Chapter 4

BY 连续性

1 Def

1. 函数在某点连续定义. $\lim_{x\to x_0\wedge x\in D\cap U_{x_0}}f(x)=f(x_0)$

2. 函数连续：$\lim f(x_n)=f(\lim x_n);\lim f(g(x))=f(\lim g(x));$

3. 间断

   $$\begin{cases}\text{第一类} & \begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}\\ \text{第二类} & \text{其它(无穷、不存在等)}\end{cases}$$

4. 间断

   无定义 趋于无穷 函数在此点无极限

5. 单调函数只有第一类间断点

6. 闭区间上的连续函数有界

7. 闭区间上的连续函数必能在区间内取得最值

   Pr: $g=\frac{1}{M-f(x)}\to f\leqslant M-\frac{1}{\max\{g(x)\}}$

8. 闭区间上的连续函数有连通性(介值性)

9. 反函数：f在$[a,b]$上严格单调且连续，反函数f^{-1}在$[f(a),f(b)]$内连续

10. 一致连续性：$\forall\varepsilon>0,d(x_1,x_2)<\delta\to d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$

    一致连续性表示了函数在区间上的整体性质，强于逐点连续性

11. 一致连续性充要条件：$\forall x_n,y_n\in D.\lim_{x\to\infty}(x_n-y_n)=0\to\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$

12. 康托：闭区间上的连续函数一致连续

2 Tricks

1. $\max\{f,g\}=\frac{f+g+|f-g|}{2};\min\{f,g\}=\frac{f+g-|f-g|}{2}$

2. $\lim_{x\to 0}a^x=1=a^0.$

3. $a>0.\lim_{x\to x^0}a^x=a^{x_0+(x-x_0)}=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^t=a^{x_0}$

4. $0<a<1.a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x}=\frac{1}{\lim b^x}\to a^x$连续

5.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$$
$$=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$$
$$0=\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{\sqrt{x}}{x}<\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}<\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=0$$
$$\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

6.

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$
$$=\quad\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$$
$$=\quad\frac{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{t}}{t}}}{\sqrt{t}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}\right)}$$
$$=\quad\frac{2}{1+1}=1$$

7.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$
$$=\quad\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\quad 1$$