# Chapter 6

BY 线性空间

## 1 集合与映射

Omitted...

## 2 线性空间的定义与性质

1. 线性空间：8公理

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V.k,l\in F \\ 1 & \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha} \\ 2 & (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) \\ 3 & \exists\mathbf{0}\in V,\forall\boldsymbol{\alpha}\in V\rightarrow\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha} \\ 4 & \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\exists\boldsymbol{\beta}\in V\rightarrow\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \\ 5 & 1\in F.1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha} \\ 6 & (kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha}) \\ 7 & (k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha} \\ 8 & k\left(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\right)=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta} \end{array}$$

2. 向量：向量空间中的元素

3. 向量空间的性质：

$$\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}\text{唯一} \\ 2 & \text{加法逆元唯一} \\ 3 & 0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},k\mathbf{0}=\mathbf{0},(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha} \\ 4 & k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\rightarrow(k=0\vee\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}) \end{array}$$

## 3 维数 基与坐标

1. 线性组合：

$$\begin{gathered} \text{线性空间}V\text{中的}n\text{个元素}\alpha_1,\ldots,\alpha_n \\ F\text{上}n\text{个元素}k_1,\ldots,k_n \\ \alpha=\sum k_i\alpha_i \\ \text{称为}\alpha_1,\ldots,\alpha_n\text{的一个线性组合，}\alpha\text{可以用}\alpha_1,\ldots,\alpha_n\text{线性表出} \end{gathered}$$

2. 线性无关：

$$\begin{gathered} \text{线性相关：} \\ \boldsymbol{\alpha}\text{的线性组合等于}0\wedge\text{系数}\boldsymbol{k}\neq 0 \\ \text{线性无关：}\boldsymbol{\alpha}\text{线性的线性组合}=0\Rightarrow\boldsymbol{k}=0 \end{gathered}$$

3. 线性相关性的一些条件：

$$\begin{gathered} \text{单个向量}\boldsymbol{x}\text{线性线性相关}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=0 \\ \text{两个以上的向量组线性相关}\Leftrightarrow\text{至少有一个向量是其余向量的线性组合} \\ \text{向量组}\boldsymbol{\alpha}_r\text{线性无关}\wedge\boldsymbol{\alpha}_r\text{可以被}\boldsymbol{\beta}_s\text{线性表示}\rightarrow r\leqslant s \\ \text{若}\boldsymbol{\alpha}_r\text{线性无关},(\boldsymbol{\alpha}_r,\alpha)\text{线性相关}\Rightarrow\alpha\text{被}\boldsymbol{\alpha}_r\text{唯一线性表示} \end{gathered}$$

4. 向量空间的维数：

$$\text{向量空间中，最大线性无关向量组的长度}$$

5. 向量空间的基：向量空间中一组长度为维数的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}$，系数称为在此基下的坐标

6. 任意向量空间中的向量，都可以被某个线性无关组$\boldsymbol{\alpha}$线性表示$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}$是V的基

# 4 基变换与坐标变换

1. 基变换：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\text{是}V\text{的两个基}\\ \text{则有关系:}\,\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_2C;\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1C^{-1}\end{gathered}$$

2. 坐标变换：

$$\begin{gathered}V\text{的两个基}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2.\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_2C;\\ x\in V,x=\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\xi}_2\boldsymbol{x}_2\\ \rightarrow\text{坐标为}\boldsymbol{x}_1\text{的向量}x\text{在}\boldsymbol{\xi}_2\text{下的坐标为}C\boldsymbol{x}_2\\ \text{得到坐标变换公式：}x_1=Cx_2\end{gathered}$$

# 5 线性子空间

1. 线性子空间：线性空间的V，V的子集U，U为线性空间。称U是V的线性子空间

2. 线性子空间的性质：

$$\begin{array}{cc}1 & 0\in U\\ 2 & \forall\alpha,\beta\in U\rightarrow\alpha+\beta\in U\\ 3 & \forall\alpha\in U\rightarrow k\alpha\in U\end{array}$$

3. 线性子空间的判别条件：

$$\begin{gathered}\forall\alpha\in U,\forall k\in F\rightarrow k\alpha\in U\\ \forall\alpha,\beta\in U\rightarrow\alpha+\beta\in U\end{gathered}$$

4. 生成子空间：$L(\boldsymbol{\alpha})=\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha})$

5. 两个向量组的生成空间相等⇔两个向量组等价

6. $\dim L(\boldsymbol{\alpha})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha})$

7. 子空间必能扩充成完全空间

# 6 子空间的交与和

1. 子空间的交是子空间

2. 子空间的和是子空间$U_1+U_2=\{u_1+u_2|u_1\in U_1,u_2\in U_2\}$

3. 维数公式：

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

推论：$\dim V_1+\dim V_2>\dim V\Rightarrow V_1\cap V_2\neq\{0\}$

## 7 子空间的直和

1. 子空间的直和：$\forall \alpha \in V_1 + V_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$是唯一的

2. 直和的充要条件

$$V_1 + V_2\text{是直和} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$
$$V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

3. 和空间与直和的关系：$\dim V_1 \oplus V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

4. 线性空间的补空间：$U$是$V$的子空间$\Rightarrow \exists W$是$V$的子空间$\wedge V = U \oplus W$

## 8 线性空间的同构

1. 向量、坐标、基的关系

$$\text{向量空间}V\text{。}\boldsymbol{\varepsilon}\text{是}V\text{的一个基}$$
$$\forall x \in V, x = \boldsymbol{\varepsilon}\alpha.\alpha \in F^n$$
$$\text{即坐标给出了线性空间}V\text{到}F^n\text{上的一一映射}$$

2. 向量空间的同构：

$$\text{给定两个向量空间}V, V'$$
$$\exists \sigma\colon V \to V'.\sigma\text{是}1-1\text{的}$$
$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$$
$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$$

   这里称为同构映射

3. 同构映射的性质：

$$\begin{array}{cc}
1 & \sigma(0) = 0'; \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha) \\
2 & \sigma\left(\sum k_i\alpha_i\right) = \sum k_i\sigma(\alpha_i) \\
3 & \alpha_i\text{线性相关} \Leftrightarrow \sigma(\alpha_i)\text{线性相关} \\
4 & V_1\text{是}V\text{的子空间} \Rightarrow \operatorname{range}\sigma(V_1)\text{是}\operatorname{range}\sigma(V)\text{的子空间} \\
5 & \text{同构映射的逆、同构映射的复合是同构映射}
\end{array}$$

4. 定理：$F$上两个有限维线性空间同构⇔维数相同