Théorie des Langages

Début de cours de `Amsallem Florian`*. Modifications et ajouts par* `Peugnet Thomas`.

Introduction

Le **Python** est un parfait exemple de langage **interprété**.
Dans un langage **compilé**, la traduction a déjà eu lieu contrairement à un langage interpreté.

Un langage **interpreté** donne plus de flexibilité au développeur.
Un langage **interpreté** a une plus grande portabilité.

Il y a des langages qui sont compilés et interpretés. Ex: **Java**

Définitions

Un langage est un ensemble de **mots**.
Un langage peut être **infini**. (Exemple **N**: entiers Naturels)
Un langage n'a pas de **relation d'ordre**. (On peut lui en ajouter un)
Un langage peut etre **vide**.

Un **mot** est une sequence **finie** de **symboles**, appartenant à un **alphabet**.
Un **mot** peut être vide.

Un **alphabet** est un ensemble **fini** de symboles (Note Sigma).
Un **alphabet** ne peut pas être **vide** et **infini**.
Ce qui **caractérise** un alphabet est son **cardinal** (le nombre de symboles).

Ex:
$\sum$ = { `a` , `b` }
$\sum^*$ = {ε, `a` , `b` , `aa` , `ab` , `ba` , `bb` ...}

Il y a **deux classes** de langages:

- Les langages *récursivement énumérables*: Il existe un algorithme pour lister l'intégralité des mots du langage.
- Les langages *récursifs*: Il existe un algorithme en temps fini pour tester si un mot appartient à un langage ou non.

Donc, un **langage récursif** est un **langage récursivement énumérable**.

Opérations

Sur les mots

- $\sum^*$: L'ensemble des mots
- Note E: epsilon
- `.` : Concaténation (C'est un monoide)
  - `a.E = E.a = a` (Avec `E`, l'element neutre, cf. Rappel : E : epsilon)
  - `|a.b| = |a| + |b|`
  - `(a.b).c = a.(b.c)` (Associativité)
  - `a^^n^^ =  { E si n = 0; a.a.a.a....a }`

Sur les langages

- $\bigcup$: Union
- $\bigcap$: Intersection
- `-` : Complément
- `.` : Concaténation (Associative, Non commutative)
  - `{E}`.L = L.`{E}` = L (Avec `{E}`, l'élément vide)
  - L^0 = {ϵ} == L⁰ = `{E}` .
  - $\varnothing$.L = ø (Important ! Contre-intuitif)
- `*` : Étoile de **Kleene**

Exemples :

- **On pose** $\Sigma = \{0, 1\}$.

L'expression résultant de tous les nombres binaires possibles est $\Sigma * \ / \ \{\epsilon\}$. Il est important de noter qu'il faut priver l'élément neutre, étant donné que ce n'est pas un nombre binaire.

De plus, $\Sigma * \ / \ \{\epsilon\}$ est littéralement égal à $\Sigma *. (\{0\} \cup \{1\})$.

- **On pose** $\Sigma = \{a, b\}$

1. Tous les mots qui commencent par un `a` et qui finissent par un `a`, résulte de l'expression suivante : $(\{a\}. \Sigma *. \{a\}) \cup \{a\}$. Il est important de noter la nécessité d'ajouter l'élément `{a}`, car c'est le seul mot constitué d'une seule lettre, qui commence par un `a` , et qui finit par un `a`.
2. Tous les mots constitués de variations de `ab` : `abababababababababab`.

$$(\Sigma *. a. a. \Sigma *) \cup (\Sigma *. b. b. \Sigma *) \cup (b. \Sigma *) \cup (a. \Sigma *)$$

(Il faut le complémentaire de la formule ci-dessus).

2. **MAIS**, on peut aussi l'écrire :

$$(a. b) *$$

Ce qui est globalement plus simple.

3. Tous les mots qui constituent $\Sigma*$, résultent de l'expression $(a \cup b)*$.

Préfixes et Suffixes

Mots

Tout comme la définition du dictionnaire, un mot peut être préfixe, facteur, sous-mot ou suffixe d'un autre mot.

De manière génerale :

- `u` *pref* de `v` si il existe `w = u.w`.
- `u` *suff* de `v` si il existe `w = w.u`.
- `u` *facteur* de `v` si il existe `w et w'` `v = w.u.w'`.
- `u` *sous mot* de `v` si `u` est une sous-suite de `v`.

Exemple :

> `abc` est préfixe de `abcdef`.

Langages

Propriétés identiques. Ces dernières sont décrites en **3.2**.

Exemple :

$$L_1 . L_2 = \sum u . v$$

Avec `u` $\in L_1\{u\}$ et `v` $\in L_2\{v\}$.

Compilateur

La compilation est constituée de plusieurs étapes :

- Découpage en entités lexicales
  - Le compilateur va détecter les identificateurs (les variables).
- Analyse sémentique
  - Vérification des types

Langages Rationnels

L'ensemble des langages rationnels est défini par:

$$\forall a \in \sum \{a\}*$$

Expression Rationnelle

Par exemple, un nombre binaire peut s’écrire sous la forme :

$(\{-\}\cup\{+\}\cup\{\varepsilon\}).(\{0\}\cup\{1\}).(\{0\}\cup\{1\})^*$

Qui peut aussi s'écrire:
$(\{-\}\cup\{+\}\cup\{\varepsilon\}).(\{0\}\cup\{1\})^+$

Simplifications des opérateurs

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &\rightarrow \varepsilon \\ \{a\} &\rightarrow a \\ . &\rightarrow \\ \sum^* \backslash L &\rightarrow \bar{L} \end{aligned}$$

Rapprochement des `REGEX`

On utilise dorénavant les notations `[0-9]` pour que le caractère représenté soit un nombre compris entre 0 et 9.

Exemple :

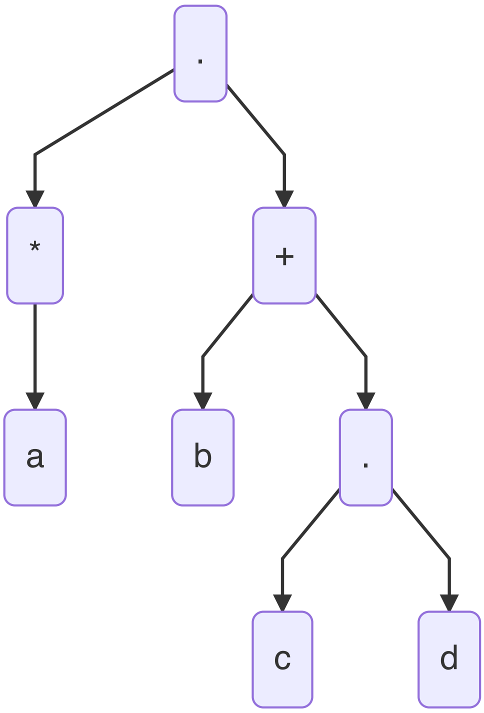
`([1-9].[0-9])*` correspond à l’expression de tous les nombres, en supprimant les nombres inutiles.

Arbres

On peut utiliser des arbres pour représenter une expression rationnelle.

Exemple :

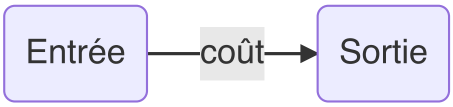
Soit l’expression `a*(b+cd)`. On peut représenter cette expression sous cette forme :



Automates

Introduction

Dans ce cours, un automate sera représenté de la sorte :

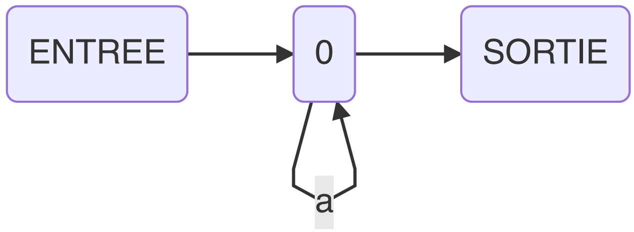


Un automate est dit **complet** lorsqu'il n'est pas **enrayé** (qu'on ne peut pas sortir sans avoir eu de cas d'erreur ou de résultat), et gère les différents cas d'erreur, avec un **état d'entrée** et un **état de sortie** distincts.

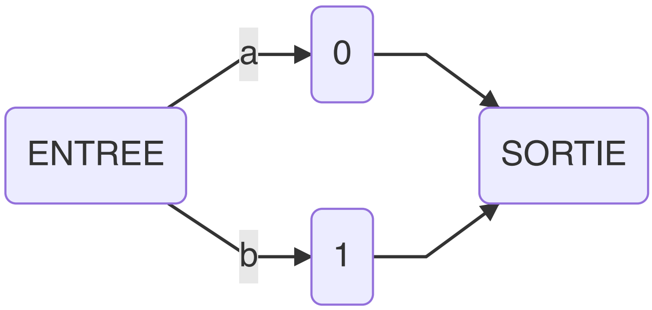
De plus, l'état d'entrée possède uniquement des flèches **sortantes**, et vice-versa pour l'état de sortie, avec des flèches entrantes.

Exemples

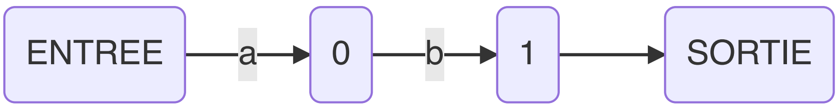
L'expression `a*` est représentée par l'automate suivant :



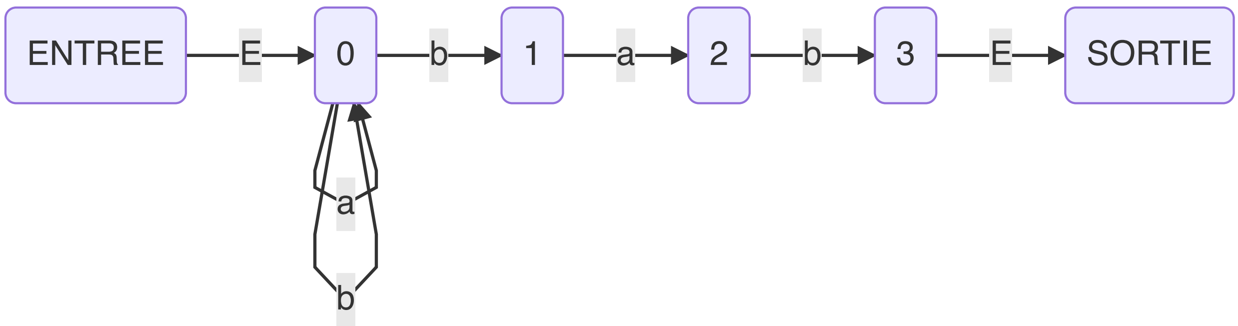
L'expression `a+b` :



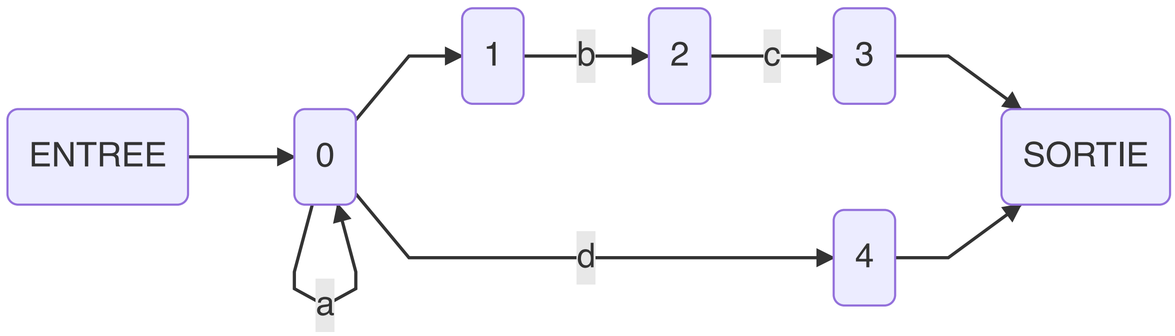
L'expression `a.b` :



L'expression `(a+b)*bab` :



L'expression `a*(bc+d)` :



Thompson

On peut utiliser la construction de Thompson pour construire des automates
avec les différents opérateurs.

Non déterminisme

Le fait que l'algorithme prenne des choix subjectifs sur les transitions à prendre en compte le fait que ce soit un algo non déterministe. Cela est dû aux transitions ε.

Exemple : `a+b` est non déterministe avec l’automate précédent.

On veut donc les rendre deterministes pour les simplifier.

Simplifications d'automates (ϵNFA, NFA, DFA)

ϵNFA, et NFA

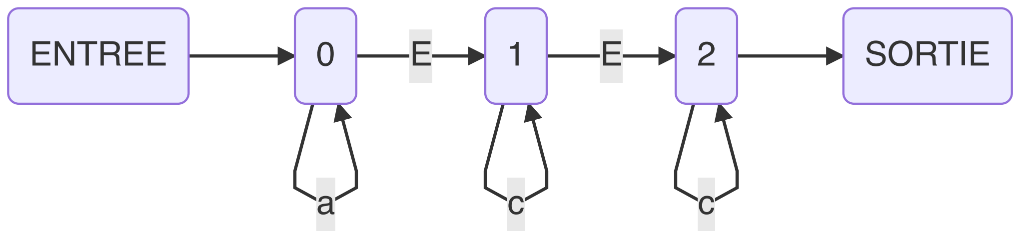
On va créer un automate avec l'algorithme de Thompson. Cela donne un ε**NFA**
(Non Deterministic Finite Automaton with epsilon transition). Il est defini comme suit:

$A = (\sum, Q, I, F, \delta)$ avec:

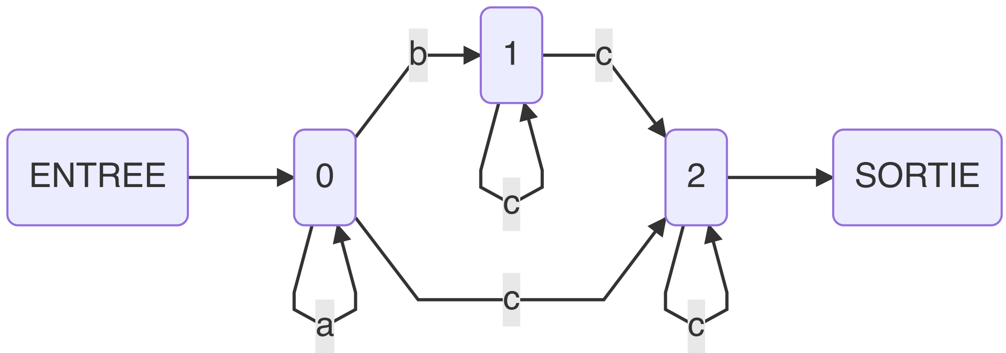
- Un ensemble d'état Q.
- Un ensemble fini de symboles (alphabet) $\sum$ contenant ε.
- Un état de fin $F \in Q$
- Un état de départ $I \in Q$.

Exemple :

Un ϵNFA :



Simplification :



Remarque : On a ajouté une liaison `-c-` entre `0` et `2`, on a supprimé les transitions `E`, et on les a remplacées par des transitions spontanées.

Cependant, c'est toujours un ϵNFA.

DFA

(Deterministic Finite Automaton with epsilon transition). Il est défini comme suit:

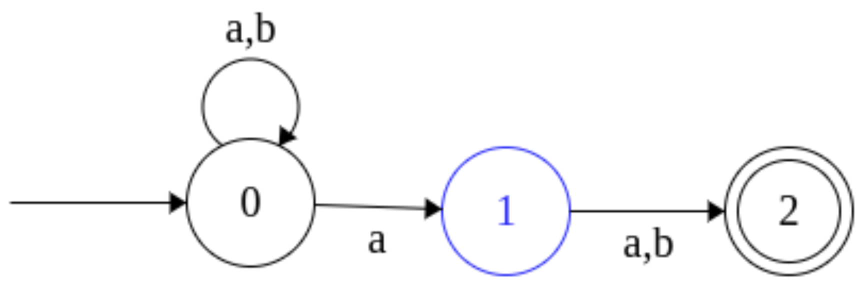
$A = (Q, \sum, \triangle, q_0, F)$ avec:

- Un ensemble d'états Q.
- Un ensemble fini de symboles (alphabet) $\sum$ contenant ε.
- Un fonction de transition $\triangle$: $Q \times \sum \rightarrow P(Q)$
- Un état de départ $q_0 \in Q$.

Si on a deux transitions qui partent du même état, qui ont la même étiquette, et qui partent dans des états différents. Ce sera nécessairement soit un **NFA**, soit un ϵ**NFA**, mais pas un **DFA**.

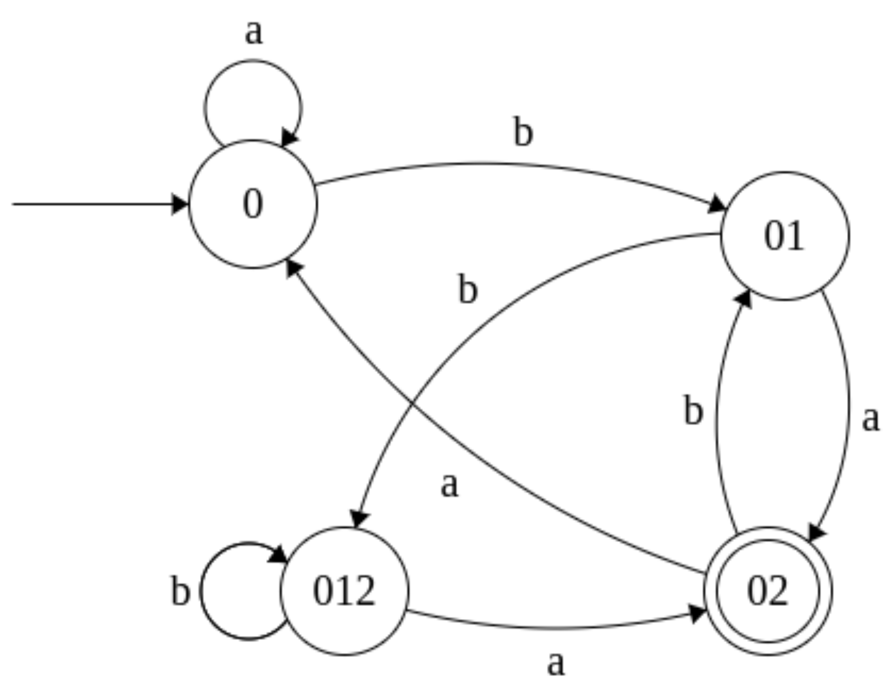
Création d'un DFA

```
(a+b)*a(a+b)
```



Déterminisation :

T	a	b
0	0	01
01	02	012
02	0	01
012	02	012



Propriétés

- Tout **NFA** et **DFA** est aussi ϵ**NFA**. Mais tous les ϵ**NFA** ne sont pas des **NFA**. Ce sont simplement des cas particuliers de ϵ**NFA**.
- Idem pour les **DFA**. Ce sont les automates qui possèdent le plus de restrictions.
- Supprimer toutes les transitions spontanées ne permet pas de rendre un automate déterministe.

- Langage rationnel $\longrightarrow$ Expression rationnelle $\longrightarrow$ ε-NFA $\supseteq$ NFA $\supseteq$ DFA
- Le nombre d'états maximum **d'un automate déterminisé** est 2^n , avec `n` le **nombre d'états dans l'automate de base**.
- Langage rationnel `L` transposé : L^t — si $L = abc$, alors $L^t = cba$.
- Définitions :

  Un **état accessible**:

  > S'il existe un état qui mène a lui.

  Un **état coaccessible**:

  > Un état qui mène à une solution.

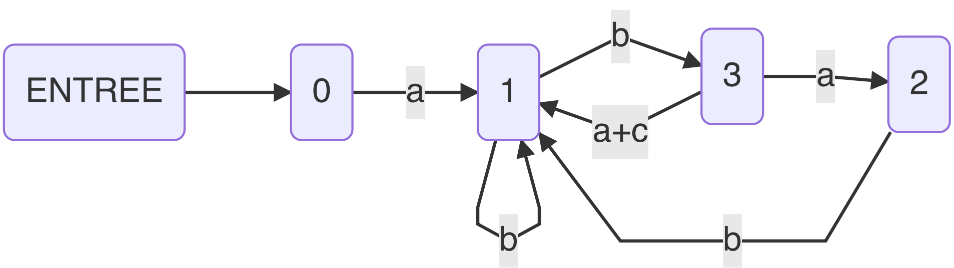
  Un **état utile**:

  > Un état accessible et coaccessible.

Exemple

Attention, ce ne sont pas des automates car des expressions sont inscrites sur des liaisons, ce qui ne permet pas de les définir comme automates.

Automate initial :



Automate, après manipulations :

L'algorithme de [...] permet donc, à partir de n'importe quel automate, de déterminer son langage rationnel.

Il existe donc différentes manières de créer de nouveaux langages rationnels :

- L^t est la transposée d'un langage `abcd` devient `dcba`.

- `Pref()` est le préfixe.
- `Suff()` est le suffixe.
- `Fact()` est défini dans une partie précédente.
- `Sous-mot` qui est un sous-mot du langage L.
- $\not(L)$ — "L Barre".
- $L_1 \cap L_2$.

Après les langages rationnels

Introduction

- Une phrase est de la forme `sujet` `verbe`.
- Un sujet est un `pronom`.
- Un pronom est `il` ou `elle`.
- Un verbe est `parle` ou `écoute`.

On peut former 4 phrases différentes.

On a deux catégories de mots. Les éléments $terminaux$ et $non\ terminaux$.

- Une $phrase$ est de la forme $sujet\ verbe$.
- un $sujet$ est un $pronom$.
- un $pronom$ est il ou $elle$.
- un $verbe$ est $parle$ ou $écoute$.

"il parle" **est donc un <u>mot</u> de notre langage.**

Définition

- $P \rightarrow SV$
- $S \rightarrow PN$
- $V \rightarrow$ "$parle$" | "$écoute$"
- $PN \rightarrow$ "il" | "$elle$"

$L = (T, N, R, S)$

- N: éléments non terminaux (On ne termine pas par cet élément).
- T: éléments terminaux (On termine par cet élément).
- R: règle de production $(R \subseteq V^+ \times V^*)$.
- S: un axiome $\in N$.

L est une **grammaire** formelle.

Grammaire monotone : (type 1)

- $\alpha \rightarrow \beta$: $|\alpha| \leq |\beta|$

Grammaire sensible à un complexe :

- $\gamma \, A \, \delta \rightarrow \gamma \, \alpha \, \delta$
- $\gamma, \delta \in V^*$ et $\alpha \in V^+$
- $A \in N$

Grammaire hors contexte : (type 2)

- $A \rightarrow \alpha$
- $A \in N \; \alpha \in V^+$

Grammaire linéaire

À Droite :

> $A \rightarrow$ `uB|v`, avec `A,B` $\in N$

À Gauche :

> $A \rightarrow$ `Bu|v`, avec `a,v` $\in T$

Remarque : Une grammaire est dite relationnelle, lorsqu'elle est linéaire à droite OU à gauche. Elle constitue le type 3.

Exemples

Exemple 1

- Sentence → Name | List End
- Name → Ceriel | Dick | Noam
- List → Name | Name ',' List
- `,` Name End → and Name

La dernière règle est la seule qui permet de réduire la taille de la phrase.

Le langage de `S -> aSb | E` est $a^n b^n$.

Pour gérer des langages avec des parenthèses, des accolades etc, il sera très utile d'utiliser les piles. On empile tous les `(, {, [`, puis on dépile au fur et à mesure des différentes valeurs rencontrées.

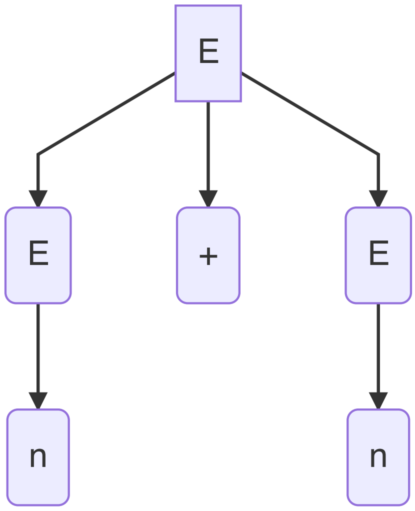
Exemple 2

> E → E + E | n

- Cette grammaire donne cette expression rationnelle : `n(n+)*`.
- E →2 n

- E → `1` E + E → `2` n + E → `2` n + n
    - Dérivation gauche : C’est toujours le terme de gauche qu’on dérive en premier.
- E → `1` E + E → `2` E + n → `2` n + n
    - Dérivation droite.
- Deux manières différentes de lire une phrase : (Et donc la comprendre différemment.).
    - E → `1` E + E → `1` E + E + E → `2` n + n + E → `2` n + n + n
    - E → `1` E + E → `2` n + E → `1` n + E + E → `2` n + n + E → `2` n + n + n
    - Le compilateur ne va donc pas le comprendre de la même manière.
    - C´est une grammaire ambiguë.

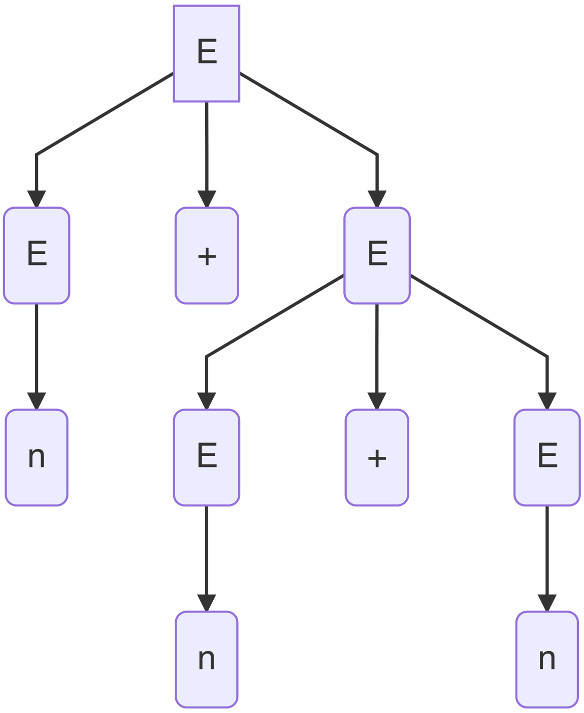
On va donc faire un arbre, appelé arbre de dérivation.



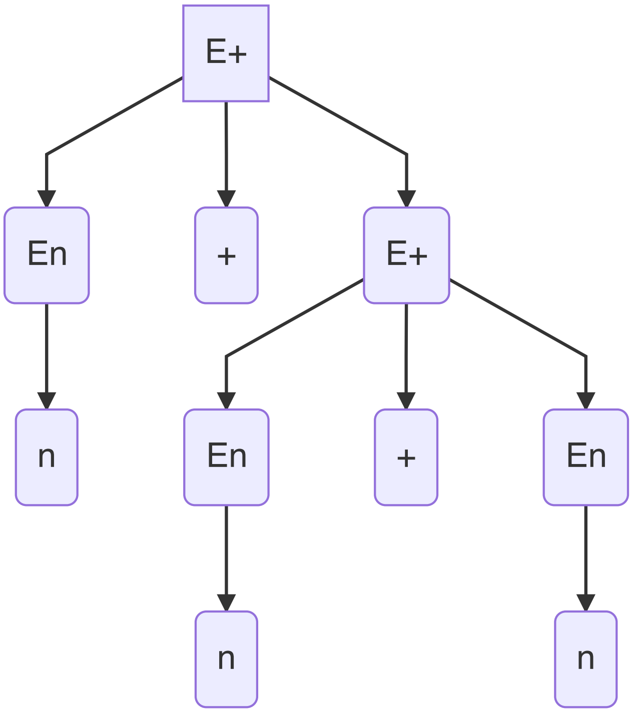
Pour la grammaire ci-dessus, on a réglé le souci concernant le premier cas de dérivation.

Mais, si on effectue une troisième dérivation, on se retrouve avec deux arbres possibles, différents.

On a donc un problème d’associativité.



On va donc mettre des indices pour chaque lettre, en fonction des possibilités.



On peut également simplifier la grammaire :

```
E → E_n | E_+

E+ → E+ + E_n | E_n + E_n

E_n → n
```

Et donc :

```
E → E_n | E+
E+ → E + E_n
E_n → n
```

Enfin :

```
E → n | E + n
```

Exemple 3

E → E + E | E * E | n

C'est une grammaire extrêmement ambiguë, car avec le `E+E` ou le `E*E` on peut descendre d'un côté ou de l'autre, sans le savoir à l'avance.

E → E+ | E* | E_n

E+ → E + E* | E + E_n

E* → E* * E_n | E_n * E_n

E_n → n

On souhaite que les `+` soient au dessus des `*`. Et on souhaite que les `n` soient au dessous des `*`.

On simplifie la grammaire ci-dessus :

T → E* | E_n

E → E+ | T

E+ → E + T

E* → T * E_n

E_n → n

Ce qui donne ensuite :

F → n

T → T * F | F

```
E → E + T | T
```

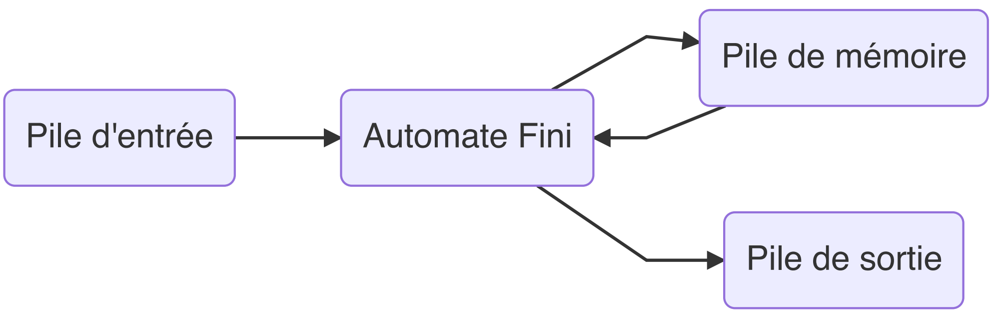
Cette grammaire n’est pas ambiguë.

Hiérarchie

Nom	Type	Grammaire Exemple	Information	Langage Exemple	Utilisation
Grammaire générale	0	`aAbC` → `DDe |` `epsilon`	De nombreux langages ne pourront pas être reconnus par cette grammaire.	∞	Machine de Turing
Grammaire monotone - Sensible au contexte	1	`aAb` → `DDe` `|aaab` avec α = `aAb` et β = `DDe`	Ajout d’une contrainte : La partie gauche doit être plus petite ou égale à la partie droite.	$a^nb^nc^n$	—
Grammaire Hors Contexte	2	`A` → α	Suppression du contexte.	a^nb^n	PDA
Grammaire Rationnelle	3	`A` → `Ba` : linéaire à **gauche** `A` → `uB` : linéaire à **droite**	Pas de changement sur la partie gauche. Sur la partie droite, seulement droit à un terminal. Et, sur l’une des deux parties, avoir uniquement des terminaux. Attention, une grammaire ne peut pas être linéaire à gauche **et** à droite.	a^n avec $a \to \infty$	Automate fini
Grammaire à choix fini	4	—	—	a^n avec n fini.	—

Automate à pile

Introduction

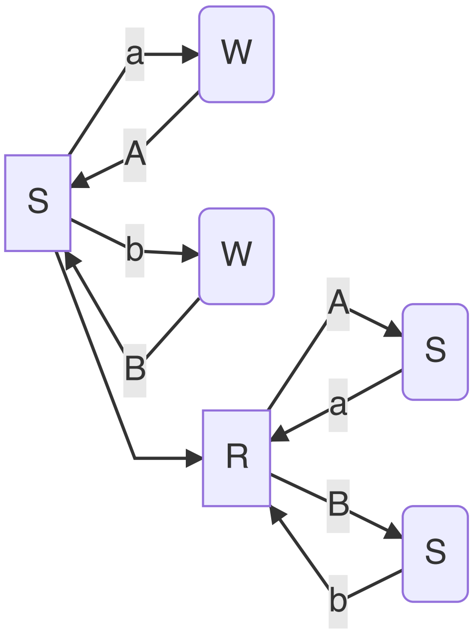


Un automate à pile est un automate qui fonctionne avec un système de pile (LIFO).

- `IO`
    - I : Accepteurs
    - IO : Transducteurs
    - O : Générateurs

- `Mémoire`
  - $\emptyset$ pour les automates finis.
  - LIFO pour les automates à pile.
  - LBRAM pour les LBTM.
  - RAM pour les TM (Turing Machine).
- `Déterministe / Nondéterministe (D/N)`
  - D = N pour les automates finis. (Temps d'exécution identiques)
  -
  - $DP \subseteq NP$ pour les TM.

Exemple



Le schéma ci-dessus correspond au langage : `S -> aSa | bSb|c`

Schéma aussi présent sur **complément de cours** : *Exemple : 12.1*

Parser LL

Exemple 1

> S $\rightarrow$ `if E then S` | `echo toto`
>
> E $\rightarrow$ `true` | `false`

Ce qui correspond au code `Bash` suivant :

```
if (true | false)
then echo toto
```

Et donc, le langage rationnel serait de la forme : `(if (true | false) then)* echo toto (fi)`

Complément de cours : *Exemple 6.1*.

Exemple 2

$Z \to X\ Y\ Z$

$Z \to d$

$X \to a$

$X \to Y$

$Y \to c$

$Y \to \epsilon$

I	`Fst(A)`	`Fol(a)`
A	$A \to a \to \epsilon$	$A \to \alpha$

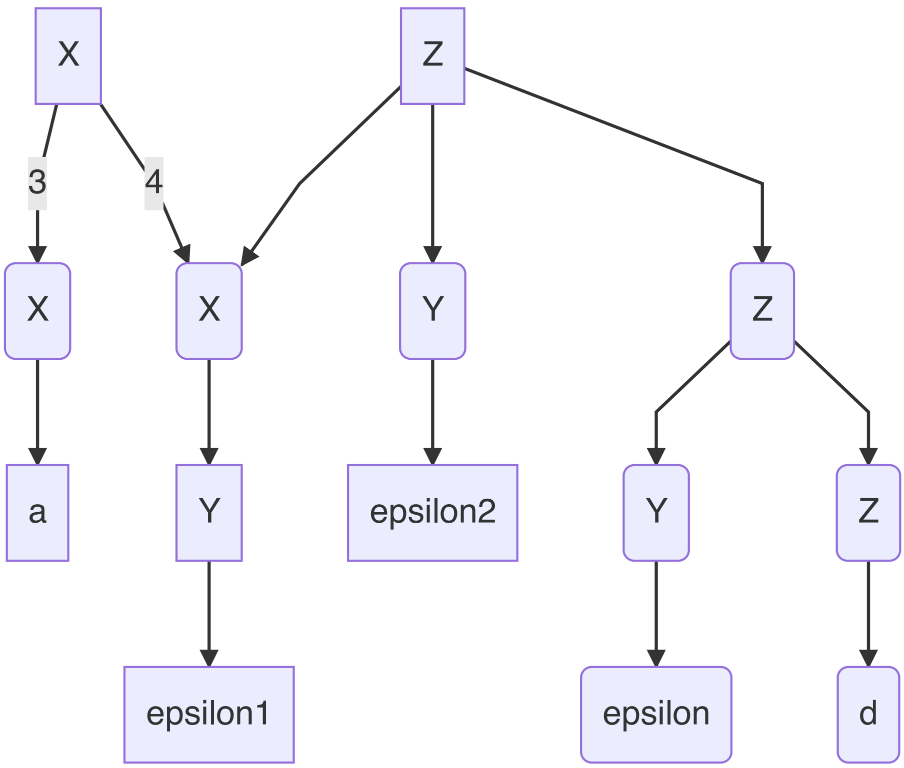
1. `Fst(Z) = {d, a, c}`
2. `Fst(X) = {a, c}`
3. `Fst(Y) = {c}`

Et donc :

1. `Fol(x)` $\subseteq$ `Fst(YZ) = Fst(Y)` $\cup$ `Fse(z)` et `Fol(Y)` $\subseteq$ `Fst(Z)`
2. `Fol(Y)` $\subseteq$ `Fol(X)`

Tableau `LL` :

LL	a	c	b
Z	1/	1/	**1,2/**
X	**3/4**	4/4	/4
Y	/6	**5/6**	/6



Exemple 3

S → E$

E → E + T | T

T → T * F | F

F → n | (E)

1. `First(S,E,T,F) = {n,(}`

LL	n	(	)
S	0	0	
E	1,2	1,2	**1,2/**
T	**3/4**	4/4	/4
F	/6	**5/6**	/6

Objectif : Créer un parserLL.

- On commence par créer une fonction qui permet de parser `E`.

```
E()
{
    switch (look_ahead) // On consulte la valeur en question
    {
        case First(E + T):
                E(); eat(T); T();
                break;
        case First(T):
                T();
                break;
    }
}
```

→ Problème : On a une récursion infinie : on rappelle `E()` sans rien modifier.

- On va donc changer la grammaire.
  - On ne veut pas de récursivité à gauche, on va donc se mettre à droite.

S → E$

E → **T + E** | T

T → **F * T** | F

F → n | (E)

- On continue en factorisant les parties communes de la grammaire :

S → E$

E → T E'

E' → +E | ϵ

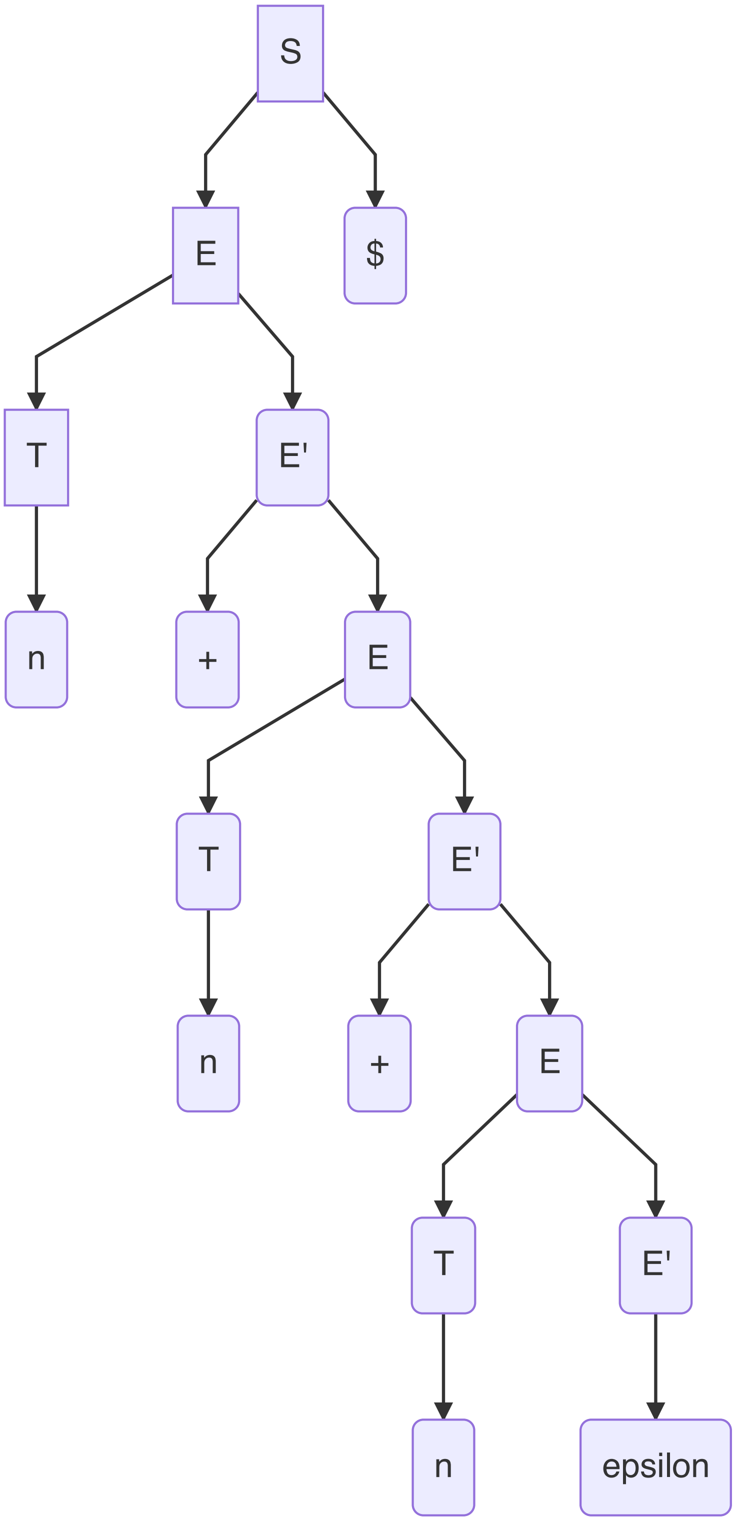
- On peut donc générer un nouveau code :

```
E()
{
    switch (look_ahead) // On consulte la valeur en question
    {
        case First(TE´):
                T(); E´();
                break;
        default:
                error();
                break;
    }
}
```

```

E´()
{
    switch (look_ahead) // On consulte la valeur en question
    {
        case First(+E):
                eat(+); E´(); // +
                break;
        case Follow(E´): // $
                error();
                break;
    }
}
```

- Mais, cette grammaire nous donne un arbre mauvais :



Tout cet arbre, simplement pour afficher `n + n + n` !

"Notre grammaire a donc suivi une chirurgie esthétique un peu foireuse...!"

Il faudrait une grammaire qui soit de la forme :

```
E → T (+T | -T)*
```

```
static int E()
{
    int res = T();
    while (look_ahead == '+' || look_ahead == '-') // On consulte la valeur en question
    {
        if (look_ahdead == '+')
        {
            eat('+'); res += T();
        }
        if (look_ahdead == '-')
        {
            eat('-'); res -= T();
        }
    }
    return res;
}
```

Note : *Sûrement utile pour parser les programmes pour 42sh.*

Parser Shift-Reduce

Complément de cours : *Exemple Parser-Reduce 1*

S : || || → Pile

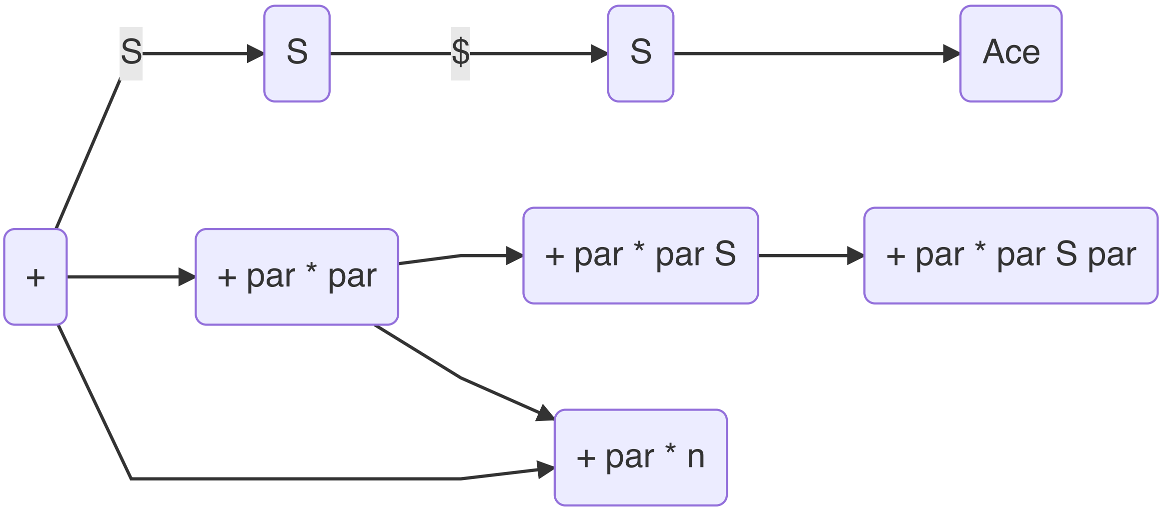
S : || (*(||

S : || (*(S ||
S : || S ||

Reduce 1 : || (*(S) ||

Reduce 2 : || (*n ||

Ace : || S ||



Dans ce schéma : `+` correspond à la `Pile` : `||`.

	Action	**(**	**n**	**$**	**)**	**S**
0	Shift	3	6			1
1	Shift			2		
2	Ace					
3	Shift	3	6			4
4	Shift				5	
5	Reduce 1					
6	Reduce 2					

Compléments de cours : *Example**s** Parser `LR0`, `LR1` et `CR1`*.

Comme il est visible sur *`Tableau numéro 1 pour Exemple Parser LR0`*, il y a un conflit `R/S`.

Deux possibilités : Soit notre grammaire est ambiguë, soit notre grammaire est trop compliquée à comprendre par notre interpréteur, qui lui est trop simple.