IEU UNIVERSIDAD

Razonamiento lógico matemático

Bloque 4

Contenido

Clave

ACTIVIDADES SUMATIVAS	
Actividades de aprendizaje	Son las distintas tareas que desarrolla el estudiante para verificar el logro de un objetivo de aprendizaje específico: ensayos, mapas mentales o conceptuales, cuadros comparativos, entre otras.
Actividad integradora	Son entregables que representen alguna práctica en contextos laborales: proyectos, análisis de casos, diseño de propuestas, entre otros.
Evaluación final	Es un examen de opción múltiple que contempla reactivos de la totalidad de contenidos de la materia.
Foro de discusión	Es un espacio para la discusión grupal a partir de preguntas detonadoras o los resultados de actividades previas.
Wiki	Desarrollo de contenido creado y enriquecido por múltiples usuarios, que se publica en la web.
Blog	Desarrollo de contenido que puede ser creado y enriquecido por uno o varios usuarios, que se publica en la web de forma cronológica.

LECTURAS		
Lectura base	Lectura complementaria	Lectura recomendada
Literatura consolidada del área de conocimiento, considerada como “libro de texto”. El formato puede ser texto, audio o video.	Artículos de difusión o de reporte de investigación que muestran reflexiones o aplicaciones reales que se vinculan con los temas estudiados. El formato puede ser texto, audio o video.	Lectura breve que muestra un enfoque diferente de los temas estudiados.

INSTRUCCIONES Y RECURSOS

Actividades formativas

Estudio de caso	Reflexión	Ejercicio
Descripción breve de una situación que permita aplicar las competencias que se pretende desarrollar. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Proposición breve que pretende enfatizar información relevante del tema para considerar sus implicaciones en la práctica. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Actividad breve y replicable que permite detonar, desarrollar o comprobar aprendizajes. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.

Reforzadores

Ejemplo	**¿Sabías que...?**	**Tip**
Descripción breve de una situación que permita aplicar las competencias que se pretende desarrollar. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Proposición breve que pretende enfatizar información relevante del tema para considerar sus implicaciones en la práctica. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Actividad breve y replicable que permite detonar, desarrollar o comprobar aprendizajes. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.

MULTIMEDIA

Clip de video	Clip de audio	Recurso web
Recomendación de recurso didáctico breve (no mayor a cinco minutos) que ilustra un tema en formato de video.	Recomendación de recurso didáctico breve (no mayor a cinco minutos) que explica un tema en formato de audio.	Recomendación de sitios web ajenos a la plataforma de IEU, con información relevante sobre un tema.

Introducción

En el presente bloque analizaremos la teoría de conjuntos, la cual es una de las bases de la lógica matemática, cuyo fin es encontrar relaciones entre números o datos para agruparlos con aquellos que tengan un factor y características comunes, que permite clasificarlos e identificar los factores de correspondencia y correlación con otros grupos de números o datos. Asimismo, examinaremos las funciones, específicamente el comportamiento de un grupo de datos en términos abstractos y trasladaremos sus características a un modelo numérico con datos con valor fijo, conocidos como constantes, y con datos de valor cambiante, denominados variables.

Objetivo del bloque

Analizar la teoría de conjuntos y las funciones gráficas, a partir de la revisión de sus fundamentos, conceptos y elementos fundamentales, con la finalidad de comprenderlos como parte del razonamiento lógico matemático necesario para el desarrollo y resolución de problemas.

Lecturas base

Cuevas Vallejo, C. A., Delgado Pineda, M. y Martínez Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 10(2), 20-43.

Lecturas complementarias

Bautista Pérez, J. L., Bustamante Rosario, M. H. y Amaya de Armas, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. Educación Matemática, 33(1), 125-152.

7. CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos de la misma especie que universalmente se simboliza con una letra mayúscula (A, B, C, D, entre otras); dichos objetos se denominan elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de dígitos está formado por una colección de números (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), al igual que el conjunto de vocales (a, e, i, o, u).

En relación con lo anterior, Vargas y Zamora (2020) argumentan lo siguiente:

> El conjunto, nunca construido de elementos más sencillos, da origen lógica y algebraicamente a conceptos básicos, definiciones, operaciones, axiomas, etc. Axiomáticamente, se entiende que todo A es un conjunto y todo x es un elemento si verifican tales axiomas, los cuales son las premisas, los primeros principios de un orden de conocimiento (p.7).

Finalmente, conviene distinguir que el conjunto se define por extensión si posee un número finito y comparativamente un menor número de elementos, por consiguiente, los conjuntos infinitos contienen infinidad de elementos y se definen así cuando se comprende qué principios establecen su agrupación.

7.1. Notación

La notación es el lenguaje simbólico que se utiliza para reconocer conjuntos, sus relaciones y operaciones en lenguaje matemático, la cual establece una comunicación. En este tenor de ideas, Vargas y Zamora (2020) opinan que para representar los conjuntos

> se utilizan letras mayúsculas o cualquier otro símbolo declarado. Esto es, A, B, C, X, Y, Z son conjuntos. El conjunto universo se denota por U o Ω. El conjunto vacío por Ø. Los objetos o elementos de los conjuntos se simbolizan por letras minúsculas o por cualquier otro símbolo declarado y se escriben entre los símbolos { } (p.11)

En este contexto, el símbolo para denotar un conjunto, usualmente es una letra de las primeras que aparecen en el abecedario. Los símbolos que se sitúan al inicio y al final del conjunto de datos son signos de agrupación, conocidos por su forma en llaves, que son empleadas para congregar a los elementos del conjunto. Por ejemplo:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

También puede utilizarse la siguiente notación de construcción de conjuntos:

$$D = \{x | x \text{ es un dígito}\}$$

La cual debe leerse: D es igual al conjunto de todas las x tales que x es un dígito.

Cabe destacar que existen conjuntos con ciertas características, uno de ellos es el conjunto universal, denotado por U, el cual agrupa a todos los elementos de estudio en un contexto dado; por ejemplo, el conjunto de los números naturales; del mismo modo, puede ocurrir que el conjunto no contiene elementos, es decir, un conjunto que no incluye ningún dato; un ejemplo, se da cuando se define al conjunto de números pares mayor de dos que sean primos; a este tipo de conjunto se le denomina conjunto vacío y se representa con la letra griega Ø.

En esta línea argumentativa, para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo ∈ cuya notación es **a** ∈ **B** y se lee: a pertenece a B, y si no pertenece, se denota “**a** ∉ **B**”. Además, en dos conjuntos existe una propuesta condicional, es decir, uno es el antecedente y el otro es el consecuente; se denota por **A** ⇒ **B** y se lee A solamente si B; igualmente, se da la relación bicondicional entre conjuntos, en la cual para que se dé la primera debe darse la segunda y viceversa; su notación es **A** ⇔ **B** y se lee A si y solo si B, B si solo si A.

En ese marco, las operaciones entre conjuntos son la unión de conjuntos, que utiliza el símbolo ∪, además se denota por **A**∪ **B** y se lee A unión con B; la intersección entre conjuntos emplea el símbolo ∩, su notación es **A**∩**B** y se lee A intersección con B. La notación del complemento que utiliza el símbolo ’ es **A’ = U-A** y se lee, A apóstrofo es igual al conjunto universal menos A.

De la misma manera, los conjuntos pueden estar integrados por uno o varios subconjuntos, para lo cual se usa el símbolo ⊂, su notación es **B** ⊂ **A** y se lee B es subconjunto de A. Por ejemplo, el conjunto contempla las letras del alfabeto, y en él existen dos subconjuntos: el subconjunto de las letras vocales y el subconjunto de las letras consonantes.

En este marco, los diferentes símbolos que se utilizan en la notación de conjuntos es la siguiente:

Tabla 1. Notación de conjunto.

Notación de conjuntos			
Operador	**Símbolo**	**Notación**	**Leer como**
Pertenencia	∈	a ∈ B	a pertenece a B
No pertenece	∉	a ∉ B	a no pertenece a B
Implicación	⇒	A ⇒ B	A solamente si B
Correspondencia	⇔	A ⇔ B	A si y solo si B
Unión	∪	A ∪ B	A unión con B
Intersección	∩	A ∩ B	A intersección con B
Conjunto complemento	’	A’ = U-A	A apóstrofo es conjunto complemento de A
Subconjunto	⊂	B ⊂ A	B es subconjunto de A
No es subconjunto	⊄	A ⊄ B	A no es subconjunto de B

Fuente: elaboración propia.

7.2. Relaciones de pertenencia e inclusión

Pertenencia. Un elemento pertenece al conjunto cuando forma parte de este. En notación **a** ∈ **B** significa que **a** pertenece al conjunto **B**; por el contrario, si se observa **a** ∉ **B**, quiere decir que el elemento **a** no es elemento del conjunto **B.**

Dado que A = {2, 4, 6, 8, 10} se observa 2∈A, 4∈A, 6∈A, 8∈A y 10∈A; asimismo, 3∉A, 12∉A, entre otros.

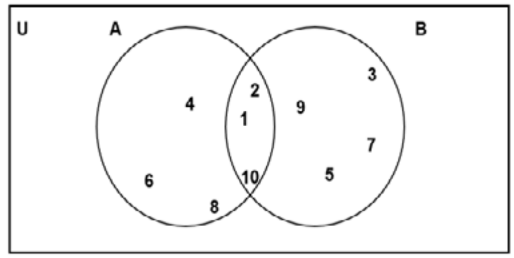
En este sentido, se puede definir mediante la notación: A = {xIx es un número par menor de 12}

La pertenencia asocia elementos con conjuntos y la inclusión relaciona conjuntos con conjuntos.

Por ejemplo, a partir de dos conjuntos:

A = {1, 2, 4, 6, 8, 10} y B {1, 2, 3, 5, 7, 9, 10}

Se observa lo siguiente:



2∈A
3∈B
8∉B
7∉A
6∈A
5∈B

Figura 1. Diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Inclusión. Si cada elemento del conjunto **A** es un elemento del conjunto **B,** entonces **A** es un subconjunto de **B** y su notación es **A** ⊂ **B**. Ahora bien, es importante mencionar que los conjuntos pueden estar integrados por uno o varios subconjuntos. Por ejemplo, el conjunto de las letras presenta dos subconjuntos: el subconjunto de las vocales y el subconjunto de las consonantes.

Propiedades de la inclusión

Propiedad reflexiva: **A** ⊂ **A** (todo conjunto es subconjunto de sí mismo).

Propiedad transitiva: Si **A** ⊂ **B** y **B** ⊂ **C**, entonces **A** ⊂ **C**

En este contexto:

A = {1, 2, 3, 4, 6, 8} y **B** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

De forma gráfica es:

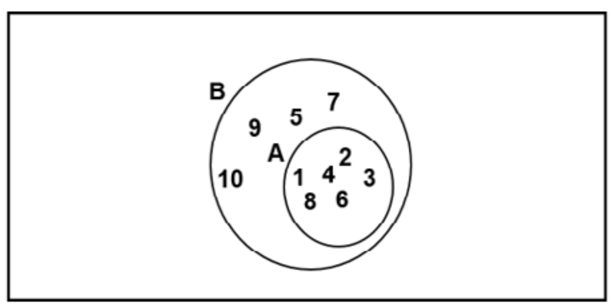


Figura 2. Subconjunto en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Dados dos conjuntos A y B, donde todo elemento de A es elemento de B, A es subconjunto de B (A ⊂ B), lo cual se puede expresar por sus formas equivalentes:

B contiene a A
A está contenido en B
A está incluido en B
A es parte de B

Entonces **A** ⊂ **B** y se puede leer A es subconjunto de B.

Ejemplo 1.

Sean los conjuntos:

A = {xlx es todos los deportes de combate olímpicos}

B = {boxeo, judo, karate}

Entonces:

A = {boxeo, judo, taekwondo, karate, lucha grecorromana, lucha libre olímpica, esgrima}

B = {boxeo, judo, karate}

B ⊂ A

Gráfica:

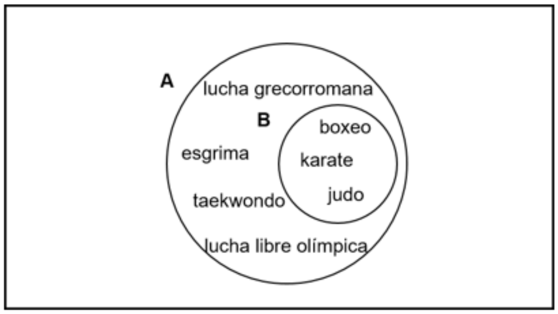


Figura 3. Subconjunto en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

7.3. Operaciones entre conjuntos

En los conjuntos se realizan diversas operaciones que dan como resultado otros conjuntos, esto es, se obtienen nuevos conjuntos que pertenecen a los conjuntos dados. Las operaciones básicas entre conjuntos son complemento (A'), unión (A ∪ B), intersección (A ∩ B), diferencia (A – B) y el producto cartesiano.

Complemento de conjuntos. Dados los conjuntos **B** = {x, y, z} y **U** = {v, w, x, y, z}, el complemento del conjunto **B** es un conjunto constituido por los elementos que le faltan a **B** para ser el conjunto universo.

Ejemplo. Dados los conjuntos **B** = {taekwondo, karate, lucha libre olímpica} y **U** = {boxeo, judo, taekwondo, karate, lucha grecorromana, lucha libre olímpica, esgrima}, encontrar el conjunto complemento de **B**.

El conjunto complemento es: **B'** = {boxeo, judo, lucha grecorromana, esgrima}.

De forma gráfica, **B'** es el área exterior de **B** que pertenece a **U** y en los diagramas de Venn se representa a través del área cuadriculada:

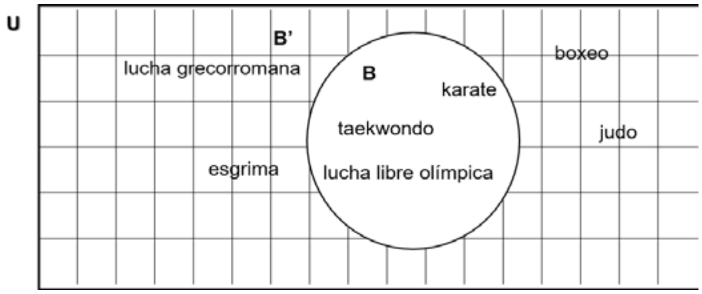


Figura 4. Conjunto complemento en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Unión de conjuntos: dado el conjunto **A** = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9} y **B** = {2, 4, 6, 8, 10}, entonces **A** ∪ **B** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, es decir, se unen todos los elementos de los dos conjuntos en uno solo, donde los elementos repetidos solamente se enuncian una vez. En notación matemática se representa como la unión de dos conjuntos **A** y **B**, en otras palabras, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a **A** o a **B**; esto es:

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Las propiedades de la unión de conjuntos son las siguientes:

Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

Idempotencia: $A \cup A = A$

Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplo. Dados los conjuntos: **A** = {boxeo, taekwondo, karate, lucha libre olímpica, esgrima} y **B** = {judo, karate, lucha grecorromana, esgrima}, encontrar la unión de **A** y **B**.

La notación de la unión es: **A** ∪ **B** = {boxeo, judo, taekwondo, karate, lucha grecorromana, lucha libre olímpica, esgrima}.

De forma gráfica, **A** ∪ **B** es:

Figura 5. Unión de conjuntos en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Intersección de conjuntos. Dado el conjunto **A** = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9} y **B** = {2, 4, 6, 8, 10}, entonces **A** ∩ **B** = {2, 8}, es decir, la intersección contempla los elementos que tienen en común los dos conjuntos. En este caso, los elementos 2 y 8 son la intersección entre **A** y **B**; en notación matemática es la intersección de dos conjuntos A y B, es decir, **A** ∩ **B** es el conjunto formado por los elementos comunes en **A** y en **B**, esto es:

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Las propiedades de la intersección de conjuntos son:

Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

Idempotencia: $A \cap A = A$

Ejemplo. Dados los conjuntos: **A** = {boxeo, taekwondo, karate, lucha libre olímpica, esgrima} y **B** = {judo, karate, lucha grecorromana, esgrima}, encontrar la intersección de **A** y **B**.

La notación de la intersección es: **A** ∩ **B** = {karate, esgrima}.

De forma gráfica, **A** ∩ **B** es:

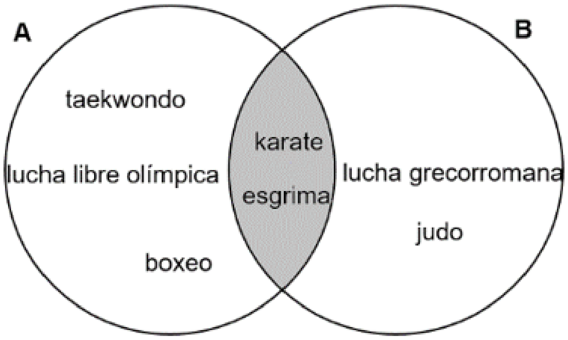


Figura 6. Intersección de conjuntos en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Diferencia de conjuntos: Dado el conjunto **A** = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9} y **B** = {2, 4, 6, 8, 10}, la diferencia de los conjuntos **A**–**B** = {3, 5, 7, 9} considera exclusivamente los elementos que solo pertenecen a **A** y no pertenecen a **B**. En este caso, los elementos 3, 5, 7 y 9 son la diferencia entre **A** y **B**; en notación matemática es la diferencia de dos conjuntos A y B, es decir, **A** – **B** es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a **A** y no pertenecen a **B**, esto es:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo. Dados los conjuntos: **A** = {boxeo, taekwondo, karate, lucha libre olímpica, esgrima} y **B** = {judo, karate, lucha grecorromana, esgrima}, encontrar la diferencia de **A** y **B**.

La notación de la diferencia es: **A** – **B** = {boxeo, taekwondo, lucha libre olímpica}.

De forma gráfica, **A** – **B** es:

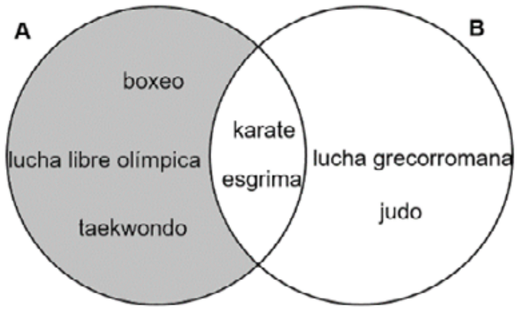


Figura 7. Diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

Producto cartesiano de conjuntos: Dado el conjunto **A** = {1,2,} y **B** = {6, 8, 10}, el producto cartesiano se expresa **A x B** = {(1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 6), (2, 8), (2, 10)}; es decir, es el conjunto formado por los pares ordenados (a, b), donde a se denomina primer componente y b es el segundo componente.

En notación matemática es:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$$

De forma gráfica, **A** x **B** es:

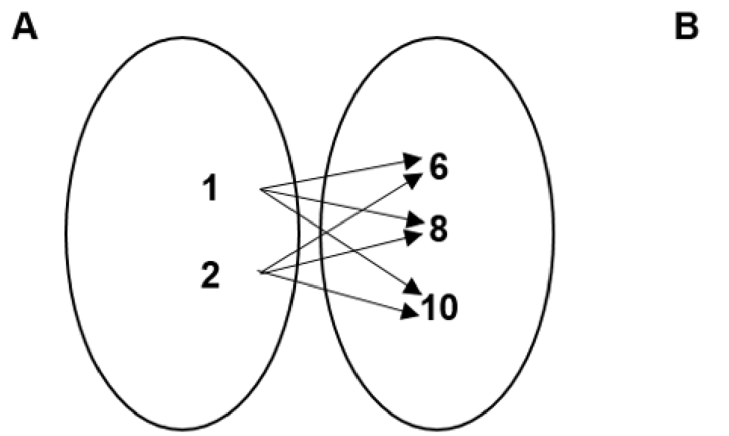


Figura 8. Producto cartesiano en diagramas de Venn. Fuente: elaboración propia.

7.4. Problemas de aplicación

En los problemas de aplicación de conjuntos se utilizan diversas operaciones de conjuntos de forma combinada para encontrar un resultado o para demostrar una proposición, por ejemplo:

1. Dados los conjuntos A = {a, b}, B = {6, 7} y C = {7, 8}, calcular las siguientes operaciones:

a) A x (B ∪ C)

B ∪ C = {6, 7, 8}

A x (B ∪ C) = {(a, 6), (a, 7), (a, 8), (b, 6), (b, 7), (b, 8)}

b) (A x B) ∪ (A x C)

Ax B = {(a, 6), (a, 7), (b, 6), (b, 7)}

A x C = {(a,7), (a, 8), (b, 7), (b, 8)}

(A x B) ∪ (A x C) = {(a, 6), (a, 7), (a, 8), (b, 6), (b, 7), (b, 8)}

c)A x (B ∩ C)

B ∩ C = {7}.

Ax (B ∩ C) = {(a, 7), (b, 7)}

d) (A x C) ∪ (B ∩ C)

A x C = {(a,7), (a, 8), (b,7), (b, 8)}

B ∩ C = {7}

(A x C) ∪ (B ∩ C) = {(a,7), (a, 8), (b,7), (b, 8), 7}

2. A partir de los conjuntos A = {1, 2}, B = {2, 3} y U = {1, 2, 3, 4}, demostrar que **A – B = A ∩ B'**

A – B = {1}

B' = {1, 4}

A ∩ B' = {1}

A – B = A ∩ B'

3. Con base en los conjuntos A = {a, b}, B = {b, c} y U = {a, b, c, d}, demostrar que **A – B = B' – A'**.

$A - B = \{a\}$

$B' = \{a,d\}$

$A' = \{c,d\}$

$B' - A' = \{a\}$

$A - B = B' - A'$

4. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 5}, B = {2, 3, 4, 6}, C = {3, 5, 6, 7}, demostrar que **$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$**.

$(B \cup C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A - (B \cup C) = \{1\}$

$(A - B) = \{1, 5\}$

$(A - C) = \{1, 2\}$

$(A - B) \cap (A - C) = \{1\}$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

8. Funciones

Una función es una relación entre A y B, en otras palabras, un conjunto A, el cual se denomina variable independiente (dominio) y un conjunto B, el cual se denomina variable dependiente (codominio). La función es una relación que cumple que todo elemento $x \in$ **A** se relaciona solamente con un elemento $y \in$ **B**.

Una función es la relación entre dos variables, si y solo si, a cada valor de la variable independiente le pertenece solamente un valor de la variable dependiente.

Dados los conjuntos A = {-2, -1, 0, 1, 2} y B = {6, 7, 8, 9, 10}, la función se representa gráficamente de la siguiente manera:

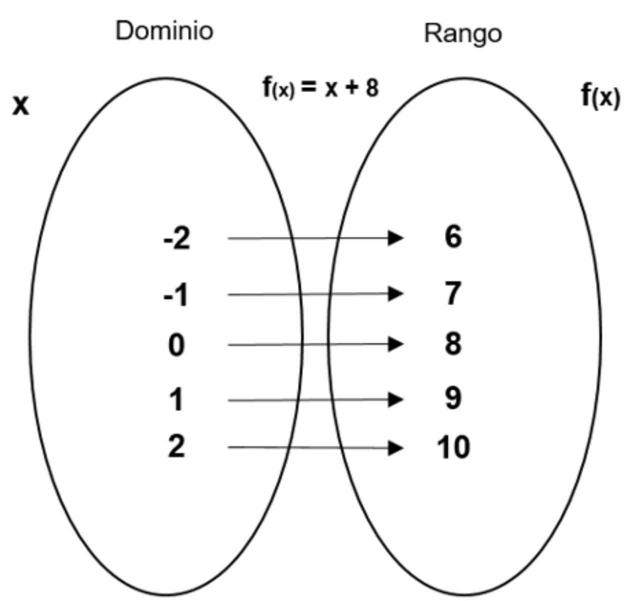


Figura 9. Funciones. Fuente: elaboración propia.

Finalmente, la expresión matemática es f(x) = x + 8.

8.1. Relación entre conjuntos: plano cartesiano par ordenado, producto cartesiano, diagrama sagital

Un plano cartesiano es el lugar físico o digital que permite trazar el comportamiento de diferentes datos en un sistema de cuadrícula que refiere coordenadas, con el fin de poder situar un punto de acuerdo con sus valores (**x**, **y**), que pueda analizarse en una escala igual para todos los valores.

En este sentido, para establecer la relación entre números es necesario graficarlos en un plano cartesiano, donde se ubica su posición dentro de lo que se denomina un par ordenado, es decir, las coordenadas en las que se encuentra en términos de su valor de (**x**, **y**).

Por ejemplo, si se enuncia un par ordenado (4, 3), quiere decir que debe ubicarse el punto tomando en cuenta el valor en el eje **x** (en este caso 4), en relación con el valor en el eje **y** (en este caso 3), asimismo, los pares ordenados (5, -4), (-6, -6) y (-5, 1) se grafican de la siguiente manera:

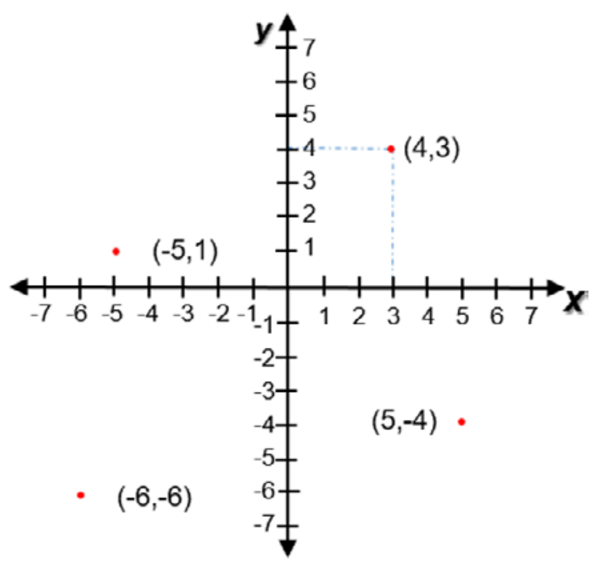


Figura 10. Par ordenado. Fuente: elaboración propia.

El producto cartesiano es una operación entre dos conjuntos que se multiplican uno con el otro y da como resultado un nuevo conjunto. Por ejemplo, con base en el conjunto A {2, 4, 6} y el

Un sistema de ejes cartesianos se traza para simbolizar los pares ordenados en un plano, que se esquematiza mediante dos rectas perpendiculares, con un punto de origen que se representa con el punto (0, 0).

conjunto B {c, d, e}, al calcular el producto cartesiano se obtiene un nuevo conjunto A x B cuyos valores resultan de multiplicar ambos conjuntos:

A x B = {2c, 2d, 2e, 4c, 4d, 4e, 6c, 6d, 6e}

Para graficar un par ordenado donde y está en función de x [f(x)]; se utiliza el diagrama sagital, en el que a cada elemento de x le corresponde un único elemento de y; sin embargo, los elementos de y pueden corresponder a más de un elemento de x; su relación se establece mediante flechas, que permiten visualizar la relación entre el valor del dominio y del contradominio (este último también conocido como imagen). Por ejemplo:

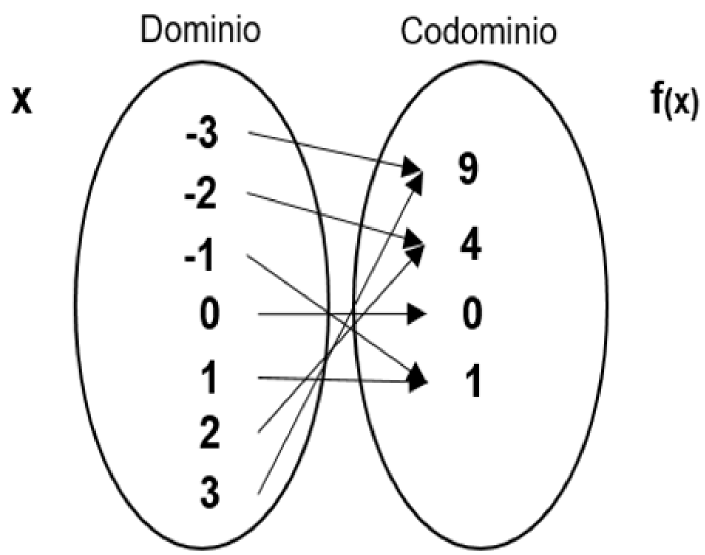


Figura 11. Diagrama sagital. Fuente: elaboración propia.

8.2. El concepto de función y sus aplicaciones prácticas

Respecto al concepto de función, en correlación con el definido en párrafos anteriores, Vargas y Zamora (2020) explican que en la función de:

> una variable es posible distinguir variables y constantes; de estas, la variable independiente es a la que se le asigna valores y la variable dependiente es aquella cuyo valor viene determinado por el que toma la variable independiente[...] en estas se pueden diferenciar la regla de correspondencia, dominio, rango y pares ordenados; para expresar las tres últimas se emplean conjuntos.

Por consiguiente, en los siguientes apartados se precisan los diferentes conceptos de una función.

8.2.1. Dominio y rango de una función

El dominio representa todos los valores que toma x, y el rango son los valores que toma y en función de x. Por ejemplo, a partir del siguiente diagrama sagital:

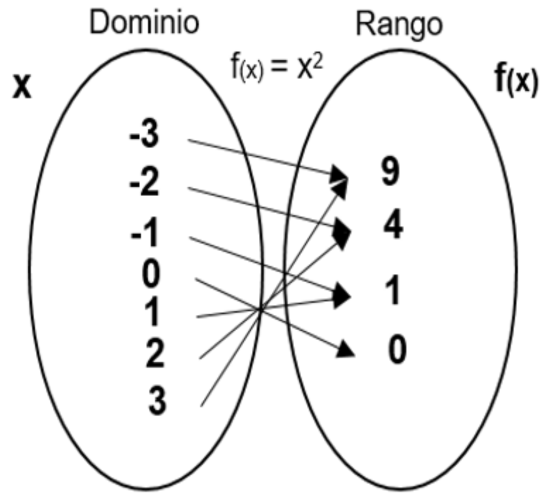


Figura 12. Diagrama sagital. Fuente: elaboración propia.

Determinar el dominio y el rango:

El dominio es x = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) y el rango es y = (0, 1, 4, 9).

Respecto a la figura 12, de cada elemento de x sale una sola flecha hacía un elemento del rango f(x); en consecuencia, el dominio son los elementos de **x** y el rango son los elementos de **f(x)**, los cuales son imagen o corresponden a un elemento del dominio.

En ejes cartesianos, la función se representa en la siguiente gráfica:

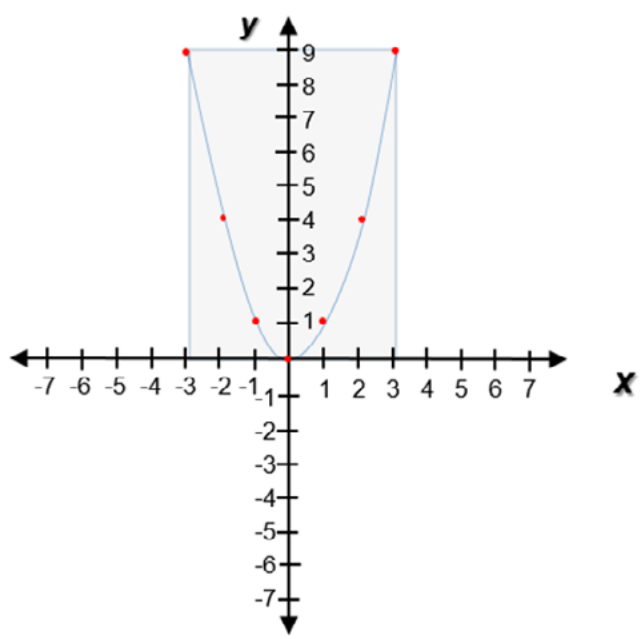
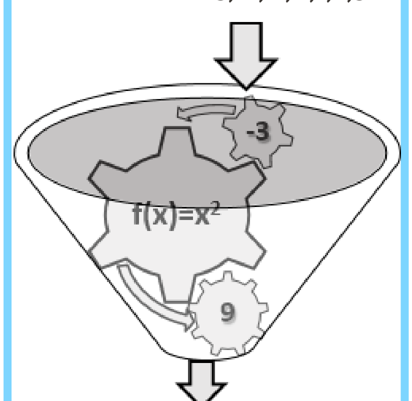


Figura 13. Función en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Donde el dominio es D_f = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3] y el rango es R_f = [0, 1, 4, 9], representado en la zona sombreada.

De forma didáctica, dentro de la función, el dominio también se llama valor de entrada y el rango se conoce como valor de salida; en consecuencia, el dominio x es la materia prima de entrada que alimenta al artefacto denominado **f(x) = x²**, y el producto de salida que genera dicho artefacto es el rango f(x):

Dominio x = (-3,-2,-1,0,1,2,3)



Rango f(x) = (0,1,4,9)

8.3. Función inyectiva, biyectiva, sobreyectiva

En la función inyectiva, a cada elemento distinto del rango le corresponde un elemento diferente del dominio, esto es, no hay más de un elemento del dominio **x** que tenga el mismo rango **y**. A continuación se muestran algunos ejemplos de diagrama sagital de la función inyectiva:

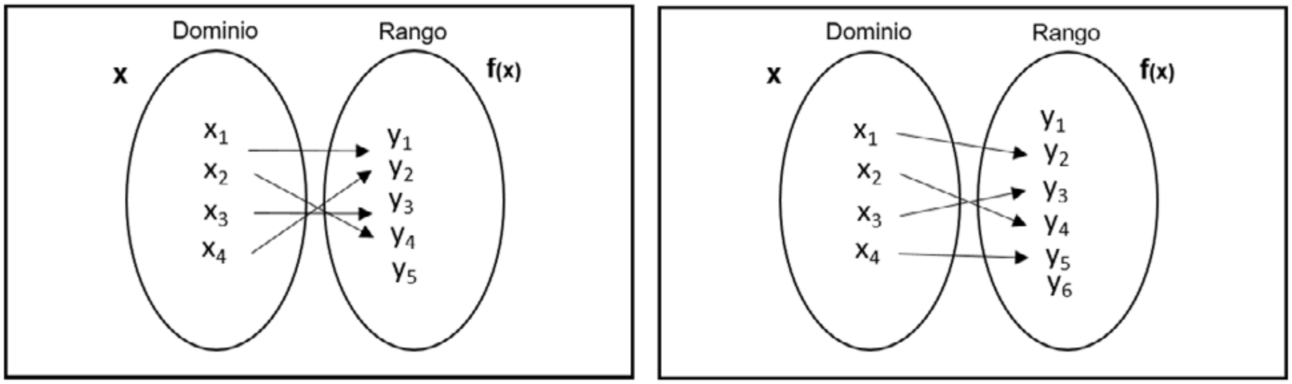


Figura 15. Diagrama sagital de la función inyectiva. Fuente: elaboración propia.

Ejemplo

Con base en los conjuntos A = {-2, -1, 0, 1, 2} y B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}, determinar si se establece entre ambos una función inyectiva, su dominio y rango, su diagrama sagital y su representación en el plano cartesiano. Si f(x) es la relación establecida por el conjunto de pares ordenados (x, y), donde y = (x+3), entonces se obtendrán los siguientes pares ordenados:

f(x) = {(-2,1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)}

Ahora bien, si el dominio es D_f = (-2, -1, 0, 1, 2) y el rango es R_f = (1, 2, 3, 4, 5), la representación en el diagrama sagital sería la siguiente:

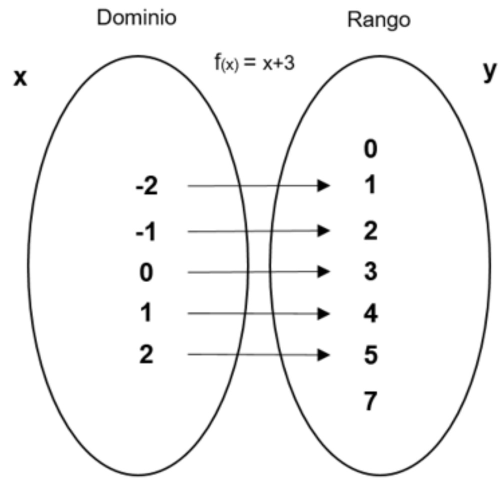


Figura 16. Diagrama sagital de la función inyectiva. Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, es una función inyectiva, debido a que a cada elemento distinto del rango le corresponde un elemento diferente del dominio. Ahora bien, en ejes cartesianos, la función inyectiva de f(x) = x+3 es:

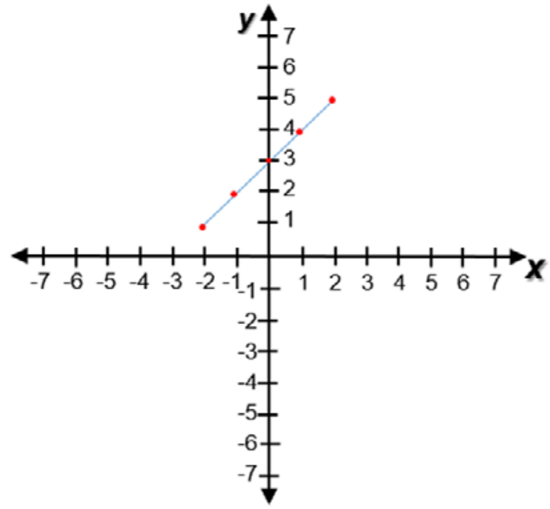


Figura 17. Función inyectiva en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

La función sobreyectiva se origina cuando a todo elemento del rango le corresponde por lo menos un elemento del dominio. A continuación, se muestran algunos ejemplos de diagrama sagital de la función sobreyectiva:

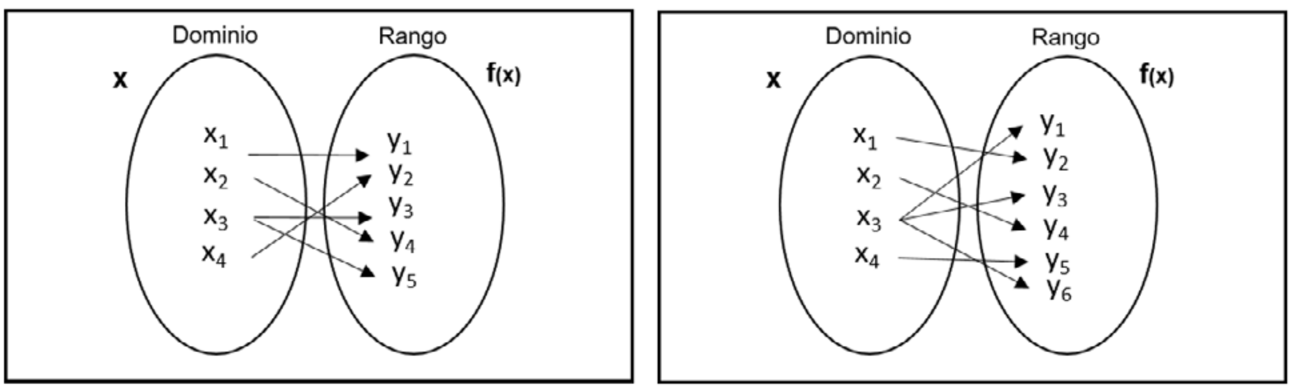


Figura 18. Diagrama sagital de la función sobreyectiva. Fuente: elaboración propia.

Ejemplo

A partir de los conjuntos A = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} y B = {4}, determinar si se puede establecer una función sobreyectiva, su dominio y rango, su diagrama sagital y su representación en el plano cartesiano. Si f(x) es la relación establecida por el conjunto de pares ordenados (x,y), donde y = 4, entonces se obtienen los siguientes pares ordenados:

f(x) = {(-3, 4), (-2, 4), (-1, 4), (0, 4), (1, 4), (2 ,4), (3, 4)}

Si el dominio es D_f = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} y el rango es R_f = (4), la representación en el diagrama sagital sería la siguiente:

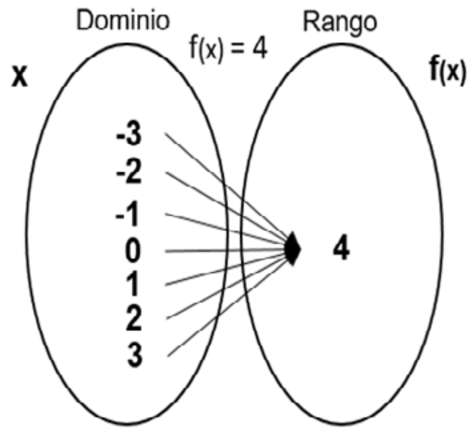


Figura 19. Diagrama sagital de la función sobreyectiva. Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, es una función sobreyectiva, debido a que a todo elemento del rango le corresponde por lo menos un elemento del dominio. En ejes cartesianos, la función sobreyectiva de la función f(x) = 4 sería la siguiente:

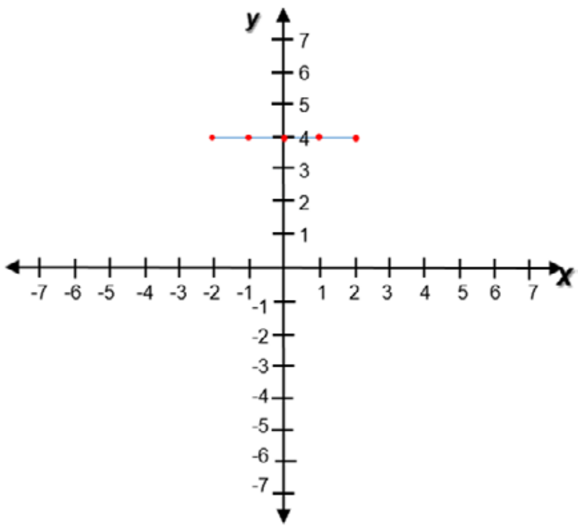


Figura 20. Función sobreyectiva en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Si una función cumple con las características de ser inyectiva y sobreyectiva, se dice que es biyectiva. En este tipo de funciones a cada valor del dominio **x** le corresponde un solo valor del rango **y**. A continuación se presentan algunos ejemplos de diagrama sagital de la función biyectiva:

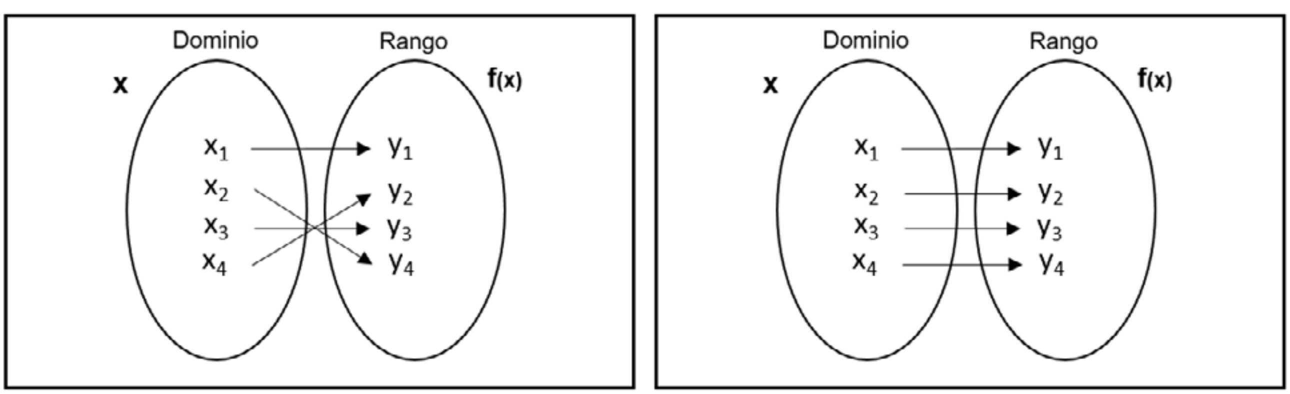


Figura 21. Diagrama sagital de la función biyectiva. Fuente: elaboración propia.

Ejemplo

Dados los conjuntos A = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} y B = {-56, -21, -4,-1, 0, 1, 4, 21, 56}, determinar si se puede establecer una función biyectiva, su dominio y rango, su diagrama sagital y su representación en el plano cartesiano. Si f(x) es la relación establecida por el conjunto de pares ordenados (x, y), donde $y = x^3 - 2x$, entonces se obtienen los siguientes pares ordenados:

f(x) = {(-3, -21), (-2, -4), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, 4), (3, 21)}

En este contexto, si el dominio es D_f = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} y el rango es R_f = (-21, -4, -1, 0, 1, 4, 21), la representación en el diagrama sagital sería la siguiente:

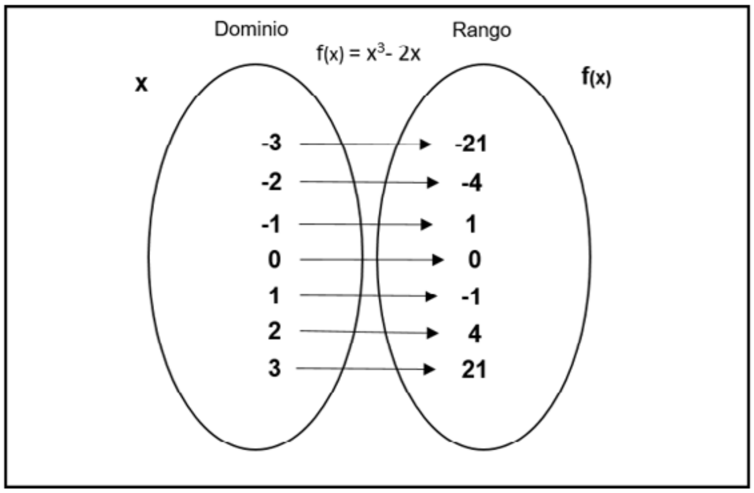


Figura 22. Diagrama sagital de la función biyectiva. Fuente: elaboración propia.

Por tanto, es una función biyectiva, debido a que es inyectiva y sobreyectiva. Ahora bien, en ejes cartesianos, la función biyectiva es:

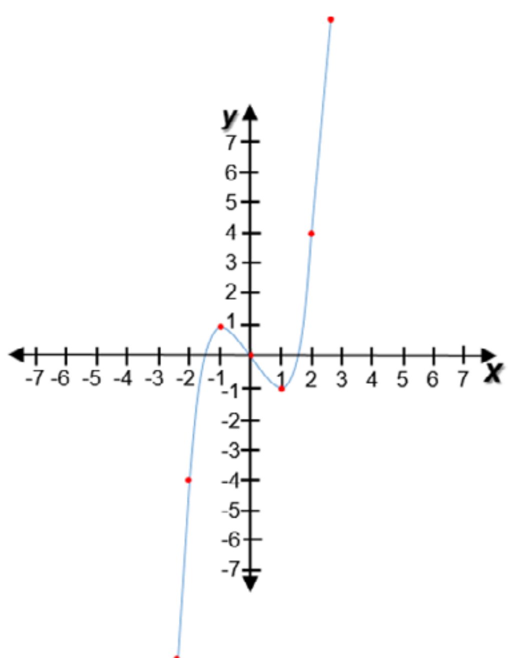


Figura 23. Función biyectiva en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

8.4. Gráfica de funciones

Una gráfica es un elemento visual que ayuda a comprender cómo se comportan los datos dentro de una función determinada. Cabe aclarar que una gráfica puede presentar diferentes valores relacionados que no tengan las características de una función. La siguiente gráfica muestra la evolución de un atleta de salto de altura cada año, por un periodo de ocho años:

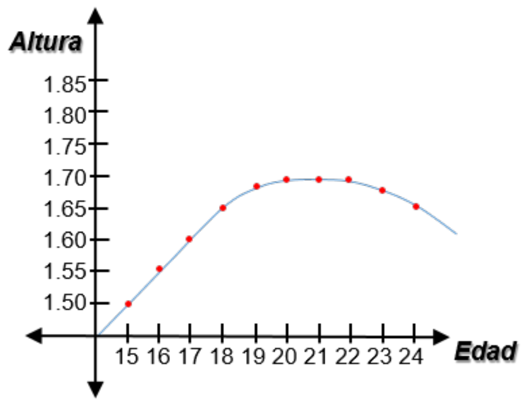


Figura 24. Gráfica de funciones. Fuente: elaboración propia.

- ¿Cuánto saltó cuando empezó a practicar este deporte?
- ¿A qué edad logra su máxima altura?
- ¿Cuánto saltó a los 20 años?
- ¿Qué edad tenía cuando realizó su salto más rápidamente?

Para responder las preguntas anteriores se puede visualizar la representación gráfica desarrollada mediante ejes cartesianos. Al observar la gráfica se concluye que la altura depende de la edad; en este contexto, la realidad relaciona dos variables: una independiente, que se grafica en el eje horizontal **x** y una dependiente, que corresponde al eje vertical **y**.

En este orden de ideas, la dependencia entre variables que se dan en contextos deportivos, económicos, físicos, mecánicos, entre otros, puede ser funcional y permite resolver problemas, si cumplen con ciertas circunstancias; las relaciones funcionales se denominan funciones y se utilizan para comprender diversas circunstancias. Por ejemplo:

La calidad de un zapato deportivo en función de su precio.

El número de atletas que practican las siete principales disciplinas deportivas.

Los puntos anotados por un equipo de basquetbol en una temporada.

Cuántos jugadores profesionales de fútbol hay en diez países de Latinoamérica.

Cuántos gramos de proteína consume por día un atleta de halterofilia en un mes.

En este marco, para que la relación sea una función no debe existir vaguedad para establecer la variable independiente y los diferentes valores de la variable dependiente. Por consiguiente, las funciones de los ejemplos anteriores pueden representarse visualmente a través de gráficas, las cuales se desarrollan designando las variables independientes en el eje **x**, y asignando diferentes valores para el eje **y**.

Finalmente, la gráfica de una función representa un fenómeno real, es decir, una representación donde se simbolizan los valores de la variable independiente **x** y los valores de la variable independiente **y**. Cabe aclarar que la gráfica cambia según los datos que incluya, de tal forma que puede ser una recta, una curva, o incluso una línea que suba y baje muchas veces a través de los ejes cartesianos.

8.5. Funciones polinómicas

Una función polinómica está definida por una expresión algebraica de polinomios; por tal motivo, tiene múltiples términos y una función polinómica de grado n, que se designa mediante la siguiente fórmula:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \dots a_1x + a_0$

En esta línea argumental, la fórmula anterior indica que una función polinómica puede estar representada por las siguientes expresiones algebraicas:

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + ax + a_0$$

$$t(x) = a_2x^2 + ax + a_0$$

$$f(x) = ax$$

Función constante. Recibe ese nombre, porque f(x) nunca cambia su valor. El valor de la constante es un número real; por lo tanto, a pesar de que la función cambie por la integración de variables, el valor de la constante será igual. En este contexto, si la constante es **f(x) = 4**, sin importar que cambie el valor de **x**, **f(x)** siempre valdrá 4, por lo que su gráfica es una línea horizontal, donde el valor en el eje y es 4, y su expresión algebraica es:

$$f(x) = kx^0$$

Por consiguiente, una función constante es aquella en la que el valor de **f(x)** es el mismo para cualquier valor de **x**.

Ejemplo

Por ejemplo, graficaremos la función constante **f(x) = 3**. Para graficar la función se determinan los valores de **x** y **f(x)**; en el caso de una función constante, **f(x)** será un número constante que pertenece al conjunto de números reales, para este ejemplo es 3; asimismo, **x** puede ser cualquier número real.

x	**kx^0**
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3

La representación en el plano cartesiano es:

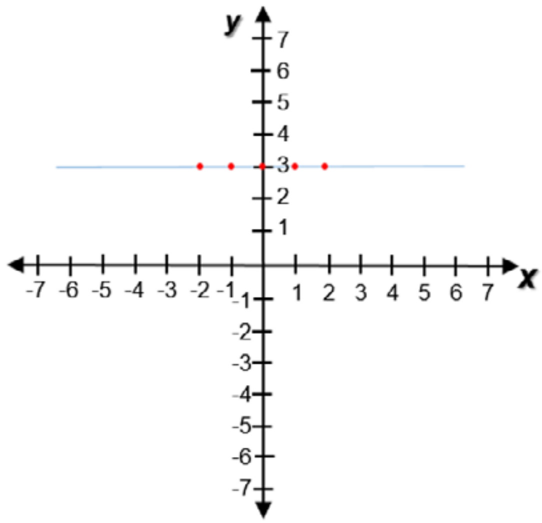


Figura 25. Gráfica de función constante en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Dominio. Las funciones constantes no tienen restricción para la asignación de valores a **x**; por lo tanto, el dominio es el conjunto de los números reales y su notación matemática es la siguiente:

$D_f = \{x|x \in R\}$

Rango. Las funciones constantes no tienen restricción para la asignación de valores a **y**; sin embargo, son una constante **k**, en este caso es 3 y su notación matemática es la siguiente:

$Rf = \{y|y=3\}$

Función lineal. La función lineal tiene como condición que ninguna de sus variables esté elevada a una potencia diferente de 1; en consecuencia, la función lineal es una recta trazada sobre el plano cartesiano, con una pendiente y un valor de la ordenada al origen. En notación matemática se identifica de la siguiente manera:

$y = mx + b$

Donde m es la pendiente, es decir, la inclinación que tiene la recta; si la pendiente es cero, se trata de una línea horizontal; si la pendiente es negativa, la línea es decreciente y entre más aumente el valor de x, disminuye el de y; si la pendiente es positiva, es una recta ascendente.

Por ejemplo, graficaremos la función lineal **f(x) = 3x – 2**. Para graficar la función se determinan los valores de **x** y **f(x)**, se asignan valores a **x** y se sustituyen en la ecuación **f(x) = 3x – 2**, que también se puede expresar como **y = 3x – 2.**

x	**3x – 2**
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4

El conjunto de pares ordenados es (-2, -8), (-1, -5), (0, -2), (1, 1), (2, 4)

La representación en el plano cartesiano sería la siguiente:

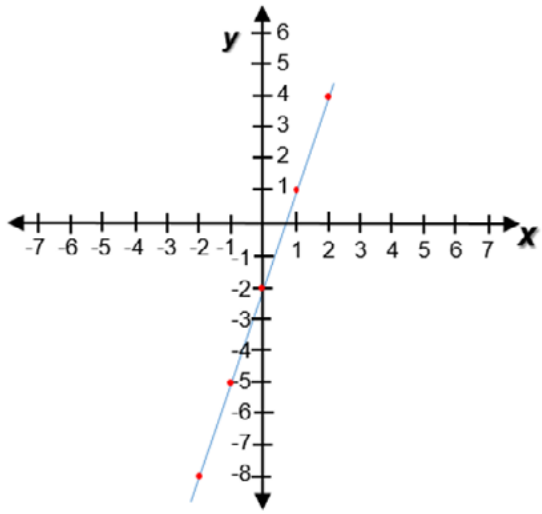


Figura 26. Gráfica de función lineal en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Función cuadrática. La función cuadrática es un polinomio de segundo grado, por lo tanto, su notación matemática es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Cabe mencionar que la notación es de segundo grado, porque el exponente mayor que tiene la **x** es 2; además, la función cuadrática de segundo grado gráficamente siempre serán parábolas simétricas, donde el vértice, la orientación de la parábola, la intersección de los ejes con las ordenadas y con las abscisas, son peculiaridades que se modifican según los valores de la ecuación cuadrática.

En este contexto, el par ordenado del vértice de la función cuadrática se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f_{(x)}\right) \qquad (2)$$

Intersección con los ejes. Una parábola siempre cruza al eje **x** cuando **y = 0**, por consiguiente, para encontrar la intersección con los ejes se utiliza la ecuación cuadrática; asimismo, cuando corta en el eje **y**, **x** = 0; por ende, el punto es (0, c).

De manera que la intersección en el eje **x** sería:

Si y = 0, entonces se sustituye **y** en (1)

$0 = ax^2 + bx + c$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Asimismo, la intersección en el eje **y** sería:

Si x = 0, entonces se sustituye **x** en (1)

$f(x) = a0^2 + b0 + c$

$f(x) = c$

Por ejemplo, graficaremos la función cuadrática **f(x) = x² – 6x + 5**. Para lograrlo es necesario identificar el vértice de la parábola y la intersección con los ejes. Primero se identifican los coeficientes a=1, b = -6 y c = 5. Posteriormente, se calculan las coordenadas del vértice y se sustituyen los valores de los coeficientes en la fórmula 2:

$$V=\left(\frac{-b}{2a}, y\right)$$

La primera coordenada del vértice es:

$$x=\left(\frac{-(-6)}{2(1)}\right)=\left(\frac{6}{2}\right)=3$$

Si sustituimos **x** en $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$$f(x) = 3^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

Por lo tanto, el vértice es el par ordenado: (3, -4).

Para calcular la intersección con el eje **x** se sustituyen los coeficientes en la fórmula:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2-4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$$

$$x=\frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x=\frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por lo tanto, los pares ordenados de la intersección en el eje **x** son (5, 0) y (1, 0) y el par ordenado de la intersección en el eje **y** es (0, c), por lo tanto, (0, 5). Como es una parábola simétrica, para calcular un punto equidistante del eje simétrico se le da un valor a **x** para calcular **y** en la ecuación cuadrática.

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f(x) = 6^2 - 6(6) + 5$

$f(x) = 36 - 36 + 5$

$f(x) = 5$

Por lo tanto, el par ordenado de un punto de la parábola es (6, 5).

Gráfica de la función cuadrática. Para graficar los pares ordenados que se utilizan se requiere: el vértice (3, -4), las intersecciones en el eje **x** (1, 0) y (5, 0), la intersección en el eje **y** (0, 5) y un punto de la parábola (6, 5).

La representación en el plano cartesiano sería la siguiente:

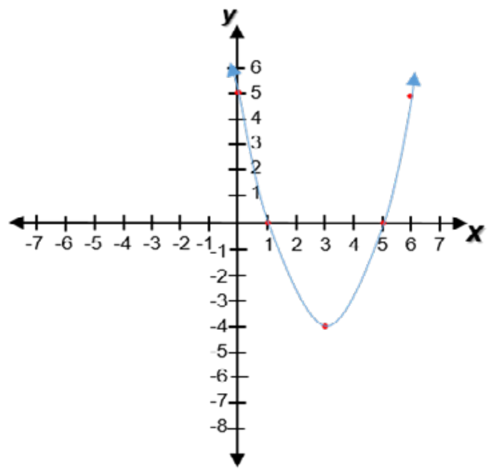


Figura 27. Gráfica de función cuadrática en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Se determina el dominio al analizar la gráfica. Ahora bien, dado que no tiene restricciones, entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales y su notación matemática es:

$$D_f = \{x|x \in R\}$$

El rango va del valor menor que toma **y**, ubicado en el vértice; en este caso, -4 hasta el infinito y su notación matemática es:

$$R_f = \{y|y \geq -4\}$$

Función cúbica. Una función cúbica es una función polinómica de grado tres y su notación matemática es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (1)$$

Dominio. Las funciones cúbicas no tienen restricción para la asignación de valores a **x**; por lo tanto, el dominio es el conjunto de los números reales y su notación matemática es:

$$D_f = \{x|x \in R\}$$

Rango. Las funciones cúbicas no tienen restricción para la asignación de valores a **y**; por ende, el dominio es el conjunto de los números reales y su notación matemática es:

$$R_f = \{y|y \in R\}$$

Cortes con los ejes. Los cortes con los ejes o intersección con los ejes se realizan igualando **y = 0, x = 0** y sustituyendo los valores en la ecuación cúbica.

Gráfica de la función cúbica. Por ejemplo, graficaremos la función cúbica $\mathbf{y = x^3 + x^2 - 4x - 4}$. Primero determinaremos los puntos de intersección:

Para cuando y = 0, la ecuación adquiere la forma:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \text{Factorizando}$$

$$x^2 (x + 1) - 4(x + 1) = 0$$

$$(x + 1) (x^2 - 4) = 0$$

$$(x + 1) (x - 2) (x + 2) = 0 \quad \text{Despejando los factores, uno a la vez.}$$

$$(x + 1) = 0(x - 2) (x + 2)$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = 0 - 1 = -1$$

$$(x + 2) = 0(x + 1) (x - 2)$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = 0 - 2 = -2$$

$$(x - 2) = 0(x + 1) (x + 2)$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 0 +2 = 2$$

Por lo tanto, los pares ordenados de corte en el eje **x** son (-2, 0), (-1, 0), (2, 0).

Una vez que se han identificado la intersección con los ejes, se colocan en una tabla y se complementan con los valores que faltan. El siguiente paso es sustituir los valores de x en la fórmula $y = x^3 + x^2 - 4x - 4$, para encontrar los valores de y.

x	$\mathbf{x^3 + x^2 - 4x - 4}$
-3	-10
-2	**0**
-1.5	0.8
-1	**0**
-0.5	-1.8
0	-4
1	-6
2	**0**

Los pares ordenados son (-3, -10), (-2, 0), (-1.5, 0. 8), (-1, 0), (-0.5, -1.8), (0, -4), (1, -6), (2, 0), y la representación en el plano cartesiano se muestra en la siguiente figura:

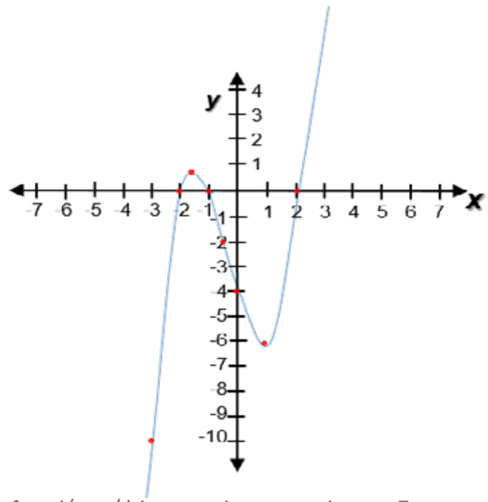


Figura 28. Gráfica de función cúbica en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

8.6. Función radical

La función radical es aquella en la cual la variable **x** se encuentra bajo el signo radical, donde la raíz del coeficiente **b** es otro número **k**, que al multiplicarse por sí mismo da como resultado el número **b**; su notación matemática es:

$$y = \sqrt{bx + c} \quad \text{o} \quad y = \sqrt{bx - c}$$

Es necesario destacar que la función radical así expresada hace referencia a la raíz cuadrada; por lo tanto, el dominio, el rango y la intersección en los ejes se determinan de la siguiente manera.

Dominio. El dominio de una función radical considera todos los números mayores o iguales a cero, debido a que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Su notación matemática es la siguiente:

$$D_f = \{bx + c | (bx + c) \geq 0\}$$

$$D_f = \{bx - c | (bx - c) \geq 0\}$$

Rango. El rango es el conjunto de números reales mayores o iguales a cero y su notación matemática es la siguiente:

$$R_f = \{y | y \geq 0\}$$

Intersección con los ejes. La intersección de la gráfica con los ejes está determinada por las fórmulas:

Para la intersección con el eje **y**:

$$x = \frac{-c}{b} \quad \text{o} \quad x = \frac{c}{b}$$

Para la intersección con el eje **x**:

$$y = \sqrt{c}$$

$$y = \sqrt{-c} \notin R$$

Gráfica de la función radical. Por ejemplo, graficaremos la función radical y = $\sqrt{x-3}$.

Primero determinaremos el dominio, donde:

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$D_f = \{x \mid x \geq 3\}$$

Seguidamente definiremos la intersección con los ejes:

Dada la función:

$$y = \sqrt{x-3}$$

Cuando y = 0

$$0 = \sqrt{x-3} \qquad \text{Despejando } x$$

$$0^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2$$

$$0 = x - 3$$

$$x = 3$$

Entonces, cuando **y** = 0, y **x** = 3, se obtiene el par ordenado (3, 0).

Cuando x = 0:

$$y = \sqrt{0-3}$$

$$y = \sqrt{-3}$$

La afirmación anterior no tiene solución en el campo de los números reales; por tal motivo, se determina que no existe una intersección con el eje **y**. Una vez que se han identificado la intersección con los ejes, se colocan en una tabla y se complementan con los valores que sean mayores o iguales a 3. El siguiente paso es sustituir los valores de x en la fórmula **y =** , para encontrar los valores de y.

x	
3	0
4	1
5	1.41
6	1.73
7	2

Los pares ordenados son (3, 0), (4, 1), (5, 1.41), (6, 1.73), (7, 2).

Asimismo, la representación en el plano cartesiano se muestra en la siguiente figura:

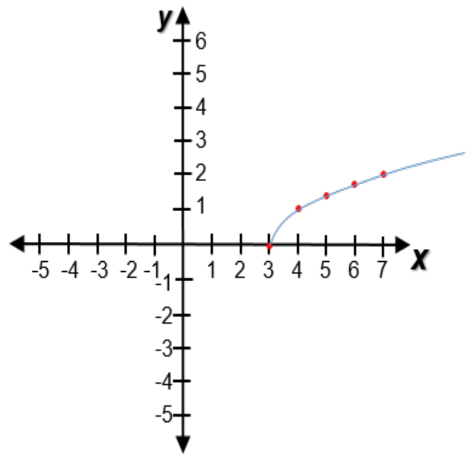


Figura 29. Gráfica de función radical en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Finalmente, el rango de la función es el siguiente:

$$R_f = \{y|y \geq 0\}$$

8.7. Función racional

La función racional es una expresión algebraica compuesta por dos polinomios: numerador y denominador, donde el denominador debe ser diferente de cero. A continuación se muestra su notación matemática:

$$y = \frac{bx+c}{bx-d}$$

La notación matemática anterior expresa que la función racional es igual al dividir la función bx + c entre la función bx – c, siempre y cuando bx – c sea diferente de cero. La razón es que la división de un número entre cero no está definida, por lo que es imposible realizar una división entre cero.

Dominio. El dominio está constituido por todos los números reales que cumplan que el denominador de la función no sea igual a cero.

Rango. El rango representa un caso particular y debe ser despejado en cada una de las funciones de este tipo, mediante el cálculo del valor de **y** en función de **x**.

Intersección con los ejes. Los cortes con los ejes o intersección con los ejes se realizan igualando **y = 0, x = 0,** y sustituyendo la función racional.

Asíntotas. Las asíntotas son dos líneas rectas: una paralela al eje **x** y otra paralela al eje **y**, las cuales representan los valores que no puede tomar la gráfica, es decir, para la asíntota vertical, el valor del denominador debe ser igual a cero; en cambio, la asíntota horizontal se determina por la división de los coeficientes del numerador y el coeficiente del denominador, tomados de aquella variable que tenga el exponente máximo.

Gráfica de la función racional. Por ejemplo, graficaremos la función racional: $y = \frac{2x-5}{x-3}$

Primero se determinan las asíntotas:

A partir de la función y = $\frac{2x-5}{x-3}$ y dado que el denominador no debe ser cero:

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 0 + 3$$

$$x \neq 3$$

La asíntota vertical paralela al eje **y** pasa por el punto x = 3

$$y = \frac{2x}{x}$$

$$y = \frac{2}{1} = 2$$

La asíntota horizontal paralela al eje **x.** pasa por el punto **y** = 2

La intersección con los ejes, cuando y = 0:

$$0 = \frac{2x-5}{x-3}$$

$$(2x-3)\ 0 = 2x - 5$$

$$0 = 2x - 5$$

$$5 = 2x$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Se obtiene el par ordenado $(\frac{5}{2},\ 0)$

Cuando x = 0:

$$y = \frac{2(0)-5}{0-3}$$

$$y = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

Se obtiene el par ordenado $0, \frac{5}{2})$

El siguiente paso es calcular otros pares ordenados mediante la función racional y se recomienda que se midan a través de los valores cercanos a la asíntota **x**.

x	$\frac{2x-5}{x-3}$
1	1.5
2	1
4	3
5	2.5

Al graficar los pares ordenados: (1, 1.5) (2, 1), (4, 3), (5, 2.5), la intersección con los ejes es: (y (, y las asíntotas pasan por el punto x = 3, y = 2, por lo que se obtiene:

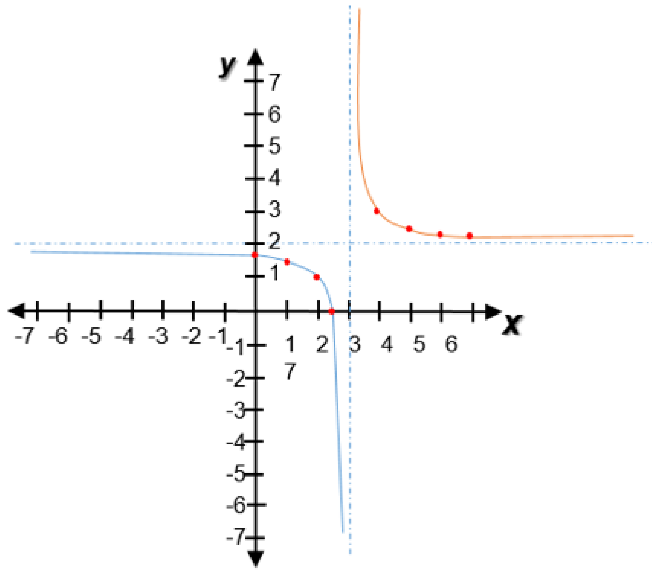


Figura 30. Gráfica de función racional en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

El dominio son todos los números reales, excepto el tres y el rango son todos los números reales, excepto el dos, en notación matemática:

$$Df = \{x|x \neq 3\}$$

$$Rf = \{y|y \neq 2\}$$

8.8. Funciones especiales

Dentro del grupo de las funciones algebraicas existen cuatro formas que se catalogan como especiales: función valor absoluto, función parte entera, función constante y función idéntica; en este subtema solo abordaremos las dos primeras.

8.8.1. Valor absoluto

El valor absoluto se refiere al valor que tiene un número sin importar si es negativo o positivo; su notación matemática se muestra a continuación:

$$f_{(x)} = |x|$$

Por ejemplo, graficaremos la función valor absoluto **f(x) = |x – 3| – 2.**

Para resolver el ejercicio de valor absoluto de una función se debe considerar la regla de valor absoluto, la cual establece que **x** es positiva si es mayor o igual que cero y **x** es negativa si es menor que cero, y su notación matemática es la siguiente:

$$f(x) = |x| = \left\{ \begin{array}{l} x, \ \text{si } x \geq 0 \\ -x, \ \text{si } x < 0 \end{array} \right\}$$

Ceros o raíces de la función. Los ceros o raíces de la función son la intersección con los ejes, que se realiza igualando **y = 0, x = 0,** y sustituyendo en la función.

Sustituyendo y = 0 en la función:

$0 = |x - 3| - 2$ Tomando en cuenta la regla de valor absoluto

$0 = (x - 3) - 2$ (1)

$0 = -(x - 3) - 2$ (2) Resolviendo 1 y 2

$0 = (x - 3) - 2$ (1)

$0 = x - 5$

$x = 5$ Esta es la condición de (1)

$0 = -(x - 3) - 2$ (2)

$0 = -x + 3 - 2$

$0 = -x + 1$

$x = 1$ Esta es la condición de (2)

Entonces: $f(x) = \begin{cases} (x - 3) - 2, \text{ si } x \geq 5 \\ -(x - 3) - 2, \text{ si } x < 1 \end{cases}$

Sustituyendo x = 0 en la función:

$y = |0 - 3| - 2$

$y = |-3| - 2$ El valor absoluto de − 3 es 3

$y = 3 - 2$

$y = 1$

De esta forma, se obtienen los pares ordenados (5, 0), (1, 0), (0, 1).

Posteriormente, se determina el vértice de la función, que tiene un par ordenado (x, y) y la **x** se obtiene a partir de la expresión |x − 3|, dado que se debe definir qué valor asume **x** dentro de la expresión valor absoluto, cuando es igual a cero, obviando el valor absoluto.

$x - 3 = 0$

$x = 3$ Sustituyendo x en la función.

$f(x) = |3 - 3| - 2$

$f(x) = -2$

El par ordenado del vértice es (3, -2).

Para definir los pares ordenados si x

x	(x − 3) − 2
5	0
6	1
7	2

De esta forma, se obtienen los pares ordenados (5, 0), (6, 1), (7, 2).

Ahora bien, para establecer los pares ordenados si x

x	− (x − 3) − 2
1	0
0	1
-1	2

De este modo, se obtienen los pares ordenados (1, 0), (0, 1), (-1, 2).

La representación en el plano cartesiano contempla los pares ordenados: (5, 0), (6, 1), (7, 2), (1, 0), (0, 1), (-1, 2). La intersección con los ejes (5, 0), (1, 0), (0, 1) y del vértice (3, -2), se obtiene:

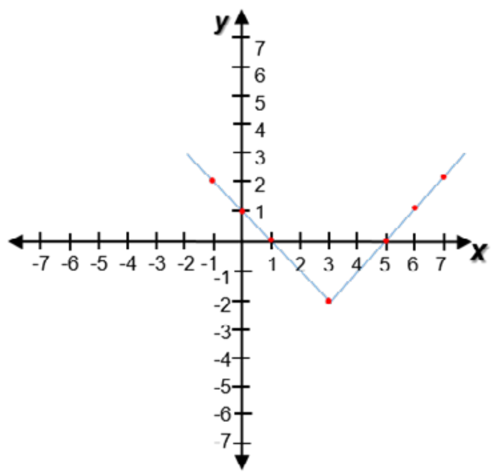


Figura 31. Gráfica de función valor absoluto en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, se establece el dominio al analizar la gráfica. En este contexto, dado que no tiene restricciones, el dominio es el conjunto de todos los números reales, y en notación matemática es:

$$D_f = \{x|x \in R\}$$

Finalmente, el rango va del valor menor, ubicado en el vértice (en este caso, -2) hasta el infinito, y en notación matemática es:

$$R_f = \{y|y \geq -2\}$$

8.8.2. Parte entera

Hay diferentes formas de determinar la parte entera, pero la más usual es la denominada función piso, la cual se abordará en este apartado. En este sentido, la parte entera –función piso– es una función **x** donde **x** pertenece al conjunto de números reales, en la cual se redondean los números decimales al número entero menor más próximo, esto es, en la recta numérica la función devuelve al entero más cercano de la izquierda a cualquier número decimal, por ejemplo:

[-5.9] = -6	[-3] = -3	[-1.7] = -2	[0.1] = 0	[2.1] = 2	[4.5] = 4	[6.8] = 6
[-4.3] = -5	[-3.6] = -4	[-0.1] = -1	[1.4] = 1	[3.9] = 3	[5.4] = 5	[7.1] = 7

Con base en un intervalo de números reales conformado por todos los números entre el entero z y z + 1, la parte entera para cualquier x ∈ [z, z + 1[será z; por ejemplo, dado el entero z = 7, el intervalo es [7, 8[donde el símbolo [indica que el intervalo puede tomar todos los números decimales posibles sin llegar a 8; por lo tanto, si se aplica la función parte entera a cualquier número de ese intervalo el resultado es 7.

$$f(x) = [x] = z \text{ donde } z \leq x < z+1$$

Donde $x \in \mathbf{R}$ y $z \in Z$

Por ejemplo:

x	y
-5.3	-6
-4.2	-5
-3.5	-4
-2.1	-3
-1.5	-2
-0.7	-1
0.6	0
1.7	1
2.4	2
3.9	3
4.3	4
5.8	5

La gráfica de los enteros anteriores se presenta en la siguiente figura:

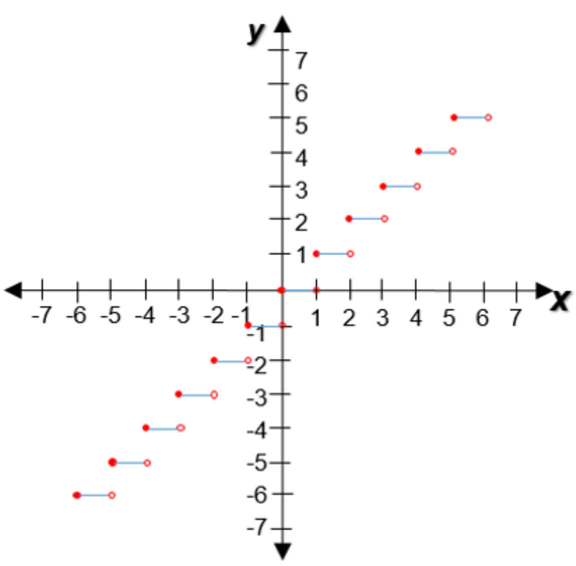


Figura 32. Gráfica parte entera en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

8.9. Función exponencial y logarítmica

Función exponencial. La función exponencial, solo aplica cuando **x** es el exponente y tiene como base **a.** Su notación matemática es:

$$f(x) = a^x$$

$$\text{Donde } a > 0,\ a \neq 1 \text{ y } x \in \mathbf{R}$$

Por ejemplo, graficaremos la función: $\mathbf{f(x) = 5^x - 3}$

En el par ordenado por el cual pasa la asíntota, en una función exponencial, el valor de **y** es igual al valor del término independiente y el valor de **x** es igual a cero. Si no hay un término independiente, entonces la asíntota es el eje **x**; por lo tanto, para esta función el par ordenado de la asíntota es: (0, −3).

La intersección con el eje **y** es:

$$y = 5^0 - 3$$

$$y = 1 - 3$$

$$y = -2$$

El par ordenado de la intersección con el eje **y** es (0, – 2).

Para encontrar los valores de **y** para cada valor de **x**, a partir de los pares ordenados de la intersección, (0, – 2), se colocan los valores aproximados a **x**, y se sustituye el valor de **x** en la ecuación $f(x) = 5^x - 3$.

x	$\mathbf{5^x - 3}$
−1	
0	**-2**
1	
2	

Al realizar las operaciones:

$$y = 5^{-1} - 3$$

$$y = \frac{1}{5} - 3$$

$$y = -2.8$$

$y = 5^1 - 3$

$y = = 5 - 3$

$y = 2$

$y = 5^2 - 3$

$y = 25 - 3$

$y = 22$

x	$5^x - 3$
−1	−2.8
0	−2
1	2
2	22

En este sentido, se obtienen los pares ordenados: (-1, − 2.8), (1, 2). (2, 22)

Ahora bien, para graficar la función, se utilizan los pares ordenados (-1, −2.8), (0, − 2), (1, 2) y el punto (0, −3), por donde pasa la asíntota.

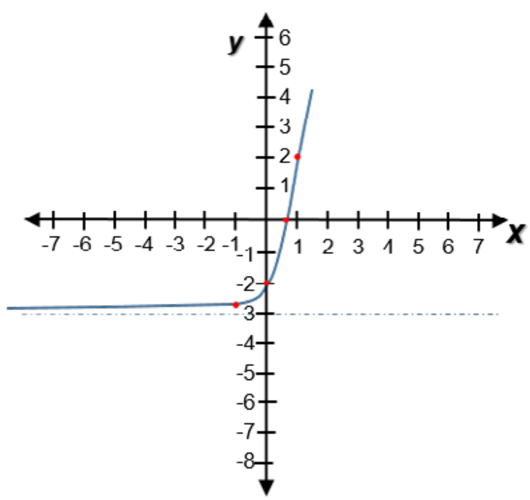


Figura 33. Gráfica función exponencial en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Dominio. En las funciones exponenciales el dominio no tiene restricciones, por ende, contempla todos los números reales y su notación matemática es:

$$D_f = \{x | x \in R\}$$

Rango. El rango en las funciones exponenciales, con base en un número entero, representa un caso particular; por lo tanto, para esta función, el dominio es el intervalo abierto de –3 hasta el infinito y su notación matemática es:

$$R_f = \{y|y>-3\}$$

Funciones logarítmicas. Las funciones logarítmicas son inversas a las funciones exponenciales. La función logarítmica con base **a** tiene la notación matemática:

$$f(x) = \log_a x$$

Donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$

Por ejemplo, graficar la función: $f(x) = \log_3 (4x - 8)$.

$f(x) = \log_3 (4x - 8)$ Dado que **x** > 0

$$4x - 8 > 0$$

$$4x > 8$$

$$x > 2$$

Por lo tanto, **x** no puede asumir el valor de 2, lo cual traza una recta asíntota que pasa por el punto (2, 0). Para encontrar los valores de **y** para cada valor de **x**, se debe sustituir el valor de x en la ecuación $\log_3 (4x - 8)$.

Sustituyendo 3 en $\log_3 (4x - 8)$

$$0 = \log_3 (4(3) - 8) = (12 - 8) = 4$$

$$0 = \log_3 4$$

$$0 = \ = 1.26$$

Sustituyendo 4 en $\log_3 (4x - 8)$

$$0 = \log_3 (4(4) - 8) = (16 - 8) = 8$$

$$0 = \log_3 8$$

$$0 = \ = 1.89$$

Sustituyendo 5 en $\log_3 (4x - 8)$

$$0 = \log_3 (4(5) - 8) = (20 - 8) = 12$$

$$0 = \log_3 12$$

$$0 = \ = 2.26$$

Sustituyendo 6 en $\log_3 (4x - 8)$

$$0 = \log_3 (4(6) - 8) = (24 - 8) = 16$$

$$0 = \log_3 16$$

$$0 = \ = 2.52$$

Sustituyendo 7 en $\log_3 (4x - 8)$

$$0 = \log_3 (4(7) - 8) = (28 - 8) = 20$$

$$0 = \log_3 20$$

$$0 = \ = 2.72$$

Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

x	$\log_3(4x - 8)$.
3	1.26
4	1.89
5	2.26
6	2.52
7	2.72

En este contexto, se obtienen los pares ordenados: (3,1.26), (4,1.89), (5,2.26), (6,2.52), (7,2.72).

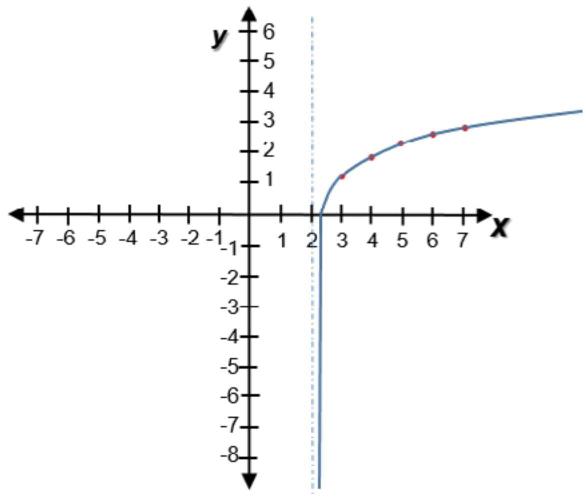


Figura 34. Gráfica función logarítmica en ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia.

Dominio. En las funciones logarítmicas cada valor del dominio representa un caso particular; por consiguiente, para esta función, el dominio es el intervalo abierto de dos hasta el infinito y su notación matemática es:

$$Df = \{x|x>2\}$$

Rango. El rango en las funciones logarítmicas, con base en un número entero, no tiene restricción, para la asignación de valores a **y**; por lo tanto, el dominio es el conjunto de los números reales y su notación matemática es:

$$R_f = \{y|y \in R\}$$

Referencias

Vargas Ramírez, T. y Zamora Plata, J. A. (2020). *Álgebra de conjuntos*. México: Universidad Nacional Autónoma de México / Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Recuperado de: https://www.zaragoza.unam.mx/wp-content/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/Algebra-F.pdf

Actividad

Resolución de funciones

Valor: 30%

Consulta en la plataforma el objetivo de la actividad y las instrucciones correspondientes. Recuerda que si tienes alguna duda respecto del entregable o de los temas programados para esta semana, puedes resolverla con tu asesor, ya sea durante la sala online o solicitando una asesoría individual.

Rúbrica

Antes de realizar la actividad te sugerimos revisar la rúbrica en la plataforma, a fin de identificar con claridad los criterios con los que será evaluado tu entregable. Revisa los descriptivos de cada criterio y apégate al nivel óptimo para conseguir la puntación máxima.