代数学方法-基础架构

李文威

2022 年 11 月 17 日

第一章　范畴论基础

1.1　范畴与态射

概括地说，范畴是由对象及其间的态射组成的数学结构，从对象 X 到对象 Y 的态射 f 习惯以箭头来描述

$$X \xrightarrow{f} Y$$

函子视作范畴间保持箭头结构的某种“映射”，函子之间的关系由自然变换描述。

数学中考虑的范畴经常以一类特定的结构为对象，例如群，环，向量空间，偏序集，拓扑空间等，范畴中的态射经常是保结构的映射，如群同态，连续映射等。函子与自然变换在这种种结构之间搭起桥梁。范畴论的本意不止于研究它们各自的性质。

范畴视角的特色正在于重视关联甚于数学对象本身，并以同构代替严格等式。

实际上，范畴里的对象未必是建立在集合上的结构，而态射也未必是映射。

	拓扑学 (配边理论)	量子物理	数理逻辑 (形式演绎系统)	计算机科学 (带类型的 λ 演算)
对象	流形	物理系统	命题	资料形态
态射	配边关系	过程	证明	程序

自然学科终归需要实践来检验。

实用中往往会考虑带有特殊结构的范畴。幺半范畴是最常见的结构之一，其中具有类似于乘法的操作。

集合的大小对范畴的性质有实在的影响。

定义 1.1.1 (范畴 $\mathcal{C}$). 指:

1. 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，其元素称作 $\mathcal{C}$ 的 对象
2. 集合 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，其元素称作 $\mathcal{C}$ 的 态射，配上一对映射

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

   其中 s, t 分别给出态射的来源和目标。对于 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，习惯记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$ 或简记为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$，称为 Hom-集，其元素称为从 X 到 Y 上的态射。

   (从 X 出发的态射和到达 Y 的态射的交集)

3. 任意对象 X 给定元素 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$，称为 X 到自身的恒等态射。
4. $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，给定态射间的 合成映射

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

   不致混淆时常将 $f \circ g$ 简记为 fg，它满足

   (a) 结合律: $\forall$ 态射 $h, g, f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，若合成 $f(gh)$ 和 $(fg)h$ 都有定义，则
   $$f(gh) = (fg)h$$
   (b) $\forall$ 态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 有
   $$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$$

注意 1. .

- 注意到 id_X 被其性质唯一确定。对象与态射集皆空的范畴称为空范畴，记为 $\mathbf{0}$.
- 一般也将 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 写作 $f : X \to Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$，故态射有时又叫作箭头。态射的合成对应于箭头的头尾衔接。图表加箭头是讨论

范畴的方便语言。其中最常用的是交换图表的概念,“交换”意指箭头的合成殊途同归，例如：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "y"] & D \end{tikzcd}$$

的交换性分别等价于 $gf = h$ 和 $vu = yx$。态射的名称 f, g 等自明或者不重要，则常可以从图表中省略。

- 对于态射 $f : X \to Y, \exists g : Y \to X \Rightarrow fg = \mathrm{id}_Y \wedge gf = \mathrm{id}_X$，则称 f 是同构 (或称可逆，写作 $f : X \xrightarrow{\sim} Y$)，$g$ 称为 f 的逆，从恒等态射的性质易见逆若存在则唯一。从 X 到 Y 的同构集记为 $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

- 记 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X), \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(X, X)$，分别称作 X 的自同态集和自同构集。这些集合在二元运算 $\circ$ 下封闭：用代数的语言来说，$\mathrm{End}(X)$ 是幺半群，$\mathrm{Aut}(X)$ 是群。

定义 1.1.2 (子范畴)**.** 称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴, 如果满足四条件:

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

2. $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，并保持恒等态射

3. 来源/目标映射 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}') \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 是由 $\mathcal{C}$ 限制而来的

4. $\mathcal{C}'$ 中态射的合成也是由 $\mathcal{C}$ 限制而来的

简而言之, 任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 X, Y, 有包含关系 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 它与态射的合成兼容。如果 $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 则称 $\mathcal{C}'$ 是全子范畴。

定义 1.1.3 ($\mathcal{U}$-范畴，$\mathcal{U}$-小范畴)**.** .

范畴 $\mathcal{C}$ 对于 $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 都是 $\mathcal{U}$-小集（局部 $\mathcal{U}$-小范畴）。

如果态射集 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 也是 $\mathcal{U}$-小集，则称为 $\mathcal{U}$-小范畴

注意 2. .

范畴 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{U}$-小范畴当且仅当它是 $\mathcal{U}$-范畴且 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{U}$-小集。因为 $X \mapsto id_X$ 将 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 嵌入 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

将群、环、空间等其它结构称为 $\mathcal{U}$-群 (环、空间)，如果它们作为集合是一个 $\mathcal{U}$-集合。不致混淆时，也简称作小集，小群等等。

约定 1 (). 选定宇宙后，若不另外说明，将略去符号 $\mathcal{U}$ 将集合、群等理解为 $\mathcal{U}$-集（群）等。所论的范畴如不另外说明都是 $\mathcal{U}$-范畴。

例 1.1.1 (几个基本的范畴的例子). .

1. 预序集等同于任意两个对象之间至多有一个态射的范畴：对于预序集 $(P, \leq)$，定义范畴使得其对象集为 P，而存在态射 $p \to p' \Leftrightarrow p \leq p'$，此时这样的态射唯一。特别地，根据对有限序数的递归定义，任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 视为序数等同于全序集 $\{0, ..., n-1\}$，而 $0 = \emptyset$。相应的范畴记为 $\mathbf{n}$，其结构可以形象地表为

$$0 \to 1 \to ... \to (n-1)(\text{略去恒等态射})$$

   特别地，0 给出空范畴 $\mathbf{0}$，1 给出恰有一个对象和一个态射的范畴 $\mathbf{1}$.

2. 令 Set 为所有集合构成的范畴，对象 X, Y 之前的态射定义为映射 $X \to Y$。态射的合成就是映射的合成，恒等态射就是映射的合成，恒等态射就是恒等映射。这是 $\mathcal{U}$-范畴。

3. 带基点的集合范畴 $\mathsf{Set}_\bullet$。对象是所有 (X, x)，其中 X 是集合 $x \in X$(基点)，从 $(X, x) \to (Y, y)$ 的态射是满足 $f(x) = y$ 的映射 $f : X \to Y$

4. 令 Grp 是所有群构成的范畴，对象之间的态射定义为群同态，态射的合成与恒等态射定义与 Set 相同。

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

5. 令 Ab 为所有交换群 (Abel 群，二元运算用加法 $+$) 构成的范畴，态射与 Grp 的情形相同。它是 Grp 的全子范畴。注意到交换群的同态可以相加 (复合)，因此对于任意两个交换群 X, Y，同态集 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 不仅是一个集合，它还具有交换群的结构 $(G, +)$，这使得合成映射 $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ 满足双线性：

$$(f + g)h = fh + gh, \quad h(f + g) = hf + hg$$

这是 Ab-范畴的一个特殊情形。

$$(f+g)(xy) = f(g(x)g(y)) = f(g(x))f(g(y)) = (f+g)(x) \cdot (f+g)(y)$$

6. 令 Top 为所有拓扑空间构成的范畴，空间皆假定为 Hausdorff 的，态射定义为连续映射，合成与恒等态射的定义同上；类似的定义带基点的拓扑空间 $\mathsf{Top}_\bullet$。我们也希望赋予同态集 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 额外的结构，例如紧开拓扑，使得 $\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)$ 成为连续映射；更希望能有自然的同构

$$\mathrm{Hom}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y,Z))$$

   相关的点集拓扑问题颇为棘手，为了在确保良好的范畴性质的同时容许充分广的拓扑空间，在同伦论里一般选用 Top 的一个子范畴 CGHaus，称为紧生成 Hausdorff 空间范畴

7. 选定一个域 $\Bbbk$，令 $\mathsf{Vect}(\Bbbk)$ 为 $\Bbbk$ 上的所有向量空间构成的范畴，态射为线性映射。类此定义有限维向量空间范畴 $\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$, 它是 $\mathsf{Vect}(\Bbbk)$ 的全子范畴

8. 给定集合 S，定义相应的离散范畴 $\mathsf{Disc}(S)$：其对象集为 S 而态射仅有恒等态射 $\{\mathrm{id}_x : x \in S\}$

注意 3. 如果不用约定 1 而直接考虑所有集合，所有群等等构成的范畴，则会面临悖论，因为所有集合的全体并不构成集合。常见的一种做法是区分类和集，并要求对象全体成一个类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，而任一个态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 是集合。用 ZFC 来考虑较为迂回，而 NBG 集合论则特别适应与这个编发。将真类引入范畴论公理会造成不少麻烦，之后要讨论的函子范畴是一个例子。因此我们宁可引入宇宙的概念，并假设所考察的数学对象都是 $\mathcal{U}$-小的。

单射和满射的概念有自然的范畴论推广

定义 1.1.4 (单态射，满态射)**.** X, Y 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

1. 单态射任何对象 Z 和任一对态射 $g, h : Z \to X$ 有 $fg = fh \Leftrightarrow g = h$ 左消去律；

2. 满态射任何对象 Z 和任一对态射 $g, h : Y \to Z$ 有 $gf = hf \Leftrightarrow g = h$ 右消去律；

如存在 g 使得 $gf = id_X$，则称 f 左可逆而 g 是它的一个左逆；类似的可以定义右逆。左可逆蕴含单，右可逆蕴含满。态射可逆当且仅当它左右皆可逆。

例 1.1.2 (常用范畴中的单性与满性)**.** .

在范畴 $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}, \mathsf{Vect}(\Bbbk)$ 中，态射的单性与满性分别等价于集合论意义下的单射和满射，而且既单又满的态射恰好是同构。对其它范畴则略有区别。在 Top 中，态射 $f : X \to Y$ 有稠密的像便是满态射。而在复拓扑向量空间范畴 $\mathsf{TopVect}(\mathbb{C})$ 中，存在许多连续线性映射 $f : V \to W$，使得 f 是双射而非开映射，这样的态射既单且满，却不是同构。

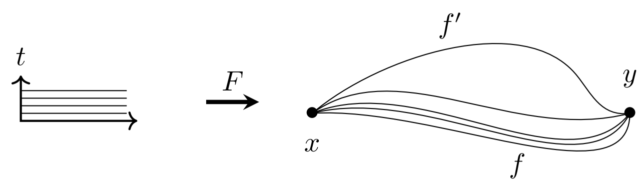
定义 1.1.5 (广群)**.** 若一个范畴 $\mathcal{C}$ 中的所有态射都可逆，则称之为*广群*。

只有一个对象的范畴与幺半群一一对应: 相应的幺半群是 $\mathrm{End}(X), x$ 是唯一对象。群无非是只有一个对象的广群。由于广群里的箭头都是同构，它适合用来表述数学对象的分类问题。???

例 1.1.3 (基本广群)**.** 设 X 是拓扑空间，两点 x, y 之间的道路意指连续映射 $f : [0, 1] \to X, f(0) = x, f(1) = y$. 道路的合成无非是头尾相接：对于 $x, y, z \in X$ 和道路 $f(x \to y), f'(y \to z)$, 定义 $x \to z$ 的道路 f'' 为:

$$f''(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f'(2t-1), & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

两条 x, y 之间的道路 f, f' 称为 (定端) 同伦的，如果存在连续映射 $F : [0, 1]^2 \to X$ 使得对每个 $t \in [0, 1], F(\cdot, t)$ 都是 x, y 之间的道路，而且 $F(\cdot, 0) = f, F(\cdot, 1) = f'$。同伦构成一个等价关系。易见道路的合成可以在同伦类的层次定义。



空间 X 的基本广群 $\Pi_1(X)$ 定义为如下范畴，其对象是 X 中的点，对任意 $x, y \in X$，态射集 $\mathrm{Hom}(x, y)$ 定义为所有从 x 到 y 的道路类；态射的合成定义为道路类的合成，而恒等态射 id_x 由静止道路 $\forall t, \mathrm{id}_x(t) = x$ 表示。对

于给定的态射 $f : x \to y$(同伦类中的某个代表元)，其逆可以取为反向道路 $f^{-1} := f(1-t), t \in [0,1]$。

可以验证这些操作都是良定的，并使得 $\Pi_1(X)$ 成为广群。注意到 $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Hom}(x,x)$ 正好是以 x 为基点的*基本群* $\pi_1(X,x)$.

基本群是拓扑学中重要的不变量，它为每个空间 X 指定一个相应的代数结构 (群)。基本广群可以视为再高一阶的不变量：它为 X 指定一个范畴。但是应当注意还有大量拓扑信息被 $\Pi_1(X)$ 的范畴结构遗漏了：除了道路的同伦类，还应该计入道路间的同伦等价，还可以设想同伦之间更有同伦，直至无穷。凡此种种都必须以更高阶的范畴语言反映。???

定义 1.1.6 (反范畴)**.** 任意范畴 $\mathcal{C}$，其反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 定义为：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,Z), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$ 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的合成 $f \circ^{\mathrm{op}} g$ 定义为 $\mathcal{C}$ 中的反向合成 $g \circ f$
- 恒等态射定义等同 $\mathcal{C}$

容易验证 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 满足范畴定义，且 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$。

简而言之，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的构造就是反转箭头，反转之后的范畴论公理依然成立，范畴论中的这种对称性也称作对偶原理。例如：$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的单态射无非是 $\mathcal{C}$ 中的满态射。

1.2　函子与自然变换

定义 1.2.1 (函子)**.** 设 $\mathcal{C}', \mathcal{C}$ 为范畴。一个函子 $F : \mathcal{C}' \to C$ 指：

1. 对象间的映射 $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
2. 态射间的映射 $F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}') \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 使得
    - F 的来源和目标映射可交换 $sF = Fs, tF = Ft$，等价的说法是 $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 都有映射 $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$
    - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f); F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$

对于 $F:\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2, G:\mathcal{C}_2\to\mathcal{C}_3$，合成函子 $G\circ F:\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_3$ 的定义是显然的：取合成映射

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)\xrightarrow{F}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)\xrightarrow{G}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_3)$$
$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_1)\xrightarrow{F}\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_2)\xrightarrow{G}\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_3)$$

旧文献常将上述函子称为 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 的共变函子，形如 $F:(\mathcal{C}')^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}$ 的函子为反变函子。

注意 4. 从 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 和从 $(\mathcal{C}')^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的函子是一回事。为区分，对于函子 $F:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$，反范畴间的相应函子记为 $F^{\mathrm{op}}:(\mathcal{C}')^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

定义 1.2.2 (函子的满性，忠实性，全性)**.** 对于函子 $F:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$

1. 本质满的：若 $\mathcal{C}$ 中任一对象都同构于某个 FX
2. 忠实的：若 $\forall X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, 映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX,FY)$ 都是单射
3. 全的：上述映射对 $\forall X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 都是满射

例 1.2.1 (函子)**.** .

1. 子范畴 $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$ 给出一个包含函子 $\iota:\mathcal{C}'\hookrightarrow\mathcal{C}$; 包含函子总是忠实的，它是全函子当且仅当 $\mathcal{C}'$ 是全子范畴。取 $\mathcal{C}'=\mathcal{C}$ 就得到恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$
2. 考虑群范畴 Grp.$\forall$ 群 G，总是可以忘掉 G 的群结构而视之为集合，群同态当然也可以视为集合间的映射，此程序给出*忘却函子* $\mathsf{Grp}\to\mathsf{Set}$。类似地给出忘却其它结构的忘却函子 $\mathsf{Top}\to\mathsf{Set}$(忘却空间的拓扑结构)，$\mathsf{Vect}(\Bbbk)\to\mathsf{Ab}$(忘掉 $\Bbbk$-向量空间 V 的纯量乘法，只看它的加法群 $(V,+)$) 等等。这类函子显然忠实而非全。
3. 考虑域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴 $\mathsf{Vect}(\Bbbk)$。对于任意 $\Bbbk$-向量空间 V, 定义其对偶空间

$$V^\vee:=\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,\Bbbk)=\{\Bbbk\text{-线性映射}V\to\Bbbk\}$$

任一线性映射 $f: V_1 \to V_2$ 诱导对偶空间的反向映射

$$f^\vee : V_2^\vee \to V_1^\vee$$
$$[\lambda : V_2 \to \Bbbk] \mapsto \lambda \circ f$$

易见 $D: V \mapsto V^\vee, f \mapsto f^\vee$ 定义了函子 $D: \mathsf{Vect}(\Bbbk)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}(\Bbbk)$，可以验证 D 是忠实的。根据反函子的定义合成函子 $DD^{\mathrm{op}}: \mathsf{Vect}(\Bbbk) \to \mathsf{Vect}(\Bbbk)$

将 D 限制于有限维向量空间，得到函子 $D: \mathsf{Vect}_f(\Bbbk)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$ 和 $DD^{\mathrm{op}}: \mathsf{Vect}_f(\Bbbk) \to (Vect)_f(\Bbbk)$，分别称为对偶和双对偶函子。

4. 对于任意群 G，定义导出子群 G_{der} 为子集 $\{xyx^{-1} : x, y \in G\}$ 生成的正规子群。商群 G/G_{der} 是交换群，称作 G 的 Abel 化。对于任意群同态 $\varphi: G \to H$，从定义可以看出 $\varphi(G_{\mathrm{der}}) \subset H_{\mathrm{der}}$，因此 φ 诱导出交换群的同态 $\bar{\varphi}: G/G_{\mathrm{der}} \to H/H_{\mathrm{der}}$。容易验证 $G \mapsto G/G_{\mathrm{der}}, \varphi \mapsto \bar{\varphi}$ 定义了 Abel 化函子 $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$。Abel 化函子不是忠实函子。

5. 对任意带点拓扑空间 (X, x) 指定基本群 $\pi_1(X, x)$，给出了函子 $\mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Grp}$。代数拓扑学中还有许多例子，例如空间的同调群 $X \mapsto H_n(X; Z)$ 给出了一族函子 $H_n : \mathsf{Top} \to \mathsf{Ab}$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，上同调群给出函子 $H^n : \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$。

定义 1.2.3 (自然变换，或函子间的态射)**.** 函子 $F, G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ 之间的自然变换 θ 是一族态射

$$\theta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GX), X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$$

使得下图所有 $\mathcal{C}'$ 中的态射交换

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\theta_Y"'] & GY.
\end{tikzcd}$$

上述自然变换写作 $\theta : F \to G$，或图解为

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

上述带有双箭头 $\Rightarrow$ 的图表有时也被称为 2-胞腔，一种兴许更有益的看法是设想 θ 为从 F 到 G 的一个同伦。

约定 2. . 我们也将自然变换 $\theta : F \to G$ 称为从函子 F 到 G 的态射。实用中经常会省略严格的范畴论框架，只说态射 $\theta_X : FX \to GX$ 对于变元 X 是*自然的*，*典范的*，或称满足*函子性*。实践中经常把自然同构直接写成等号 $=$。

几种自然变换的操作，包括纵、横两种合成

- 纵合成: 考虑 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 的三个函子间的态射 $\theta : F \to G, \psi : G \to H$。纵合成 $\psi \circ \theta := \{\psi_X \circ \theta_X : X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$，图解:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=M, Rightarrow, "\theta"] \arrow[from=M, to=D, Rightarrow, "\psi"] \end{tikzcd} \quad \text{合成为} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\psi\circ\theta"] \end{tikzcd}$$

- 横合成：考虑函子 $\begin{tikzcd} \mathcal{C}'' \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathcal{C}' \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$ 及态射 $\theta : F_1 \to F_2, \psi : G_1 \to G_2$。现定义横合成 $\psi \circ \theta : G_1 \circ F_2 \to G_2 \circ F_2$。注意到对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'')$，根据 ψ 的自然性，图表

$$\begin{tikzcd} G_1F_1(X) \arrow[r, "\psi_{F_1X}"] \arrow[d, "G_1(\theta_X)"'] & G_2F_1(X) \arrow[d, "G_2(\theta_X)"] \\ G_1F_2(X) \arrow[r, "\psi_{F_2X}"'] & G_2F_2(X) \end{tikzcd}$$

交换。对角合成 $\searrow$ 记作 $(\psi \circ \theta)_X : G_1F_1(X) \to G_2F_2(X)$，此即所求的横合成，我们马上会证明它的自然性。图解:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}'' \arrow[r, bend left=50, "F_1"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "F_2"'{name=B}] & \mathcal{C}' \arrow[r, bend left=50, "G_1"{name=C}] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\theta"] \arrow[from=C, to=D, Rightarrow, "\psi"] \end{tikzcd} \quad \text{合成为} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}'' \arrow[r, bend left=50, "G_1F_1"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G_2F_2"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\psi\circ\theta"] \end{tikzcd}$$

- 横合成的特例

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{C}_3 \arrow[r, "K"] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"] & \mathcal{C}_4 \end{tikzcd}$$

对左边三项: $\theta H : FH \to GH$ 简记横合成 $\theta \circ \mathrm{id}_H$; 具体地说, $(\theta H)_X = \theta_{HX} : FH(X) \to GH(X)$; 类似地处理右三项: $K\theta : KF \to KG$ 为横合成 $\mathrm{id}_K \circ \theta$，我们有 $(K\theta)_X = K(\theta_X) : KF(X) \to KG(X)$

注意 5. 这里使用了同一个符号 $\circ$ 表示纵横合成，如有混淆之虞将另作说明

引理 1.2.1. 横纵合成 $\{(\psi \circ \theta)_X\}_X$ 都是函子间的态射，而且各自满足严格结合律 $(\phi \circ \psi) \circ \theta = \phi \circ (\psi \circ \theta)$。横纵合成之间满足关系：对于图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left=50, ""{name=U1, below}] \arrow[r, ""{name=M1}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D1, above}] \arrow[from=U1, to=M1, Rightarrow, "\theta"] \arrow[from=M1, to=D1, Rightarrow, "\psi"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, bend left=50, ""{name=U2, below}] \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D2, above}] \arrow[from=U2, to=M2, Rightarrow, "\theta'"] \arrow[from=M2, to=D2, Rightarrow, "\psi'"] & \mathcal{C}_3
\end{tikzcd}$$

以下的互换律成立

$$\left(\psi' \underset{\text{纵}}{\circ} \theta'\right) \underset{\text{横}}{\circ} \left(\psi \underset{\text{纵}}{\circ} \theta\right) = \left(\psi' \underset{\text{横}}{\circ} \psi\right) \underset{\text{纵}}{\circ} \left(\theta' \underset{\text{横}}{\circ} \theta\right)$$

证明. 证明横合成是函子间的态射。对于 $\mathcal{C}''$ 中的态射 $f : X \to Y$, 图表

$$\begin{tikzcd}
G_1F_1(X) \arrow[r, "G_1\theta_X"] \arrow[d, "G_1F_1f"'] & G_1F_2(X) \arrow[r, "\psi_{F_2X}"] \arrow[d, "G_1F_2f"] & G_2F_2(X) \arrow[d, "G_2F_2f"] \\
G_1F_1(Y) \arrow[r, "G_1\theta_Y"'] & G_1F_2(Y) \arrow[r, "\psi_{F_2Y}"'] & G_2F_2(Y)
\end{tikzcd}$$

按定义，水平方向箭头合成后上下分别是 $(\psi \circ \theta)_X$ 和 $(\psi \circ \theta)_Y$。因为 θ 是自然变换而 G_1 是函子，左方块交换；由于 ψ 是自然变换，右方块交换。将箭头分段作合成，可知整个大方块交换，此即 $\psi \circ \theta$ 所需性质。

现证明横合成的结合律：考虑函子间的态射

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}''' \arrow[r, bend left=50, "F_1", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right=50, "F_2"', ""{name=B, above}] \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\theta"] & \mathcal{C}'' \arrow[r, bend left=50, "G_1", ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right=50, "G_2"', ""{name=D, above}] \arrow[from=C, to=D, Rightarrow, "\psi"] & \mathcal{C}' \arrow[r, bend left=50, "H_1", ""{name=E, below}] \arrow[r, bend right=50, "H_2"', ""{name=F, above}] \arrow[from=E, to=F, Rightarrow, "\phi"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}''')$ 考虑图表

$$\begin{tikzcd}
 & & H_1G_2F_2(X) \arrow[dr] & \\
H_1G_1F_1(X) \arrow[r] & H1G_2F_1(X) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_2G_2F_2(X) \\
 & & H_2G_2F_1(X) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ψ 的自然性 $G_2F_1(X) \to G_2F_2(X)$ 可知菱形部分交换。按 $\nearrow\!\searrow$ 合成给出 $(\phi \circ (\psi \circ \theta))_X$。按 $\searrow\!\nearrow$ 合成则给出 $((\phi \circ \psi) \circ \theta)_X$。这里仍须用上交换图表，结合律证毕。

最后一个等式可以同样按图索骥。 □

任意函子 F 到自身有恒等态射 $\mathrm{id}_F : F \to F$。给定函子间的态射 $\theta : F_1 \to F_2$，若态射 $\psi : F_2 \to F_1$ 满足 $\psi \circ \theta = \mathrm{id}_{F_1}, \theta \circ \psi = \mathrm{id}_{F_2}$，则称 ψ 是 θ 的逆。可逆的态射称为**函子间的同构**，写作 $\theta : F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$。由定义，若 θ 的逆存在则唯一，记为 θ^{-1}，它无非是在范畴中"逐点地"取逆:$(\theta^{-1})_X := (\theta_X)^{-1} : F_2X \xrightarrow{\sim} F_1X$。态射 θ 可逆当且仅当每个 θ_X 都可逆。易见同构的横纵合成仍是同构。函子间同构 $\theta : F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$ 的等价说法是称 $\theta_X : F_1X \xrightarrow{\sim} F_2X$ 对变元 X 是**自然同构**或**典范同构**。

定义 1.2.4 (等价)**.** 如果一对函子 $\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{C}_2 \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ 满足性质：存在函子之间的同构 $\theta : FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}, \psi : GF \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$ 则称 G 是 F 的**拟逆函子**，并称 F 是范畴 $\mathcal{C}_1$ 到 $\mathcal{C}_2$ 的**等价**。

进一步，如果有 $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}, GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$，则称 F 是范畴间的**同构**，G 是 F 的**逆**。

容易证明，等价的合成仍是等价。

例 1.2.2 (CHaus)**.** 令 CHaus 为紧 Hausdorff 拓扑空间范畴，$C^* - \mathsf{CommAlg}$ 为含幺元的交换 C^*-代数所成的范畴（态射为保幺元的 $*-$ 同态）。交换版本的 Gelfand-Naimark 定理断言函子

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{CHaus} & \rightleftarrows & C^* - \mathsf{CommAlg} \\ X & \longmapsto & C(X) : \text{连续复值函数空间} \\ \mathfrak{M}_A : \text{极大理想空间} & \longleftarrow & A \end{array}$$

互为拟逆：Gelfand 变换 $a \mapsto \hat{a}$ 给出自然同构 $A \xrightarrow{\sim} C(\mathfrak{M}_A)$。

命题 1.2.1. 若 G, G' 是函子 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 的拟逆，则存在函子的同构 $G \simeq G'$

证明. 自然变换的横合成给出 $G \xrightarrow[\sim]{\psi' \circ \mathrm{id}G} (G'F)G = G'(FG) \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id}G' \circ \theta} G'$ □

注意 6. 我们业已对对象间的态射和函子间的态射 (自然变换) 定义了逆的概念，由此导出对象和自然变换同构的概念，若逆存在则唯一。对于函子亦

可定义逆的概念，逆函子若存在则唯一；相较之下，拟逆函子之间则可以差一个同构。实践表明范畴的同构概念不甚实用，等价的概念则处处出现。这体现了范畴论的一条经验准则：在函子层次，同构 (如之前的 $\theta : FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$) 几乎总是比严格相等 (如之前的 $FG = id$) 来得管用。然而同构也不是任意的，所需的条件一般称为融贯性：以等价为例，拟逆的概念有些松散，后面给出定理给出称为伴随等价的一种细化。

定义 1.2.5 (骨架，骨架范畴)**.** 称一个全子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一副骨架。如果对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 X 都存在同构 $X \xrightarrow{\sim} Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$，且此同构中的像 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 是唯一的。

自为骨架的范畴称为骨架范畴

引理 1.2.2. 任意范畴 $\mathcal{C}$ 总有一副骨架 $\mathcal{C}'$，而且包含函子 $\iota : \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是等价。骨架范畴间的全忠实，本质满函子都是同构。

证明.

- 任意范畴必有骨架

  使用选择公理在 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 的每个同构类中选定代表元，由这些代表元构成的全子范畴记作 $\mathcal{C}'$。同理，对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 可以选定同构 $\theta_X : X \xrightarrow{\sim} \kappa(X)$，其中 $\kappa(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$。假设对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 有 $\theta_X = \mathrm{id}_X$。存在唯一一种方法将 $\kappa : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ 延拓为函子并使得 $\theta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \iota\kappa$：令

  $$\kappa(f) := \theta_Y \circ f \circ \theta_X^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\kappa(X), \kappa(Y)), f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

  另一方面，我们有函子的等式 $\kappa\iota = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$。因此 κ 是 ι 的拟逆函子。

- 骨架范畴间的全忠实，本质满函子都是同构

  设 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 是骨架范畴间的全忠实，本质满函子。对任意 $\mathcal{C}_2$ 中的对象 Z，存在 X 使得 $Z \simeq FX$，因此 $Z = FX$。这样的 X 是唯一的，因为全忠实性和 $FX \simeq FX'$ 蕴含 $X \simeq X'$。于是 F 在对象集上是双射，由此可定义其逆函子 G。

□

定理 1.2.1. 对于函子 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$，以下叙述等价

1. F 是范畴等价
2. F 是全忠实，本质满函子

证明. 假设 F 是范畴等价，取拟逆函子 $G:\mathcal{C}_2\to\mathcal{C}_1$ 和 $GF \xrightarrow[\sim]{\psi} \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}, FG \xrightarrow[\sim]{\phi} \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$。对于 $\mathcal{C}_2$ 中的任何对象 Z 都有 $\phi_Z : F(GZ) \xrightarrow{\sim} Z$ 故 F 本质满，同理 G 本质满。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(X,Y) & \overset{F}{\to} & \mathrm{Hom}(FX,FY) & \overset{G}{\to} & \mathrm{Hom}(GF(X),GF(Y)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(X,Y) \\
f & \longmapsto & Ff & \longmapsto & GF(f) & \longmapsto & \psi_Y GF(f)\psi_X^{-1}
\end{array}$$

合成为恒等映射，故图中的第一个箭头 F 左可逆，第二个箭头 G 右可逆。调换 F,G 的角色可知当 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ 属于 G 的像时，$\mathrm{Hom}(X,Y)\xrightarrow{F}\mathrm{Hom}(FX,FY)$ 右可逆。然而 $\mathcal{C}_1$ 中每个对象都同构于 G 的某个像，综上 F 是全忠实函子。

反向的，以引理 1.2.2取骨架 $\iota_i:\mathcal{C}_i'\to\mathcal{C}_i$ 及其拟逆函子 κ_i。函子 $F' := \kappa_2\circ F\circ\iota_1 : C_1'\to C_2'$ 仍是全忠实本质满函子，因此知 F' 是范畴的同构。设 $G:=\iota_1\circ F'^{-1}\circ\kappa_2$ 则

$$GF = \iota_1 F'^{-1}\kappa_2 F \simeq F'^{-1}\underbrace{\kappa_2 F\iota_1}_{=F'}\kappa_1 = \iota_1\kappa_1 \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$$

$$FG = F\iota_1 F'^{-1}\kappa_2 \simeq \iota_2\underbrace{\kappa_2 F\iota_1}_{=F'}F'^{-1}\kappa_2 = \iota_2\kappa_2 \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$$

这里用到了自然变换的横合成。 □

例 1.2.3. 考虑域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴 $\mathsf{Vect}(\Bbbk)$ 及其子范畴 $\mathsf{Vect}_f\Bbbk$。已经定义了双对偶函子 $DD^{\mathrm{op}}:\mathsf{Vect}(\Bbbk)\to\mathsf{Vect}(\Bbbk)$。对于任意向量空间 V 都有求值映射

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev} :& V \longrightarrow DD^{\mathrm{op}}V = (V^\vee)^\vee \\
& v \longmapsto [\lambda\mapsto\lambda(v)]
\end{aligned}$$

对于任意线性映射 $f:V\to W$, 从 $f^\vee$ 的定义可以得到下图表

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "f"'] & DD^{\wr}\surd V \arrow[d, "DD^{\mathrm{op}}f"] \\
W \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & DD^{\mathrm{op}}W
\end{tikzcd}$$

是交换的，于是有 $\mathrm{ev}:\mathrm{id}\to DD^{\mathrm{op}}$. 容易看出 $\mathrm{ev}:V\to DD^{\mathrm{op}}V$ 总是单射，事实上可以证明 ev 是双射当且仅当 V 是有限维。一切限制到全子范畴 $\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$ 上，有同构

$$\mathrm{ev}:\mathrm{id}_{\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)} \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{op}}D$$

同一式子在相反范畴中诠释为

$$\mathrm{id}_{\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{op}} D$$

故函子 $D : \mathsf{Vect}_f(\Bbbk)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}_{\mathsf{f}}(\Bbbk)$ 是范畴间的等价，而 $D^{\mathrm{op}} : \mathsf{Vect}_f(\Bbbk) \to \mathsf{Vect}_f(\Bbbk)^{\mathrm{op}}$ 则是它的拟逆。

例 1.2.4. 选定域 $\Bbbk$, 定义范畴 Mat 如下: 其对象是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 对任意对象 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义 $\mathrm{Hom}(n,m) := M_{m\times n}(\Bbbk)$ 为域 $\Bbbk$ 上的全体 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ 所构成的集合。约定 $M_{0\times n}(\Bbbk) = M_{m\times 0}(\Bbbk) := \{0\}$。态射的合成定义为寻常的矩阵乘法

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(n,m) \times \mathrm{Hom}(m,k) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(n,k) \\ (A,B) &\longmapsto BA. \end{aligned}$$

定义函子 $F : \mathsf{Mat} \to \mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$ 如下：令 $F(n) = \Bbbk^{\oplus n} := M_{n\times 1}(\Bbbk)$，而对 $A \in \mathrm{Hom}(n,m)$，线性映射 $FA : \Bbbk^{\oplus n} \to \Bbbk^{\oplus m}$ 是矩阵乘法 $v \mapsto Av$。我们断言 F 是范畴等价。以上内容只是另一种形式的线性代数。

注意到 $F : \mathrm{Hom}(n,m) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\oplus n}, \Bbbk^{\oplus m})$ 是双射，这无非是线性映射的矩阵表达。其次从 $V \simeq \Bbbk^{\oplus \dim V}$($V$ 是 $\Bbbk$-向量空间) 可知 F 是全忠实本质满的，由定理 1.2.1可知它是范畴等价。

1.3 函子范畴

首先对范畴定义积和余积 (无交并) 的概念，这对陈述一些范畴性质格外有用。

定义 1.3.1 (积范畴，余积 (无交并)). 设 I 为 $\mathcal{U}$-集，$\{\mathcal{C}_i : i \in I\}$ 是一族范畴。

- 积范畴 $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 定义如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\Big(\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i\Big) &:= \prod_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i) \\ \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}((X_i)_i, (Y_i)_i) &:= \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i) \end{aligned}$$

  其中我们以 $(X_i)_i$ 表示 $\prod_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$ 的元素。态射的合成是逐个分量定义的。

- 余积 (无交并) 范畴 $\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ 定义如下：

$$\mathrm{Ob}(\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i) := \coprod_{i\in I}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$$

$$\mathrm{Hom}_{\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i}(X_j, X_k) := \begin{cases}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_j}(X_j, X_k) & j = k\\ \emptyset & j \neq k\end{cases}$$

  其中对每个 $j \in I, X_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_j)$。态射的合成是在各个 $\mathcal{C}_i$ 中个别定义的。

由于 I 已经假定是 $\mathcal{U}$-集，新生成的范畴仍然是 $\mathcal{U}$-范畴；如果每个 $\mathcal{C}_i$ 都是 $\mathcal{U}$-小范畴，则它们的积和余积亦然。

我们有一族投影函子 $\mathsf{pr}_j : \prod_{i\in I}\mathcal{C}_i \to \mathcal{C}_j$，它将 $(X_i)_i$ 映至 X_j，则态射层面也是类似地投影到 j 分量。同理定义一族包含函子 $\iota_j : \mathcal{C}_j \to \coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i$，将 $\mathcal{C}_j$ 以自明的方式嵌入为全子范畴。

特别地，取 I 为有限集便能定义 $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ 和 $\mathcal{C}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{C}_n$。

1.4 泛性质

1.5 可表函子

1.6 伴随函子

1.7 极限

1.8 完备性

1.9 习题