Chapter 2

BY 行列式

1 Def & Theo

1.1 排列

1. 排列：有限长度的有序数组(1,2,3,4)(7,2,64,12,3).共$n!$个排列

2. 排列的逆序数：一对数的位置关系和大小关系相反(2,1)，称为一个逆序
   排列的所有逆序的个数称为逆序数：(1,2,3,4)=0;(4,3,2,1)=3+2+1=6
   记为:$\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$

3. 排列的奇偶性：逆序数的奇偶性

4. 对换(交换排列中的两个数)改变排列的奇偶性
   推论：n级排列中奇偶排列的个数为$n!/2$

1.2 n级行列式

1. 行列式：$f\colon F^{n,n} \to F$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \text{所有}\ (-1)^{\tau(\text{行})+\tau(\text{列})}(\text{不同行、不同列的}n\text{个元素乘积})\ \text{的和}$$

$$\det A = \sum_{j_i \in \text{prem}(n)} \left((-1)^{\tau(j_1, \ldots, j_n)} \times \prod_i a_{i, j_i} \right)$$

$$\det A' = \sum_{j_i \in \text{prem}(n)} \left((-1)^{\tau(j_1, \ldots, j_n)} \times \prod_i a_{j_i, i} \right)$$

$$\text{Remark: 行列式有}n!\text{项}; \det A = \det A'$$

1.3 行列式的性质

1. $\det A = \det A'$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

4. 两行相同：行列式为0。Pr: 从列定义看prem中交换了两个排列$\to$符号相反$\to 0$

5. 两行成比例：行列式为0

6. 一行的倍数加到另一行：行列式不变

7. 交换两行：行列式反号

1.4 行列式的计算

1. 初等变换化为阶梯形法

$$\begin{array}{ccc} 1 & F\text{中的非零数}c\text{乘矩阵某一行} & |f(A)|=c|A| \\ 2 & F\text{中某一行的}c\text{倍加到另一行} & |f(A)|=|A| \\ 3 & \text{互换矩阵的两个不同行} & |f(A)|=-|A| \end{array}$$

2. 初等列变换也可

1.5 行列式按某一行/列展开

1. 行：$|A|=\sum_i a_{i,j}\cdot A_{i,j}=\sum_i a_{i,j}\cdot(-1)^{i+j}M_{i,j}$

2. 列：$|A|=\sum_i a_{i,j}\cdot A_{i,j}=\sum_i a_{i,j}\cdot(-1)^{i+j}M_{i,j}$

3. 一行的元素与另一行对应的代数余子式内积为0

$$\sum_j a_{i,j}A_{k,j}=\begin{cases} d & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$

4. 分块对角阵的行列式：各个子块行列式之积

1.6 克拉默法则

1. 线性方程组的个数和未知数的个数相同且系数矩阵的行列式不为0，则有唯一解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0\to\text{有唯一解}\wedge\text{解为}\left(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d},\ldots,\frac{d_n}{d}\right)$$

$$d_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Pr}\qquad \sum a_{i,j}\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\sum a_{i,j}d_j$$

$$d_j\text{从}j\text{列展开}: d_j=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i,j}$$

$$\text{带入方程：}\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\sum_{s=1}^{n} b_sA_{s,j}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{s,j}\right)b_s$$

$$=\frac{1}{d}\cdot d_i\cdot b_i=b_i$$

$$\Rightarrow\qquad\text{是解}$$

2 Fomula

1. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$

2. 奇数阶反对称行列式为0:$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{1n-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, n为奇数则为0

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$$