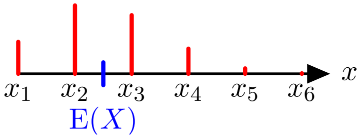
Probabilités et Statistiques
II. Espérance et variance

EPITA

Guillaume Euvrard

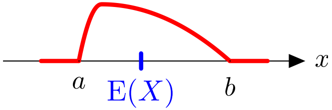
Espérance d'une variable aléatoire

Variable discrète



$$\mathrm{E}(X) \;=\; \sum_{i\in I} x_i\, P(X{=}x_i)$$

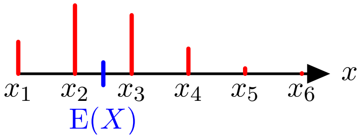
Variable avec densité



$$\mathrm{E}(X) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

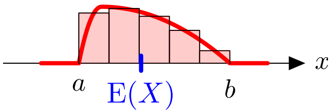
Espérance d'une variable aléatoire

Variable discrète



$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \, P(X{=}x_i)$$

Variable avec densité



$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, \mathrm{d}x \\ &\approx \sum x_i \, \underbrace{f(x_i)\, \delta x}_{P(X=x_i)} \end{aligned}$$

Interprétation

Supposons que X est une variable finie : $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Alors : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X{=}x_i)$$

Imaginons K tirages indépendants de X (K grand).

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, définissons K_i = nombre de tirages qui valent x_i.

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_K}{K} =$$

Interprétation

Supposons que X est une variable finie : $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Alors : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X{=}x_i)$$

Imaginons K tirages indépendants de X (K grand).

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, définissons K_i = nombre de tirages qui valent x_i.

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_K}{K} = \frac{K_1 x_1 + K_2 x_2}{K}$$

Interprétation

Supposons que X est une variable finie : $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Alors : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X{=}x_i)$$

Imaginons K tirages indépendants de X (K grand).

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, définissons K_i = nombre de tirages qui valent x_i.

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_K}{K} = \frac{K_1 x_1 + K_2 x_2 + \cdots + K_n x_n}{K}$$

Interprétation

Supposons que X est une variable finie : $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

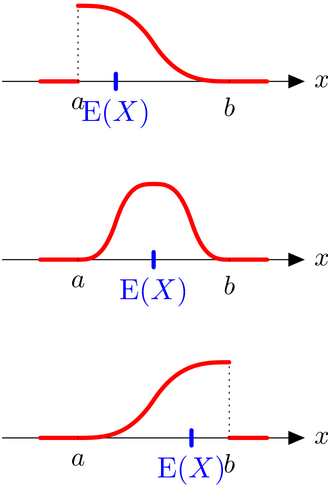
Alors : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X{=}x_i)$$

Imaginons K tirages indépendants de X (K grand).

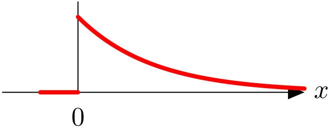
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, définissons K_i = nombre de tirages qui valent x_i.

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_K}{K} = \frac{K_1 x_1 + K_2 x_2 + \cdots + K_n x_n}{K} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{K_i}{K}$$

Exemples graphiques

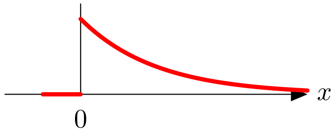


Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

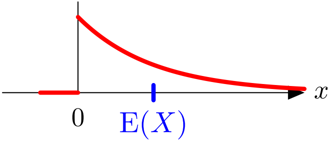
Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

Posons : $\left| \begin{array}{lcl} u & = & x \\ v' & = & e^{-x} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lcl} u' & = & 1 \\ v & = & -e^{-x} \end{array} \right.$

On obtient : $\mathrm{E}(X) = \left[-\, x\, e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1$

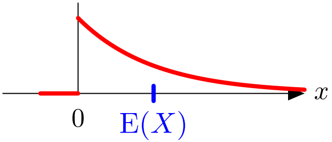
Propriétés de l'espérance

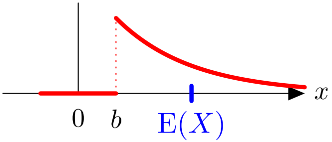
1. Pour toute fonction φ continue par morceaux,

$$\mathrm{E}\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$

3. Pour tout couple (X, Y), $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$





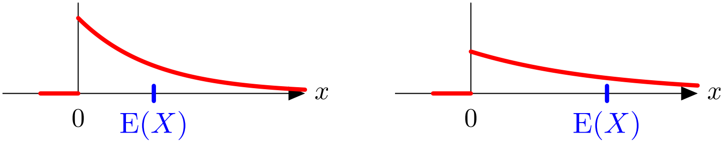
Propriétés de l'espérance

1. Pour toute fonction φ continue par morceaux,

$$\mathrm{E}\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$

3. Pour tout couple (X, Y), $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$



Variance d'une variable aléatoire

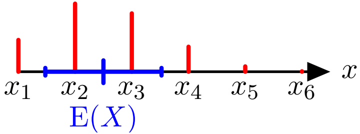
Soit X une variable aléatoire.

Définition

La variance de X est : $\quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right)$

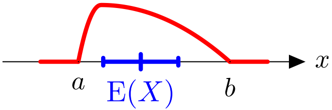
Son écart-type est : $\quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Variable discrète



$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i \in I} \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 P(X{=}x_i)$$

Variable avec densité



$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathrm{E}(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation

Imaginons K tirages indépendants de la variable X.

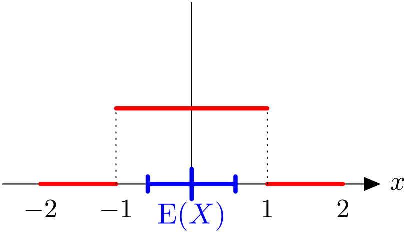
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{K}\, d^2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X) \end{pmatrix}\right) &= \frac{\big(X_1 - \mathrm{E}(X)\big)^2 + \cdots + \big(X_K - \mathrm{E}(X)\big)^2}{K} \\
&\approx \mathrm{E}\left(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\right) = \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}
$$

Interprétation

Imaginons K tirages indépendants de la variable X.

$$\frac{1}{K}\ d^2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X) \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(X_1 - \mathrm{E}(X)\right)^2 + \cdots + \left(X_K - \mathrm{E}(X)\right)^2}{K}$$

$$\approx \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \mathrm{Var}(X)$$

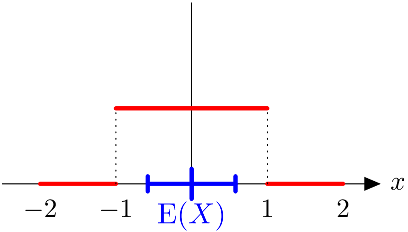


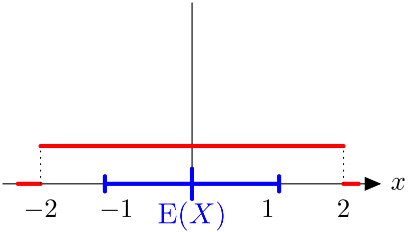
Interprétation

Imaginons K tirages indépendants de la variable X.

$$\frac{1}{K}\, d^2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X) \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(X_1 - \mathrm{E}(X)\right)^2 + \cdots + \left(X_K - \mathrm{E}(X)\right)^2}{K}$$

$$\approx \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \mathrm{Var}(X)$$



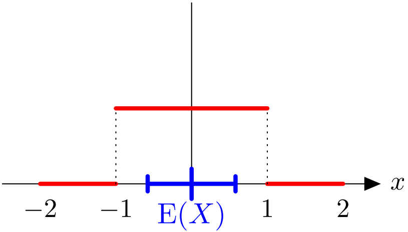


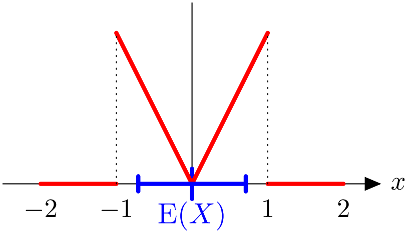
Interprétation

Imaginons K tirages indépendants de la variable X.

$$\frac{1}{K}\, d^2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X) \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(X_1 - \mathrm{E}(X)\right)^2 + \cdots + \left(X_K - \mathrm{E}(X)\right)^2}{K}$$

$$\approx \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \mathrm{Var}(X)$$

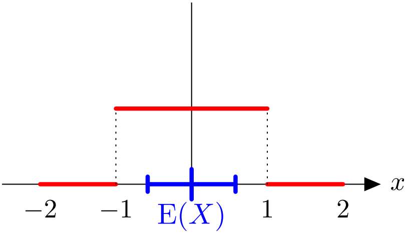


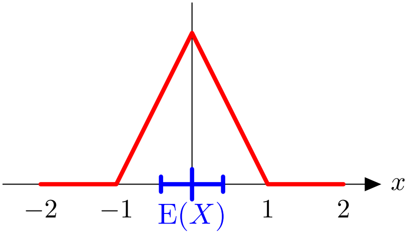


Interprétation

Imaginons K tirages indépendants de la variable X.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K}\, d^2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X) \end{pmatrix}\right) &= \frac{\left(X_1 - \mathrm{E}(X)\right)^2 + \cdots + \left(X_K - \mathrm{E}(X)\right)^2}{K} \\
&\approx \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$





Propriétés de la variance

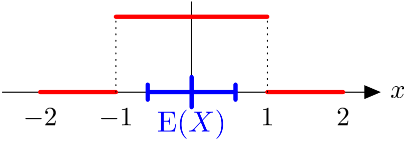
1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$. Donc $\sigma(aX + b) = |a|\ \sigma(X)$.
2. $\operatorname{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$
3. Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires *indépendantes*,

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$$

Propriétés de la variance

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$. Donc $\sigma(aX + b) = |a|\ \sigma(X)$.
2. $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{E}\left(X^2\right) - \left(\operatorname{E}(X)\right)^2$
3. Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires *indépendantes*,

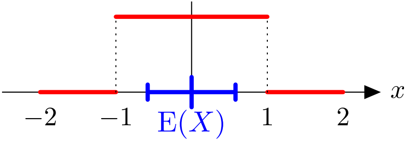
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$$

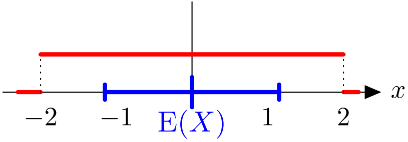


Propriétés de la variance

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$. Donc $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$.
2. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$
3. Pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires *indépendantes*,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

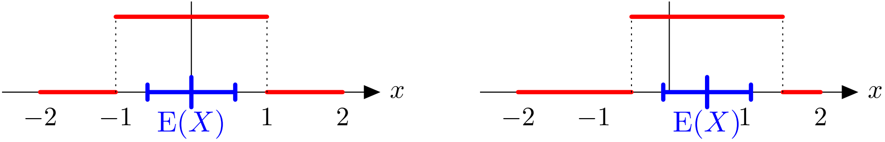




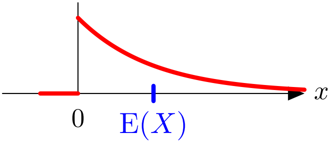
Propriétés de la variance

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$. Donc $\sigma(aX+b) = |a|\;\sigma(X)$.
2. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$
3. Pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires *indépendantes*,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$



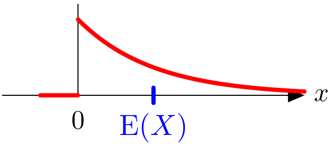
Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a vu que $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$. Calculons $\mathrm{Var}(X)$:

Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

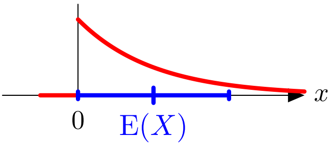
On a vu que $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$. Calculons $\mathrm{Var}(X)$:

- $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$

  Posons : $\left| \begin{array}{lcl} u & = & x^2 \\ v' & = & e^{-x} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lcl} u' & = & 2x \\ v & = & -e^{-x} \end{array} \right.$

  On obtient : $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \Big[-x^2\, e^{-x} \Big]_0^{+\infty} + 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2$

Exemple



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a vu que $\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$. Calculons $\mathrm{Var}(X)$:

- $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$

  Posons : $\left| \begin{array}{ccc} u & = & x^2 \\ v' & = & e^{-x} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} u' & = & 2x \\ v & = & -e^{-x} \end{array} \right.$

  On obtient : $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \Big[-x^2\, e^{-x} \Big]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2$

- Donc $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = 1$.

Inégalité de Tchebychev

Théorème

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Exemple : on cherche un intervalle $\big[\mathrm{E}(X) - \varepsilon, \mathrm{E}(X) + \varepsilon\big]$ qui contient X avec une probabilité au moins égale à 0.95.

- On cherche $P\Big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| > \varepsilon\Big) \leqslant 0.05$
- Si $\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = 0.05$, la propriété est bien vérifiée.
- On pose donc $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{0.05}} = \dfrac{10\,\sigma}{\sqrt{5}}$

En conclusion

1. Nous avons défini l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

En conclusion

1. Nous avons défini l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

2. Ces deux grandeurs ne permettent pas de connaître la loi de X de façon précise.

   Mais elles en résument les principales propriétés.

En conclusion

1. Nous avons défini l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
2. Ces deux grandeurs ne permettent pas de connaître la loi de X de façon précise.

   Mais elles en résument les principales propriétés.
3. Quand on observe de nombreuses réalisations de X, leur moyenne converge vers $\mathrm{E}(X)$.