ieu UNIVERSIDAD

Razonamiento lógico matemático

Bloque I

Contenido

Clave

ACTIVIDADES SUMATIVAS		
	Actividades de aprendizaje	Son las distintas tareas que desarrolla el estudiante para verificar el logro de un objetivo de aprendizaje específico: ensayos, mapas mentales o conceptuales, cuadros comparativos, entre otras.
	Actividad integradora	Son entregables que representen alguna práctica en contextos laborales: proyectos, análisis de casos, diseño de propuestas, entre otros.
	Evaluación final	Es un examen de opción múltiple que contempla reactivos de la totalidad de contenidos de la materia.
	Foro de discusión	Es un espacio para la discusión grupal a partir de preguntas detonadoras o los resultados de actividades previas.
	Wiki	Desarrollo de contenido creado y enriquecido por múltiples usuarios, que se publica en la web.
	Blog	Desarrollo de contenido que puede ser creado y enriquecido por uno o varios usuarios, que se publica en la web de forma cronológica.

LECTURAS		
Lectura base	Lectura complementaria	Lectura recomendada
Literatura consolidada del área de conocimiento, considerada como “libro de texto”. El formato puede ser texto, audio o video.	Artículos de difusión o de reporte de investigación que muestran reflexiones o aplicaciones reales que se vinculan con los temas estudiados. El formato puede ser texto, audio o video.	Lectura breve que muestra un enfoque diferente de los temas estudiados.

INSTRUCCIONES Y RECURSOS

Actividades formativas

Estudio de caso	Reflexión	Ejercicio
Descripción breve de una situación que permita aplicar las competencias que se pretende desarrollar. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Proposición breve que pretende enfatizar información relevante del tema para considerar sus implicaciones en la práctica. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Actividad breve y replicable que permite detonar, desarrollar o comprobar aprendizajes. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.

Reforzadores

Ejemplo	**¿Sabías que...?**	**Tip**
Descripción breve de una situación que permita aplicar las competencias que se pretende desarrollar. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Proposición breve que pretende enfatizar información relevante del tema para considerar sus implicaciones en la práctica. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.	Actividad breve y replicable que permite detonar, desarrollar o comprobar aprendizajes. Actividad sugerida, no tiene impacto en la evaluación.

MULTIMEDIA

Clip de video	Clip de audio	Recurso web
Recomendación de recurso didáctico breve (no mayor a cinco minutos) que ilustra un tema en formato de video.	Recomendación de recurso didáctico breve (no mayor a cinco minutos) que explica un tema en formato de audio.	Recomendación de sitios web ajenos a la plataforma de IEU, con información relevante sobre un tema.

Introducción

La resolución de problemas requiere, en principio, de un razonamiento lógico para su planteamiento, análisis, síntesis y solución. En este sentido, la resolución de problemas matemáticos parte de la capacidad de observar hechos que ocurren en la naturaleza y representarlos en conceptos abstractos, los cuales pueden ser números y símbolos, para facilitar el proceso de razonamiento. En consecuencia, en este bloque identificaremos los métodos para estructurar y facilitar el proceso de abstracción, los cuales fueron creados a. C., y han sido desarrollados y enriquecidos en el transcurso de los años por matemáticos, físicos y psicólogos, entre otros.

Objetivo del bloque

Identificar los fundamentos del razonamiento lógico matemático a través del estudio de los principales códigos y símbolos para el desarrollo y resolución de problemas.

Lecturas base

Baldor de la Vega, A. A. (2016). Álgebra (pp. 6-33). México: Grupo Editorial Patria.

Lecturas complementarias

Departamento de Matemáticas (s.f.). Matemática I. Argentina: Universidad Nacional de la Plata.

Ecuaciones de primer grado - BBC (s.f.). Reconocimiento de patrones.

1. Sucesiones alfanuméricas de figuras

Con ayuda de las matemáticas, las personas explican lo que sucede en la naturaleza a través de la simulación con formas abstractas y la asignación de números, signos, letras especiales, y gráficos a cada fenómeno, los cuales ayudan a comprender el comportamiento de un hecho. En este sentido, una vez comprendido, se replica para pronosticar el resultado y encontrar aplicaciones.

En esta línea argumental, el razonamiento lógico matemático busca detectar las relaciones entre números y formas mediante la aplicación de conceptos lógicos que son aprendidos desde la infancia y desarrollados con el estudio y la experiencia. En consecuencia, el estudio de esta materia inicia con el análisis de patrones, es decir, las relaciones que se repiten entre un grupo de números y que, al detectarlas, se pueden desarrollar características comunes para su cálculo y solución.

Respecto a lo anterior, el concepto de serie o sucesión es una agrupación progresiva de números, cuyos valores pueden ser determinados con base en la aplicación de operaciones aritméticas o algebraicas –simples o compuestas– y que permiten predecir los valores sucesivos desconocidos, a partir del último dato conocido.

De igual manera, otras formas de sucesión se despliegan con imágenes o símbolos, donde se reúne una agrupación progresiva de ellos, cuyos cambios pueden ser determinados a partir de la identificación de sus formas y variaciones. En tal sentido, pueden ser simples –con un cambio en cada figura adicional a la vez– o compuestas –con múltiples cambios en cada figura de una sucesión–.

Reflexión

Una sucesión es un conjunto sistemático de elementos que expresan una ley de distribución.

La sucesión se representa de la siguiente manera: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$

Donde:

- Cada elemento de la sucesión se denomina término, y el subíndice indica el lugar que ocupa en dicha sucesión.
- a_1 es el primer término, a_2 el segundo, a_3 el tercero y a_n es el enésimo término.

Un ejemplo de sucesión de los números primos menores de 20 es: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. El primer término (a_1) sería 2 y el quinto término (a_5) sería 11 y el último 19.

Cabe mencionar que, en el presente curso, las palabras *sucesión*, *serie* o *secuencia* son manejadas indistintamente y poseen el mismo significado, y que la palabra *término* es cualquier número, símbolo o figura que forma parte de una sucesión.

El número primo más alto es una cifra con 24 862 048 dígitos, el cual fue obtenido al elevar el número 2 a la 82.589.933 potencia y restarle 1.

1.1. Reconocimiento de patrones en series alfanuméricas y de figuras

El ejemplo básico de un reconocimiento de patrones en series numéricas es identificar el término a_n en una secuencia. Por ejemplo:

$$1, 2, 3, 4... a_n$$

En tal sentido, se debe detectar la relación entre el término a_1 (1) y el a_2 (2), al igual que entre el término a_2 (2) y el a_3 (3). Para tal fin, se deben realizar operaciones aritméticas básicas –suma, resta multiplicación, división, exponentes, raíces– para encontrar una o más operaciones que apliquen en cada término de la serie.

En este ejemplo básico, el patrón de la serie numérica es:

$$a_1 + 1 = a_2 + 1 = a_3 + 1 = a_4 + 1 = a_5$$

Por consiguiente, a partir del último término conocido a_n sería:

$$4 + 1 = 5$$

En ese orden de ideas, hay series más complejas, como la siguiente:

$$4, 12, 15, 45, 48, 144, a_7$$

Respecto a esta secuencia, se puede probar realizar una suma; es decir, sumar 8 al término a_1, para obtener el término a_2, lo cual corresponde, sin embargo, para el término a_3 no, ya que con ese criterio (sumar 8), el término a_3 debería ser 20 y es 15. Por consiguiente, se debe descartar esa opción, porque no se puede emplear para calcular todos los términos.

Por tal motivo, es pertinente destacar que pueden intentarse varias operaciones aritméticas simples como multiplicaciones, divisiones, exponentes, raíces u operaciones compuestas, como una suma y una división, o un exponente y una resta, o cualquier combinación de las operaciones simples, de tal forma que el procedimiento supone un proceso de ensayo-error, hasta encontrar una operación u operaciones aritméticas que permitan calcular todos los números de una serie, es decir, siguiendo un patrón determinado.

Retomando la secuencia de la serie compleja, se debe buscar otro patrón, por consiguiente, lo que se hace es detectar la relación entre el término a_1 (4) y el término a_2 (12), mediante operaciones aritméticas básicas –suma, resta multiplicación, división– para concluir que se multiplica por 3 o se le suma 8; luego, identificar la relación entre el término a_3 (15) y el término a_4 (45) y concluir que se multiplica por 3 o se le suma 30 y, posteriormente, distinguir la relación entre el término a_5 (48) y el término a_6 (144) y concluir que se multiplica por 3 o se le suma 96; por tal motivo, hay una constante, a_1, a_3 y a_5 se multiplican por 3 para obtener a_2, a_4 y a_6, respectivamente.

Seguidamente, se debe establecer la relación entre a_2 y a_3 y concluir que se le suma 3, después descubrir la relación entre a_4 y a_5 y concluir que se le suma 3; en consecuencia, hay una constante, a a_2 y a_4 se les suma 3 para obtener a_3 y a_5, respectivamente.

De acuerdo con lo anterior, existe un patrón de la serie numérica, que se representa en la siguiente fórmula:

$$a_1 \text{ x } 3 = a_2 + 3 = a_3 \text{ x } 3 = a_4 + 3 = a_5 \text{ x } 3 = a_6 + 3 = a_7$$

Por lo tanto, a_7, a partir del último término conocido, es:

$$144 + 3 = 147$$

Para concluir se deben resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio

Reconozca el término que falta en las siguientes series numéricas.

A. 2, 8, 6, 24, 22, 88, a7

Opciones de respuesta:

a) 86

b) 85

c) 84

d) 90

B. 5, 4, 1, 4, a5

Opciones de respuesta:

a) 5

b) 1

c) 2

d) 4

C. 1, 2, 7, 14, 19, a6

Opciones de respuesta:

a) 14

b) 24

c) 38

d) 36

Reconocimiento de patrones en series alfanuméricas

Las sucesiones alfanuméricas son patrones de letras y números que siguen un orden lógico y en las que existe un término que se identifica a través de un proceso lógico-matemático; las referidas series, por ejemplo, se pueden expresar de la siguiente manera:

2a, 6c, 13f, 39j, 46o, a_6

Para identificar el término a_6, primero se debe encontrar la relación entre los términos numéricos; por tal motivo, es necesario separarlos:

2, 6, 13, 39, 46

Seguidamente, se buscan patrones de operaciones aritméticas sencillas o múltiples, por lo que se debe detectar la relación entre el término a_1 (1) y el término a_2 (2). Para tal fin, se deben realizar operaciones aritméticas básicas o múltiples; por ende, se invita al lector a tratar de identificar el patrón.

Si encontraste el patrón, ¡excelente! Si no lo encontraste, esta es la fórmula del patrón:

$$a_1 \text{ x } 3 = a_2 + 7 = a_3 \text{ x } 3 = a_4 + 7 = a_5 \text{ x } 3 = a_6$$

Este patrón se puede emplear en todos los términos, dado que se puede obtener el siguiente valor de la serie a partir del último dato conocido:

$$a_5 \text{ x } 3 = a_6 = 46 \text{ x } 3 = 138$$

Por lo tanto, el término numérico es 138, pero ¿y la letra?

2a, 6c, 13f, 39j, 46o, 138?

Para identificar la letra se debe usar el alfabeto para hacer los cálculos:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Primero se marca con amarillo la letra del término **a_1** (a), luego de **a_2** (c), así sucesivamente de **a_3, a_4 y a_5**. Se analiza la relación:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

De acuerdo con el esquema anterior, se deduce que existe también un patrón en las letras; la (a) tiene un espacio entre la (c), luego hay dos espacios para llegar a la (f), tres para la (j) y cuatro para la (o), es decir, hay una relación en orden creciente, por consiguiente, si se aumenta cinco letras a partir de la (o), se obtiene la (u).

De manera que, la serie queda de la siguiente forma:

2a, 6c, 13f, 39j, 46o, 138u

Para concluir, se deben resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio

Reconozca el término que falta en las siguientes series alfanuméricas.

A. 3yz, 15vw, 13rs, 65mn, a_5

Opciones de respuesta:

a) 63hi

b) 63gh

c) 62hi

d) 62gh

B. 5b, 4h, 1m, 4q, a_5

Opciones de respuesta:

a) 1t

b) 5s

c) 1s

d) 5t

C. 4w, 2t, 8q, 4n, a_5

Opciones de respuesta:

a) 8k

b) 10i

c) 8i

d) 10k

Reconocimiento de patrones en series de figuras

Después de reconocer patrones de series numéricas y series alfanuméricas, ahora nos enfocaremos en el razonamiento sobre patrones de figuras e imágenes. El objetivo es encontrar una relación matemática o geométrica en las figuras, que permita encontrar un patrón.

¿Qué figura complementa la serie?

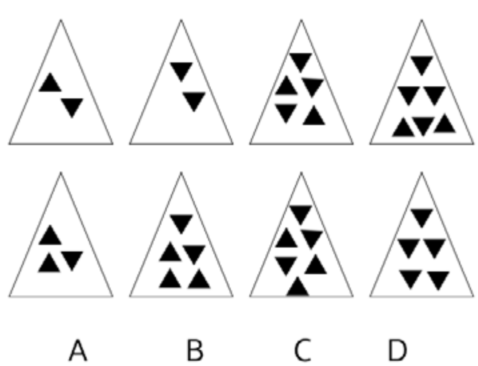


Figura 1. Sucesión de figuras. Fuente: elaboración propia.

En la serie, las figuras grandes son triángulos, por consiguiente, la atención se debe centrar en los triángulos negros pequeños, que sin una lógica numérica se encuentran en diferentes posiciones. Por tal motivo, el patrón de la serie no está en el número de triángulos negros, sino en el número de triángulos invertidos, que constituyen la serie numérica 1, 2, 3, 4, a_5; por lo tanto, la figura que complementa la serie es la D, porque tiene 5 triángulos invertidos.

¿Qué figura complementa la serie?

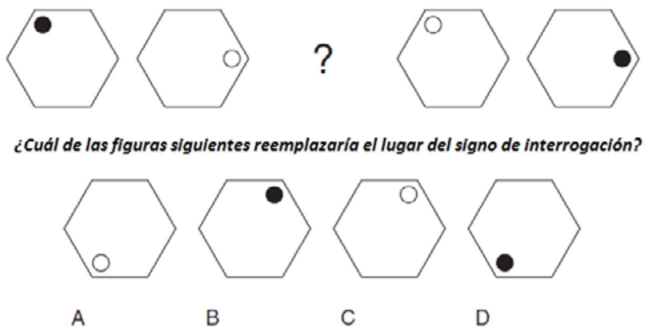


Figura 2. Figura faltante. Fuente: Carter (2005, p. 22).

En este ejemplo, la figura externa es la misma, un hexágono, por lo que es evidente que no debemos considerarlas. Asimismo, se observa que hay dos tipos de círculos: uno blanco y uno negro; por consiguiente, el primer razonamiento es si el faltante es un círculo blanco o negro.

Analicemos cada una de las opciones:

Opción A. Tiene un patrón en el cual el punto se desplaza dos lugares a la izquierda en cada término, sin embargo, no tiene una secuencia de negro-blanco.

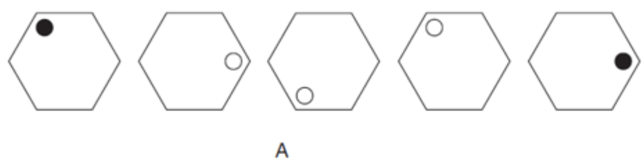


Figura 3. Figura faltante. Fuente: Carter (2005, p. 22).

Opción B. No existe patrón del lugar de los puntos, pero cumple con una alternancia de blanco-negro.

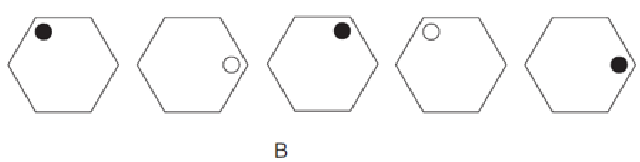


Figura 4. Figura faltante. Fuente: Carter (2005, p. 22).

Opción C. No existe patrón del lugar de los puntos y no tiene una secuencia de negro-blanco.

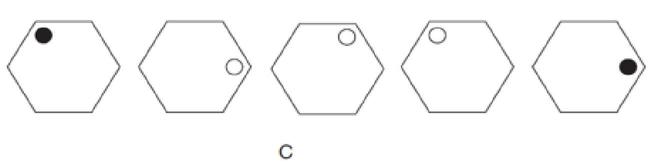


Figura 5. Figura faltante. Fuente: Carter (2005, p. 22).

Opción D. Tiene un patrón en el cual el punto se desplaza dos lugares a la izquierda en cada término y cumple con la alternancia blanco-negro.

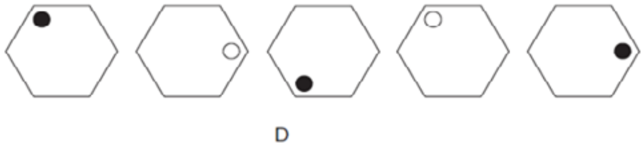


Figura 6. Figura faltante. Fuente: Carter (2005, p. 22).

De manera que, la opción D es la correcta.

¿Qué figura complementa la serie?

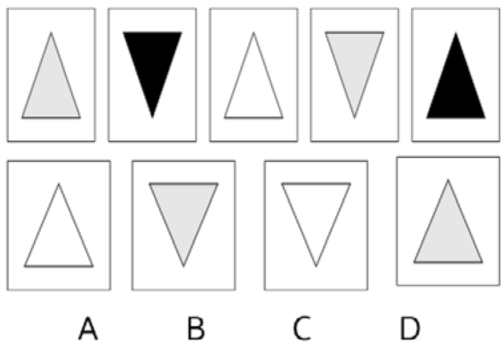


Figura 7. Sucesión de figuras. Fuente: elaboración propia.

En la serie, las figuras grandes son solo cuadrados, por consiguiente, la atención se debe centrar en los triángulos internos, que tienen una lógica de color gris-negro-blanco; asimismo, hay un patrón de diferentes posiciones del triángulo, no invertido e invertido, y se alterna esta posición en cada figura. Por consiguiente, el patrón de la serie es cuadrado con triángulo interno no invertido, cuadrado con triángulo interno invertido y alterna el color gris, negro, blanco; en consecuencia, la figura que complementa la serie es la C, porque es un cuadrado con un triángulo invertido blanco.

Para concluir, resuelve los siguientes ejercicios:

Ejercicio

1. ¿Qué figura complementa la serie?

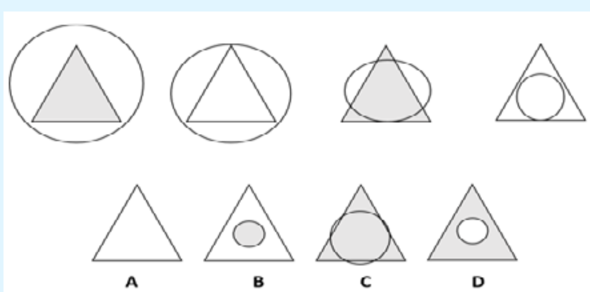


Figura 8. Sucesión de figuras. Fuente: elaboración propia.

2. ¿Qué figura complementa la serie?

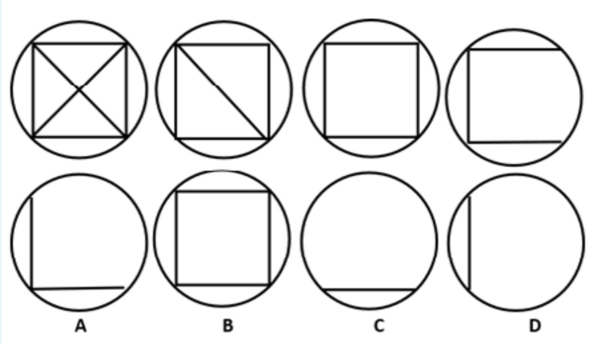


Figura 9. Sucesión de figuras. Fuente: elaboración propia.

3. ¿Qué figura complementa la serie?

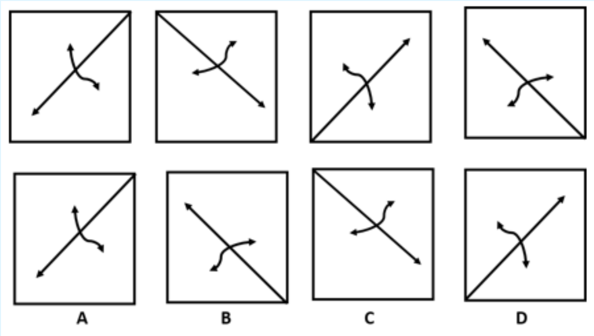


Figura 10. Sucesión de figuras. Fuente: elaboración propia.

1.2. Reconocimiento de errores en el patrón de una serie

El razonamiento lógico matemático es la capacidad de analizar datos para revelar sus características, con el fin de constituir relaciones entre los datos y obtener información; en este sentido, el reconocimiento de patrones y sus errores en series alfanuméricas y de figuras tienen como cometido identificar el cambio de la secuencia de patrones, con base en un razonamiento, el cual puede ser la diversificación de un determinado lugar, la eliminación o añadidura de algún término, o la mezcla de estas operaciones.

Por ejemplo, la siguiente secuencia no tiene error:

10, 20, 30, 40, 50, 60

Ahora, en la siguiente secuencia identifica el error:

23, 22, 21, 20, 17, 13, 8, 2

Respuestas:

a) 22 b) 21 c) 17

Resolución:

Para resolver el error se debe trabajar con la operación de la resta; al término a_1 se le resta 1 y se obtiene el término a_2, al cual se le resta 2 y se obtiene a_4, al cual se le resta 3 y se obtiene a_5, al cual se le resta 4 y se obtiene a_6, al cual se le resta 5 y se obtiene a_7, al cual se le resta 6 y se obtiene a_8.

Es decir, se establece una fórmula de la siguiente manera:

$$a_1 - 1 = a_2 - 2 = a_4 - 3 = a_5 - 4 = a_6 - 5 = a_7 - 6 = a_8$$

Por consecuencia, el término a_3 (21) es el error.

Ejercicio

En las siguientes secuencias reconozca el término erróneo.

A. 9, 3, 6, 2, 1/(2), 4, 4/3

Opciones de respuesta:

a) 6

b) 1/(2)

c) 3/4

d) 2

B. 2, 6, 4, 5, 12, 10, 30

Opciones de respuesta:

a) 10

b) 4

c) 5

d) 30

C. 9, 6, 42, 39, 36, 273

Opciones de respuesta:

a) 36

b) 39

c) 273

d) 42

2. Planteamiento y resolución de problemas

El planteamiento y resolución de problemas es una suma de prácticas y experiencias relacionadas con la capacidad de análisis, identificación, planteamiento, interpretación y solución de diversos inconvenientes que surgen en los espacios –sociales, académicos, profesionales, o personales–, así como su transcripción a términos matemáticos. Los problemas se resuelven a través de diversos métodos y mediante la formulación, interpretación y representación de los resultados; en este contexto, el proceso del razonamiento lógico matemático desarrolla la aptitud matemática para entender contextos problemáticos y emplear el conocimiento en diferentes circunstancias y ámbitos.

2.1. Planteamiento algebraico de problemas a partir de una descripción verbal

Usualmente los problemas matemáticos surgen en la naturaleza y tienen que ser transformados en lenguaje algebraico para facilitar su comprensión y solución. En este orden de ideas, la siguiente tabla es un ejemplo de cómo el lenguaje verbal se transcribe en términos matemáticos.

Tabla 1. Transcripción a términos matemáticos.

Lenguaje verbal	Transcripción a términos matemáticos
Siete veces un número	$7x$
Dos terceras partes de un número	$\frac{2}{23}x$
El cuadrado de un número	x^2
El doble de un número más su cuadrado	$2x + x^2$
El triple de un número menos su tercio	$3x - \frac{1}{3}x$
La cuarta parte de un número	$\frac{1}{4}x$
Un número aumentado tres veces	$3x$
Un número disminuido en cinco	$x - 5$
Un número dividido entre ocho	$x \div 8$
Un número múltiplo de tres menos uno	$3x - 1$

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 1. Encontrar un número que elevado al cubo y dividido entre 2 dé como resultado 32.

Tabla 2. Planteamiento algebraico de problemas.

Lenguaje verbal	Transcripción en términos matemáticos	Fórmula	Solución
Encontrar un número	x	$x^3 = (32)(2)$	Resolviendo (x) $x^3 = (32)(2)$ $x = \sqrt[3]{(32)(2)}$ $x = \sqrt[3]{64}$ $x = 4$
que elevado al cubo	x^3		
y dividido entre 2	$\frac{x^3}{2}$		
dé como resultado 32	$\frac{x^3}{2} = 32$		

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 2. Encontrar un número que dividido entre -13 dé como resultado -8.

Tabla 3. Planteamiento algebraico de problemas.

Lenguaje verbal	Transcripción a términos matemáticos	Fórmula	Solución
Encontrar un número	x	$x = (-8)(-13)$	Resolviendo (x) $x = (-8)(-13)$ $x = 104$
que dividido entre -13	$\frac{x}{-13}$		
dé como resultado -8	$\frac{x}{-13} = -8$		

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 3. Isamar y Regina son dos hermanas. Hace tres años, la edad de Isamar era tres veces mayor a la de Regina, pero en la actualidad solo la duplica. ¿Cuál es la edad actual de ambas hermanas?

Tabla 4. Planteamiento algebraico de problemas.

<table>
<tr><th>Lenguaje verbal</th><th>Transcripción a términos matemáticos</th><th>Fórmulas</th><th>Solución</th></tr>
<tr><td>¿Cuál es la edad actual de Isamar?</td><td>x</td><td rowspan="5">1) $x = 3(y-3) + 3$
2) $x = 2y$</td><td rowspan="6">Sustituyendo (x) en 1
$2y = 3(y-3) + 3$
Resolviendo la ecuación
$2y = 3y-9 + 3$
$2y-3y = -9+3$
$-y = -6$
$y = 6$
Sustituyendo (y) en 2
$x = (2)(6)$
$x = 12$</td></tr>
<tr><td>¿Cuál es la edad actual de Regina?</td><td>y</td></tr>
<tr><td>Hace tres años</td><td>$X - 3; y - 3$</td></tr>
<tr><td>la edad de Isamar era tres veces mayor a la de Regina</td><td>$X - 3 = 3(y-3)$</td></tr>
<tr><td>en la actualidad solo la duplica</td><td>$x = 2y$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Respuesta: Isamar tiene 12 años y Regina 6 años.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 4. La suma de tenis de Pablo y Emmanuel es de 28, si Pablo tiene ocho tenis más que Emmanuel ¿Cuántos tenis tienen cada uno?

Tabla 5. Planteamiento algebraico de problemas.

<table>
<tr><th>Lenguaje verbal</th><th>Transcripción a términos matemáticos</th><th>Fórmulas</th><th>Solución</th></tr>
<tr><td>¿Cuántos tenis tiene Pablo?</td><td>x</td><td rowspan="4">1) $x + y = 28$
2) $x = y + 8$</td><td rowspan="5">Despejando (y) de 1
$y = 28 - x$
Sustituyendo (y) en 2
$x = 8 + (28 - x)$
Resolviendo la ecuación
$x = 28 + 8 - x$
$x + x = 36$
$2x = 36$
$x = \frac{36}{2}$
$x = 18$
Sustituyendo (x) en 1
$18 + y = 28$
$y = 28 - 18$
$y = 10$</td></tr>
<tr><td>¿Cuántos tenis tiene Emmanuel?</td><td>y</td></tr>
<tr><td>La suma de tenis de Pablo y Emanuel es de 28.</td><td>$x + y = 28$</td></tr>
<tr><td>Pablo tiene ocho tenis más que Emmanuel.</td><td>$x = y + 8$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Respuesta: Pablo tiene 18 tenis y Emmanuel 10.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Ejercicio

A. Encontrar dos números que sumados den 37 y restados den 9.

Opciones de respuesta:

a) 22 y 15

b) -14 y 23

c) 14 y 23

d) 14 y -23

B. Emmanuel y Pablo son dos hermanos. Hace 21 años, la edad de Emmanuel era dos veces mayor a la de Pablo, pero en la actualidad la diferencia es de cuatro años. ¿Cuál es la edad actual de ambos hermanos?

Opciones de respuesta:

a) 29 y 25

b) 28 y 24

c) 27 y 23

d) 31 y 27

C. Seis kilogramos de jitomate y cinco de papa costaron $ 227, y en el mismo lugar se compraron cinco kilogramos de jitomate y cuatro de papa, los cuales costaron $ 188 ¿Cuánto costó cada kilogramo?

Opciones de respuesta:

a) $ 30 y $ 7

b) $ 30 y $ 8

c) $ 32 y $ 7

d) $ 31 y $ 7

2.2. Aplicación de operaciones aritméticas y algebraicas básicas para resolver problemas

La resolución de problemas se realiza mediante operaciones aritméticas y algebraicas básicas; para ello, las operaciones aritméticas se efectúan con los números reales; formalmente, los números reales son un conjunto de datos que cumplen con un número determinado de axiomas; en este sentido, es necesario desglosar qué son los números reales y explicar sus diferentes clasificaciones, las cuales son números enteros, números naturales, números racionales y números irracionales. Los números reales se simbolizan con la letra R.

Un axioma es una proposición de la lógica matemática cuya verdad no requiere una demostración; son premisas principales de los conceptos matemáticos, por ejemplo, 1 + 1 = 2, lo cual no necesita comprobarse.

Respecto a lo anterior, la primera clasificación se conoce como números enteros, que incluyen a los números naturales y también a los números negativos y al cero; se representan mediante la letra Z y son un subconjunto de los números reales.

Z = {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

En consecuencia, son números expresados sin fracción, es decir, no incluyen los números decimales, como el número 5.16.

En esta línea argumentativa, los números naturales son aquellos que siempre son enteros y sirven para contar un día, dos árboles, nueve planetas. Sin embargo, nunca se encuentra 0.25 de montaña, o -1/5 de árboles. Por tanto, los números naturales no incluyen decimales, fracciones o números negativos. Los números naturales se simbolizan con la letra N y son un subconjunto de los números enteros.

N = {1, 2, 3,...18, 19, ...123 000, ...}

Además, los números naturales cuando se suman y multiplican el resultado es un número natural, pero no sucede lo mismo con la resta y la división, por ejemplo: 10 – 13 = – 3 y 10/3 = 3.333.

De la misma manera, los números racionales son números naturales o enteros que se enuncian como el componente de dos números enteros o como fracción; pueden ser números positivos o negativos y se excluye al cero, además se simbolizan con la letra Q.

$$Q = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{2}{9}, \frac{6}{8}, \frac{10}{12}\right)$$

La constante de Euler es el número denotado con la letra e, además es la base de los logaritmos naturales y tiene un valor aproximado de 2.718281828459045. El matemático suizo, Leonhard Euler (1707-1783), fue quien denominó a la constante con la letra que se le identifica... e.

Finalmente, los números irracionales son el conjunto de los números reales menos el conjunto de los números racionales; es decir, son números reales que no se pueden expresar en fracciones y tienen decimales infinitos no periódicos, entre ellos destacan el número pi (π), la constante de Euler (e) y las raíces cuadradas de números primos (√11, √13, √17, √23). Los números irracionales se representan como: R-Q.

Los primeros valores de π se calcularon en Egipto casi 2 000 años a. C. y es utilizado para cálculos algebraicos y geométricos, relacionados con círculos, el cual inicia así:

3.14159265358979323846264338327950288419 71.......

Solo se presentan los primeros 40 decimales, ya que actualmente se han calculado con computadoras avanzadas hasta 10 mil millones de decimales adicionales más, sin llegar al último valor.

En este orden de ideas, las operaciones aritméticas básicas –suma, resta multiplicación, división, exponentes, raíces– están enunciadas en las expresiones algebraicas. En este sentido, una expresión algebraica contiene números que simbolizan constantes y una o más cantidades desconocidas, denominadas variables o incógnitas; asimismo, implica operaciones entre diversas cantidades, que indican un cálculo determinado para resolver un problema, en otras palabras, en una expresión algebraica los términos –números, letras y símbolos– significan las operaciones que se deben ejecutar para producir el resultado.

Siguiendo la misma línea, en álgebra se utilizan letras para determinar aquellos datos que tiene un valor que no cambia, es decir, que son constantes, y las variables, cuyo valor puede cambiar. Para las constantes se emplean las primeras letras del alfabeto, usualmente *a, b, c*; para las variables, las últimas del alfabeto, comúnmente *x, y, z*

Reflexión

Las fórmulas o ecuaciones son grupos de variables y constantes que requieren interactuar para lograr un resultado a través de signos de operación, agrupación o de relación. Los cálculos se hacen de izquierda a derecha y la jerarquía para efectuar las operaciones es la siguiente:

1) Paréntesis u otros signos de agrupación son: {[(x)]}; existe un signo más, la barra o vínculo equivale a un paréntesis que incluye a las factores que se encuentran debajo de él; el signo es el de la primera cantidad que está debajo de él y se representa = - (2x + x -6)

2) Exponentes

3) Multiplicaciones y divisiones

4) Adiciones y restas

Considere la siguiente ecuación:

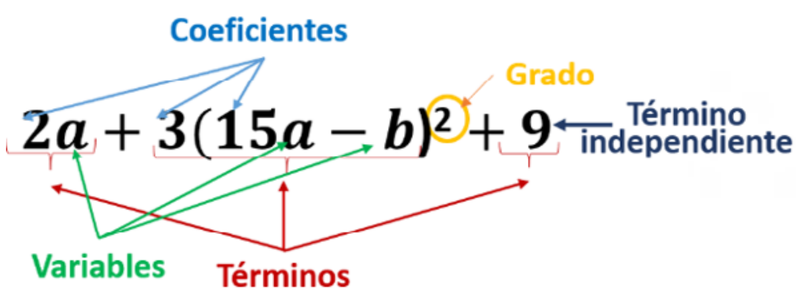


Figura 12. Partes de una expresión algebraica. Fuente: elaboración propia.

- Donde *a* y *b* son variables independientes, debido a que toma distintos valores.
- 2, 3 y 15 son los coeficientes y el 9 es un término independiente.
- El grado es la potencia máxima que tiene la ecuación, en este ejemplo se trata de una ecuación de segundo grado, ya que el exponente máximo es 2.
- Finalmente se trata de un polinomio, puesto que consta de dos expresiones algebraicas, el monomio $2a$, el monomio 3(15*a*-*b*) y un término independiente. Nótese que un monomio es un grupo de datos separados por un signo operativo, en este caso el **–**, pero que no tienen una relación operativa entre ellos.

Ahora bien, es importante destacar que hay expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{5}b + \frac{13}{28}c + 29$$

$$\frac{12}{3}x^2 + \frac{3}{7}y + \frac{2}{5}z + 2$$

Operaciones básicas de álgebra

En los apartados anteriores explicamos las partes de una expresión algebraica, por tanto, ahora estudiaremos las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas, para ampliar su conocimiento y sus métodos de solución. Las operaciones que se utilizan en expresiones algebraicas incluyen la suma (+), la resta (-), la multiplicación (x), la división (÷), el exponente (^{2}), la raíz (√).

Suma y resta

La suma o resta de dos o más variables o constantes solo se puede realizar si se trata de la misma variable, por ende, si se presenta:

$$2x + 3y$$

$$3a - 6b$$

No se puede realizar la suma, porque son variables y constantes diferentes, una es *x* y otra es *y*; una es *a* y la otra *b*, respectivamente. No obstante, si se tienen las ecuaciones:

$$3x + 3y + 6x - 2y$$

$$5a - 2b - 6a + 4b$$

Se puede realizar la suma de los términos generales, en primer lugar se debe ordenar la ecuación en relación con una variable, lo cual quedaría de la siguiente forma:

$$3x + 6x + 3y - 2y$$

$$5a - 6a - 2b + 4b$$

Si agrupamos términos:

$$9x + y$$

$$-a + 2b$$

En consecuencia, para realizar la suma algebraica de dos o más términos, en primer lugar, se ordenan los términos y se conservan sus signos, en segundo lugar se suman los términos semejantes y se respeta su signo. En este sentido, la suma algebraica tiene las siguientes reglas:

Ley conmutativa: el orden de los sumandos no altera la suma.

Por consiguiente, $3a + 5b - 7c$ es igual a $5b - 7c + 3a$ o $a - 7c + 3b + 3a$

Cuando existe un sumando con signo negativo, preferentemente se escribe entre paréntesis.

Por ejemplo, si los términos son 6a, -8b, 13c, 3b, -2a y 7, se escribe:

$6a + (-2a) + 3b + (-8b) + 13c + 7$

Si resolvemos la suma, quedaría de la siguiente manera:

$$6a - 2a + 3b - 8b + 13c + 7 = 4a - 5b + 13c + 7$$

En esta línea argumentativa, la resta algebraica es una operación que implica dos expresiones algebraicas: *minuendo* y *sustraendo*, para encontrar una tercera, denominada *resta* o *diferencia*.

Ejemplo

Restar 5b de 2a

Se escribe el minuendo 2ª, a continuación, se incluye el sustraendo 5b con el signo cambiado:

2a – 5b

Restar 3a2 + 5b – 6c + 8 de 7a2 + 8b - 7c - 13

Se escribe el minuendo y se respetan sus signos, en seguida, se integra el sustraendo y se cambia el signo de todos sus términos.

$$\begin{array}{r} 7a^2 + 8b - 7c - 13 \\ -3a^2 - 5b + 6c - 8 \\ \hline 4a^2 + 3b - c - 21 \end{array}$$

Multiplicación

La multiplicación es una operación que parte de dos términos –monomios o polinomios, o ambos– llamados *multiplicando* y *multiplicador* o simplemente *factores*, para encontrar un tercer término denominado *producto*.

En este orden de ideas, la multiplicación algebraica cumple con las siguientes propiedades:

Ley conmutativa: el orden de los factores no altera el producto. Por ejemplo:

$$abcd = cadb = bdac = dcba$$

Ley asociativa: el producto de los factores no se altera si estos se agrupan de cualquier modo. Por ejemplo:

$$abcd = c(b)(d)(a) = (a)(bc)(d) = (ca)(db) = (ac)(bd)$$

La ley de los signos:

(+) por (+) = (+)

(+) por (-) = (-)

(-) por (+) = (-)

(-) por (-) = (+)

Para no olvidar la ley de los signos se puede hace la siguiente analogía, el + representa a mis amigos y el - a mis enemigos, entonces:

Los amigos (+) de mis amigos (+) = mis amigos (+)

Los amigos (+) de mis enemigos (-) = mis enemigos (-)

Los enemigos (-) de mis amigos (+) = mis enemigos (-)

Los enemigos (-) de mis enemigos (-) = mis amigos (+)

Ley de los exponentes: para multiplicar potencias de la misma base se coloca la misma base y se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$(a^2)(a^3)(a^5) = a^{2+3+5} = a^{10}$$

Ley de los coeficientes: el coeficiente del producto es igual a la multiplicación de los coeficientes de los factores. Por ejemplo:

$$(3a)(4b)(c) = (3)(4)(1)(a)(b)(c) = 12abc$$

Las formas de multiplicación son:

Monomios por monomios, por ejemplo: $(2a^2)(3a^3)$ (1)

Monomios por polinomios, por ejemplo: $(3a^2)(4a^3 + 5b^2 - 6c + 2)$ (2)

Polinomios por polinomios, por ejemplo: $(a^2 + 5b - c + 3)(3a^2 + 5b - 6c + 2)$ (3)

Su resolución es:

Se multiplican los coeficientes, se escriben las variables de los factores en orden alfabético y se respetan la ley de los exponentes, además el signo del producto está dado por la ley de los signos. En consecuencia:

Resolución de (1)

$$(2a^2)(3a^3) = 2 \text{ x } 3\ a^{2+3} = 6a^5$$

Resolución de (2)

$$(3a^2)(4a^3 + 5b^2 - 6c + 2)$$

Por la ley asociativa se puede expresar:

$$(3a^2)(4a^3) + (3a^2)(5b^2) + (3a^2)(-6c) + (3a^2)(2)$$

La multiplicación que se expresa así contempla cuatro multiplicaciones de monomios

$$(3a^2)(4a^3) = 3 \text{ x } 4\ a^{2+3} = 12a^5$$

$$(3a^2)(5b^2) = 3 \text{ x } 5\ a^2b^2 = 15a^2b^2$$

$$(3a^2)(-6c) = 3 \text{ x } -6a^2c = -18a^2c$$

$$(3a^2)(2) = 3 \text{ x } 2a^2 = 6a^2$$

$$12a^5 + 15a^2b^2 - 18a^2c + 6a^2 \quad R$$

Resolución de (3)

De $(a^2 + 5b - c + 3)(3a^2 + 5b - 6c + 2)$ se obtiene:

$$\begin{array}{r} a^2 + 5b - c + 3 \\ \underline{3a^2 + 5b - 6c + 2} \end{array}$$

Se realizan las operaciones de multiplicación:

$$\begin{array}{l} \quad a^2 + 5b - c + 3 \\ \quad \underline{3a^2 + 5b - 6c + 2} \\ 3a^{2+2} + 3a^2(5b) - 3a^2c + 3(3a^2) \\ \qquad 5b(a^2) + 5(5b^{1+1}) - 5bc + 3(5b) \\ \qquad\qquad -6ca^2 - 6c(5b) + 6c^{1+1} + 3(6c) \\ \qquad\qquad\qquad 2a^2 + 2(5b) - 2c + 2(3) \end{array}$$

Después multiplicamos coeficientes y sumamos exponentes:

$$a^2 + 5b - \quad c + 3$$

$$3a^2 + 5b - 6c + 2$$

$$3a^4 + 15a^2b - 3a^2c + 9a^2$$

$$5a^2b + 25b^2 - 5bc + 15b$$

$$-6a^2c - 30bc + 6c^2 - 18c$$

$$2a^2 + 10b - 2c + 6$$

Posteriormente, ordenamos términos alfabéticamente:

$$a^2 + 5b - \quad c + 3$$

$$3a^2 + 5b - 6c + 2$$

$$3a^4 + 15a^2b + 5a^2b - 3a^2c - 6a^2c + 9a^2 + 2a^2 + 25b^2 - 30bc - 5bc + 10b + 15b + 6c^2 - 18c - 2c + 6$$

Luego, sumamos términos semejantes:

$$a^2 + 5b - c + 3$$

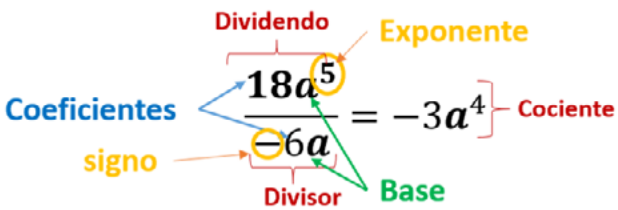
$$3a^2 + 5b - 6c + 2$$

$$3a^4 + 20a^2b - 9a^2c + 11a^2 + 25b^2 - 35bc + 25b + 6c^2 - 20c + 6$$

$$3a^4 + 20a^2b - 9a^2c + 11a^2 + 25b^2 - 35bc + 25b + 6c^2 - 20c + 6 \qquad R$$

Divisiones

La división algebraica es una operación que permite, dado el factor dividendo y el factor divisor, encontrar un tercer producto denominado cociente.



Ley de los signos:

(+) entre (+) = (+)

(+) entre (-) = (-)

(-) entre (+) = (-)

(-) entre (-) = (+)

Ley de los exponentes: para dividir potencias de la misma base se coloca la misma base y se restan los exponentes. Por ejemplo:

$$\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$$

Ley de los coeficientes: el coeficiente del cociente se obtiene al dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor. Por ejemplo:

$$\frac{18a^5}{-6a} = -\frac{18}{6}a^{5-1} = -3a^4$$

Ley distributiva: se divide cada una de los términos del polinomio por el monomio y se separan las fracciones por su signo.

$$\frac{3a^3 - 6a^2b + 19ab^2}{3a} = \frac{3a^3}{3a} - \frac{6a^2b}{3a} + \frac{19ab^2}{3a}$$

La comprobación en la división se realiza al multiplicar el cociente por el divisor que debe dar el dividendo:

$$\frac{18a^5}{-6a} = -\frac{18}{6}a^{5-1} = -3a^4$$

Comprobación:

$$-3a^4 \, x - 6a = 18a^{4+1} = 18a^5$$

En esta materia se estudian tres casos de división, los cuales son:

División entre monomios, por ejemplo: $4a^2b$ entre $-2ab$ (1)

División de un polinomio entre un monomio, por ejemplo: $4a^3 - 2a^2b + 12ab^2$ entre $2a$ (2)

División de un polinomio entre un polinomio, por ejemplo: $28a^2 - 30b^2 - 11ab$ entre $4a - 5b$ (3)

Resolución de (1)

4^2b entre $-2b$

Todo número real elevado a la cero potencia es igual a 1.

Comprobación:

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$$

Sea cualquier número real (R):

$$\frac{6^2}{6^2} = \frac{36}{36} = 1$$

Resolución de (2)

$$4a^3 - 2a^2b + 12ab^2 \text{ entre } 2a$$

Se colocan el dividendo y el divisor en disposición de división:

$$\frac{4a^3 - 2a^2b + 12ab^2}{2a}$$

Si aplicamos la ley distributiva de la división:

$$\frac{4a^3}{2a} - \frac{2a^2b}{2a} + \frac{12ab^2}{2a} = \frac{4}{2}\frac{a^3}{a} - \frac{2}{2}\frac{a^2b}{a} + \frac{12}{2}\frac{ab^2}{a} = \frac{2a^3}{a} - \frac{a^2b}{a} + \frac{6ab^2}{a}$$

Si aplicamos la ley de los coeficientes y de los exponentes de la división:

$$2a^{3-1} - a^{2-1}b + 6a^{1-1}b^2 = 2a^2 - ab + 6a^0b^2 = 2a^2 - ab + 6b^2 \quad \text{R}$$

Resolución de (3)

$28a^2 - 30b^2 - 11ab$ entre $4a - 5b$

Reglas para dividir polinomios entre polinomios.

Se ordenan el dividendo y el divisor en relación con una misma letra:

$28a^2 - 30b^2 - 11ab$ entre $4a - 5b$

Se colocan el dividendo y el divisor en disposición de división:

$4a - 5b \;\big|\; 28a^2 - 30b^2 - 11ab$

Se divide el primer término del dividendo ($28a^2$) entre el primero el divisor ($4a$) y se obtiene el primer término del cociente:

$7a$

$4a - 5b \;\big|\; 28a^2 - 30b^2 - 11ab$

El primer término del cociente ($7a$) se multiplica por el divisor ($4a - 5b$) y se resta del dividendo ($28a^2 - 30b^2 - 11ab$), para tal fin, se cambia de signo a cada término:

$7a$

$4a - 5b \;\big|\; 28a^2 - 30b^2 - 11ab$

$-28a^2 \qquad +35ab$ Términos con signo cambiado

$0 \; - \; 30b^2 + 24ab$ Resto

Se divide el primer término del resto ($-30b^2$) entre el segundo término del divisor ($-5b$), para obtener el segundo término del cociente:

$7a \; +$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7a \quad + 6b \\
\hline
4a - 5b & 28a^2 - 30b^2 - 11ab \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
-28a^2 & \quad + 35ab & \text{Términos con signo cambiado} \\
 & -30b^2 + 24ab & \text{Resto}
\end{array}
$$

El segundo término del cociente (6b) se multiplica por el divisor (4a - 5b) y se resta del resto ($30b^2$ + 24ab); para tal fin, se cambia de signo a cada término:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7a \;+\; 6b \\
\hline
4a - 5b & 28a^2 - 30b^2 - 11ab \\
 & -28a^2 \qquad\quad + 35ab \\
\cline{2-2}
 & \qquad -30b^2 + 24ab \\
 & \qquad 30b^2 - \; 24ab \qquad \text{Términos con signo cambiado} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0 \qquad \text{Resto}
\end{array}
$$

Una vez que el resto es igual a cero o indivisible entre el divisor, la división ha concluido y la respuesta es:

7a + 6b

Exponentes

Un exponente, conocido también como potencia, es el número que indica cuántas veces se tiene que multiplicar la base por sí misma.

En notación matemática sería:

$$a^n = a * a * a * a \dots a_n$$

Por ejemplo, si n = 5:

$$a^5 = a * a * a * a * a$$

Lo anterior es válido siempre y cuando *n* sea positiva y entera.

La primera propiedad de los exponentes es:

$$a^1 = a$$

La segunda propiedad es:

$$a^0 = 1$$

La tercera propiedad es:

$$a^m \, a^n = a^{m+n}$$

La cuarta propiedad es:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

La quinta propiedad es:

$$(a \, b)^n = a^n * b^n$$

La sexta propiedad es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

La séptima propiedad es:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad \text{(b)}$$

La séptima propiedad tiene dos respuestas, para comprobarlo se parte del axioma del elemento neutro de la multiplicación que dice: todo número multiplicado por 1 es igual al mismo número y del elemento neutro de la división que dice: todo número dividido por sí mismo es igual a 1; entonces, si se utiliza un número a^(-n):

$$\left(\frac{a^m}{a^n}\right)\left(\frac{a^{-n}}{a^{-n}}\right) = \left(\frac{a^{m-n}}{a^{n-n}}\right) = \left(\frac{a^{m-n}}{a^0}\right) = \left(\frac{a^{m-n}}{1}\right) = a^{m-n} \qquad (1)$$

y un número a^{-m}

$$\left(\frac{a^m}{a^n}\right)\left(\frac{a^{-m}}{a^{-m}}\right) = \left(\frac{a^{m-m}}{a^{n-m}}\right) = \left(\frac{a^0}{a^{n-m}}\right) = \left(\frac{1}{a^{n-m}}\right) = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad (2$$

Si otorgamos valores, n = 5 y m = 3:

(1) $$a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

(2) $$\frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$$

Para comprender mejor las leyes de los exponentes, te recomendamos ver el siguiente video que se encuentra en la sección de lecturas complementarias

Si asignamos valores, n = 3 y m = 5:

(1) $$a^{5-3} = a^2$$

(2) $$\frac{1}{a^{3-5}} = \frac{1}{a^{-2}} = \frac{1}{a^{-2}}\left(\frac{a^2}{a^2}\right) = \frac{a^2}{a^{-2+2}} = \frac{a^2}{a^0} = \frac{a^2}{1} = a^2$$

Raíces

Las raíces usualmente se manejan al convertirlas en exponentes, de tal forma que la raíz *n* de *x* es equivalente a elevar *x* al ; esto es:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$$

En algunas ocasiones, las ecuaciones son muy complejas, por lo que se requiere aplicar métodos de simplificación, que estudiaremos detalladamente en la materia de matemáticas.

Ejercicio

Resuelva las siguientes operaciones algebraicas.

A. (x + 3) (x - 4) + 3(x - 1) (x + 21)

B. (4a - 6b - 2c) - (7a - 7b - 3c)

C. (y) (-3y) (y^2)

D. $4x^8$ - 10 x^6 - $5x^4$ entre $2x^3$

Referencias

Carter, P. (2005). The complete book of intelligence tests. England: Wiley. Recuperado de https://www.shortcutstv.com/blog/wp-content/uploads/2016/10/sim_IQ-test2.pdf

Actividad

Miscelánea de suma, resta, multiplicación y división

Valor: 25%

Consulta en la plataforma el objetivo de la actividad y las instrucciones correspondientes. Recuerda que si tienes alguna duda respecto del entregable o de los temas programados para esta semana, puedes resolverla con tu asesor, ya sea durante la sala online o solicitando una asesoría individual.

Rúbrica

Antes de realizar la actividad te sugerimos revisar la rúbrica en la plataforma, a fin de identificar con claridad los criterios con los que será evaluado tu entregable. Revisa los descriptivos de cada criterio y apégate al nivel óptimo para conseguir la puntación máxima.