Chapter 19

BY 含参量积分

对于多元函数的积分问题，需要完全积分到实数，一次是做不到的

而多次对函数积分中，每一次对函数的偏积分是否存在函数，函数的性质等等需要先行研究

f在$[a,b]\times[c,d]$上的二元函数

$$\text{正常积分}\,\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y, x\in[a,b]$$

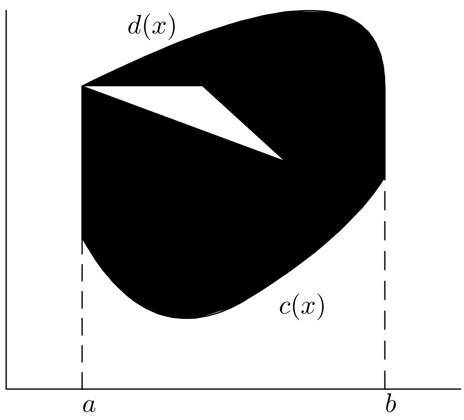
若函数f定义在$[a,b]\times[c(x),d(x)]$的一个区域上

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, x\in[a,b]$$

积分形式表示的函数称为在$[a,b]$上的含参量x的含参量正常积分

$$F(x)=\int_{c(x)}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, x\in I$$

此种积分形式表示的函数称为在$[a,b]$上含参量x的反常积分



1 含参量正常积分

1. 二元有界方形闭区域上的连续函数的一次积分是连续函数

$$
\begin{aligned}
& f(x,y)\text{在}[a,b]\times[c,d]\text{上连续} \\
\Rightarrow \quad & \varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y;\text{在}[a,b]\text{上连续} \\
& \psi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x;\text{在}[c,d]\text{上连续} \\
\mathrm{Pr} \quad & f\text{在有界闭域上连续}\to f\text{在}[a,b]\times[c,d]\text{上一致连续} \\
& \Rightarrow\forall d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\to|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \\
& \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_c^d f(x+\Delta x,y)\mathrm{d}y-\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \\
& =\int_c^d (f(x+\Delta x,y)-f(x,y))\mathrm{d}y \\
& \leqslant\int_c^d \varepsilon\mathrm{d}y=(d-c)\varepsilon
\end{aligned}
$$

也可以写成形式：

$$
\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y
$$

2. 二元紧联通区域上的连续函数的一次积分是连续函数

$$
\begin{aligned}
& f(x,y)\text{在}G=\{(x,y)|c(x)\leqslant y\leqslant d(x),a\leqslant x\leqslant b\}\text{上连续} \\
\Rightarrow \quad & F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y;\text{在}[a,b]\text{上连续} \\
\mathrm{Pr} \quad & y=c(x)+t(d(x)-c(x)) \\
& \mathrm{d}y=(d(x)-c(x))\mathrm{d}t \\
& F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \\
& =\int_0^1 f(x,c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))\mathrm{d}t \\
& f(x,c+t(d-c))(d-c)\text{在}[a,b]\times[0,1]\text{上连续} \\
& \Rightarrow F(x,y(t,x))\text{连续；}\ y(t,x)\text{在}t\in[0,1]\text{上}y\text{可逆；因此}F(x)\text{可逆}
\end{aligned}
$$

3. 函数与偏导数都在矩形区域上连续，则一次积分可微

$$
\begin{aligned}
& f(x,y)\text{与偏导数}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\text{都在}[a,b]\times[c,d]\text{上连续} \\
\Rightarrow \quad & \varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y;\text{在}[a,b]\text{上可微} \\
\wedge \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y \\
\mathrm{Pr} \quad & \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\int_c^d \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y \\
& \text{拉格朗日：}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f_x(x+\theta\Delta x,y) \\
& \text{由于}f_x(x,y)\text{在}[a,b]\times[c,d]\text{上连续}\to f_x\text{在}D\text{上一致连续} \\
& |\Delta x|<\delta\to|f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)|<\varepsilon \\
& \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right| \\
& \leqslant\int_c^d |f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)|\mathrm{d}y \\
& <\varepsilon\int_c^d \mathrm{d}y=\varepsilon(d-c) \\
& \to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)=\int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

4. 导数与偏导数在紧连通集上连续，则一次积分可微

$$
\begin{aligned}
& f(x,y),f_x(x,y)\text{在}R=[a,b]\times[p,q]\text{上连续} \\
& c(x),d(x)\text{可微}\wedge\operatorname{range}c(x),\operatorname{range}d(x)\subset[p,q] \\
\Rightarrow \quad & F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y;\text{在}[a,b]\text{上可微} \\
\wedge \quad & F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x) \\
& F(x)\text{看成复合函数}H(x,c,d)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y;c=c(x);d=d(x) \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial H}{\partial d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} \\
& =\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x)
\end{aligned}
$$

5. 矩形区域连续的函数，一次积分的函数也可积

$$
\begin{aligned}
& f\text{在}D=[a,b]\times[c,d]\text{上连续} \\
\Rightarrow \quad & \varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y;\text{在}[a,b]\text{上可积} \\
\wedge \quad & \psi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x;\text{在}[c,d]\text{上可积} \\
& \text{累次积分}\begin{cases}\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{cases}\text{存在}
\end{aligned}
$$

6. 若二元函数在紧连通区域上连续，则累次积分相等

$$\begin{aligned}
&f(x,y)\text{在}D\text{紧连通区域}D\text{上连续}\\
\Rightarrow\quad &\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\\
\mathrm{Pr}\quad &\varphi_1(u)=\int_a^u \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\\
&\varphi_2(u)=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x\\
&\varphi_1'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u \varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(u)\\
&H(u,y)=\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x\\
&\varphi_2(u)=\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y\\
&H\text{和}H_u\text{在}D\text{上连续}\\
&\rightarrow\varphi_2'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y=\int_c^d H_u(u,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_c^d f(u,y)\mathrm{d}y=\varphi(u)\\
&\rightarrow\varphi_1(u)=\varphi_2(u)+k;\\
&u=a\rightarrow\varphi_1(a)=\varphi_2(a)=0\rightarrow k=0\\
&\rightarrow\varphi_1(u)=\varphi_2(u)
\end{aligned}$$

2 含参量反常积分

2.1 无穷区间上的含参量反常积分的定义与收敛性

1. 定义:在无穷区间上的积分

$$\begin{aligned}
&\text{设函数}f(x,y)\text{是}R=\{(x,y)|x\in I,c\leqslant y<+\infty\}\text{上的函数}\\
&\forall x\in I,\text{反常积分}\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{都收敛}\\
:=\quad &x\text{的函数：}\Psi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{称为含参量}x\text{的无穷限反常积分}
\end{aligned}$$

2. 含参量积分的一致收敛性:

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\exists N>c\rightarrow M>N\\
&\rightarrow\forall x\in I,\left|\int_c^M f(x,y)\mathrm{d}y-\Phi(x)\right|<\varepsilon\\
&\text{称}\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛与}\Phi(x)
\end{aligned}$$

3. 一致收敛的柯西准则:

$$\begin{aligned}
&\text{含参量反常积分在}I\text{上一致收敛}\\
\Leftrightarrow\quad &\forall\varepsilon>0,\exists M>c,A_1,A_2>M\\
&\rightarrow\forall x\in I,\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon
\end{aligned}$$

4. 一致收敛的充要条件:

$$
\begin{gathered}
\int_c^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}x\in I\text{上一致收敛}\\
\Leftrightarrow \lim_{A\to\infty} F(A)=\sup_{x\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right|=0
\end{gathered}
$$

5. 一致收敛的充要条件:

$$
\Leftrightarrow
\begin{gathered}
\int_c^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛}\\
\forall A_n\to\infty, A_1=c.\text{函数项级数}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{在}I\text{上一致收敛}
\end{gathered}
$$

6. 内闭一致收敛:

$$
\begin{gathered}
\forall [a,b]\in I, \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}[a,b]\text{上一致收敛}\\
\text{称反常积分在}I\text{上内闭一致收敛}
\end{gathered}
$$

2.2 一致收敛判别法

1. 一致有界:

$$\forall x\in I, \exists M\in R\to |f(x)|<M$$

2. 魏尔斯特拉斯M判别法:

$$
\begin{cases}
|f(x,y)|\leqslant g(y), (x,y)\in I\times[c,+\infty)\\
\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y\text{收敛}
\end{cases}
\Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛}
$$

3. 狄利克雷判别法:

$$
\begin{cases}
\forall N>c, \displaystyle\int_c^{N} f(x,y)\mathrm{d}y\text{对参量}x\text{一致有界}\\
\forall x\in I, g(x,y)\text{是}y\text{的单调函数}\\
\forall x\in I, \displaystyle\lim_{y\to\infty} g(x,y)=0
\end{cases}
\Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛}
$$

4. 阿贝尔判别法:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛}\\
\forall x\in I, g(x,y)\text{是}y\text{的单调函数}\\
\forall x\in I, g(x,y)\text{在}I\text{上对}x\text{一致有界}
\end{cases}
\Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛}
$$

2.3 含参量反常积分的性质

1. 在整个开区域上连续的函数，且反常积分一致收敛，则积分连续

$$\begin{cases} f\left(x,y\right)\text{在}I\times[c,+\infty)\text{上连续} \\ \int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛} \end{cases} \Rightarrow \Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上连续}$$

$$\text{Pr}\qquad \Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_1}^{A_n}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum u_n(x)\text{在}I\text{上一致连续}$$

$$f\text{在}[c,+\infty]\text{上连续}\to u_n(x)\text{在}I\text{上连续}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{一致收敛}\to\text{在}I\text{上连续}$$

这暗示了在一致收敛的条件下，极限和积分可交换

$$\begin{cases} f(x,y)\text{在}I\times[c,+\infty)\text{上连续} \\ \displaystyle\int_c^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上内闭一致收敛} \end{cases} \Rightarrow \Phi(x)\text{在}I\text{上连续}$$

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}f(x_0,y)$$

2. 若函数和某一偏导数在区域上连续，且含参量反常积分在区域上收敛，

且偏导数在区域上一致收敛，则含参量反常积分在区间上可微

$$\begin{cases} f(x,y),f_x(x,y)\text{在}I\times[c,+\infty)\text{上连续} \\ \Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上收敛} \\ \int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上一致收敛} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(x)\text{在}I\text{上可微} \\ \Phi'(x)=\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y \end{cases}$$

Pr　　与连续性类似，使用函数项级数的可微性证明

这暗示了在偏导数一致收敛且原积分收敛的情况下，微分和积分可交换

$$\begin{cases} f(x,y),f_x(x,y)\text{在}I\times[c,+\infty)\text{上连续} \\ \Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上收敛} \\ \int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y\text{在}I\text{上内闭一致收敛} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(x)\text{在}I\text{上可微} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y \end{cases}$$

3. 若函数在闭区间乘无界区域上连续，且含参量反常积分在闭区间上一致收敛；

则函数在闭区间上可积，则累次积分相等

$$\begin{cases} f(x,y)\text{在}[a,b]\times[c,+\infty)\text{上连续} \\ \Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{在}[a,b]\text{上一致收敛} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(x)\text{在}[a,b]\text{可积} \\ \int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \end{cases}$$

Pr：类似

4. 关于在两个无界区间上的累次积分相等性定理：

$$\begin{cases} f(x,y)\text{在}[a,+\infty]\times[c,+\infty]\text{上连续} \\ \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\text{关于}y\text{在}[c,+\infty)\text{上内闭一致收敛} \\ \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\text{关于}x\text{在}[a,+\infty]\text{上内闭一致收敛} \\ \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\text{或}\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\text{收敛} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Pr 这里用到了f的绝对可积性，用正项级数的理论来看是显然的

2.4 含参量，无界函数的反常积分

1. 含参量无界函数的反常积分定义：

$$f(x,y)\text{在}R=[a,b]\times[c,d)\text{上有定义}$$
$$\text{关于一些}x\text{，}y=d\text{是}f(x,y)\text{的瑕点}$$
$$:= \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\text{是含参量}x\text{的无界反常积分，或含参量瑕积分}$$

2. 一致收敛性：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta<d-c$$
$$\to 0<\eta<\delta,\forall x\in[a,b],\left|\int_{d-\eta}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

3 欧拉积分

两个重要的含参量反常积分定义的函数

$$\Gamma\text{函数} \qquad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t; x>0$$
$$B\text{函数} \quad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}x; p>0; q>0$$

3.1 Γ函数

1. $\Gamma(x)$在$(0,+\infty)$上可微

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Gamma(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t^{x-1}e^{-t})\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\mathrm{d}t\text{在任意闭区间上可微}\to\Gamma(x)\text{在}(0,+\infty)\text{可微}$$

2. 递推公式：

$$\Gamma(x+1)=\int_0^A t^x e^{-t}\mathrm{d}t=-t^x e^{-t}|_0^A+x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=-A^x e^{-A}+x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$
$$\forall x>0, \lim_{A\to+\infty} -\frac{A^x}{e^{-A}}=0$$
$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$
$$\text{初值:}\,\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} t^{1-1}\,e^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t=1$$
$$\Rightarrow\Gamma(x+1)=x!$$

3. Tricks

$$
\begin{aligned}
&\text{令}t=y^2\\
\Gamma(x)=&\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{+\infty}y^{2y-2}e^{-y^2}2y\mathrm{d}y\\
=&2\int_0^{+\infty}y^{2y-1}e^{-y^2}\mathrm{d}y\\
&\text{令}t=py\\
\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=&\int_0^{+\infty}p^{x-1}\,y^{x-1}e^{-py}p\mathrm{d}y\\
=&p^x\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-py}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

3.2 B函数

1. B积分的性质

$$
B\,(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{cases} x<1 & \text{以0为瑕点的无界函数的反常积分}\\ y<1 & \text{以1为瑕点的无界函数的反常积分}\end{cases}
$$

$$
\text{使用柯西准则得到在}(0,+\infty)\times(0,+\infty)\text{上都收敛}
$$

2. B函数在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$内连续;

$$
\forall p_0,q_0,x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1};p\geqslant p_0,q\geqslant q_0
$$

$$
\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\mathrm{d}x\text{收敛}\rightarrow B(p,q)\text{在}(0,+\infty)\times(0,+\infty)\text{上一致收敛}
$$

$$
\Rightarrow B(x,y)\text{在其上连续}
$$

3. $B(x,y)=B(y,x)$

$$
\begin{aligned}
B(x,y)=&\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^1(1-s)^{x-1}s^{y-1}\mathrm{d}s=B(y,x)
\end{aligned}
$$

4. 递推公式:

$$
\begin{aligned}
B(p,q)=&\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1);(p>0,q>1)\\
B(p,q)=&\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q);(p>1,q>0)
\end{aligned}
$$

5. Tricks

   a. $t=\cos^2\varphi$

$$
\begin{aligned}
B(x,y)=&\int_0^1(\cos^2\varphi)^{x-1}(\sin^2\varphi)^{y-1}\mathrm{d}(\cos^2\varphi)\\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2y-1}\varphi\cdot\cos^{2x-1}\varphi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

b. $t=\frac{s}{1+s}, 1-t=\frac{1}{1+s}; \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^2}$

$$\begin{aligned} B(x,y)=&\int_0^{+\infty}\Big(\frac{s}{1+s}\Big)^{x-1}\Big(\frac{1}{1+s}\Big)^{y-1}\frac{1}{(1+s)^2}\mathrm{d}s \\ =&\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

c. $t=\frac{1}{s}$

$$B(x,y)=\int_1^{+\infty}\frac{s^{x-1}+s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s$$

3.3 Γ函数与B函数的关系

$$\begin{gathered} B(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}B(x,y-1) \\ =\frac{y-1}{x+y-1}\cdot\frac{y-2}{x+y-2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{x+1}B(x,1) \\ \text{初始值}B(x,1)=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{x} \\ \Rightarrow B(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}\cdot\frac{y-2}{x+y-2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)!}{(x-1)!} \\ =\frac{(y-1)!(x-1)!}{(x+y-1)!} \\ =\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{gathered}$$