Chapter 4

BY 矩阵

1 Def & Theo

1. 矩阵：$F^{m,n}$的数组

1.1 矩阵的运算

1. 加法：

$$\begin{array}{ll}
\text{Def} & A_{m,n}+B_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\
\text{结合} & A+B=B+A \\
\text{交换} & (A+B)+C=A+(B+C) \\
\text{零元} & O=(0_{ij}); A+O=A \\
\text{逆元} & -A=(-a_{ij}); A+(-A)=O
\end{array}$$

加法和秩的关系$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$

2. 乘法：

$$\begin{array}{cc}
\text{Def} & A_{m\cdot n}\cdot B_{n\cdot s}=\left(\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\ \right)_{m,s} \\
\text{结合} & (AB)C=A(BC) \\
\text{分配} & A(B+C)=AB+AC; (A+B)C=AC+BC \\
\text{乘幂} & A^n=A^{n-1}A; \\
\text{非交换} & AB\text{与}BA\text{需要进一步判断} \\
\text{非消去} & AB=O\text{不能得到}A=O\vee B=O \\
\text{乘幂不分配} & (AB)^n\neq A^nB^n
\end{array}$$

3. 数乘：

$$\begin{array}{cc}
\text{Def} & kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \\
\text{分配} & (k+l)A=kA+lA \\
\text{分配} & k(A+B)=kA+kB \\
\text{结合} & (kl)\,A=k(lA) \\
\text{结合} & k(AB)=(kA)B=A(kB) \\
\text{矩阵表示} & kA=(kE)A
\end{array}$$

4. 转置：

$$\begin{array}{cc}
\text{Def} & A'_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
\text{自反} & (A')'=A \\
\text{与加法关系} & (A+B)'=A'+B' \\
\text{与乘法关系} & (AB)'=B'A' \\
\text{与数乘关系} & (kA)'=kA'
\end{array}$$

1.2 矩阵乘法的行列式与秩

1. $\det A \cdot \det B = \det (AB)$
2. 矩阵的退化性：$\det A = 0$
3. $A \cdot B$退化$\Leftrightarrow A$退化$\vee B$退化
4. $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$

1.3 矩阵乘法的逆

1. n级方阵是可逆的：$\exists B \in F^{n,n} \to AB = BA = E$
2. 若矩阵可逆，则逆矩阵是唯一的
3. 矩阵可逆⇔矩阵非退化
4. A^*是A的伴随矩阵$=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = dE$
5. 矩阵的逆与转置的关系:A可逆$\Leftrightarrow A'$可逆；$(A')^{-1} = (A^{-1})'$
6. 矩阵的逆与乘法的关系：A, B都可逆$\Leftrightarrow AB$可逆；$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7. 可逆矩阵与矩阵乘不改变矩阵的秩

$$\begin{array}{ll} & A_{m,n}; P_{m,m}\text{可逆}；\ Q_{n,n}\text{可逆} \\ \Rightarrow & \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} PA = \operatorname{rank} AQ = \operatorname{rank} PAQ \\ \text{Pr} & \operatorname{rank} PA \leqslant \operatorname{rank} A; \\ & A = P^{-1}(PA) \Rightarrow \operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} PA \\ \Rightarrow & \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} PA \end{array}$$

1.4 矩阵的分块

可以将大矩阵看作是小矩阵组成的，这对加法、乘法、数乘都兼容。因此可以在某些情况下简化

1. 矩阵的分块：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}, A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 分块矩阵的乘法与矩阵乘法的关系：

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{ms} \end{pmatrix}$$

   矩阵的乘法等于分块矩阵的乘法；

3. 矩阵作为行向量和列向量的视角下的矩阵乘法：

$$AB\text{的行向量是}B\text{的行向量的线性组合}$$
$$AB\text{的列向量是}A\text{的列向量的线性组合}$$

4. 分块对角阵的性质：

$$\begin{array}{cc}
\text{Def} & \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\
\text{加法} & A,B\text{是分块对角阵} \Rightarrow A+B\text{是分块对角阵} \\
 & \begin{pmatrix} A_1+B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n+B_n \end{pmatrix} \\
\text{乘法} & A,B\text{是分块对角阵} \Rightarrow AB\text{是分块对角阵} \\
 & \begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_nB_n \end{pmatrix} \\
\text{逆} & \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix} \\
\text{行列式} & \det A = \prod \det A_i \\
\text{秩} & \operatorname{rank} A = \sum \operatorname{rank} A_i
\end{array}$$

1.5 初等矩阵

1. 初等矩阵是单位矩阵进行一次初等变换得到的矩阵

$$\begin{array}{ccc}
P(i,j) & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{左乘}A\quad\text{交换}A\text{的}i,j\text{行}\\ \text{右乘}A\quad\text{交换}A\text{的}i,j\text{列}\end{array} \\
P(i(c)) & \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & c & & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{左乘}A\quad A\text{的}i\text{行乘}c\text{倍}\\ \text{右乘}A\quad A\text{的}i\text{列乘}c\text{倍}\end{array} \\
P(i,j(k)) & \begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{左乘}A\quad A\text{的}i\text{行}k\text{倍加到}j\text{行}\\ \text{右乘}A\quad A\text{的}i\text{列}k\text{倍加到}j\text{列}\end{array}
\end{array}$$

2. 矩阵的三种初等变换等价于三种矩阵的左乘和右乘

3. 初等矩阵可逆，初等矩阵的逆是初等矩阵

4. 矩阵的等价：若可以经过一系列初等变换得到另一个矩阵，称两个矩阵等价

5. 任意矩阵等价于其标准型

$$A_{m,n}\sim\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, r=\operatorname{rank}A$$
$$\text{Pr}\quad \text{由于}A\text{可以经过初等变换化为这种形式}$$

6. $A \tilde{} B \Leftrightarrow \exists$初等矩阵$P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_m \to A=P_1\times\cdots\times P_nBQ_1\times\cdots\times Q_m$

7. A可逆$\Leftrightarrow A=Q_1Q_2\cdots Q_n$

8. $A\sim B\Leftrightarrow\exists$可逆$P$, 可逆$Q\to A=PBQ$

9. $A\sim E\Leftrightarrow A$可逆

10. $A=Q_1Q_2\cdots Q_n; Q_n^{-1}\cdots Q_1^{-1}(A,E)=(E,A^{-1})$
    这给出了一个快速求矩阵逆的初等变换方法

1.6 分块矩阵乘法的初等变换和应用

分块乘法和初等变换结合是重要的方法

1. 分块矩阵的初等变换矩阵

$$\begin{array}{cc}
\text{二阶矩阵的初等变换矩阵} & \begin{pmatrix} E_m & \\ & E_n \end{pmatrix}\text{的变形} \\
\text{交换两行} & \begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix} \\
\text{可逆矩阵}P\text{乘某一行} & \begin{pmatrix} P & \\ & E_n \end{pmatrix};\begin{pmatrix} E_m & \\ & P \end{pmatrix} \\
\text{矩阵}X\text{乘一行加到另一行} & \begin{pmatrix} E_n & X \\ & E_m \end{pmatrix};\begin{pmatrix} E_n & \\ X & E_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. 分块初等变换与分块初等阵的关系

$$\begin{array}{cc}
\text{交换行} & \begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \\
\text{交换列} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} \\
\text{乘行} & \begin{pmatrix} P & \\ & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix} \\
\text{乘列} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & \\ & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix} \\
\text{乘加行} & \begin{pmatrix} E & P \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}
\end{array}$$

3. 重要的矩阵Trick：

$$
\begin{gathered}
\text{若}A\text{可逆，令}P=-CA^{-1}\Rightarrow C+PA=O\\
\begin{pmatrix} E & O\\ P & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ PA+C & PB+D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\\
\text{若}D\text{可逆，}P=
\end{gathered}
$$

2 Formula & Trick

1. 二维旋转矩阵(逆时针)：

$$
A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}
$$

2. 使用矩阵的逆推导克拉默法则：

   方阵的线性方程组可以表示为

$$
\begin{gathered}
AX=B\\
A\text{可逆}\Leftrightarrow\det A\neq 0\\
X=A^{-1}B\\
AX=A\left(A^{-1}B\right)\\
\text{代入}A^{-1}=\frac{1}{d}A^{*}\text{并展开得到克拉默法则}\\
\text{解的唯一性；}C\text{是解，}AC=B\rightarrow C=A^{-1}B\Rightarrow C=X
\end{gathered}
$$

3.

$$
\begin{gathered}
D=\begin{pmatrix} A & O\\ C & B\end{pmatrix}\text{的逆}\\
|D|=|A|\cdot|B|\\
A,B\text{可逆}\Rightarrow D\text{可逆}\\
\begin{pmatrix} A & O\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_k & \\ & E_r\end{pmatrix}\\
\Rightarrow\begin{cases} AX_{11}=E_k\\ AX_{12}=O\\ CX_{11}+BX_{21}=O\\ CX_{12}+BX_{22}=E_r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X_{11}=A^{-1}\\ X_{12}=A^{-1}O=O\\ CA^{-1}+BX_{21}=O\\ CO+BX_{22}=E_r\end{cases}\\
\Rightarrow\quad\begin{cases} X_{22}=B^{-1}\\ -CA^{-1}=BX_{21}\end{cases}\Rightarrow X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}\\
\Rightarrow\quad C^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

4. 重要矩阵$\begin{pmatrix} E & O \\ P & E \end{pmatrix}, P=-CA^{-1}$的应用

$$\text{求逆}$$
$$A,D\text{可逆；}\ T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix};\text{求}T^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\ T^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{求逆}$$
$$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, T_1\text{可逆，}D\text{可逆}$$
$$\text{证}(A-BD^{-1}C)^{-1}\text{存在，求}T_1^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$\text{左边全可逆，右边也可逆}\rightarrow A-BD^{-1}C\text{可逆}$$
$$T^{-1}=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

任意非退化矩阵A都有下三角阵B, $BA=$上三角阵