



Matemáticas

Lectura

RAZONES Y PROPORCIONES

Andonegui Zabala, M. (2016). Razones y proporciones (2ª ed.) (pp. 7-21). Venezuela: Federación Internacional de Fe y Alegría.

1. El concepto matemático de razón

Una de las situaciones matemáticas más frecuente en todos los Cuadernos anteriores ha sido, sin duda, la de relacionar dos cantidades: lo hemos hecho al sumarlas y restarlas, o al multiplicarlas y dividir las. En particular, al relacionarlas mediante la resta y la división, estamos comparándolas. Hay, pues, dos tipos de comparaciones entre números: las que nos permiten averiguar cuál es el mayor calculando la diferencia existente entre ambos, o bien, calculando cuántas veces el mayor contiene al menor. En la primera situación hablamos de comparaciones o relaciones aditivas y en la segunda, de relaciones multiplicativas.

Una razón es una relación multiplicativa entre dos números naturales diferentes de 0.

Hablamos así de la razón “dos a tres”, “1 a 10”, “7 a 4”, etc. Por ejemplo, si en un grupo de personas hay 18 hombres y 27 mujeres, diremos que la razón entre el número de hombres y el de mujeres es de “2 a 3”, es decir, que “hay 2 hombres por cada 3 mujeres”. En este caso, la razón entre el número de mujeres y el de hombres es la inversa, de “3 a 2”, es decir, que “hay 3 mujeres por cada 2 hombres”.

Como avisábamos en el Cuaderno anterior, hay que saber distinguir entre los conceptos de razón y de fracción. Este último alude a la relación –también multiplicativa– entre la parte y el todo respectivo. En el ejemplo anterior, $\frac{2}{5}$ representa la fracción

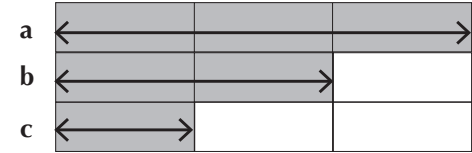
–ya simplificada– correspondiente al número de hombres (18) con respecto al total de personas presentes ($18 + 27 = 45$). En el concepto de razón no está presente esta relación de carácter parte-todo.

También puede ser útil recordar los orígenes históricos de este objeto matemático llamado razón. Para ello citamos unos párrafos del Cuaderno nº 9: “Los pitagóricos (s. VI a.C.) consideraban como números solamente a los números naturales. Pensaban, además, que la naturaleza se reducía a estos números, en el sentido de que todo objeto podía expresarse con un número (la medida de su magnitud), y las relaciones entre objetos (entre sus magnitudes), siempre como una relación entre números naturales.

“Para lograr esta relación suponían que siempre funcionaría el principio de conmensurabilidad, es decir, que dadas dos magnitudes (por ejemplo, dos segmentos), siempre era posible encontrar una magnitud (un segmento) menor que “encajara” un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes (los dos segmentos) relacionadas. Es decir, dados los segmentos a y b, podía suceder que ni a encajara un número exacto de veces en b, ni viceversa. Pero entonces, siempre era posible encontrar un segmento menor c, tal que estuviera contenido “n veces” en a y “m veces” en b, con lo que la relación entre a y b podía denotarse mediante la expresión $\frac{n}{m}$.

“Por ejemplo (ver Figura), si la longitud de un segmento a era “una vez y media” la de un segmento b, c sería la mitad del segmento b, con lo cual b contendría 2 “minisegmentos” c, y a, 3 “minisegmentos” c; así, la relación entre a y b vendría dada por la

relación $\frac{3}{2}$, es decir, “como 3 es a 2”.

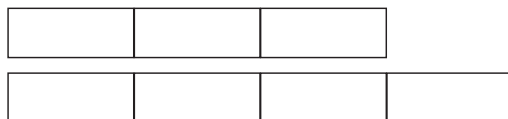


“Pero esta relación y su expresión como aparente “cociente” de dos números naturales no era considerada como un nuevo número –una fracción, la expresión de una relación parte/todo–, sino como una razón entre ambas magnitudes, es decir, como la expresión numérica de la relación entre ellas, sin que ambas estuvieran necesariamente ligadas como un par “parte/todo” (de hecho, en el ejemplo anterior, los dos segmentos son independientes). En la Aritmética de los griegos no existieron, pues, las fracciones como números al estilo de los babilonios y egipcios”.

Por cierto, este modelo numérico de armonía –de razones entre números naturales– para todos los objetos medibles de la naturaleza se quebró cuando trataron de colocar en una relación conmensurable algo tan simple como el lado de un cuadrado y su diagonal. Los mismos pitagóricos demostraron que esto no era posible, que si el lado medía 1, la diagonal debería medir $\sqrt{2}$, valor inconmensurable con 1. Por eso los números como $\sqrt{2}$ se denominan “irracionales”, porque no pueden expresarse como una razón conmensurable con la unidad. “Hasta ese momento los griegos habían identificado número y geometría, pero la existencia de razones inconmensurables destruía esa identificación” (Kline, 1992, p. 59): la Aritmética griega cedía todo el paso a la Geometría.

Pero a pesar de su “fracaso” en garantizar este modelo numérico de armonía –de razones entre números naturales– para todos los objetos medibles de la naturaleza, los griegos continuaron con el estudio de las razones numéricas, utilizando como ejemplos de números las medidas de objetos geométricos (segmentos de recta, superficies de figuras planas, etc.). Este estudio, inspirado en los trabajos de Eudoxo (s. IV a. C.), se incluye en el Libro V de los Elementos de Euclides (s. III a. C.), la obra matemática más leída de la antigüedad.

Como en el caso de las fracciones, resulta imprescindible hablar de la representación de las razones. Tradicionalmente se escriben en forma numérica, separando los dos números mediante los signos : ó /. Por ejemplo, la razón “3 a 4” se representa $3 : 4$ ó $3/4$. Pero también puede representarse en forma de porcentaje; por ejemplo, en el caso anterior se puede decir que “la primera cantidad representa el 75% de la segunda”. Y pasando a otros sistemas, la razón también puede llevarse a un gráfico continuo (la primera figura representa la primera cantidad y la otra, la segunda cantidad):



Y también puede llevarse a un gráfico discreto: (el número de Δ corresponde a la primera cantidad y el de \bullet , a la segunda):



Si estamos a punto de empezar el día 27 de mayo, y este año no es bisiesto, ¿cuál es la razón entre los días ya transcurridos y los que faltan para culminar el año?

Tenemos que contar los días transcurridos:

$31 + 28 + 31 + 30 + 26 = 146$ días. Por consiguiente, faltan $365 - 146 = 219$ días. La razón buscada es $146/219$ ó, en forma irreducible, $2/3$ (ya que m.d.c.(146, 219) = 73, y $146 = 2 \times 73$ y $219 = 3 \times 73$).

2. La aritmética de las razones

O dicho de otra manera, ¿qué operaciones aritméticas pueden hacerse con las razones? ¿Pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse como, por ejemplo, las fracciones? ¿Qué sentido pueden tener estas operaciones con razones?

De entrada, digamos que no pueden sumarse (ni, por consiguiente, restarse). Sin embargo, en algunos textos se afirma lo contrario y se sugieren situaciones como ésta: “Un jugador de baloncesto acierta 7 tiros de cancha y falla 5 en un partido; en el siguiente juego, acierta 3 y falla 6. ¿Cuál es la razón de tiros acertados a fallados en el conjunto de los dos partidos?”. Y se responde así: “los tiros acertados son $7 + 3 = 10$, y los fallados, $5 + 6 = 11$; la razón solicitada es $10/11$, que puede ser obtenida mediante la siguiente “suma” de razones: $\frac{7}{5} + \frac{3}{6} = \frac{7+3}{5+6} = \frac{10}{11}$. Y ése es el algoritmo de la suma de razones, diferente al de la suma de fracciones”.

Evidentemente, la respuesta $10/11$ es co-

rrecta (acierta 10 tiros por cada 11 que falla) porque los números que entran en las razones de cada juego (7, 5, 3, y 6) son las mismas cantidades de tiros acertados y fallados. Pero, ¿qué ocurre si la segunda razón ($3/6$) se expresa reducida en la forma $1/2$ (obsérvese que esto se puede hacer, ya que “3 es a 6” equivale a “1 es a 2”)? En este caso, la “suma” debería ser $\frac{7+1}{5+2} = \frac{8}{7}$ (acierta 8 tiros por cada 7 que falla), lo cual no es cierto. De modo que la razón “suma” dependería de la forma (reducida o amplificada) en que se presenten las razones “sumandos”, lo que anula la posibilidad de hablar de una verdadera operación de adición.

Por lo tanto, no es correcto hablar de la suma de razones. Para hallar la razón entre dos magnitudes a lo largo de varias situaciones (por ejemplo, la razón del número de niños al de niñas en el conjunto de varias aulas de una escuela), lo que deben “sumarse” por separado son las cantidades de cada uno de los grupos, niños y niñas, y obtener luego la razón definitiva; ésta es la única manera de evitar confusiones y posibles errores. Así, pues, sumar razones no tiene sentido, como sí lo tiene en cambio sumar fracciones, ya que aquí se agregan partes de un mismo todo.

Pero en lo que respecta a la multiplicación de razones, esta operación sí puede tener sentido. Por ejemplo, si en una reunión la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Centro es $3/7$, y la razón de personas de la provincia del Centro con respecto a la del Sur es $2/5$, podemos preguntarnos cuál será la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Sur.

Para resolver esta situación podemos considerar la primera razón como 6 a 14, y la segunda como 14 a 35; es decir, hemos buscado que el segundo término de la primera coincida con el primer término de la segunda razón. Ahora puede inferirse que la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Sur es 6/35 (¿por qué?). Este resultado equivale a haber multiplicado entre sí los primeros términos de las dos razones ($3 \times 2 = 6$) y, también entre sí, los segundos términos ($7 \times 5 = 35$).

Por consiguiente, **dadas la razón de una magnitud respecto a una segunda, y la razón de esta última con respecto a una tercera, la razón que corresponde a la primera magnitud con respecto a la tercera se obtiene “multiplicando” las dos primeras como si se tratara de dos fracciones** (en realidad estamos manejando las razones como operadores, de una forma similar a como lo hacíamos con las fracciones).

En las elecciones presidenciales de cierto país, la razón del número de votos del candidato A con respecto al candidato B es 2/3; y la de B con respecto al candidato C, 5/7. Se desea saber si la votación de A llegó a la mitad de la de C.

Como antes, busquemos la razón entre el número de votos de A y C. Esta razón vendrá dada por: $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$; es decir, por cada 10 votos de A, C obtiene 21. De donde se desprende que la votación de A no llegó a la mitad de la de C.

En otras elecciones, la razón del número de votos del candidato M con respecto al candidato N es 2/3; y la de M con respecto al candidato P, 5/7. Se desea saber quién ganó las elecciones.

Está claro que M no las ganó, pues sacó menos votos que N y que P. La pregunta es quién de estos dos candidatos obtuvo mayor número de votos. Y la respuesta viene por la vía de obtener la razón entre el número de votos de ambos. Para ello contamos con un referente común: las razones de votos de cada candidato con M.

Ahora bien, la forma en que se presentan estas dos razones no parece estar “bien ordenada”: necesitamos colocarlas como la razón de N a M, y de M a P, para que M nos sirva de “puente” entre N y P. En este sentido, el enunciado se transfor-

ma en: “la razón del número de votos del candidato N con respecto al candidato M es 3/2 (inverso de 2/3); y la de M con respecto al candidato P, 5/7”. Ahora sí podemos hallar la razón entre los votos de N y P: $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$, es decir, por cada 15 votos de N, P obtiene 14. Luego el candidato N ganó las elecciones.

Conviene destacar que **el procedimiento de hallar la razón entre dos magnitudes puede ser una de las formas de responder a la pregunta de cuál de ambas es mayor**. Obsérvese que, en este caso, no es necesario conocer el valor exacto de ambas cantidades. Por esta vía de hallar la razón no tenemos, pues, que hallar dos valores desconocidos (las dos cantidades), sino uno solo: la razón entre ambas.

3. El concepto matemático de Proporción

En uno de los ejemplos expuestos anteriormente, hablamos de un grupo formado por 18 hombres y 27 mujeres y que, en esta situación, la razón del número de hombres al de mujeres era 2/3. Pero también podíamos haber dicho que la razón era 18/27, ó 6/9, ó 36/54... Como puede verse, todas estas razones son iguales, expresan la misma relación multiplicativa entre los números. Pues bien, al indicar la igualdad de dos razones estamos creando un nuevo objeto matemático: la proporción.

Se llama proporción al conjunto de dos razones iguales. Si las razones iguales son a/b y c/d, la proporción se denota a/b = c/d ó a : b :: c : d y se lee “a es a b como c es a d”

Un ejemplo de proporción es $2/3 = 4/6$, cuya lectura es “2 es a 3 como 4 es a 6”. De nuevo hay que recordar la distinción entre razones y fracciones, para no ver en la expresión anterior “la equivalencia de dos fracciones” (que será la lectura correcta cuando se hable de fracciones, pero no ahora...).

Vamos con la nomenclatura relativa a las proporciones. El uso de la notación $a : b :: c : d$ nos ayuda a identificar a los números a y d como los *extremos* de la proporción y a los números b y c como los *medios* de la proporción. Por ejemplo, en $2/3 = 4/6$, 2 y 6 son los extremos de la proporción, y 3 y 4, los medios.

Una proporción cuyos extremos y medios son diferentes se denomina *discreta*; por ejemplo, la anterior. Y *continua*, si los medios (o los extremos) son iguales entre sí; su forma sería: $a/b = b/c$ ó $a/b = c/a$. Por ejemplo, $2/6 = 6/18$. En una proporción discreta, cualquier término se denomina *cuarta proporcional de los otros tres*. Así, en el ejemplo $2/3 = 4/6$ decimos que 3 es cuarta proporcional de 2, 4 y 6, ó que 4 lo es de 2, 3 y 6. En una proporción continua, el término repetido se denomina *media proporcional de los otros dos*, y estos dos últimos, *tercia proporcional del otro término*. Así, en el ejemplo $2/6 = 6/18$, 6 es media proporcional de 2 y 18, y 2 y 18 son tercias proporcionales de 6.

a) Escriba dos proporciones en las que 8 sea media proporcional de otros dos números.

b) Escriba otras dos proporciones en las que 12 sea cuarta proporcional de tres números.

Las proporciones presentan numerosas propiedades, que ya fueron estudiadas por los griegos y aparecen en el Libro V de los Elementos de Euclides. Esta es la fundamental:

1. En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

De aquí se desprende que un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo, y que un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio:

$$a = \frac{bxc}{d} \quad d = \frac{bxc}{a} \quad b = \frac{axd}{c} \quad c = \frac{axd}{b}$$

La comprobación de estas igualdades es muy fácil; puede verificarse con cualquiera de los ejemplos anteriores. Pero lo interesante es “saber ver proporciones” en todo producto de la forma $a \times d = b \times c$, o en toda expresión que pueda reducirse a ella.

2. De toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o de su expresión equivalente $a \times d = b \times c$, pueden derivarse otras tres proporciones diferentes:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Por ejemplo, si se tiene $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, ó $3 \times 12 = 4 \times 9$, puede llegarse a las proporciones:

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}, \quad \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3}$$

Obsérvese que, aun cuando manejan los mismos números como medios o extremos, cada una de las cuatro proporciones anteriores responde a una razón diferente: $3/4$, $1/3$, $4/3$ y 3 , respectivamente.

Presentamos otras propiedades, de muy fácil verificación (de la 5 a la 11 son propiedades derivadas de algunas transformaciones que pueden realizarse con los propios términos de una proporción). Recuérdese que, en virtud de la propiedad 2, de cada una de las que se proponen pueden derivarse otras tres.

3. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{mxa}{nxb} = \frac{mxc}{nxd}$
4. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$
5. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > b$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ y $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
7. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a < b$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
8. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$ y $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$
9. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > c$, entonces $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$ y $\frac{a-c}{a} = \frac{b-d}{b}$
10. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a < c$, entonces $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
11. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

Considere $a = 20$, $b = 12$, $c = 5$, $d = 3$, $e = 15$, $f = 9$, $m = 4$, $n = 7$, y verifique todas las propiedades anteriores.

En una ciudad, el número de lectores del periódico La Primera y el de lectores de La Segunda están en razón de 3 a 5. Si se certifica que hay 162.840 lectores de La Segunda, ¿cuántos hay de La Primera?

Si denotamos por n el número de lectores solicitado, basta plantear la

proporción: $\frac{n}{162.840} = \frac{3}{5}$. Y aplicando la propiedad 1, $n = \frac{3 \times 162.840}{5} = 97.704$ lectores.

La razón de dos números es 7/3 y su diferencia, 244. ¿Cuánto vale su suma?

Sean a y b el 1º y 2º términos de la razón buscada. Sabemos que $a/b = 7/3$ y que $a - b = 244$. Para hallar los valores de a y de b podemos apoyarnos en la propiedad 7 de las propor-

ciones: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > b$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, que se traduce ahora en: $\frac{a}{b} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{7+3}{7-3}$.

$\rightarrow \frac{a+b}{244} = \frac{10}{4}$. Y de aquí deducimos que

$$a + b = \frac{244 \times 10}{4} = 610. \text{ Obsérvese que}$$

hemos llegado a la suma solicitada sin necesidad de hallar el valor de cada uno de los sumandos.

En una escuela de 540 alumnos, la razón del número de niñas al número de niños es de 5 a 4. ¿Cuántas niñas hay en esa escuela?

Sean a y b el número de niñas y de niños, respectivamente. Sabemos que $a/b = 5/4$ y que $a + b = 540$. Para hallar los valores de a y de b podemos apoyarnos en la propiedad 5 de las proporciones:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$, que se

traduce ahora en: $\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{5+4}{5}$.

$\rightarrow \frac{540}{a} = \frac{9}{5}$. Y de aquí deducimos directamente que

$$a = \frac{540 \times 5}{9} = 300. \text{ En la escuela hay}$$

300 niñas y 240 niños.

Obsérvese que cuando se desconocen dos de los términos de una proporción, pero nos aportan como dato su suma o su diferencia y la razón entre ambos, resulta muy oportuno el uso de las propiedades descritas más arriba, ya que tienen la virtud de reducir el cuadro de cantidades desconocidas a una sola (un medio o un extremo de la proporción), que puede obtenerse directamente de acuerdo a lo expresado en la propiedad 1.

4. Algunas situaciones particulares referidas a razones y proporciones

4.1. Las escalas

Las escalas aluden al conocido problema de representar algún objeto o parte de la realidad en un mapa, plano o dibujo, sin distorsionar las relaciones que guardan entre sí los elementos que componen la realidad que se representa. Cuando esta transformación se hace correctamente, se dice que el dibujo, mapa o plano está “hecho a escala” (las fotografías y las fotocopias reducidas o ampliadas son ejemplos de reproducciones automáticas a escala).

Hacerlo correctamente significa que se conservan, en el papel, las relaciones multiplicativas presentes en el objeto. Así, si un elemento A de la realidad mide la mitad de otro B, esa misma relación multiplicativa debe mantenerse en el papel. Indudablemente, estamos hablando de razones. Para conseguir una representación válida resulta clave hallar la escala o razón que existe entre la longitud de un determinado segmento del dibujo, plano o mapa, y la longitud del segmento correspondiente en la realidad representada.

Por ejemplo, si se dibuja el plano de una vivienda de tal modo que una distancia real de 10 metros se reduce a 2,5 cm en el plano, la escala utilizada es $2,5 \text{ cm} : 10 \text{ m} = 25 \text{ mm} : 10.000 \text{ mm} = 1 : 400$ (habitualmente, el primer término de la escala suele ser 1). Esto significa que cualquier medida sobre el plano debe multiplicarse por 400 en la realidad, y que cualquier medida en la realidad debe dividirse entre 400 para dibujarla en el plano.

Si denominamos:

d a la medida del objeto en el plano, mapa o dibujo;

D a la medida del objeto en la realidad;

1/N a la escala utilizada;

Podemos establecer la siguiente proporción: $\frac{d}{D} = \frac{1}{N}$.

Y de aquí, en virtud de la propiedad 1 deducimos: $D = N \times d$ y $d = D/N$.

Se tiene un mapa trazado a una escala 1:1.000.000. ¿Cuál es la distancia real, en kilómetros, de dos ciudades que sobre el mapa distan 14,2 cm?

Nos piden el valor de D, con **d = 14,2 cm** y **N = 1.000.000**. Luego será: **D = 14,2 cm × 1.000.000 = 14.200.000 cm = 142 km**.

Si un campo de fútbol mide 98 m de largo por 52 de ancho, ¿cuáles serán sus dimensiones si se dibujan a una escala de 1:250?

Ahora se piden dos valores de d, correspondientes a dos valores de D, con N = 250. Tendremos: el largo = $98 \text{ m}/250 = 0,392 \text{ m}$. Y el ancho = $52 \text{ m}/250 = 0,208 \text{ m}$. En el papel, las dimensiones del campo serán 39,2 cm de largo y 20,8 cm de ancho. Puede verificarse que los valores reales y los del dibujo forman una proporción exacta: $98 \text{ m}/52 \text{ m} = 39,2 \text{ cm}/20,8 \text{ cm}$.

4.2. Los repartos proporcionales

Se trata del tipo de situación en la que hay que repartir una cantidad de alguna magnitud entre diversos sujetos, de acuerdo con ciertas razones establecidas entre éstos. Por ejemplo, si se desea repartir una ganancia de 120.000 pesos entre dos socios cuyos aportes al capital están en razón de 3 a 5, la situación puede resolverse mediante la proporción siguiente: si y y z representan, respectivamente, las cantidades a percibir por cada socio, tenemos: $y/z = 3/5$, con el dato adicional: $y + z = 120.000$. Haciendo uso de la propiedad 5 de las proporciones:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.
 Llegamos a: $\frac{120.000}{y} = \frac{8}{3}$ y $\frac{120.000}{z} = \frac{8}{5}$. Y de ahí: $y = \frac{120.000 \times 3}{8}$ y $z = \frac{120.000 \times 5}{8}$. Proceso

que podemos generalizar:

Cuando se trata de repartir proporcionalmente una cantidad N entre dos elementos que se hallan en una razón a/b , la cantidad percibida por el primer elemento es: $\frac{Nxa}{a+b}$; y la percibida por el segundo es: $\frac{Nxb}{a+b}$. Este proceso puede generalizarse al caso en que haya más de dos elementos en el reparto proporcional.

Los ángulos internos de un triángulo son directamente proporcionales a los números 2, 3 y 4. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

Como la suma de las medidas de los tres ángulos es 180° , los valores de cada ángulo son:

$$\frac{180^\circ \times 2}{2+3+4}, \frac{180^\circ \times 3}{2+3+4} \text{ y } \frac{180^\circ \times 4}{2+3+4}, \text{ es decir, } 40^\circ, 60^\circ \text{ y } 80^\circ.$$

5. Proporcionalidad directa entre dos magnitudes

En los ejemplos relativos al caso de las escalas, veíamos que se relacionaban dos conjuntos: el de los tamaños de los objetos reales y el de los tamaños de los dibujos a escala. Esa forma de relacionarse es muy peculiar: si se toma un par de valores correspondientes, uno de cada conjunto, se establece entre ellos una razón: justamente, la de la escala. Y si se toma otro par de valores correspondientes, vemos que la razón entre ellos es la misma. Y así con todos los pares de valores correspondientes que se puedan componer.

Podemos referirnos a ambos conjuntos como **magnitudes**, es decir, como entidades medibles; y a los valores que pueden tomar sus elementos (es decir, los tamaños de los objetos reales y de los dibujos), como **medidas**. Lo importante para estas dos magnitudes es lo que decíamos ahora, que si tomamos dos pares cualesquiera de valores relacionados, uno de cada magnitud, siempre formarán una proporción (verifíquelo con valores del primer ejemplo de las escalas).

De aquí que podamos decir que estas dos magnitudes están relacionadas proporcionalmente. Más precisamente, que **las dos magnitudes están en una relación de proporcionalidad directa**, es decir, que **si los valores de una de ellas se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número**. El vínculo de la relación es, justamente, la razón que liga a los dos valores de cada par relacionado.

Hay muchas situaciones –en la matemática, en otras ciencias, en la vida diaria...- en las que se presentan **pares de magnitudes relacionadas proporcionalmente de una ma-**

nera directa. Son ejemplos de estos pares de magnitudes:

- El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar
- El número de manos (normales) y el número de dedos presentes
- A una velocidad constante, el tiempo transcurrido y la distancia recorrida
- La masa y el peso de un objeto
- En un cuadrado, la longitud de un lado y la medida del perímetro
- El número de obreros y la cantidad de trabajo realizado
- Trabajando a destajo, el número de horas trabajadas y el salario percibido
- La participación en el capital y la participación en las ganancias
- En un momento dado, las alturas de los objetos y las longitudes de las sombras que proyectan bajo el sol
- Las cantidades de los ingredientes de una receta y el número de comensales
- La medida de ángulos a simple vista y a través de un lente de aumento

¿Cómo podemos representar la situación de dos magnitudes ligadas mediante una relación de proporcionalidad directa? Podemos hacerlo de varias formas:

1. Mediante una tabla de valores. Por ejemplo, si un lápiz cuesta 14 pesos, podemos construir la siguiente tabla:

No. de lápices	No. de pesos
1	14
2	28
3	42
...	...

2. Mediante una expresión simbólica o fórmula. Por ejemplo, en el caso anterior nos damos cuenta de que el costo a pagar depende del número de lápices comprados, y como la razón de cualquier par de valores “costo a pagar” – “número de lápices comprados” es 14, éste es el factor constante por el que hay que multiplicar cualquier valor de esta última variable para obtener el correspondiente de la otra. Si, simbólicamente, representamos la variable “costo a pagar” con la letra c , y la variable “número de lápices comprados” con la letra n , podemos representar la relación entre ambas variables de la forma: **$c = 14 \times n$** .

En general, si los valores de la magnitud y están relacionados con sus correspondientes de la magnitud x mediante la razón r , la relación entre ambas magnitudes puede representarse simbólicamente mediante la fórmula: $y = r \times x$. Esta expresión nos permite obtener cualquier valor desconocido si se conocen los otros dos valores en juego.

Debemos insistir en que toda expresión de la forma $y = k \times x$ (k es un valor constante) puede ser reconocida como la expresión de una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes y y x . El término k representa la razón existente entre cualquier par de valores correspondientes a las magnitudes y y x (en ese orden), y recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**.

Evidentemente, la relación anterior puede representarse también por $x = c \times y$. En este caso, el término c representa la razón existente entre cualquier par de valores correspondientes a las magnitudes x e y (ahora

en ese orden); el valor de c será el inverso de k .

Finalmente, es de hacer notar que las expresiones del tipo $m \times y = n \times x$ (con m y n fijos) también caen en el grupo anterior, ya que pueden escribirse como $y = (n/m) \times x$.

3. Mediante una expresión verbal. Por ejemplo, si decimos que “el número de niñas es el doble del de los niños”, o si “por cada dos niñas hay un niño”, o si “el número de niñas es al de niños como 2 es a 1”, etc. Con la información contenida en cualquiera de estas expresiones podemos pasar a su expresión simbólica, o si damos un valor de una de las magnitudes, se puede establecer la proporción correspondiente.

Veamos algunos ejercicios relacionados con las formas de representación revisadas:

Explique por qué los siguientes pares de magnitudes no son directamente proporcionales:

1. La edad y el número de dientes de una persona
2. La estatura y el peso de las personas
3. La cantidad de abono orgánico en un campo y su producción agrícola
4. La longitud del lado de un cuadrado y el área de éste
5. Para recorrer una distancia fija, la velocidad de un vehículo y la duración del viaje
6. El número de kilos que pesan los enseres en una mudanza y el costo de la misma, si hay una tarifa por alquiler del vehículo y otra por cada kilo de enseres

mudados

7. El número de personas en la fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una

8. El número de calmantes a tomar y la cantidad de dolor a disminuir

9. Para hacer una obra fija, el número de obreros y el tiempo para terminar la obra

10. El número de años que una pareja llevan casados y el número de sus hijos

11. El tiempo que el usuario permanece en el taxi y el costo del servicio, si se cobra una tarifa por subir al taxi y otra por cada minuto de servicio

7. El siguiente es un fragmento de una tabla con las “Tarifas para calcular el valor de los esclavos” durante los años que siguieron a la Guerra de Independencia venezolana (Uslar Pietri, 1981, p. 222):



Edad en años	Valor en pesos
11	200
12	230
13	270
14	290
15	300

¿Existía una relación de proporcionalidad directa entre ambas magnitudes?

Determine una fórmula para expresar la proporcionalidad directa entre los siguientes pares de magnitudes:

1. El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran (n) y el costo total a pagar (p)

2. El número de manos (normales) (m) y el número de dedos presentes (d)

3. A una velocidad constante, el tiempo transcurrido (t) y la distancia recorrida (d)

4. La masa (m) y el peso de un objeto (p)

5. En un cuadrado, la longitud de un lado (l) y la medida del perímetro (p)

6. La medida de ángulos a simple vista (v) y a través de un lente de aumento (a)

1 R. Si denotamos con u el precio de cada unidad: $p = n \times u$

2 R. $d = 5 \times m$

3 R. Si denotamos con v la velocidad constante: $d = v \times t$

4 R. Si denotamos con g la aceleración de la gravedad: $p = m \times g$

5 R. $p = 4 \times l$

6 R. $a = v$ (sea cual sea el factor de aumento del lente, la medida del ángulo no varía...)

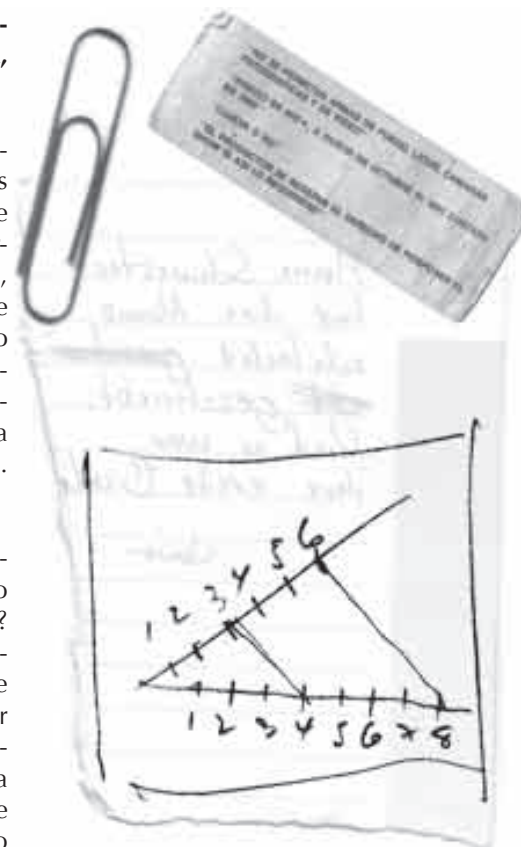
Escriba la expresión o fórmula que recoge el siguiente enunciado: “En esta escuela, por cada 15 alumnos hay un maestro”.

Si denotamos con a el número de alumnos y con m , el de maestros, quizá se nos ocurra escribir: $15 \times a = m$, expresión que es incorrecta. Suele caerse en este error porque confundimos lo que es una magnitud, con una abreviatura; así, a suele entenderse como la abreviatura de “alumno” y no como la magnitud “número de alumnos”. Y además, porque se considera la transcripción directa del enunciado como si fuera la fórmula del caso: “...15 alumnos...hay 1 maestro” ... $15 \times a = 1 \times m$.

Para no caer en este error hay que preguntarse desde el comienzo: ¿qué número es mayor, el de alumnos o el de maestros? Resuelto esto (es menor el número de maestros), está claro que es esta magnitud la que debe multiplicarse por la cantidad mayor (15) para igualarse con la otra magnitud (número de alumnos): $15 \times m = a$. Otra forma de evitar los errores consiste en plantearse correctamente la proporción del caso: como el número de alumnos es mayor que el de maestros, en razón de 15 a 1, se tiene: $a/m = 15/1$, de donde se llega a: $a = 15 \times m$.

8. Si t representa el número de taxis y c el de choferes, escriba la expresión o fórmula que recoge el siguiente enunciado: “Por cada 3 taxis hay 4 choferes”.

9. Si m representa el número de alumnos aprobados, y n el de reprobados, exprese verbalmente (“por cada... hay...”) la relación entre ambas magnitudes simbolizada por la expresión: $3 \times m = 7 \times n$.



Las razones “dentro” y “entre”

Tomemos un caso de proporcionalidad directa entre dos magnitudes; por ejemplo, el de los precios de un determinado artículo, cuya unidad vale 60 pesos. Vemos que 3 artículos valdrán 180 pesos, que 12 artículos se venderán en 720 pesos, etc. Vergnaud (1988) da a las “magnitudes” el nombre de **espacios de medidas**. En estos términos, aquí podemos destacar dos espacios de medidas: el del número de artículos y el de los precios:

Espacio de medidas 1 Número de artículos	Espacio de medidas 2 Precios
3	180
12	720
9	540
.....

De acuerdo con lo expresado con anterioridad, entre estas dos magnitudes queda establecida una relación de proporcionalidad directa, una de cuyas representaciones (además de la tabular) es $p = 60 \times n$ (p expresa el monto del precio, y n el número de artículos). El número 60 expresa la razón entre un par de valores correspondientes precio/ n^o de artículos (180/3, 720/12, 540/9, etc.). Vergnaud califica a esta razón entre dos valores correspondientes, uno de cada espacio de medida, como una **razón entre** (entre ambos espacios de medida).

Pero también podríamos haber calculado, en cada espacio de medida, la razón entre dos valores del mismo espacio (3/12 y su correspondiente 180/720; ó 12/9 y su correspondiente 720/540, etc.). Vergnaud califica, a su vez, a esta razón entre dos valores del mismo espacio de medida, como una **razón dentro** (dentro del mismo espacio de medida).

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, como en el ejemplo, la razón “entre” se mantiene constante para cualquier par de valores o medidas correspondientes (una de cada espacio de medida). Por su par-

te, las razones “dentro” varían de acuerdo al par de medidas seleccionadas en el mismo espacio; por ejemplo, 3/12 es diferente de 12/9; pero las razones “dentro” formadas por los valores correspondientes en el otro espacio, son las mismas cada vez: 180/720 equivale a 3/12 (es 1/4 en ambos casos), y 720/540 equivale a 12/9 (es 4/3 en ambos casos).

A partir de la tabla siguiente:

Espacio de medidas 1	Espacio de medidas 2
a	b
c	d

podemos entender que lo que plantea Vergnaud es simplemente destacar estas dos

proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ como razón “entre”, y $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ como razón “dentro” (proporciones que son equivalentes, como ya veíamos en la propiedad 1). Pero esta precisión de Vergnaud tiene su utilidad, como veremos más adelante.

[El tema de las magnitudes directamente proporcionales se tomará más adelante, en el Cuaderno que dedicaremos a las funciones matemáticas. Allí veremos que la expresión “magnitud” (utilizada desde Eudoxo y Euclides) se sustituirá por “variable”, y la “medida” de una magnitud, por la de “valor” de una variable; también veremos que la relación de proporcionalidad directa entre dos variables se denominará función lineal; y estudiaremos su representación gráfica, además de los tres modos anteriores de representación.]

5.1. La Regla de tres directa

Para resolver, por ejemplo, la situación: “Si 2 lápices cuestan 52 pesos, ¿cuánto costarán 5 lápices?”, podemos proceder de varias maneras. Ante todo, necesitamos reconocer si la relación entre las magnitudes “número de lápices” y “costo a pagar” es de proporcionalidad directa (¿lo es?; ¿por qué?). A partir de aquí formamos la proporción entre dos pares de valo-

res correspondientes lápices/pesos: $\frac{2}{52} = \frac{5}{z}$. De donde, según la propiedad 1 de las propor-

ciones, $z = (52 \times 5)/2 = 130$ pesos.

También puede procederse así –a partir siempre del reconocimiento de la relación entre las dos magnitudes como de proporcionalidad directa–: percibimos que la razón entre valores correspondientes de ambas (la constante de proporcionalidad) es 26 (obtenida del par 52 : 2), con lo que establecemos la expresión simbólica de la relación: **costo = 26 x n° de lápices**.

De donde concluimos que el costo de los 5 lápices será: **costo = $26 \times 5 = 130$ pesos.**

Estos procedimientos pueden plasmarse en lo que se reconoce tradicionalmente como la **técnica de la regla de tres directa**, establecida para resolver situaciones como la anterior, en las que –al formarse una proporción con dos pares de valores correspondientes de dos magnitudes ligadas mediante una relación de proporcionalidad directa- **de los cuatro valores implicados se conocen tres y se desconoce uno.**

Esta técnica sugiere una evaluación de la pertinencia de su uso, una disposición de los datos, y un proceso de razonamiento que desembocan en una regla mecánica de cálculo (seguimos con el mismo ejemplo):

Pertinencia de su uso: Sí: estamos en una situación de proporcionalidad directa.

Disposición de los datos:

Nº de lápices	Costo (pesos)
2	52
5	z

Razonamiento:

Si 2 lápices cuestan 52 pesos, 1 lápiz cuesta 2 veces menos ($52/2$);

y 5 lápices, 5 veces más ($\frac{52}{2} \times 5$). De donde, $z = \frac{52 \times 5}{2} = 130$ pesos.

Regla mecánica: Se multiplican los valores de la diagonal donde no está la incógnita y se divide entre el término restante.

Evidentemente, esta regla no debe enseñarse en primer lugar ni como procedimiento único, sino después de analizar y comprender el proceso de proporcionalidad directa; en realidad, debe ser descubierta por los alumnos, con la orientación del (la)

maestro(a).

Obsérvese que la expresión

$z = \frac{52 \times 5}{2}$ puede tener dos lecturas:

como $\frac{52}{2} \times 5$ y como $52 \times \frac{5}{2}$. En el primer

caso se está multiplicando por 5 la razón $52/2$ (razón “entre”, según Vergnaud); en el segundo, se multiplica por 52 la razón $5/2$ (razón “dentro”, según Vergnaud); ambas lecturas tienen sentido.

Si empanada y media cuestan centavo y medio, ¿cuánto cuestan 3 empanadas y media?

Estamos ante una situación de proporcionalidad directa. Disponemos así los datos:

Nº de empanadas	Costo (centavos)
$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
$3 \frac{1}{2}$	x

Aplicamos directamente la regla y tenemos: $x = (3 \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{2}) / (1 \frac{1}{2}) = 3 \frac{1}{2}$ **centavos** (del tiempo de la Colonia, claro...).

Si la mitad de un tanque contiene 4.300 litros, ¿cuántos litros contiene la quinta parte de ese tanque?

Esta es una situación de proporcionalidad directa.

Así van los datos:

Parte del tanque	Capacidad (litros)
$1/2$	4.300
$1/5$	x

Razonamos así: Si la mitad del tanque

contiene 4.300 litros, el tanque completo contendrá 2 veces más (4.300×2), y la quinta parte del tanque, 5 veces menos $[(4.300 \times 2)]/5$. De donde, $x = [(4.300 \times 2)]/5 = 1.720$ **litros**. Obsérvese que no hemos operado con los símbolos de las fracciones, sino con su significado.

5.2. El caso particular del Porcentaje



Del porcentaje dijimos en el Cuaderno nº 9 que podía tomarse como un sistema de representación de una fracción (por ejemplo, si en una reunión hay 5 hombres y 20 mujeres, el 80% de los presentes son mujeres). Y en este Cuaderno, que puede representar a una razón (en el mismo ejemplo, la razón de hombres a mujeres es del 25%). Ambas cosas son ciertas. Y revelan que, en el fondo, el porcentaje encierra una idea de proporcionalidad. Dicho de otra manera, está como preparado para “entrar” en una regla de tres en la que él mismo quiere jugar como razón.

¿De qué número es $3/5$ el 2%?

El problema puede resolverse desde diversas perspectivas. En primer lugar po-

demostramos que el 1% del número buscado es la mitad de $3/5$, es decir, $3/5 : 2 = 3/10$. Por consiguiente, el número será 100 veces mayor: $100 \times 3/10 = (100 \times 3)/10 = 300/10 = 30$.

O bien, podemos observar que 2% está contenido 50 veces en 100%, de donde bastará multiplicar $3/5$ por 50 para llegar al número: $3/5 \times 50 = (3 \times 50)/5 = 150/5 = 30$.

Ambos razonamientos pueden resumirse en el planteamiento habitual de la regla de tres:

$3/5$	2%
x	100%

que lleva al mismo resultado:
 $x = (3/5 \times 100)/2 = (300/5)/2 = 60/2 = 30$.

Nota: También puede resolverse en los términos planteados en el Cuaderno anterior. Es decir, la fracción $2/100$, aplicada como operador a un número, nos ha llevado a $3/5$. Para regresar al número, partimos de $3/5$ y lo multiplicamos por el operador inverso, $100/2$. Así, se obtiene: $3/5 \times 100/2 = (3 \times 100)/(5 \times 2) = 300/10 = 30$.

Adela gana 120 pesos diarios, más el 4% sobre el monto de las ventas del día. Al cabo de 18 días laborales recibe 4.220 pesos. ¿Cuál fue el monto total de las ventas durante esos días?

Este problema fue resuelto en el Cuaderno anterior aplicando el operador multiplicativo correspondiente. Veamos una segunda alternativa de resolución.

En sus 18 días laborales, Adela ha percibido $18 \times 120 = 2.160$ pesos por concepto de salarios diarios fijos. Por lo tanto, por concepto de porcentajes sobre el monto de las ventas del día ha recibido $4.220 - 2.160 = 2.060$ pesos, correspondientes al 4% de comisión sobre las ventas [hasta aquí como en el Cuaderno anterior].

Para conocer el monto total de estas ventas podemos establecer una regla de tres sencilla:

si al 4% de las ventas	le correspon-
den 2.060 pesos,	
al 100% de las ventas	le correspon-
derán x pesos.	

De donde:
 $x = (2.060 \times 100)/4 = 51.500$ pesos.

Supongamos, por ejemplo, que varios vehículos recorren una distancia de 120 km y que cada vehículo viaja a una velocidad constante. Veamos una tabla de situaciones posibles:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
30	4
40	3
80	1 1/2
100	1 1/5

Evidentemente, las magnitudes velocidad y tiempo no están en una relación de proporcionalidad directa; por el contrario, al aumentar los valores de una, disminuyen los de la otra, y viceversa. En las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la razón entre pares de valores correspondientes. Pero descubrimos que en las situaciones como las del ejemplo, lo que se mantiene **constante es el producto entre pares de valores correspondientes**: $30 \times 4 = 40 \times 3 = 80 \times 1\ 1/2 = 100 \times 1\ 1/5 = 120$, siempre.

Generalizando a cualquier situación en que se relacionan dos magnitudes, si cualquier par de valores correspondientes a y b , c y d (donde a y c son de la primera magnitud, y b y d de la segunda) verifican la igualdad: $a \times b = c \times d$, entonces decimos que **las magnitudes se hallan en una relación de proporcionalidad inversa**, o que **son inversamente proporcionales**. Si denotamos como x e y ambas magnitudes, y como k el producto constante de cada par de valores correspondientes, la relación entre ambas magnitudes puede representarse mediante la expresión simbólica o fórmula: $x \times y = k$.

6. Proporcionalidad inversa entre dos magnitudes

Vamos a recoger tres de los ejemplos propuestos anteriormente como de situaciones cuyas magnitudes no estaban en una relación de proporcionalidad directa:

- Para recorrer una distancia fija, la velo-

cidad de un vehículo y la duración del viaje

- Para hacer una obra fija, el número de obreros y el tiempo para terminar la obra

- El número de personas en la fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una.

Ahora bien, del producto anterior $a \times b = c \times d$, y de acuerdo con la propiedad 2 de las proporciones, derivamos la siguiente proporción: $a/c = d/b$. Observemos que si se tratara de una situación de proporcionalidad directa, la proporción pertinente sería: $a/b = c/d$ ó, lo que es lo mismo, $a/c = b/d$. Ahora descubrimos que, en nuestro ejemplo de velocidad-tiempo, la proporción se forma invirtiendo una de las razones que entra en juego (b/d pasa a ser d/b). De aquí el nombre de proporcionalidad inversa que se aplica a las magnitudes en este caso.

Así, en nuestro ejemplo, si tomamos los pares correspondientes 40 y 3, 30 y 4, la igualdad de productos es: $40 \times 3 = 30 \times 4$, y la proporción derivada: $40/30 = 4/3$.

Sobre la base de los planteamientos anteriores se establece la **técnica de la regla de tres inversa** para resolver los casos en los que, de los cuatro valores de dos pares correspondientes implicados, se conocen tres y se desconoce uno. Como en el caso de la regla de tres directa, esta técnica sugiere una evaluación de la pertinencia de su uso, una disposición de los datos, y un proceso de razonamiento que desembocan en una regla mecánica de cálculo (seguimos con el mismo ejemplo y nos preguntamos: ¿Cuánto tardará un vehículo si circula a 75 km/h?):

Pertinencia de su uso: Sí: estamos en una situación de proporcionalidad inversa.

Disposición de los datos:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	2
75	t

Razonamiento: Si a una velocidad de 60 km/h se tardan 2 horas, a la velocidad de 1

km/h se tardaría 60 veces más (60×2), y a una velocidad de 75 km/h, 75 veces menos: $\frac{60 \times 2}{75}$. De donde, $t = \frac{60 \times 2}{75} = \frac{120}{75} = 1,6$ h.

Regla mecánica: Se multiplican los valores de la misma fila y se divide entre el término restante.

Si 15 obreros realizan un trabajo en 8 días, ¿cuánto tardarían 24 obreros, trabajando con el mismo nivel de productividad?

Se trata de una situación de proporcionalidad inversa entre ambas variables (¿por qué?). Los datos se disponen así:

Nº de obreros	Nº de días
15	8
24	x

El razonamiento procede así: Si 15 obreros tardan 8 días en hacer el trabajo, 1 solo obrero tardaría 15 veces más: **$15 \times 8 = 120$ días**; y 24 obreros, 24 veces menos: **$120/24 = 5$ días**.

Obsérvese que en ambos tipos de reglas de tres, el razonamiento funciona de manera análoga, en el sentido de que **se busca el comportamiento de la unidad** (costo de 1 lápiz, en el ejemplo de la regla de tres directa; y tiempo para 1 obrero, en el último ejemplo). El carácter de la proporcionalidad determina, en cada caso, los pasos que siguen después.

7. La Regla de tres compuesta

A los tipos de regla de tres en las que se relacionan dos magnitudes las denominamos simples (directas o inversas). Compuestas son aquellas en las que **intervienen más de dos magnitudes**. En este caso, es de notar que la relación de cada una de ellas con cada una de las demás puede ser de proporcionalidad directa o inversa, de modo que hay que razonar cada caso por separado. Veamos estos ejemplos:

Si gallina y media ponen un huevo y medio cada día y medio, ¿cuántos huevos pondrán 3 gallinas en 3 días?

La relación del número de huevos con el número de gallinas y con el de días, es directa en ambos casos (se supone que la productividad de las gallinas es constante...). Entonces, disponemos los datos así:

Nº de gallinas	Nº de huevos	Nº de días
1 1/2	1 1/2	1 1/2
3	x	3

Y razonamos así: Si $1\frac{1}{2}$ gallinas ponen $1\frac{1}{2}$ huevos en $1\frac{1}{2}$ días, en el mismo número de días el número de huevos puestos por 1 gallina será $1\frac{1}{2}$ veces menor: $1\frac{1}{2} / 1\frac{1}{2} = 1$ huevo, y el número puesto por 3 gallinas, 3 veces mayor: $3 \times 1 = 3$ huevos. Pero esto ocurre en $1\frac{1}{2}$ días. Si fuera en 1 día, pondrían un número de huevos $1\frac{1}{2}$ veces menor: $3 / 1\frac{1}{2} = 2$ huevos, y en 3 días, un número 3 veces mayor: $2 \times 3 = 6$ huevos.

Si 5 gatos cazan 5 ratones en 5 minutos, ¿cuántos cazarán 10 ratones en 10 minutos?

La relación del número de gatos con el número de ratones cazados es directamente proporcional; pero su relación con el número de minutos empleados en la caza, lo es inversamente (¿por qué?). Disponemos así los datos:

Nº de gatos	Nº de ratones	Nº de minutos
5	5	5
x	10	10

Y razonamos de la siguiente manera: Si 5 ratones son cazados por 5 gatos en 5 minutos, en el mismo tiempo 1 ratón será cazado por un número de gatos 5 veces menor: $5 / 5 = 1$ gato, y 10 ratones, por un número de gatos 10 veces mayor: $10 \times 1 = 10$ gatos. Esto sucede en 5 minutos. Si tuviera que ocurrir en 1 minuto, el número de gatos debería ser 5 veces mayor: $10 \times 5 = 50$ gatos. Pero como ocurre en 10 minutos, el número de gatos será 10 veces menor: $50 / 10 = 5$ gatos. Nos basta con los mismos 5 gatos del cuento...

Deduzca la regla “mecánica” para proceder en el caso de las reglas de tres compuestas.

8. La resolución de problemas en el campo de las razones y proporciones

En el campo de las razones y de las proporciones, los problemas pueden referirse a la utilización de los conceptos, de sus propiedades y de sus diversas representaciones. También destacan las situaciones referidas a porcentajes, mezclas, reparto proporcional, regla de tres directa e inversa, escalas, y otras relacionadas con las fracciones. Todo ello en contextos simbólicos o de aplicación a la vida diaria. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) Los atletas más veloces corren los 100 m en 10 segundos. ¿Cuál es su velocidad en km/h?

b) ¿Cuántos minutos faltan para el mediodía, si hace 8 minutos faltaban los $9/5$ de lo que falta ahora?

c) Si una persona se incorpora al servicio militar a los 18 años, ¿a qué edad lo harán 5 personas?

d) Si m.d.c.(a, b) = 12, y $a/b = 64/72$, hallar a y b.

e) Determinar una fracción equivalente a $8/5$ tal que la diferencia numerador – denominador sea igual a 45.

f) Este es el cuento: Juan, a punto de morir, le dice a su esposa embarazada: “Si la criatura que nazca es varón, la herencia se

repartirá una parte para ti y dos para el niño; pero si es hembra, la herencia se repartirá dos partes para ti y una para la niña”. Juan se muere (con todo y su machismo...) y la esposa da a luz mellizos, un varón y una hembra. ¿Cómo se repartirá la herencia, respetando la voluntad del difunto?

g) Los pueblos anglosajones todavía utilizan otros sistemas de medidas de longitud (pies, pulgadas, etc.). ¿Cuánto cree que vale π en ese sistema de medidas?

h) Si 24 gallinas ponen 24 docenas de huevos en 24 días, y si 6 gallinas comen 4 kilos de maíz en 6 días, ¿cuántos huevos equivalen a 1 kilo de maíz?

i) Tengo un mapa vial doble: en una cara aparece el país y en la otra, la capital. En la primera cara, dos ciudades distantes 105 km en línea recta, están a 15 cm; en la segunda,

dos plazas a 2,4 km en línea recta, están a 12 cm. ¿Cuál es la razón entre las escalas de los dos mapas?

j) Si el rey inglés Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo el rey Enrique IV?

k) Entre adornos dorados y plateados se compraron 160, que costaron 1.120 pesos. El número de dorados es la tercera parte del de los plateados, pero los primeros son cuatro veces más caros que los segundos. ¿Cuánto cuesta un adorno de cada tipo?

l) 4 vacas negras y 3 vacas marrones dan tanta leche, en 5 días, como 3 vacas negras y 5 vacas marrones en 4 días. Si todas las vacas de cada color son igualmente productivas, ¿qué clase de vacas da más leche?

m) Para preparar una salsa, la cocinera agrega 1/6 de cucharadita de pimienta en una comida para 6 personas. ¿Qué cantidad de pimienta deberá agregar si la comida es para 8 personas?

n) Si un trozo de madera en forma de ladrillo pesa 2 Kg, ¿cuánto pesará un trozo de la misma madera y de la misma forma, pero cuyas dimensiones (largo, ancho y alto) son la mitad de las del trozo inicial?

ñ) Un grupo de hombres y de mujeres declaran su edad por escrito, y se calculan los promedios de esas edades: el del grupo total, es de 40 años; el de los hombres, 50 años; y el de las mujeres, 35 años. ¿Cuál es la razón del número de mujeres al número de hombres?

o) Una persona desea darse un baño con

agua a 35º C. Para conseguir esa temperatura, debe mezclar agua caliente con agua fría en una determinada proporción. Hace dos pruebas: en la primera, mezcla 1 parte de agua caliente con 2 de agua fría, y obtiene agua a 20º C; en la segunda mezcla 3 partes de agua caliente con 2 de agua fría, y obtiene agua a 28º C. Con estos datos, ¿en qué proporción debe mezclar ambos tipos de agua?

p) Hallar los números naturales a y b tales que su diferencia, su suma y su producto estén en la relación 1 : 7 : 24.

q) Estaba planificado realizar el trabajo en 14 días, con 15 obreros. Pero al terminar el 9º día se comprueba que sólo se han hecho los 3/7 de la obra. Si se desea acabar ésta a tiempo, ¿cuántos obreros se deben agregar al equipo?

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) La solución puede plantearse en términos de una regla de tres directa:

Distancia (m)	Tiempo (segundos)
100	10
x	3.600 (1 hora)

Lo que nos lleva a la respuesta en metros: **$x = (100 \times 3.600)/10 = 36.000 \text{ m} = 36 \text{ km}$** . Estos atletas corren, pues, a una velocidad de 36 km/h

b) Hay dos intervalos de tiempo: el actual y el que existía 8 minutos antes. Este último está en una relación de 9 a 5 con respecto al primero. Podemos representar esta situación gráficamente, de la siguiente manera:

Ultimo intervalo (5 cuadrículas):



Primer intervalo, 8 minutos antes (9 cuadrículas):



Como puede observarse, la diferencia entre ambos intervalos viene dada por 4 cuadrículas, correspondientes a 8 minutos. Por lo tanto, cada cuadrícula equivale a dos minutos. Por consiguiente, ahora faltan 10 minutos para el mediodía. Hace 8 minutos faltaban 18. Y la razón 18/10 es igual a la razón 9/5.

c) Pues, desde luego, no será a los 90 años (5 x 18). Lo probable es que lo hagan también a los 18 años.

d) Podemos buscar la expresión irreducible de la razón entre a y b: $a/b = 64/72 = 8/9$. Si m.d.c.(a, b) = 12, basta que multipliquemos ambos términos de la razón 8/9 por ese valor para llegar a tener los dos números: $a = 8 \times 12 = 96$ y $b = 9 \times 12 = 108$.

e) Podemos resolver el ejercicio buscando todas las fracciones equivalentes a 8/5: {16/10, 24/15, 32/20...}, hasta llegar a aquella cuya diferencia denominador – numerador sea 45, es decir, a la fracción 120/75. Ahora bien, también podemos apoyarnos en el razonamiento proporcional, en el sentido de que si la diferencia numerador – denominador en la fracción 8/5 es 3, para llegar a una diferencia de 45 (y como 45 : 3 = 15), necesitamos multiplicar 8 y 5 por 15 para tener el numerador y denominador buscados.