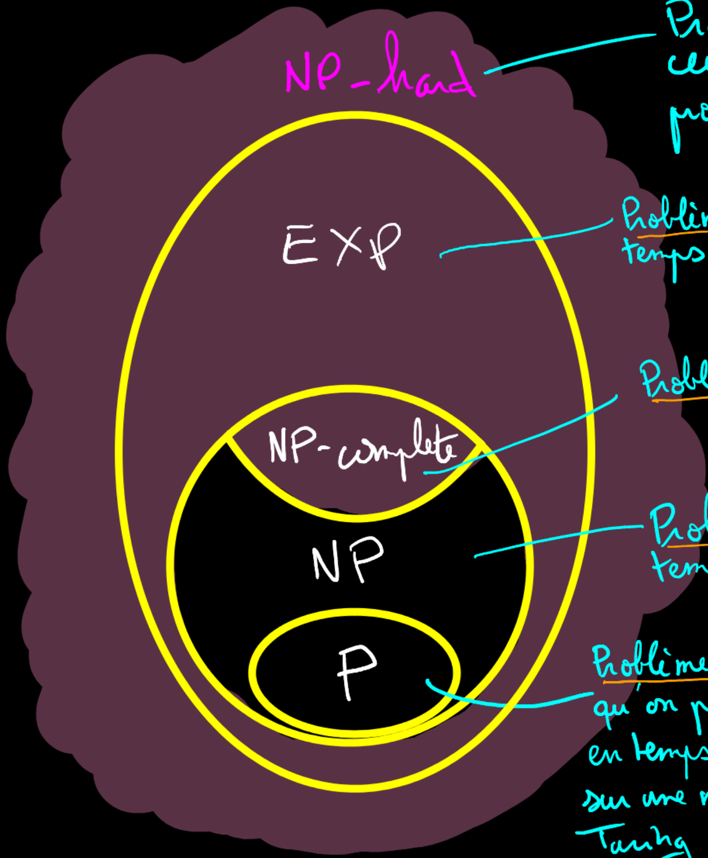
Survol introductif de plein de problèmes de graphes

P / NP / NP-complete / NP-hard [Culture, pas pour l'exam.]



Problèmes* au moins aussi durs que ceux de NP. Peuvent résoudre tout problème de NP après un préprocessing en P.

* pas forcément de décision. chromatic number, knapsack

Problèmes de décision qu'on peut résoudre en temps EXPonentiel sur machine déterministe.

échecs (généralisés)

Problèmes de décision les plus durs de NP.

Subset Sum, SAT, Sudoku (généralisé), graph coloring (k colors),

Problèmes de décision qu'on peut résoudre en temps Polynomial sur une machine Non-déterministe

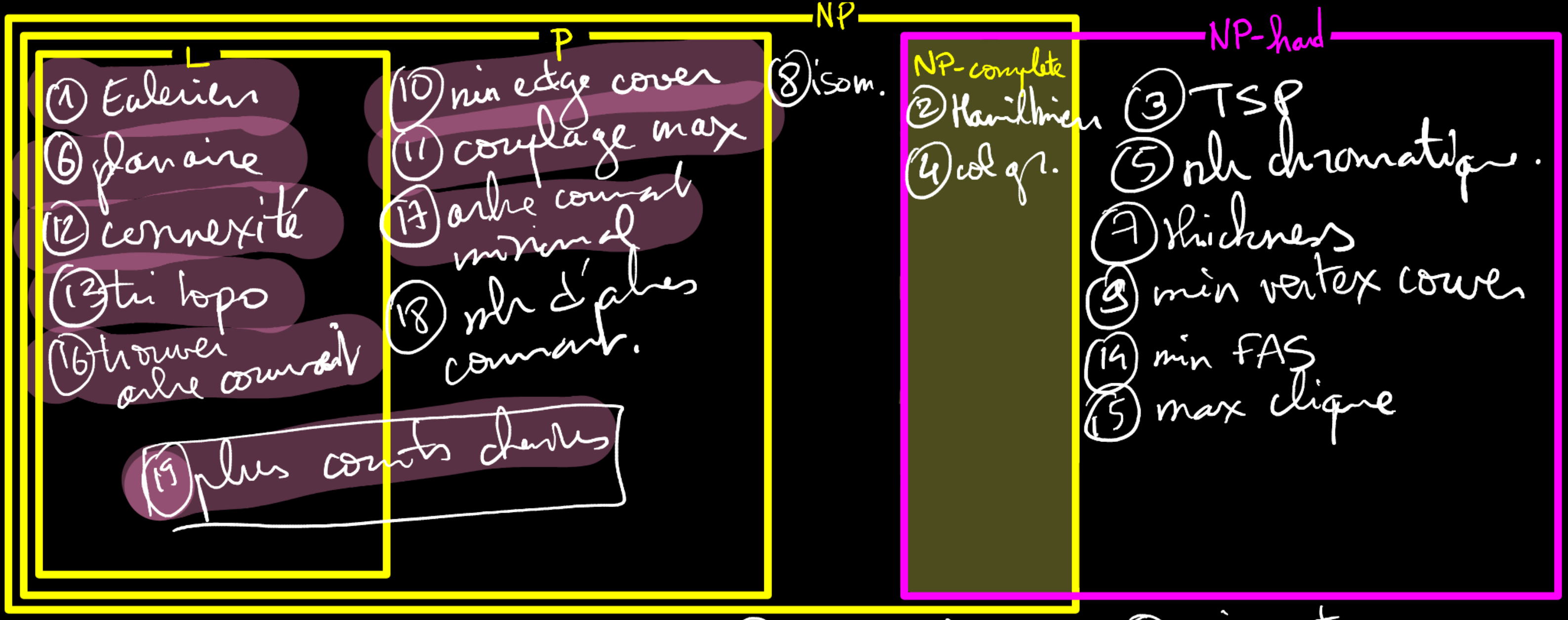
isomorphisme de graphes

répondent oui/non

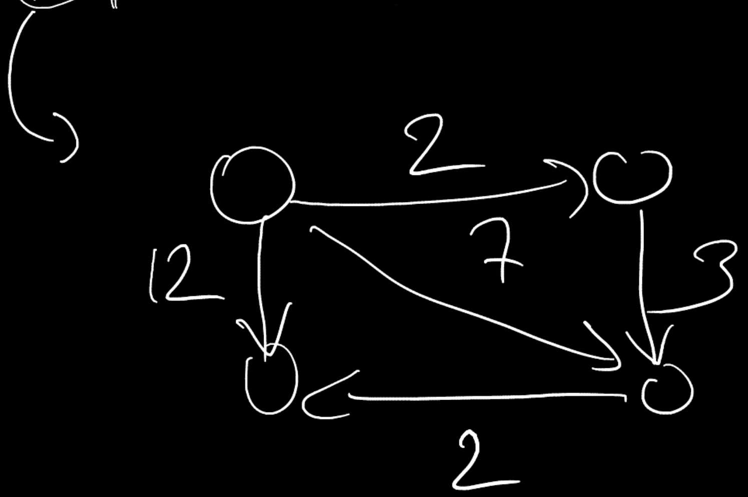
Problèmes de décision qu'on peut résoudre en temps Polynomial sur une machine de Turing déterministe

est-ce qu'une matrice est inversible ?

⚠ pour ces classes, le temps se mesure en fonction du nombre de bits qui encodent le problème



1. Cycle/chemin Eulérien
2. Cycle/chemin Hamiltonien
3. Voyageur de commerce (TSP)
4. Coloration de graphe (≤ k couleurs?)
5. Nombre chromatique (min couleurs?)
6. Décider si graphe planaire
7. Trouver l'épaisseur d'un graphe
8. isomorphisme
12. composantes connexes
13. tri topologique
9. min vertex cover
10. — edge —
11. couplage max
14. min feedback arc set
15. max clique
16. trouver arbre couvrant
17. arbre couvrant de poids min
18. nombre d'arbres couvrants
19. plus courts chemins

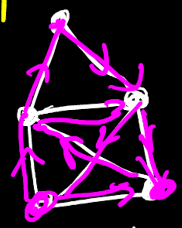


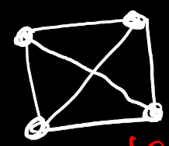
= algos qui s'appuient essentiellement sur DFS ou BFS.

① Chemin Eulérien = chemin qui visite chaque arête exactement une fois

Cycle Eulérien = cycle qui . . .

= peut-on tracer le graphe sans lever le crayon et sans repasser sur une arête ?

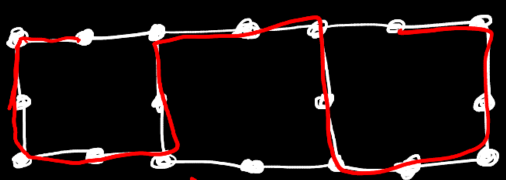




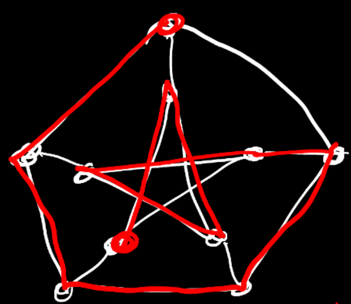
pas de C.E.

② Chemin/cycle Hamiltonien

= visite tous les sommets exactement une fois, sans forcément voir toutes les arêtes.



pas de C.H



chemin H

cycle H

③ TSP : idem avec poids à minimiser

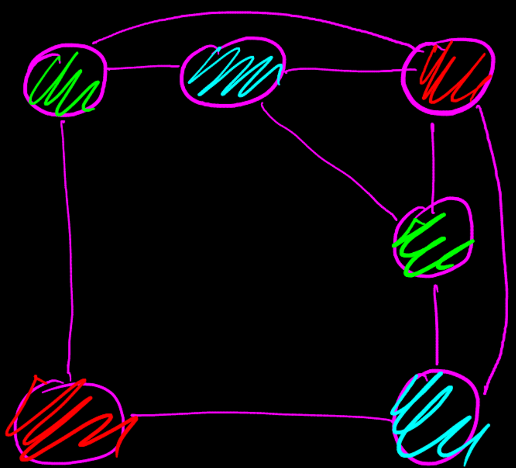
④ Coloration de graphes

deux sommets voisins ne peuvent pas avoir la même couleur

SUDOKU peut être vu comme de la coloration de graphe :

- 81 sommets à colorier avec 9 couleurs
- un sommet est voisin aux 20 autres sommets qui partagent la même ligne, même colonne, ou même zone.
- certains sommets sont "pré-coloriés".

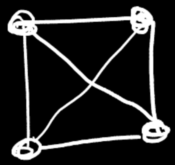
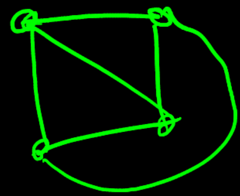
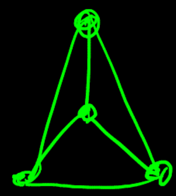
					5	7		6
	3		1		248 4	28	9	28
							5	248 4
	1	9	5		28		4	28
					3			7
					6			
					7			1
								3

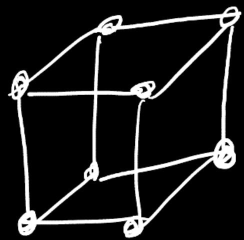
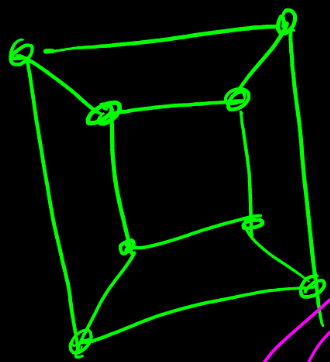


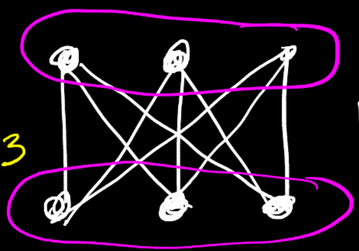
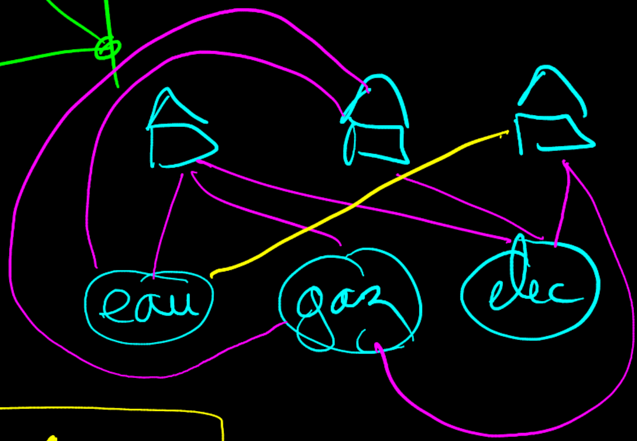
⑤ nombre chromatique

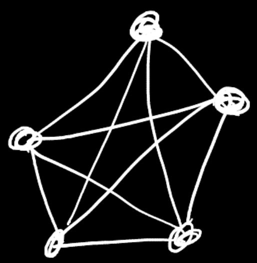
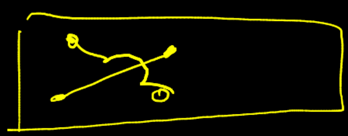
= nb minimal de couleurs nécessaire pour colorier les sommets

⑥ graphe planaire = qui peut se représenter dans le plan sans croiser d'arêtes.

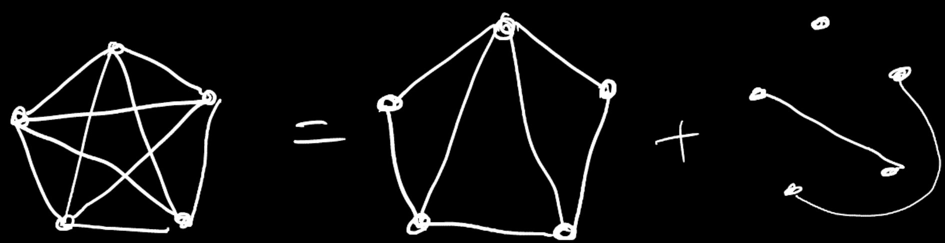
K_4  est planaire  

Q_3  aussi 

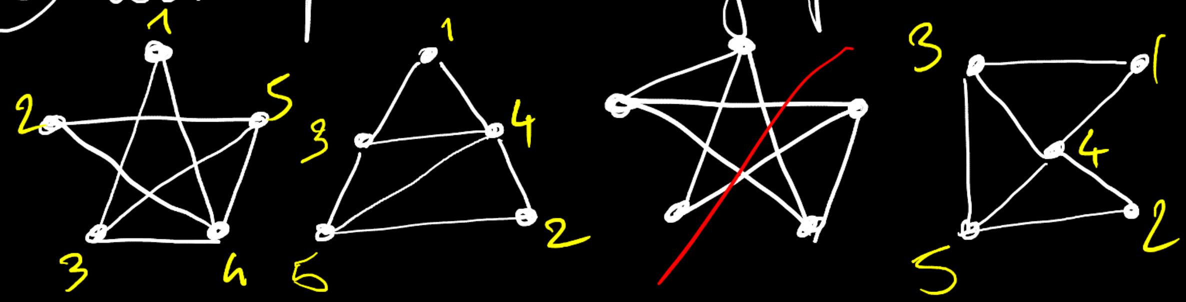
$K_{3,3}$  ne l'est pas 

K_5  non plus 

⑦ épaisseur = nbr min de sous-graphes planaires nécessaires pour partitionner un graphe.

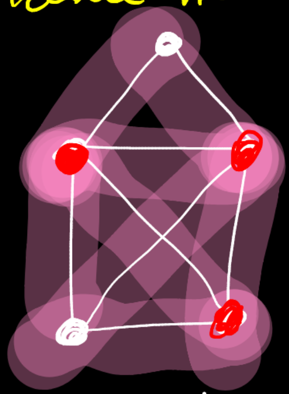


(8) Isomorphisme de graphes



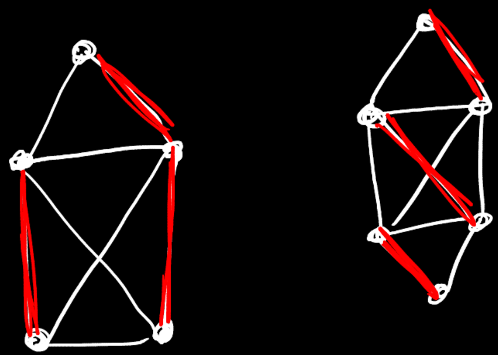
(9) Min Vertex Cover

ens de sommet qui touche toutes les arêtes, de taille minimale



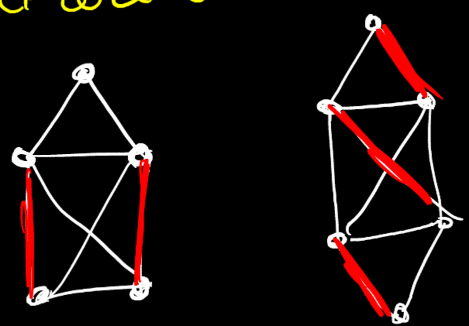
(10) min edge cover

ens d'arêtes qui touchent tous les sommets, de taille minimale

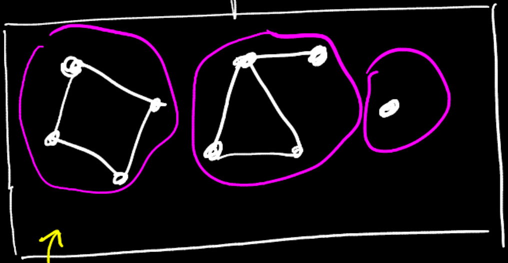


(11) couplage maximum

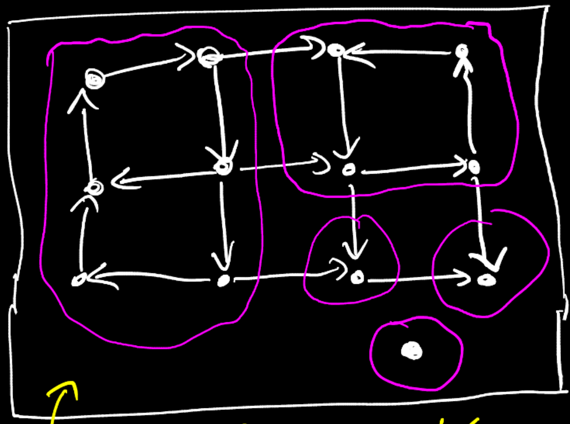
ens d'arêtes non voisines de taille maximale



(12) Composante connexes



1 graphe avec 3 composantes connexes

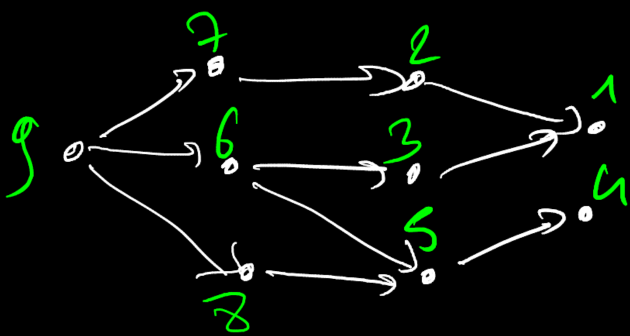


1 graphe **orienté** avec 5 composantes fortement connexes.

(13) tri topologique

arbre de dépendances ⇒ ordre
(ou DAG)

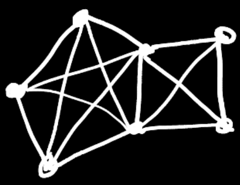
Ex : Makefile
- màj cellules tableur



(14) Minimal Feedback Arc Set

Plus petit ens. d'arêtes à retirer pour casser tous les cycles d'un graphe.

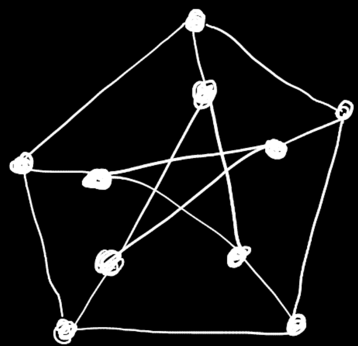
15 Max clique
sous-graphe complet le plus gros



$\omega(G) = 5$
$\chi(G) = 5$

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

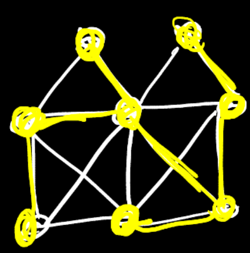
max clique — chromatic number



$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = 3$

16 17 18 arbres couvrants

arbres: acyclique + connexe
couvrants: touche tous les sommets



1 arbre couvrant parmi plein

→ si graphe pondéré, on peut chercher un arbre couvrant de poids minimal (cf. PRIM ou KRUSKAL)

→ Compter les arbres couvrant se fait avec un calcul de déterminant !