Chapter 12

BY 常数项级数

1 Def&Theo

1.1 Basis

1. 常数项级数：数列的无穷加法$\sum_1^n a_i$

2. 级数的和：部分和的极限$\sum_1^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_1^n a_n$

3. 柯西准则：数项级数收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\wedge\forall n>N,\forall p\in N^+\to|\sum_{i=n}^{n+p} a_i|<\varepsilon$

   推论：$\sum a_n$收敛$\Rightarrow\lim a_n=0$

4. 线性性：若u_n,v_n收敛$\Rightarrow\sum(\lambda_1 u_n+\lambda_2 v_n)=\lambda_1\sum u_n+\lambda_2\sum v_n$

5. 去掉、增加、改变级数的有限项不改变敛散性

6. 收敛级数。任意加括号即不改变收敛性也不改变和

   如果括号中的项都有相同的符号，则加括号收敛 去掉括号的级数收敛

1.2 正项级数

全正项级数和全负项级数的收敛性判别法

1. 正项级数收敛$\Leftrightarrow$部分和数列有界

2. 比较原则：

$$\begin{array}{cc} & \sum u_n\text{和}\sum v_n\text{是两个正项级数}\wedge u_n\leqslant v_n \\ \wedge & \begin{cases}\sum v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum u_n\text{收敛}\\ \sum u_n\text{发散}\Rightarrow\sum v_n\text{发散}\end{cases}\end{array}$$

3. 比较原则的极限形式：

$$\begin{array}{cc} & \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l \\ \Rightarrow & \begin{cases}\lambda\in R^+ & \Rightarrow & u,v\text{同敛散}\\ l=0\wedge v\text{收敛} & \Rightarrow & u\text{收敛}\\ l=+\infty\wedge v\text{发散} & \Rightarrow & u\text{发散}\end{cases}\end{array}$$

4. 比式判别法(达朗贝尔)：

$$\begin{array}{cc} & \sum u_n\text{为正项级数，}\exists N_0\in N^+\wedge\exists q\in(0,1) \\ \wedge & \forall n>N_0\begin{cases}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q & \Rightarrow & \sum u_n\text{收敛}\\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1 & \Rightarrow & \sum u_n\text{发散}\end{cases}\end{array}$$

极限形式：

$$\sum u_n\text{为正项级数}\wedge \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$
$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} q<1 & \text{收敛} \\ q>1 & \text{发散} \\ q=1 & \text{进一步判断} \end{cases}$$

上下极限形式：

$$\sum u_n\text{为正项级数}$$
$$\begin{cases} \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1 & \Rightarrow\text{收敛} \\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1 & \Rightarrow\text{发散} \end{cases}$$

5. 根式判别法(柯西)：

$$\sum u_n\text{为正项级数，}\exists N_0\in N^+\wedge\exists\lambda\in R^+$$
$$\forall n>N_0\begin{cases} \sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1 & \text{收敛} \\ \sqrt[n]{u_n}\geqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$$

极限形式：

$$\sum u_n\text{为正项级数}\wedge \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$
$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} l<1 & \text{收敛} \\ l>1 & \text{发散} \end{cases}$$

上下极限形式：

$$\sum u_n\text{是正项级数}, \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l$$
$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} l<1 & \text{收敛} \\ l>1 & \text{发散} \end{cases}$$

6. 积分判别法：

$$f\text{是}[1,+\infty)\text{上的非负减函数.}$$
$$\sum f(n)\text{和}\int_1^{+\infty}f\text{同敛散}$$

7. 拉贝判别法(p)：

$$\sum u_n\text{是正项级数，}\exists N_0\in N^+\wedge\exists r$$
$$\forall n>N_0\wedge\begin{cases} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r>1 & \text{收敛} \\ n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$$

极限形式：

$$\sum u_n\text{是正项级数}\wedge\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$$
$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} r>1 & \text{收敛} \\ r<1 & \text{发散} \end{cases}$$

1.3 一般级数

1. 交错级数,相邻两项的符号相反

2. 莱布尼兹判别法:

$$\sum u_n\text{是交错级数} \wedge \begin{cases} |u_n|\text{单调递减} \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum u_n\text{收敛}$$
$$\text{余项估计为:} |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

3. 绝对收敛：$\sum |u_n|$收敛

4. 绝对收敛的级数一定收敛(Pr: 柯西准则)

5. 条件收敛：收敛但不绝对收敛

6. 绝对收敛级数的任意重排也绝对收敛，且具有相同的和

7. (黎曼)条件收敛级数的重排可以收敛到任意的实数和发散

8. 级数的乘积:

$$\begin{array}{ll} \text{正方形} & u_1v_1 + (u_2v_1 + u_2v_2 + u_1v_2) + (u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + u_2v_3 + u_1v_3) + \cdots \\ \text{对角线} & u_1v_1 + (u_2v_1 + u_1v_2) + (u_3v_1 + u_2v_2 + u_1v_3) + \cdots \end{array}$$

9. 柯西定理：绝对收敛的级数的积也绝对收敛

   Mertens: 两个收敛级数至少有一个绝对收敛，则乘积收敛到极限的和

10. 分部求和公式、阿贝尔变换:

$$A_n = \sum a_n . A_{-1} = 0$$
$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

11. 阿贝尔判别法:

$$a_n\text{单调有界数列} \wedge \sum b_n\text{收敛} \Rightarrow \sum a_n b_n\text{收敛}$$

12. 狄利克雷判别法:

$$a_n\text{单调减} \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum b_n\text{的部分和数列有界} \Rightarrow \sum a_n b_n\text{收敛}$$

2 Formula

3 Trick