Chapter

BY 多项式

1 Def-Theorem

1.1 数域(不含有限域)

1. 数域：复数的子集。包括0，1。且任意两个数的和、商、差、积(不除0)仍然是集合的数
   ep: 最小的数域为Q.任意数域包含Q作为子域
   ep:Q($\sqrt{2}$)$=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in Q\}$也是数域

1.2 一元多项式

1. 一元多项式：$a_i\in F,x$是文字$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$.
2. 一元多项式的相等：对应系数相等;
3. 多项式的次数：第一个不为0的系数a_n的n$\partial(p)=n$; 0多项式不定义次数
4. 一元多项式环：数域P上全体多项式和运算称为P上的一元多项式环
   P上的多项式的两个多项式经过加减乘后仍然是P上的多项式
5. 数域P上的两个多项式$f,g;\partial f>\partial g\Rightarrow f=h\,g+r\wedge\partial r<\partial g$且这种分解唯一
6. 多项式能分解为：$f=gh$.即上述分解的$r=0$
7. 公因式：f和g的共同因式，次数最高的称为最大公因式
8. $$f=qg+r\Rightarrow f,g\text{和}g,r\text{有相同的公因式}$$
9. $$\begin{array}{ll}P\text{中的任意两个多项式}f,g & \Rightarrow \begin{cases}\text{在}P\text{中存在最大公因式}d\\ d\text{可以表示成}f,g\text{的组合}:d=uf+vg\end{cases}\\ \text{首项系数为1的最大公因式} & := \qquad\qquad d=(f,g)\end{array}$$
10. 多项式的互素:$(f,g)=1$
11. 互素的充要条件：$\forall u,v\in P\wedge uf+vg=1$
12. $(f,g)=1\wedge f|gh\Rightarrow f|h$
13. $f_1|g,f_2|g\wedge(f_1,f_2)=1\Rightarrow f_1\,f_2|g$
14. 不可约：数域P上的多项式如果不能表示成数域P上的两个次数较小的多项式的乘积，
15. 不可约多项式是不可分解的：p不可约，$\forall f,g.\,p|fg\Rightarrow p|f\vee p|g$

16. 因式分解定理：P上的每个次数大于1的多项式都可唯一分解为P上不可约多项式的乘积

17. 重因式：不可约多项式p，$p^k|f \wedge p^{k+1}|f.k=0$则$p$不是因式，$k=1$称为一次因式，$k>1$称为重因式

18. 重因式和微商的关系：不可约多项式p是f的k重因式$\Rightarrow p$是f'的$(k-1)$重因式
    但逆命题不成立

19. 不可约多项式p是f的k重因式$\Rightarrow p$是$f,f'\dots f^{(k-1)}$的因式，但不是$f^{(k)}$的因式

20. 没有重因式的充要条件:$f' \nmid f$

21. 余数定理: $f/(x-\alpha)=(x-\alpha)q(x)+c.c=f(\alpha)$

22. 根:$f(\alpha)=0$称α为f的根

23. 多项式的根的个数不超过多项式的次数

24. 两个次数不超过n的多项式，若对于n+1个不同的数有相同的函数值则f=g

1.3 复系数多项式的分解

1. 代数基本定理：任意次数大于1的复系数多项式在复数域内有一个根

2. 复多项式因式分解定理：复系数多项式必唯一分解成一次因式的乘积(必有n个复根)

1.4 实系数多项式的实分解

1. 在复多项式因式分解中，若$x-\alpha$是因式$\Rightarrow x-\bar{\alpha}$也是因式

2. 每个次数大于1的实多项式在实数域上必可分解为一次因式和二次不可约多项式的乘积

1.5 有理系数多项式在有理数域内的分解

1. 本原多项式：多项式的各个系数的最大公因子为±1

2. 有理系数多项式必是本原多项式和有理数的乘积

3. 高斯引理：本原多项式的乘积仍然是本原多项式

4. 若非零多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，
    则必能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积

5. f,g是整系数多项式，g是本原的.$f=gh\wedge h$是有理多项式$\Rightarrow h$是整系数的

6. 整系数多项式的有理根$\frac{r}{s}\wedge(r,s)=1\Rightarrow s|a_n\wedge r|a_0$

7. 艾森斯坦：

$$f=a_nx_n+\cdots+a_0 \ \ \exists\text{素数}p\begin{cases} p\nmid a_n \\ p|a_{n-1},\dots,a_1 \\ p^2\nmid a_0 \end{cases} \Rightarrow f\text{在有理数上不可约}$$

8. 艾森斯坦推论：$\forall n>1, x^n+2=0$在有理数域上不可约.(选质数2)

2 Formula

1. $\partial(f+g)\leqslant \max(\partial(f),\partial(g))$
2. $\partial(fg)=\partial(f)+\partial(g)$
3. 多项式具有：加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法对加法的分配律 乘法消去率
4. 自反性：$f|g\wedge g|f\Rightarrow f=cg\wedge c\neq 0$
5. 传递性：$f|g\wedge g|h\Rightarrow f|h$
6. $f|g_i\Rightarrow f|(u_1g_1+\cdots+u_rg_r)$
7. 两个多项式之间的整除关系不因为数域的扩大而改变
   f,g是P上的多项式，$\bar{P}$是P的扩域，在P中$f|g\Rightarrow$在$\bar{P}$中$f|g$;在P中$f\nmid g\Rightarrow$在$\bar{P}$中$f\nmid g$

3 Tricks

1. 辗转相除法

$$\begin{gathered}
f=h_0\,g+r_1\\
g=h_1r_1+r_2\\
r_1=h_2r_2+r_3\\
\vdots\\
r_{s-1}=h_sr_s+r_{s+1}\\
r_s=h_{s+1}r_{s+1}+0\\
\text{此时}r_{s+1}\text{是}r_s\text{的因式}\Rightarrow r_{s-1}\text{和}r_s,r_{s+1}\text{有公因式}r_{s+1}\\
\cdots\\
f\text{和}g\text{有公因式}r_{s+1}\\
\text{求}uf+vg=d\\
r_1=f-h_0g;\\
r_2=g-h_1r_1\\
\vdots\\
r_{s+1}=r_{s-1}-h_sr_s\\
\text{反向递推带入}r_{s-1},h_sr_s\text{并整理得到}f,g\text{的组合}
\end{gathered}$$

2. 去掉重因式：$\frac{f}{(f,f')}$是f去掉所有重因式