e_1\rangle=\langle TT^*e_1,e_1\rangle$$
$$=\langle T^*e_1,T^*e_1\rangle$$
$$\to a^2+b^2=a^2+c^2\to b^2=c^2$$
$$\text{设}b=c\to\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\to T\text{是自伴的，矛盾}$$
$$\to b=-c$$
$$\to\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & d\end{pmatrix}$$
$$T^*T=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -ab+bd\\ -ab+bd & b^2+d^2\end{pmatrix}$$
$$TT^*=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-bd\\ ab-bd & b^2+d^2\end{pmatrix}$$
$$\to -ab+bd=ab-bd\to-(ab-bd)=ab-bd$$
$$\to ab-bd=0$$
$$\to ab=bd\wedge b\neq 0\to a=d$$
$$\to\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

$$2\to 3$$
$$\text{设}\mathcal{M}(T,(e_{1,}e_2))=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$
$$\mathcal{M}(T,(e_1,-e_2))=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$
$$\to b>0,\mathcal{M}(T,(e_1,-e_2))$$
$$-b>0,\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))$$

$$3\to 1$$
$$T^*T=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -ab+ab\\ -ab+ab & b^2+a^2\end{pmatrix}$$
$$TT^*=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-ab\\ ab-ab & b^2+a^2\end{pmatrix}$$
$$\to T^*T=TT^*\to T\text{是正规的，但不是自伴的}$$

□

以下定理表明正规算子在不变子空间上仍然是正规的，这样就可以对维数使用归纳法来证明对正规算子的刻画

定理 2.2. *正规算子和不变子空间*

$$V\text{是内积空间,}T\in\mathcal{L}(V)\text{是正规的，}U\text{是}T\text{的不变子空间.有四性质}$$

1	$U^\perp$是T的不变子空间
2	U是T^*的不变子空间
3	$(T\|_U)^*=(T^*\|_U)$
4	$T\|_U\in\mathcal{L}(U),T\|_{U^\perp}\in\mathcal{L}(U^\perp)$都是正规算子

证明.

1 $U^{\perp}$在T下不变

$\boldsymbol{e}$是U的规范正交基，再扩张到V的规范正交基$\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}$

$$\mathcal{M}(T,(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}))=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.A,B,C\text{都是矩阵}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\|Te_j\|^2=\sum_{i,j}|A_{i,j}|^2$$

$$\sum_{j=1}^{m}\|T^*e_j\|^2=\sum_{i,j}|A_{i,j}|^2+\sum_{i,j}|B_{i,j}|^2$$

$$T\text{正规}\to\|Te_j\|=\|T^*e_j\|^2$$

$$\to\sum_{j=1}^{m}\|Te_j\|^2=\sum_{j=1}^{m}\|T^*e_j\|^2$$

$$\to\sum_{i,j}|B_{i,j}|^2=0\to B_{i,j}=0$$

$$\to\mathcal{M}(T,(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}))\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\to Tu\in U;Tu^{\perp}\in U^{\perp}$$

2 $\mathcal{M}(T^*)=(\mathcal{M}(T))^t=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$\to T^*e_i\in\operatorname{span}(\boldsymbol{e})$

$\to U$是T^*的不变子空间

3 $(T|_U)^*=(T^*|_U)$

$$S=T|_U\in\mathcal{L}(U)$$

$$\forall v\in U,\langle Su,v\rangle=\langle Tu,v\rangle=\langle u,T^*v\rangle$$

$$T^*v\in U\to S^*v=T^*v\to(T|_U)^*=(T^*)|_U$$

4 T和T^*可交换

$(T|_U)^*=(T^*)|_U\to T|_U$和$T^*|_U$可交换$\to T|_U$是正规的 □

$\to T|_{U^{\perp}}$和$T^*|_{U^{\perp}}$可交换$\to T|_{U^{\perp}}$是正规的

Remark: $T(x,y)=(-y,x)$算子在是正规的，但它没有本征值。甚至关于任意基都没有上三角矩阵

定理 2.3. *实空间上正规算子的刻画*

V是实内积空间，$T\in\mathcal{L}(V)$.两条件等价

1 T是正规的$(TT^*=T^*T)$

2 $\exists$基$\boldsymbol{v}\in V,\mathcal{M}(T,\boldsymbol{e})$是分块对角阵，对角线上的块是$1\times 1$或

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}_{2\times 2},b>0$$

证明.

$$2\to 1$$

$$\mathcal{M}(T^*)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(T^*)$$

$$\to T\text{是正规的}$$

$$1\to 2$$

对$\dim V$使用归纳法

$$\dim V=1\to\mathcal{M}(T)=(\,a\,),\text{显然成立}$$

$$\dim V=2\to T\text{自伴},\text{谱定理}\to\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$T\text{不自伴}\to\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\dim V=n>2$,对$\dim V<n$的所有空间都成立 □

V必有一维或二维子空间U

$$\dim U=1,v\neq 0\in U\wedge e=\frac{v}{\|v\|},T|_U\in\mathcal{L}(U)$$

$$\mathcal{M}(T|_U)=(\,a\,)$$

$\dim U=2,T|_U\in\mathcal{L}(U),T|_U$是正规的但不是自伴的

$$\mathcal{M}(T|_U)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

U和$U^{\perp}$都是T的不变子空间。根据归纳法假设$U^{\perp}$具有规范正交基

$\to\mathcal{M}(T|_{U^{\perp}})$满足上述形式

$\to\mathcal{M}(T)$满足上述形式

2.2 实内积空间上的等距同构

实内积空间上的等距同构可以没有本征值

例 2.4. $\theta \in R. R^2$上的逆时针旋转变换是等距同构

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

若θ不是π的整数倍，则R^2上没有可以将其映射为自身标量倍的非零向量，因此没有本征值

定理 2.5. *实内积空间上等距同构的刻画*

$$V\text{是室内机空间，}S \in \mathcal{L}(V).\text{两条件等价}$$
$$1 \quad S\text{是等距同构}$$
$$2 \quad \exists\text{基}\boldsymbol{e}, \mathcal{M}(T,\boldsymbol{e})\text{是分块对角矩阵，每个块是}\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\text{或者}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \theta \in (0,\pi)$$

证明.

$$S\text{是等距同构} \rightarrow \text{具有这种形式的基}$$
$$S\text{是等距同构} \rightarrow S\text{是正规的}$$
$$V\text{有规范正交基}, \mathcal{M}(S,\boldsymbol{e})\text{是分块对角阵}$$
$$\text{对上述基对应的}1\times 1\text{的块，若}Se_i = \lambda e_i; \langle Se_i, Se_i\rangle = \langle e_i, e_i\rangle$$
$$\rightarrow |\lambda| = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$$
$$\rightarrow 1\times 1\text{的块具有上述形式}$$
$$\text{考虑上述基矩阵中对应的}2\times 2\text{的块，}Se_i = ae_i + be_{i+1}$$
$$1 = \|e_i\|^2 = \|Se_i\|^2 = a^2 + b^2$$
$$b > 0, \exists\theta \in (0,\pi), a = \cos\theta, b = \sin\theta.$$
$$\rightarrow 2\times 2\text{的块具有上述形式}$$

$$\text{具有这种形式的矩阵} \rightarrow S\text{是等距同构}$$
$$V\text{具有直和分解}V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m, \dim U_i = (1 \vee 2)$$
$$\text{每个}S|_{U_i}\text{是}U\text{上的等距同构}$$
$$v \in V, v = u_1 + \cdots + u_m$$
$$\|Sv\|^2 = \|Su_1 + \cdots + Su_m\|^2$$
$$= \|Su_1\|^2 + \cdots + \|Su_m\|^2$$
$$= \|v_1\|^2 + \cdots + \|u_m\|^2$$
$$= \|v\|^2$$
$$\rightarrow S\text{是等距同构}$$

□

9.B