

# “板凳龙”调头区域优化分析

吴铭威, 齐丞英, 张丁元

(山东大学(威海)数学与统计学院, 山东 威海 264209)

**摘要:**以 2024 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题为背景, 建立“板凳龙”在调头过程中的数学模型, 研究“板凳龙”在调头过程中调头区域受两圆弧比例的影响, 并探究调头区域最小半径的影响因素. 进一步, 根据相关结论, 在保证路线美观与演出难度的前提下, 比较得出相对最优的调头曲线. 最后综合分析调头过程受螺距、板长等因素的影响, 并给出相关数据结果.

**关键词:**仿真模拟; 二分法; 平面几何; 数学建模

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2025)01-0049-09

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2025.01.06

## 0 引言

“板凳龙”是浙闽地区元宵节期间的传统民俗活动之一, 表演形式类似舞龙, 但使用板凳串联模拟龙形. 整个表演过程中, 板凳龙的行进需要呈现出蜿蜒曲折的形状, 极具观赏性. 表演的核心在于控制队伍的行进路线, 使得整个龙队的盘入、盘出流畅自然, 避免出现队伍拥堵或碰撞的情况. 此外, 合理的速度控制和路径规划也是保证表演顺利进行的关键.

本文根据 2024 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题给出的背景<sup>[1]</sup>, 结合几何模型、二分法以及插值拟合等方法, 探究板凳龙在调头过程中圆弧半径比例与调头区域半径对调头曲线的影响, 并将相关结果应用于实际情景, 设计新型调头行进路线.

## 1 板凳龙调头过程模型

板凳龙行进中的调头过程, 从盘入到盘出, 行进路线将由顺时针盘入调头切换为逆时针盘出. 因此, 调头过程分为盘入曲线、第一段调头圆弧、第二段调头圆弧和盘出曲线 4 个阶段.

为简化模型, 做出如下假设:

- 1) 假设各把手中心始终位于螺线上, 忽略其他因素影响;
- 2) 假设板凳始终平行于地面, 不会发生倾斜, 简化为二维运动模型;
- 3) 假设板凳是刚体, 即在运动过程中板凳不会发生伸长和压缩, 且内部各点的相对位置不变;
- 4) 假设板凳龙在行进过程中不会倒退.

### 1.1 板凳龙调头过程轨迹方程

首先, 确定盘入与盘出的等距螺旋曲线方程. 建立螺线的极坐标方程, 根据等螺距性质求解方程, 并用参数方程表示.

收稿日期: 2024-12-30

通讯作者: 吴铭威, E-mail: 202200820169@mail.sdu.edu.cn

引用格式: 吴铭威, 齐丞英, 张丁元. “板凳龙”调头区域优化分析[J]. 数学建模及其应用, 2025, 14(1): 49-57.

WU M W, QI C Y, ZHANG D Y. Optimization analysis of the "bench dragon" turnaround area(in Chinese) [J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2025, 14(1): 49-57.

以螺线中心为极点，极轴指向出发点方向，建立极坐标系，等距螺线方程为：

$$r(\theta) = \alpha\theta, \quad (1)$$

其中： $\alpha$  为常数； $\theta$  为螺线的极角； $r(\theta)$  为螺线的径向距离。

当极角相差  $2\pi$  时，对应极径相差为螺距  $d$ 。根据等距螺线性质，于是有

$$r(\theta + 2\pi) - r(\theta) = \alpha \cdot 2\pi = d, \quad (2)$$

解得  $\alpha = \frac{d}{2\pi}$ 。因此，螺线的极坐标方程为

$$r(\theta) = \frac{d}{2\pi}\theta. \quad (3)$$

将上述极坐标方程转化为平面直角坐标系下的参数方程，整理得：

$$\begin{cases} x(\theta) = \alpha \cdot \theta \cdot \cos \theta, \\ y(\theta) = \alpha \cdot \theta \cdot \sin \theta. \end{cases} \quad (4)$$

由于在运动过程中，螺线的极角  $\theta$  与运动时间  $t$  有关，即  $\theta = \theta(t)$ ，利用微元法推理极角  $\theta$  与行进时间  $t$  的关系，具体过程如下。

考虑  $t$  时刻点  $A$  运动到  $t + dt$  时刻点  $B$  的过程，其中  $dt$  充分小，如图 1 所示。

由图 1，有

$$OC = OB = \alpha\theta, \quad OA = \alpha(\theta + d\theta), \quad AC = OA - OC = \alpha d\theta.$$

由于  $d\theta$  极小，故可以认为  $OA \parallel OB$ ， $OA \perp BC$ ，且  $BC = \widehat{BC}$ ，则有：

$$\tan \angle a = \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \theta, \quad (5)$$

$$BC = OB \cdot d\theta. \quad (6)$$

根据  $v = \frac{s}{t}$ ，得：

$$v = \frac{AB}{dt} = \frac{AC}{\cos \angle a \cdot dt} = \frac{\alpha \cdot d\theta}{\cos \angle a \cdot dt}. \quad (7)$$

将式(5)代入式(7)，整理得微分方程：

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\alpha \sqrt{1 + \theta^2}}, \quad (8)$$

解得解析解：

$$\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) = \frac{2v}{\alpha}t + C. \quad (9)$$

记  $t = 0$  时， $\theta_{in} = \frac{R}{\alpha}$ ，其中， $R$  为调头区域半径， $\alpha = \frac{d}{2\pi}$ ；代入式(9)，计算得

$$C = \theta_{in} \sqrt{\theta_{in}^2 + 1} + \ln(\theta_{in} + \sqrt{\theta_{in}^2 + 1}), \quad (10)$$

因此参数方程(4)可以进一步写成：

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cdot \theta(t) \cdot \cos \theta(t), \\ y(t) = \alpha \cdot \theta(t) \cdot \sin \theta(t). \end{cases} \quad (11)$$

为表述方便，记  $\mathbf{G}(t) = (x(t), y(t))$  为行进轨迹的参数方程，并规定龙头进入调头区域为  $t = 0$  时刻。在龙头进入调头空间前，即  $-100 < t < 0$  时，板凳龙运动轨迹参数方程为：

$$\mathbf{G}(t) = (\alpha\theta(t)\cos \theta(t), \alpha\theta(t)\sin \theta(t)). \quad (12)$$

当板凳龙进入第一段圆弧，即  $0 < t < \frac{\beta}{\omega_1}$  时，记盘入点坐标为  $(x_{in}, y_{in})$ 。由于此时板凳龙沿第一

段圆弧以角速度  $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$  做顺时针运动，其中， $v$  为龙头运动速度， $R_1$  为第一段圆弧半径，则运动轨迹

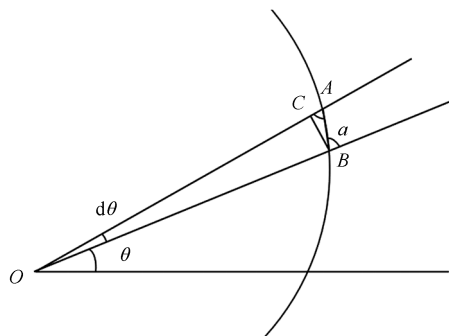


图 1 把手运动模型

参数方程为:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} x_{\text{in}} - k\lambda y'_{\text{in}} + R_1 \cos(\gamma_1 - \omega_1 t) \\ y_{\text{in}} - k\lambda x'_{\text{in}} + R_1 \sin(\gamma_1 - \omega_1 t) \end{pmatrix}^T, \quad (13)$$

其中:  $k = \frac{R_1}{R_2}$  为两圆弧半径比例;  $\lambda$  为一常数;  $\gamma_1$  满足  $\cos \gamma_1 = -\frac{y'_{\text{in}}}{\sqrt{x'^2_{\text{in}} + y'^2_{\text{in}}}}$ ,  $\sin \gamma_1 = \frac{x'_{\text{in}}}{\sqrt{x'^2_{\text{in}} + y'^2_{\text{in}}}}$ ;  $(x'_{\text{in}}, y'_{\text{in}})$  表示在盘入点的切线方向,  $x'_{\text{in}} = -\alpha(\cos \theta_{\text{in}} - \theta_{\text{in}} \sin \theta_{\text{in}})$ ,  $y'_{\text{in}} = -\alpha(\sin \theta_{\text{in}} + \theta_{\text{in}} \cos \theta_{\text{in}})$ .

当板凳龙进入第二段圆弧, 即  $\frac{\beta}{\omega_1} < t < \beta\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$  时, 由于此时板凳龙沿第二段圆弧以角速度  $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$  做逆时针运动, 其中,  $R_2$  为第二段圆弧半径, 则运动轨迹参数方程为:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} -x_{\text{in}} + \lambda y'_{\text{in}} + R_2 \cos\left(\gamma_2 + \omega_2\left(t - \frac{\beta}{\omega_1}\right)\right) \\ -y_{\text{in}} - \lambda x'_{\text{in}} + R_2 \sin\left(\gamma_2 + \omega_2\left(t - \frac{\beta}{\omega_1}\right)\right) \end{pmatrix}^T, \quad (14)$$

其中,  $\gamma_2 = \gamma_1 - \beta + \pi$ .

在板凳龙离开调头空间后, 即  $\beta\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) < t < 100$  时, 由于盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称, 有:

$$\mathbf{G}(t) = (\alpha\theta(t) \cos(\theta(t) + \pi), \alpha\theta(t) \sin(\theta(t) + \pi)). \quad (15)$$

因此, 板凳龙运动轨迹的参数方程  $\mathbf{G}(t) = (x(t), y(t))$  为:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{cases} (\alpha\theta(t) \cos \theta(t), \alpha\theta(t) \sin \theta(t)), & -100 \leq t \leq 0, \\ \begin{pmatrix} x_{\text{in}} - k\lambda y'_{\text{in}} + R_1 \cos(\gamma_1 - \omega_1 t) \\ y_{\text{in}} - k\lambda x'_{\text{in}} + R_1 \sin(\gamma_1 - \omega_1 t) \end{pmatrix}^T, & 0 < t \leq \frac{\beta}{\omega_1}, \\ \begin{pmatrix} -x_{\text{in}} + \lambda y'_{\text{in}} + R_2 \cos\left(\gamma_2 + \omega_2\left(t - \frac{\beta}{\omega_1}\right)\right) \\ -y_{\text{in}} - \lambda x'_{\text{in}} + R_2 \sin\left(\gamma_2 + \omega_2\left(t - \frac{\beta}{\omega_1}\right)\right) \end{pmatrix}^T, & \frac{\beta}{\omega_1} < t \leq \beta\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right), \\ (\alpha\theta(t) \cos(\theta(t) + \pi), \alpha\theta(t) \sin(\theta(t) + \pi)), & \beta\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) < t \leq 100. \end{cases} \quad (16)$$

## 1.2 板凳龙调头过程位置模型

对于龙头位置, 即龙头前把手, 需要满足以下两个约束条件:

- 1) 龙头前把手位于行进轨迹上;
- 2) 在行进过程中, 龙头不会倒退, 即在以速度  $v$  进行运动的过程中, 时间  $t$  内行进的路程等于龙头经过的曲线长度.

因此, 龙头在  $t$  时刻的位置为:

$$(x_0(t), y_0(t)) = \mathbf{G}(t). \quad (17)$$

对于龙身位置, 即其余各把手, 需满足的约束条件与龙头把手约束条件相同. 因此, 各把手中心的位置递推式为:

$$\begin{cases} d(\mathbf{G}_i(t), \mathbf{G}_{i+1}(t)) = l, \\ 0 < \theta_i(t) - \theta_{i+1}(t) < \pi, \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $d(\mathbf{G}_i(t), \mathbf{G}_{i+1}(t))$  为第  $i$  个把手与第  $i+1$  个把手之间的距离,  $l$  为把手之间的板长.

## 1.3 板凳龙速度模型

对于板凳龙上的任意一个把手, 考虑其在极短时间  $dt$  内的运动模型. 现对第  $i$  节把手的运动进行分析.

由图 1 可知, 第  $i$  节把手在  $t$  时刻位于点 A, 在  $t+dt$  时刻位于点 B. 由运动轨迹的参数方程可

知,  $\mathbf{G}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$  为第  $i$  节把手的轨迹方程, 即在  $t$  时刻的位置, 则经过极短时间  $dt$  后, 第  $i$  节把手的位置变为  $\mathbf{G}_i(t+dt) = (x_i(t+dt), y_i(t+dt))$ . 由于时间  $dt$  极短, 因此认为  $AB = \widehat{AB}$ . 则第  $i$  节把手的速度为:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{G}_i(t) - \mathbf{G}_i(t+dt)}{dt} (dt \rightarrow 0). \quad (19)$$

## 2 固定调头区域中圆弧半径比例的影响

### 2.1 板凳龙调头路径的几何模型

已知调头过程分为盘入曲线、第一段调头圆弧、第二段调头圆弧和盘出曲线 4 个阶段. 其中, 调头区域是以螺线中心为圆心的圆形区域, 盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称, 调头路径是由两段圆弧相切连接而成的 S 形曲线, 同时圆弧满足与螺线相切, 圆弧比例为  $k$ . 通过上述条件, 建立板凳龙调头过程的几何模型, 如图 2 所示.

记盘入螺线与调头空间边缘交点为  $A(x_{in}, y_{in})$ , 两个圆弧半径之比  $k = \frac{R_1}{R_2} (k > 0)$ , 盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称, 则盘出螺线与调头空间边缘交点为  $B(-x_{in}, -y_{in})$ , 且切线  $l_1 // l_2$ . 由于  $A(x_{in}, y_{in})$  处的切线方向为  $\mathbf{e} = (x'_{in}, y'_{in})$ , 法线方向为  $\mathbf{n} = (-y'_{in}, -x'_{in})$ . 记前一段圆弧的圆心  $O_1$  坐标为:

$$O_1 = (x_{in}, y_{in}) + k \cdot \lambda \cdot \mathbf{n} = (x_{in} - k\lambda y'_{in}, y_{in} - k\lambda x'_{in}), \quad (20)$$

其中,  $\lambda = \frac{x_{in}^2 + y_{in}^2}{(k+1)(x_{in}y'_{in} + y_{in}x'_{in})}$ .

由于前一段圆弧的半径是后一段的  $k$  倍, 即  $\widehat{AO_1} = k \cdot \widehat{BO_2}$ , 则后一段圆弧的圆心坐标  $O_2$  为:

$$O_2 = (-x_{in}, -y_{in}) - \lambda \cdot \mathbf{n} = (-x_{in} + \lambda y'_{in}, -y_{in} + \lambda x'_{in}). \quad (21)$$

两圆弧的切点坐标  $Q$  为:

$$Q = \left( \frac{1-k}{1+k}x_{in}, -\frac{k-1}{k+1}y_{in} \right). \quad (22)$$

此外, 由于  $AO_1 \perp l_1$ ,  $BO_2 \perp l_2$ ,  $l_1 // l_2$ , 所以  $AO_1 // BO_2$ .

记  $R_1$  为前一段圆弧的半径,  $R_2$  为后一段圆弧的半径, 于是有  $R_1 = k\lambda |\mathbf{n}|$ ,  $R_2 = \lambda |\mathbf{n}|$ .

由于调头路径中的两段圆弧相切, 则  $QO_1 \perp l$ ,  $QO_2 \perp l$ ,  $O_1, Q, O_2$  三点共线, 两圆弧圆心  $O_1$  和  $O_2$  之间的距离等于两圆弧半径之和, 即  $|O_1O_2| = (k+1)\lambda |\mathbf{n}|$ . 记  $\beta$  为圆弧圆心角, 根据几何关系和三角函数关系, 有:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{|AB|}{R_2}, \quad (23)$$

解得

$$\beta = 2\arcsin\left(\frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{|AB|}{R_2}\right), \quad (24)$$

其中,  $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

### 2.2 固定调头区域下曲线长度的不变性

将板凳龙调头行进过程截取圆弧部分, 如图 3 所示, 进行调头曲线长度分析.

记  $AO_1$  与  $BO_2$  之间的距离为  $H$ ,  $AB$  为圆形调头区域直径, 长度记为  $2R$ .

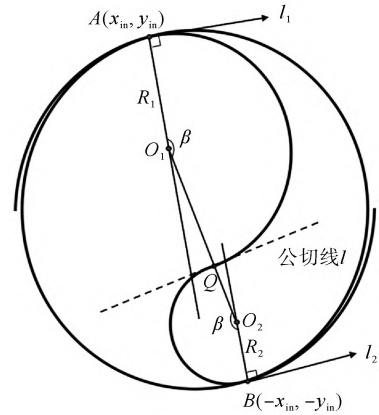


图 2 调头空间示意图

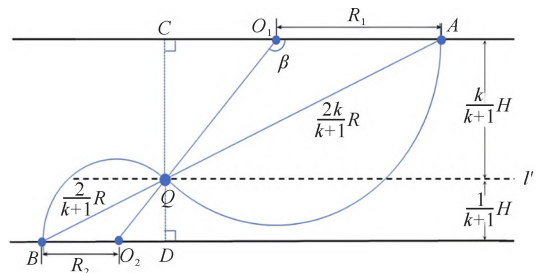


图 3 调头空间内几何关系示意图

根据上文, 有  $AO_1 \parallel BO_2$ ,  $AO_1 = k \cdot BO_2$ . 过点  $Q$  分别做  $AO_1$  和  $BO_2$  的垂线  $QC$  和  $QD$ , 于是有:

$$AQ = \frac{2k}{k+1}R, BQ = \frac{2}{k+1}R, QC = \frac{k}{k+1}H, QD = \frac{1}{k+1}H,$$

此时,  $\sin \angle O_1AO = \frac{H}{2R}$  为定值, 因此  $\beta = \pi - 2\angle O_1AO$  恒定不变. 弧长

$$C = \beta(R_1 + R_2),$$

其中,  $R_1 + R_2 = \frac{H}{\sin \beta}$  为一固定值.

因此, 在调头区域固定的条件下, 调头曲线与两个圆弧半径之比的大小没有关系, 即若进入调头空间后立刻开始沿圆弧调头, 则无法通过调整圆弧, 仍保持各部分相切, 使得调头曲线变短.

通过计算可知, 当调头区域半径  $R$  为 4.5 m 时, 相关几何量计算结果如表 1 所示.

表 1 半径为 4.5 m 时的计算结果

几何参数	计算结果
第一段圆弧圆心	(-0.760 009, -1.305 726)
第二段圆弧圆心	(1.735 932, 2.448 402)
第一段圆弧半径 $R_1/\text{m}$	3.005 418
第二段圆弧半径 $R_2/\text{m}$	1.502 709
盘入过程分界点	(-2.711 856, -3.591 078)
两端圆弧分界点	(0.903 952, 1.197 026)
盘出过程分界点	(2.711 856, 3.591 078)
曲线长度 $C/\text{m}$	13.621 245

### 3 固定圆弧半径比例下调头区域的最小半径

#### 3.1 最小半径的判定条件

根据模型假设,

1) 认为板凳为一刚体, 即板凳在运动过程中不会发生伸长与压缩, 长度不会发生变化, 因此, 对于第  $i$  个把手, 即应满足其到第  $i+1$  个把手的距离始终为板凳长  $l$ ;

2) 认为板凳在行进过程中不会发生倒退, 因此, 第  $i+1$  个把手行进位置所对应的时间  $t$  是单调递增的.

如果板凳的调头区域半径小于最小半径, 则第  $i+1$  个把手的位置在行进过程中会出现位置不连续或位置倒退的情况. 据上述原理建立判定条件, 具体方法如下:

定义函数  $\mathbf{G}_{i+1}(t) = f(\mathbf{G}_i(t))$ , 函数  $f$  表示通过在  $t$  时刻第  $i$  个把手的位置  $\mathbf{G}_i(t)$ , 利用板凳在运动过程中不会发生伸长与压缩的假设, 计算得到第  $i+1$  个把手所在位置  $\mathbf{G}_{i+1}(t)$ .

##### 3.1.1 连续性判定

行进过程可能出现位置不连续的情况, 即函数  $f$  在某一区间内不连续. 判断函数  $f$  是否连续, 用如下方法.

对于第  $i$  个把手, 选取任意时间区间  $[a, b]$ , 其中,  $a < b$ . 将该时间区间平均划分成  $n$  等份, 即  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ , 区间间隔为  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ . 通过计算可以得到第  $i+1$  个把手所在位置  $\mathbf{G}_i(t)$ ,  $i=0, 1, \cdots, n$ , 进而得到第  $i+1$  个把手在相邻时间内位置之间的距离  $\Delta \mathbf{G}_i = \|\mathbf{G}_{i+1}(t) - \mathbf{G}_i(t)\|$ ,  $i=0, 1, \cdots, n-1$ .

取  $a=0, b=30, n=3000$ , 并令

$$\epsilon = C_0 \cdot \Delta t = C_0 \cdot \frac{b-a}{n},$$

其中,  $C_0$  为最小距离常数, 求解时取  $C_0=3$ . 当  $\max\{\Delta \mathbf{G}_0, \Delta \mathbf{G}_1, \cdots, \Delta \mathbf{G}_{n-1}\} > \epsilon$  时, 认为函数  $f(t)$  不连续, 此时半径已小于最小半径.

##### 3.1.2 倒退判定

行进过程中若出现位置倒退的情况, 即计算所得的第  $i+1$  个把手位置所导出的时间不符合单调递增关系, 具体判定方法为: 定义计算所得到的第  $i+1$  个把手的位置  $\mathbf{G}_{i+1}(t) = (x, y)$ , 因此所对应的时间为  $t = \mathbf{G}_{i+1}^{-1}(x, y)$ . 当第  $i+1$  个把手的时间  $t$  不符合单调递增的关系时, 则认为在行进过程中发生了倒退, 即此时半径已经小于最小半径.

### 3.2 最小半径的求解

采用二分法<sup>[2]</sup>进行求解, 具体步骤如下.

#### 步骤 1 参数初始化

首先, 设定调头区域最小半径的初始搜索区间, 设定最小半径的下界  $r_{\text{lower}} = 2.5 \text{ m}$  和上界  $r_{\text{upper}} = 4.5 \text{ m}$ , 精度要求为  $\delta = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$ .

#### 步骤 2 最小半径条件验证

计算中间值  $\text{mid} = \frac{r_{\text{lower}} + r_{\text{upper}}}{2}$ , 并判断是否满足上述两条判定条件.

#### 步骤 3 搜索区间调整

如果两条判定条件均满足, 则更新上界  $r_{\text{upper}} = \text{mid}$ ; 若两条判定条件至少有一个不满足, 则更新下界  $r_{\text{lower}} = \text{mid}$ .

#### 步骤 4 迭代逼近

重复上述操作, 直到  $r_{\text{upper}} - r_{\text{lower}}$  满足精度要求, 此时, 根据最终的搜索区间得到调头区域的最小半径  $R_{\text{min}} = \frac{r_{\text{lower}} + r_{\text{upper}}}{2}$ .

通过计算解得, 在圆弧半径比例  $k=2$  的条件下, 调头区域的最小半径为  $R_{\text{min}} = 4.278\ 411 \text{ m}$ .

## 4 无限制下调头区域与圆弧半径比例的影响

在板凳龙调头过程中, 两圆弧半径的比例和调头区域的半径均可以变化. 为探究圆弧半径比例与最小调头半径的关系, 以及使得调头区域半径最小的圆弧半径比例, 令圆弧半径比例  $k \in [0.2, 5]$ .

在  $[0.2, 5]$  中选取 20 个点, 分别计算在圆弧半径比例为  $k_i (i=1, 2, \dots, 20)$  时的调头区域最小半径, 部分结果见表 2.

表 2 不同半径比例下的最小半径

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
最小调头半径 $r/\text{m}$	2.852 928	4.278 411	5.711 029	7.142 731	8.574 112

同时, 绘制调头区域最小半径关于圆弧半径比例的图像, 如图 4 所示.

通过图像与计算结果可知, 当圆弧半径比例  $k=n$  和  $\frac{1}{n}$  时, 调头区域的最小半径相等, 进一步验证了所建立模型的合理性与正确性. 同时, 注意到当圆弧半径比例  $k>1$  时, 调整半径与圆弧半径比例近似成正比, 此时较小圆弧半径近似为定值.

经计算, 最终得出结果: 使得调头区域半径最小的圆弧半径比例为  $k=1$ , 此时最小调头区域半径  $R_{\text{min}} = 2.852\ 928 \text{ m}$ .

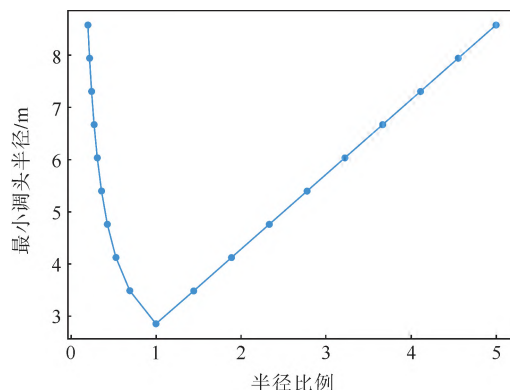


图 4 最小半径与圆弧比例关系

## 5 新型调头路线设计

在调头区域以外, 板凳龙行进路线仍为等距螺旋曲线的情况下, 为提高演出的观赏性并降低舞龙队的演出难度, 现要设计新的调头路线. 针对要求, 设定的新路线需要遵循以下两个原则:

- 1) 对于演出的观赏性, 要求行进路线光滑并关于轨迹中心对称;
- 2) 对于舞龙队的演出难度, 对板凳龙在行进过程中的最大速度进行衡量, 要求行进过程中的最大速度尽可能小, 因为行进速度越快, 演出难度越高.



根据上述原则,提出了两种曲线,并将分别进行分析:

- 1) 曲线 1 为半径比例  $k=1$  的标准圆弧调头曲线;
- 2) 曲线 2 为基于指数曲率的调头曲线.

### 5.1 曲线 1: 半径比例 $k=1$ 的标准圆弧

根据曲线的对称性可知,当调头曲线为圆弧时,板凳龙各个把手在圆弧上的速度相等.下面,进一步分析圆弧相较于其他曲线的优势.

若调头曲线不为圆弧,则存在位于第一段调头曲线上的两点  $A$  和  $B$ ,速度满足  $v_1(t) > v_2(t)$ ,其中,  $v_i(t)$  表示第  $i$  个把手  $t$  时刻的速度;同时存在关于曲线中心对称的点  $A'$  和点  $B'$ ,板凳龙在  $t'$  时刻移动到  $A'$  和  $B'$  时的速度满足  $v_1(t') < v_2(t')$ . 由于龙头速度始终为 1 m/s,即  $v_1(t) = v_1(t') = 1$  m/s,则  $v_2(t') > 1$  m/s. 然而,当调头曲线为圆弧时,各个把手的速度  $v_i(t) = 1$  m/s. 因此,在调头区域内部曲线部分,由于圆弧上速度不变,故若仅考虑掉头曲线内部,圆弧即为最优解. 根据第 4 节的分析,选定半径比例  $k=1$  的圆弧作为调头曲线. 此时,板凳龙行进轨迹如图 5 所示.

当调头区域半径  $R=4.5$  m,圆弧半径比例  $k=1$  时,板凳龙的最大行进速度为  $v_{\max}=1.205\ 187$  m/s,调头曲线弧长 13.621 245 m.

### 5.2 曲线 2: 基于曲率设计曲线参数方程

针对调头区域内部的曲线,根据圆弧上最大速度不变的优势,选择了半径比例  $k=1$  的圆弧作为调头曲线. 但最终计算显示,最大速度出现在螺旋线与调头区域的交界处. 经分析,对于交界处的板凳龙行进速度,调头曲线的曲率变化越大,板凳龙的最大速度就越大,详细说明见式(29)–(32). 因此,为减小最大速度的变化量,选择指数函数  $K(t) = \frac{b}{e^{at}}$  作为曲率

函数,以保证曲率变化率小,进而降低板凳龙在螺旋线与调头曲线交界处的速度变化量,其中,  $a, b$  为参数.

根据曲率的计算公式,得到微分方程:

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = K(t) \cdot [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}, \quad (25)$$

并满足初值条件:

$$\begin{cases} x(0) = x_{\text{in}}, y(0) = y_{\text{in}}, \\ x(T) = 0, y(T) = 0, \\ x'(0) = x'_{\text{in}}, y'(0) = y'_{\text{in}}, \end{cases} \quad (26)$$

其中,  $T$  表示板凳龙到达中心的时间.

经验证,下述解满足微分方程(25):

$$\begin{cases} x'(t) = e^{at} \cdot \cos bt, \\ y'(t) = e^{at} \cdot \sin bt, \end{cases} \quad (27)$$

进而解得参数方程:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{at} \cos bt + be^{at} \sin bt) + c, \\ y(t) = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{at} \sin bt - be^{at} \cos bt) + c, \end{cases} \quad (28)$$

其中,  $a, b, c$  均为常数. 根据式(26),计算得出  $a = 0.083, b = 0.443, c = 0.756$ . 通过计算得到板凳龙的行进轨迹,如图 6 所示.

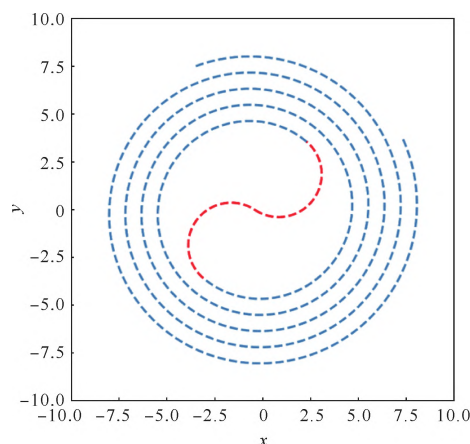


图 5 标准圆形调头区域

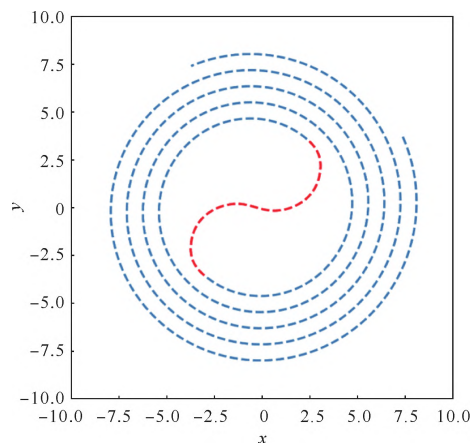


图 6 指数曲率调头曲线

在此路线中, 板凳龙最大行进速度  $v_{\max} = 1.071\ 616\ \text{m/s}$ , 调头曲线弧长  $13.354\ 054\ \text{m}$ .

经过对两种不同曲线下的调头运动轨迹、行进最大速度以及调头曲线弧长的分析和对比, 发现基于指数曲率所设计的调头曲线的最大调头速度更小, 即更符合难度较小的要求. 因此发现, 降低曲线在螺旋线与调头曲线交界处的曲率变化率, 可以有效地降低板凳龙在行进过程中的最大速度, 进而降低演出过程中的调头难度.

## 6 调头过程的其他影响因素

### 6.1 螺距大小的影响

板凳龙调头过程中, 螺距大小的变化不改变调头曲线的形状, 因而不影响调头过程中的最大速度. 但螺距的改变直接影响了板凳龙在螺线上的碰撞位置, 导致调头区域的大小发生变化. 当螺距变小时, 板凳龙在距离中心更远处发生碰撞, 进而为防止碰撞的发生, 调头区域应适当变大; 反之, 当螺距增大时, 板凳龙在螺线内的运动变得不容易发生碰撞, 调头区域可适当减小.

### 6.2 板凳长度与把手位置的影响

板凳长度和把手位置共同影响着把手之间的有效距离  $D_{\text{between}}$  和把手外长度  $D_{\text{brink}}$ , 如图 7 所示.

当把手外长度  $D_{\text{brink}}$  增大时, 板凳龙在行进过程中更易发生碰撞, 因此需要通过增大调头区域半径来防止碰撞的发生.

当把手之间的有效距离  $D_{\text{between}}$  增大时, 根据上述模型的分析, 板凳龙在行进过程中会更易发生“位置不连续”或“位置倒退”的情况, 因此同样需要通过增大调头区域半径来保证板凳龙顺利行进.

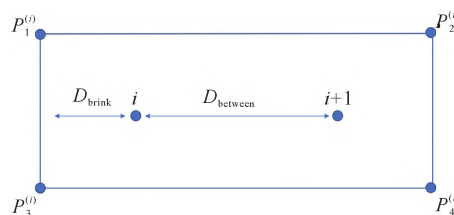


图 7 板凳模型

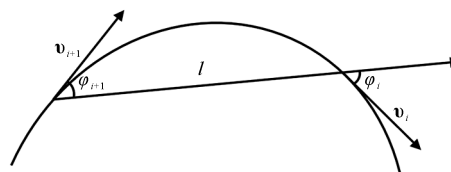


图 8 曲率半径与速度变化的关系

### 6.3 调头曲线形状的影响

由于调头曲线的形状不同, 因此, 板凳龙在盘出过程中的运动轨迹的曲率半径将发生较大变化, 进而影响板凳龙行进的最大速度, 如图 8 所示, 具体分析如下.

首先, 根据图 8 分析曲率半径  $\rho$  和速度与板凳方向夹角  $\varphi$  之间的关系.

由图 8, 根据几何关系得:

$$\sin \varphi = \frac{l}{2\rho}. \quad (29)$$

由于第  $i$  节龙身前把手中心沿板凳方向的分速度与第  $i+1$  节龙身前把手中心沿板凳方向的分速度相同, 则:

$$v_i \cdot \cos \varphi_i = v_{i+1} \cdot \cos \varphi_{i+1}, \quad (30)$$

整理得:

$$v_{i+1} = \frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_{i+1}} v_i = \sqrt{\frac{1 - l^2 / (4\rho_i^2)}{1 - l^2 / (4\rho_{i+1}^2)}} \cdot v_i, \quad (31)$$

$$\Delta v_i = v_{i+1} - v_i \approx \mu (\rho_i^2 - \rho_{i+1}^2), \quad (32)$$

其中,  $\mu$  可近似为常数.

因此, 在离开第二段小圆弧的位置, 第二段圆弧曲率半径为  $\rho_{i+1}$ , 盘出螺线曲率半径为  $\rho_i$ , 相差越明显, 在此处附近的相邻节点速度变化就越大, 所以在此处最大速度出现明显峰值. 因此, 调头曲线会通过影响与盘出曲线之间曲率的差距, 进一步影响最大速度.

通过上述问题“新路线设计”的分析, 可以进一步说明在螺旋线与调头曲线的交界处, 曲率变化



更小的曲线更符合路线美观与难度较小的要求.

## 7 总结

本文针对 2024 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题中板凳龙的调头过程, 建立数学模型并进行研究分析. 通过严格的数学证明, 得出调头曲线与两个圆弧半径之比无关的结论; 通过数值计算得出在半径比例  $k=2$  的条件下最小调头区域半径为  $R=4.28$  m. 同时, 在设计新型调头曲线过程中, 分析得出对于调头曲线内部, 圆弧具有最大速度不变的优势; 对于螺旋线与调头曲线的交界处, 曲线的曲率变化越平缓, 板凳龙最大速度越小. 最后, 分别分析了螺距、板凳长和曲线形状对调头过程的影响.

## 参考文献

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2024“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. [2024-09-05]. [https://www.mcm.edu.cn/html\\_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html](https://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html).
- [2] 刘春燕, 闫广峰, 林成, 等. 基于二分法的 KPCA 核参数优选[J]. 内江师范学院学报, 2024, 39(2): 71-76.

## Optimization Analysis of the "Bench Dragon" Turnaround Area

WU Mingwei, QI Chengying, ZHANG Dingyuan

(School of Mathematics and Statistics, Shandong University(Weihai), Weihai, Shandong 264209, China)

**Abstract:** This paper takes the problem A of 2024 CUMCM as the background, establishes the mathematical model of the "bench dragon" in the turning process, studies the influence of the ratio of two arcs on the turning area of the "bench dragon" in the turning process, and explores the factors affecting the minimum radius of the turning area; Further based on relevant conclusions, while ensuring the beauty of the route and the difficulty of the performance, a relatively optimal turning curve can be compared and obtained; Finally, a comprehensive analysis was conducted on the influence of factors such as pitch and plate length on the turning process, and relevant data results were provided.

**Key words:** simulation; dichotomy; plane geometry; mathematical modeling

## 作者简介

吴铭威(2003—), 男, 2022 级统计学专业本科生.

齐丞英(2004—), 男, 2022 级数学与应用数学专业本科生.

张丁元(2004—), 男, 2022 级统计学专业本科生.