Implementação e Avaliação de Variantes do Método de Kaczmarz para Sistemas Lineares e Problemas de Mínimos Quadrados

Hiero Henrique Barcelos Costa

8 de janeiro de 2026

Resumo

Neste trabalho estudamos, implementamos e comparamos diferentes variantes do método de Kaczmarz para a resolução de sistemas lineares e problemas de mínimos quadrados. Foram analisados o método de Kaczmarz clássico, o Kaczmarz randomizado, o Kaczmarz em blocos, o Kaczmarz em blocos randomizado e o método ReBlocK (*Regularized Randomized Block Kaczmarz*), que incorpora regularização para aumentar a robustez numérica. As implementações foram baseadas no código de referência disponibilizado em *Visualizing Kaczmarz's Algorithm*[1] e os testes numéricos seguiram os problemas descritos nas seções 5.1.2, 5.1.3 e 5.1.5 do trabalho [1]. Os resultados evidenciam o impacto da randomização, do uso de blocos e da regularização no comportamento de convergência.

1 Introdução

A resolução eficiente de sistemas lineares e problemas de mínimos quadrados é um tema central em diversas áreas da ciência e da engenharia, incluindo processamento de sinais, aprendizado de máquina, problemas inversos e computação científica. Em aplicações de grande escala, o custo computacional e o consumo de memória associados a métodos diretos tornam-se proibitivos, o que justifica o amplo uso de métodos iterativos [2].

Dentre esses métodos, o método de Kaczmarz, proposto originalmente em 1937, destaca-se por sua simplicidade conceitual e pelo baixo custo computacional por iteração, sendo particularmente atrativo para problemas de grande dimensão [1]. Ao longo das últimas décadas, diversas extensões do método original foram desenvolvidas, como apresentado em [1, 2], com o objetivo de acelerar a convergência e aumentar a robustez numérica, especialmente em sistemas mal condicionados ou inconsistentes. Entre essas extensões, destacam-se as variantes baseadas em randomização, atualizações em blocos e técnicas de regularização.

O objetivo principal deste trabalho é estudar, implementar e comparar diferentes variantes do método de Kaczmarz, analisando de forma sistemática o impacto da randomização, do uso de blocos e da regularização no comportamento de convergência e na estabilidade numérica dos métodos. A análise é conduzida por meio de experimentos numéricos controlados, permi-

[1] https://scipython.com/blog/visualizing-kaczmarzs-algorithm/

tindo avaliar o desempenho das diferentes abordagens em distintos regimes de condicionamento e dimensionalidade do sistema linear.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresenta-se a motivação do estudo e o contexto teórico que justifica a comparação entre as diferentes variantes do método de Kaczmarz. A Seção 3 descreve as equações fundamentais dos métodos considerados, incluindo as versões clássica, randomizada, em blocos e regularizada. Na Seção 4 são discutidos os aspectos de implementação e os critérios adotados para a construção dos experimentos numéricos. A Seção 5 apresenta os experimentos realizados. A Seção 6 reúne os resultados obtidos, seguidos de uma análise comparativa detalhada e finalizando com uma discussão dos resultados. Por fim, a Seção 7 trás as conclusões do trabalho, bem como possíveis direções para pesquisas futuras.

2 Motivação

Embora o método de Kaczmarz clássico apresente boa eficiência computacional por iteração, ele pode sofrer com convergência lenta ou comportamento instável quando aplicado a sistemas mal condicionados ou inconsistentes. A introdução da randomização mostrou-se eficaz para melhorar o desempenho médio do método, como demonstrado por Strohmer e Vershynin [3], enquanto a estratégia de atualizações em blocos tem se destacado por explorar de forma mais eficiente a estrutura do sistema linear, conforme discutido em [1].

Entretanto, estudos mais recentes indicam que o método de Kaczmarz em blocos randomizado (RBK), apesar de suas vantagens teóricas, pode apresentar perda de robustez em cenários de dados gerais ou severamente mal condicionados. Nesse contexto, o método ReBlocK surge como uma extensão natural do RBK, incorporando um termo de regularização à iteração com o objetivo de mitigar instabilidades numéricas e melhorar o comportamento do método em situações adversas [2].

Diante desse panorama, este trabalho é motivado pela necessidade de compreender de forma mais clara em que medida a randomização, o uso de blocos e a regularização contribuem efetivamente para a melhoria do desempenho prático dos métodos, bem como identificar os cenários nos quais abordagens determinísticas em blocos podem se mostrar mais vantajosas.

3 Equações Fundamentais dos Métodos de Kaczmarz

Considere o sistema linear

$$Ax = b, \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Seja $a_i^\top$ a i-ésima linha de A e b_i o elemento correspondente de b.

3.1 Kaczmarz Clássico

O método de Kaczmarz clássico gera uma sequência de aproximações $\{x^k\}$ projetando iterativamente a solução atual sobre os hiperplanos definidos pelas equações do sistema. A iteração é dada por

$$x^{k+1} = x^k + \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} a_i, \tag{2}$$

onde o índice i percorre ciclicamente o conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$. O método parte de uma aproximação inicial, usualmente $x^0 = 0$.

3.2 Kaczmarz Randomizado

No método de Kaczmarz randomizado, a linha utilizada em cada iteração é escolhida aleatoriamente. A atualização mantém a mesma forma do método clássico:

$$x^{k+1} = x^k + \frac{b_{r(k)} - \langle a_{r(k)}, x^k \rangle}{\|a_{r(k)}\|^2} a_{r(k)}, \tag{3}$$

onde o índice $r(k)$ é escolhido aleatoriamente do conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ com probabilidade proporcional a $\|a_i\|^2$.

3.3 Kaczmarz em Blocos

No método de Kaczmarz em blocos, um subconjunto de linhas $S \subset \{1, \dots, m\}$ é selecionado em cada iteração. Denotando por A_S a submatriz de A formada pelas linhas em S e por b_S o vetor correspondente, a iteração pode ser escrita como

$$x^{k+1} = x^k + A_S^\top (A_S A_S^\top)^\dagger (b_S - A_S x^k), \tag{4}$$

onde $(\cdot)^\dagger$ denota o pseudoinverso de Moore–Penrose.

3.4 Kaczmarz em Blocos Randomizado

O método de Kaczmarz em blocos randomizado (RBK) generaliza o método em blocos ao selecionar o conjunto S_k de forma aleatória, segundo uma distribuição de probabilidade ρ. A iteração geral é dada por

$$x^{k+1} = x^k + A_{S_k}^\top M(A_{S_k})(b_{S_k} - A_{S_k} x^k), \tag{5}$$

onde $M(A_{S_k})$ é uma matriz de massa. No caso não regularizado, utiliza-se

$$M(A_{S_k}) = (A_{S_k} A_{S_k}^\top)^\dagger. \tag{6}$$

3.5 Método ReBlocK

O método ReBlocK (*Regularized Block Kaczmarz*) incorpora regularização ao RBK com o objetivo de melhorar a robustez numérica, especialmente em sistemas mal condicionados. A iteração é definida como a solução do problema de minimização

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\|A_{S_k} x - b_{S_k}\|^2 + \lambda_k \|x - x^k\|^2 \right), \tag{7}$$

cuja solução em forma fechada é dada por

$$x^{k+1} = x^k + A_{S_k}^\top \left(A_{S_k} A_{S_k}^\top + \lambda_k I \right)^{-1} (b_{S_k} - A_{S_k} x^k). \tag{8}$$

No limite em que $\lambda_k \to 0$, o método ReBlocK recupera o método RBK clássico. Neste trabalho, foi utilizado um valor pequeno e constante de λ_k para garantir maior estabilidade sem comprometer significativamente a convergência.

4 Implementação

As implementações foram realizadas a partir do código de referência disponibilizado em *Visualizing Kaczmarz's Algorithm*. As versões clássica e randomizada, já presentes nesse código, foram utilizadas como base para o desenvolvimento dos outros algoritmos. Os métodos baseados em blocos, por sua vez, foram implementados com base nas formulações e diretrizes apresentadas nos trabalhos de [1] e [2].

Além disso, foram utilizados sistemas lineares randômicos conforme descrito em [1], permitindo uma avaliação sistemática do desempenho dos métodos.

5 Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos foram conduzidos com base nos problemas descritos nas Seções 5.1.2, 5.1.3 e 5.1.5 de Lokrantz, os quais permitem avaliar o comportamento dos métodos de Kaczmarz em diferentes regimes de dimensionalidade e condicionamento.

- **Seção 5.1.2**: sistema subdeterminado, com $A \in \mathbb{R}^{300\times5000}$ e razão entre valores singulares $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} = 10^5$;
- **Seção 5.1.3**: sistema sobredeterminado, com $A \in \mathbb{R}^{5000\times300}$ e $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} = 10^5$;
- **Seção 5.1.5**: sistema sobredeterminado, com $A \in \mathbb{R}^{5000\times300}$ e valores singulares no intervalo $1 \le \sigma \le 1 + 10^{-1}$.

Para a construção da matriz A, inicialmente foi gerada uma matriz $\tilde{A}$ com entradas distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 1]$, cujas dimensões variam de acordo com cada experimento. Em seguida, foi aplicada a decomposição em valores singulares (SVD), e os valores singulares foram modificados de modo a controlar o condicionamento do sistema, conforme especificado em cada caso. A matriz A final foi então reconstruída a partir dessa decomposição.

A solução exata $\tilde{x}$ foi gerada com entradas distribuídas uniformemente em $[0, 1]$, com dimensão compatível com o número de colunas de A. O vetor do lado direito foi obtido pela relação $b = A\tilde{x}$, e o vetor inicial foi fixado como $x_0 = 0$ em todos os experimentos.

Para as variações que utilizam apenas uma linha por iteração, foi adotado o número de iterações externas $N = 10$. Para as variações em blocos que não constroem os blocos de forma iterativa, foram utilizados blocos de tamanho 10 e definido $N = 100$.

Para todas as variações randomizadas, os resultados apresentados correspondem à média de 10 execuções independentes, com o objetivo de reduzir o efeito da variabilidade estatística. Além disso, todas as variações regularizadas utilizaram um parâmetro de regularização fixo $\lambda = 0.001$.

6 Resultados

Nesta seção são apresentados e analisados os resultados obtidos a partir dos experimentos numéricos descritos na seção anterior. Os métodos de Kaczmarz avaliados foram comparados com base em critérios como taxa de convergência, comportamento do erro residual ao longo das iterações e estabilidade numérica em diferentes regimes de condicionamento e dimensionalidade do sistema linear.

Seguindo os padrões de experimentação adotados em trabalhos relacionados, foram gerados três gráficos principais, correspondentes aos casos descritos nas Seções 5.1.2, 5.1.3 e 5.1.5 de Lokrantz. Em cada gráfico, são apresentados os resultados dos métodos estudados, permitindo uma comparação direta de seu desempenho sob diferentes condições.

6.1 Caso 5.1.2: Sistema Subdeterminado e Mal Condicionado

A Figura 1 apresenta a evolução do erro residual em função do número de iterações para o sistema subdeterminado com alto número de condicionamento ($\sigma_{\max}/\sigma_{\min} = 10^5$).

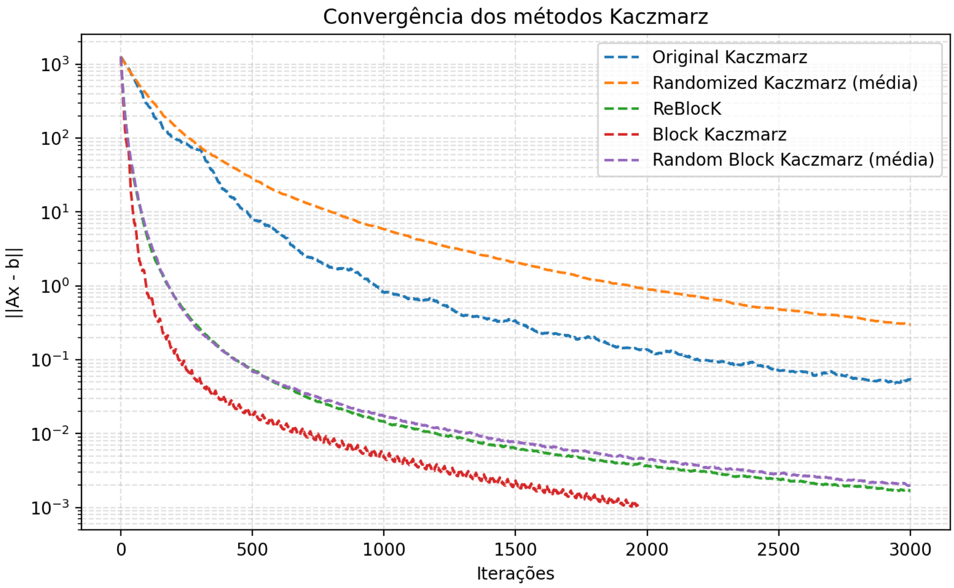

Figura 1: Evolução do erro residual para o caso 5.1.2 (sistema subdeterminado e mal condicionado).

Análise dos Resultados Observa-se neste cenário uma separação clara entre o desempenho dos métodos linha-a-linha e dos métodos em blocos. As variantes clássicas do método de Kaczmarz apresentam convergência significativamente mais lenta, sendo que o método Randomized Kaczmarz exibe o pior desempenho, com redução gradual do erro residual mesmo após um elevado número de iterações. O método Original Kaczmarz apresenta melhora em relação à versão randomizada, porém, permanece distante das abordagens em bloco.

Entre os métodos em bloco, destaca-se o *Block Kaczmarz*, que apresenta a taxa de convergência mais elevada, atingindo valores de erro residual da ordem de 10^{-3} com um número substancialmente menor de iterações. O método ReBlocK e o Random Block Kaczmarz exibem desempenhos muito próximos, com curvas mais suaves e estáveis.

6.2 Caso 5.1.3: Sistema Sobredeterminado e Mal Condicionado

A Figura 2 ilustra os resultados obtidos para o sistema sobredeterminado com elevado número de condicionamento.

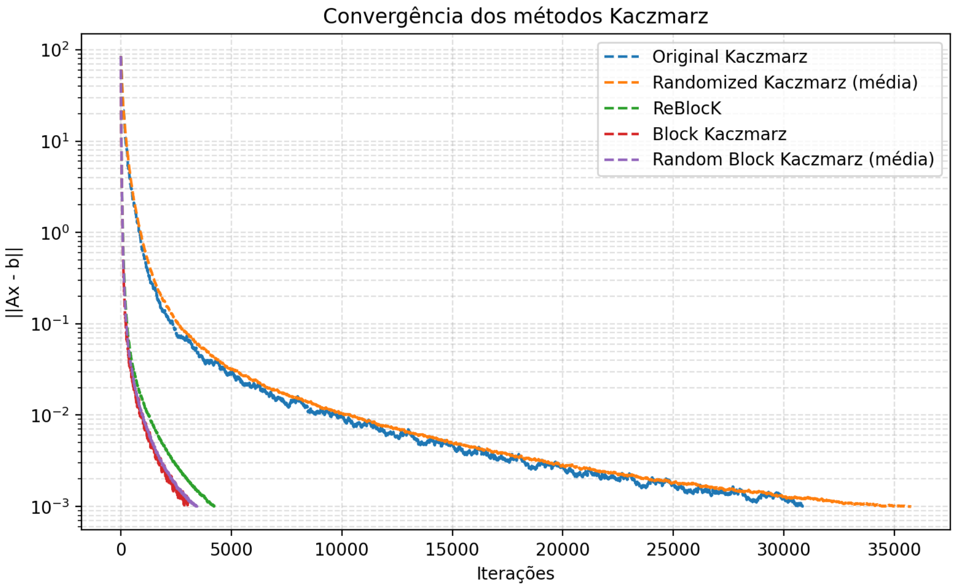

Figura 2: Evolução do erro residual para o caso 5.1.3 (sistema sobredeterminado e mal condicionado).

Análise dos Resultados Neste caso, os métodos de linha única, tanto na versão determinística quanto na randomizada, apresentam convergência lenta, exigindo um número elevado de iterações para alcançar níveis aceitáveis de erro residual. A randomização suaviza parcialmente as oscilações, mas não resulta em ganhos significativos na taxa de convergência assintótica.

Em contraste, os métodos em blocos apresentam desempenho substancialmente superior, reduzindo o erro residual em várias ordens de magnitude em poucas milhares de iterações. O método Block Kaczmarz e o Random Block Kaczmarz atingem rapidamente a região de erro baixo, enquanto o ReBlocK apresenta uma convergência ligeiramente mais suave, com menor sensibilidade a flutuações numéricas.

6.3 Caso 5.1.5: Sistema Sobredeterminado e Bem Condicionado

A Figura 3 apresenta os resultados para o sistema sobredeterminado com valores singulares bem distribuídos, caracterizando um problema melhor condicionado.

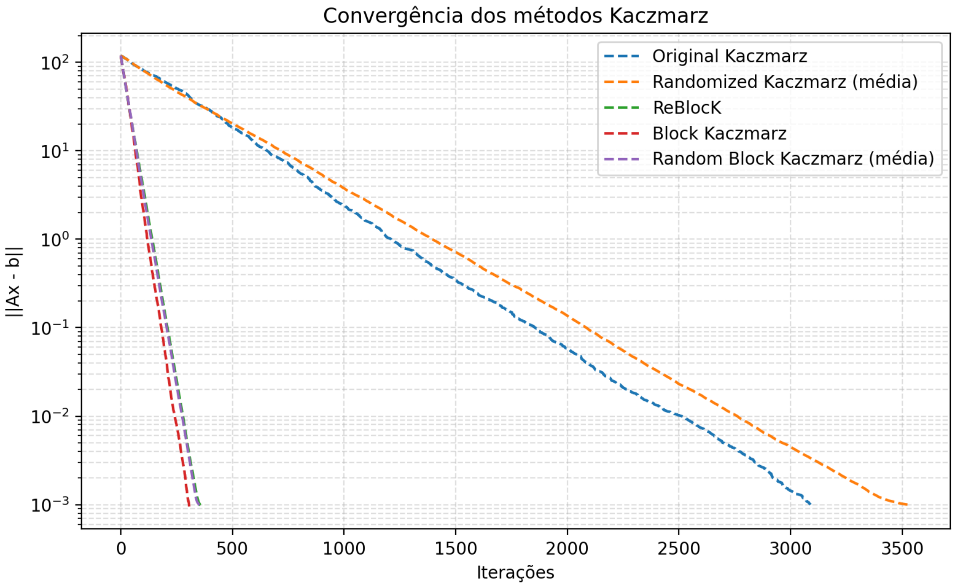

Figura 3: Evolução do erro residual para o caso 5.1.5 (sistema sobredeterminado e bem condicionado).

Análise dos Resultados Para este cenário, observa-se que todos os métodos apresentam convergência rápida e aproximadamente linear em escala logarítmica, refletindo a boa condicionabilidade do sistema. O método Original Kaczmarz apresenta desempenho ligeiramente superior ao Randomized Kaczmarz, indicando que a randomização não traz benefícios adicionais relevantes neste contexto.

Os métodos em bloco convergem de forma extremamente rápida, atingindo baixos níveis de erro residual em poucas centenas de iterações, com curvas praticamente sobrepostas. Isso indica que, para sistemas bem condicionados, o uso de blocos e regularização oferece apenas ganhos marginais em relação aos métodos mais simples, embora ainda preserve excelente eficiência computacional.

6.4 Discussão dos Resultados

De maneira geral, os experimentos confirmam que os métodos em bloco superam de forma consistente as variantes clássicas do método de Kaczmarz, sobretudo em cenários mal condicionados, nos quais essa superioridade se torna ainda mais evidente. Entre os métodos avaliados, o Block Kaczmarz apresentou, de forma recorrente, a melhor taxa de convergência, sendo capaz de reduzir o erro residual de maneira mais rápida e eficiente ao longo de todos os casos analisados.

O método ReBlocK, apresendado em [2], surge como uma proposição baseada na versão randomizada em blocos do método de Kaczmarz, incorporando um termo de regularização com o objetivo de aumentar a robustez numérica. No entanto, ao se analisar seu desempenho conjuntamente nos três cenários estudados, observa-se que o ReBlocK não se distancia de maneira significativa de sua contraparte não regularizada, o Random Block Kaczmarz, apresentando desempenhos bastante próximos tanto em termos de taxa de convergência quanto de erro residual final. Ademais, ambos os métodos são sistematicamente superados pelo método determinístico em blocos, que apresenta a melhor taxa de convergência global, conforme evidenciado nos gráficos. Tal resultado está em consonância com os achados reportados para o método Block Kaczmarz determinístico evidenciado em [1], no qual a exploração determinística da estrutura do sistema se mostra particularmente eficiente.

Outro aspecto relevante diz respeito ao papel da randomização. A literatura clássica destaca que a seleção aleatória das linhas da matriz A, em vez de uma ordem fixa, pode melhorar significativamente a taxa de convergência do método de Kaczmarz tradicional. Em particular, Strohmer e Vershynin [3] demonstram que a versão randomizada apresenta convergência esperada exponencial, superando, em diversos cenários, a variante determinística linha-a-linha. Contudo, tal vantagem não se manifesta nos experimentos considerados neste trabalho. Resultados semelhantes são relatados no estudo de revisão conduzido por Lokrantz et al. [1], que indicam que, no contexto de métodos em bloco e para as classes de problemas analisadas, abordagens determinísticas tendem a explorar de forma mais eficaz a estrutura do sistema linear, resultando em taxas de convergência superiores.

7 Conclusão

Neste trabalho, foram estudadas, implementadas e comparadas diferentes variantes do método de Kaczmarz para a resolução de sistemas lineares e problemas de mínimos quadrados, abrangendo desde a formulação clássica até extensões modernas baseadas em randomização, uso de blocos e regularização. A análise numérica foi conduzida em cenários representativos de sistemas subdeterminados e sobredeterminados, bem como em diferentes regimes de condicionamento, permitindo uma avaliação abrangente do comportamento dos métodos.

Os resultados experimentais demonstram de forma consistente que os métodos baseados em atualizações em blocos apresentam desempenho superior às variantes linha-a-linha, sobretudo em problemas mal condicionados. Em particular, o método Block Kaczmarz determinístico destacou-se como a abordagem mais eficiente em termos de taxa de convergência, reduzindo o erro residual de maneira mais rápida e estável em todos os cenários analisados. Esse comportamento evidencia a importância de explorar a estrutura do sistema linear por meio de projeções em subespaços de maior dimensão.

O método ReBlocK foi analisado como uma extensão regularizada do Kaczmarz em blocos randomizado, com o objetivo de aumentar a robustez numérica frente a problemas severamente mal condicionados. Embora a regularização tenha contribuído para suavizar o comportamento iterativo e reduzir oscilações numéricas, os experimentos indicam que o ReBlocK apresenta desempenho bastante próximo ao de sua contraparte não regularizada, o Random Block Kaczmarz, não se traduzindo em ganhos significativos de convergência nos casos estudados.

Outro aspecto relevante diz respeito ao impacto da randomização. Embora a teoria clássica indique vantagens claras da randomização no método de Kaczmarz linha-a-linha, tais benefícios não se manifestaram de forma significativa nos experimentos considerados.

Como perspectivas para trabalhos futuros, destacam-se a investigação de estratégias adaptativas para a escolha do tamanho dos blocos e do parâmetro de regularização no ReBlocK, bem como a análise do desempenho dos métodos em problemas reais de grande escala, oriundos de aplicações como reconstrução tomográfica e processamento de sinais. Tais extensões podem contribuir para um melhor entendimento do equilíbrio entre eficiência computacional, robustez numérica e custo por iteração nos métodos de Kaczmarz modernos.

Referências

[1] C. Lokrantz, "A review of the kaczmarz method," 2023.

[2] G. Goldshlager, J. Hu, and L. Lin, "Worth their weight: Randomized and regularized block kaczmarz algorithms without preprocessing," 2025.

[3] T. Strohmer and R. Vershynin, "A randomized kaczmarz algorithm with exponential convergence," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 15, no. 2, pp. 262–278, 2009.