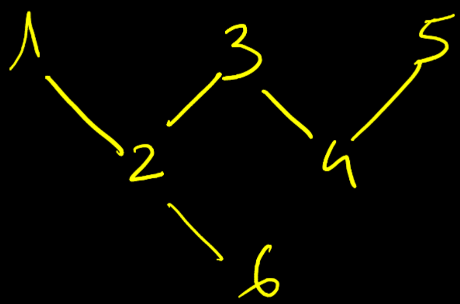
La formule de Cayley
(et une façon d'énumérer des arbres de n sommets)

On se fixe un arbre sur n sommets numérotés $\{1, 2, \dots, n\}$.



cet arbre peut être encodé par une chaîne de $n-2$ entiers de $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$2, 4, 3, 2$$

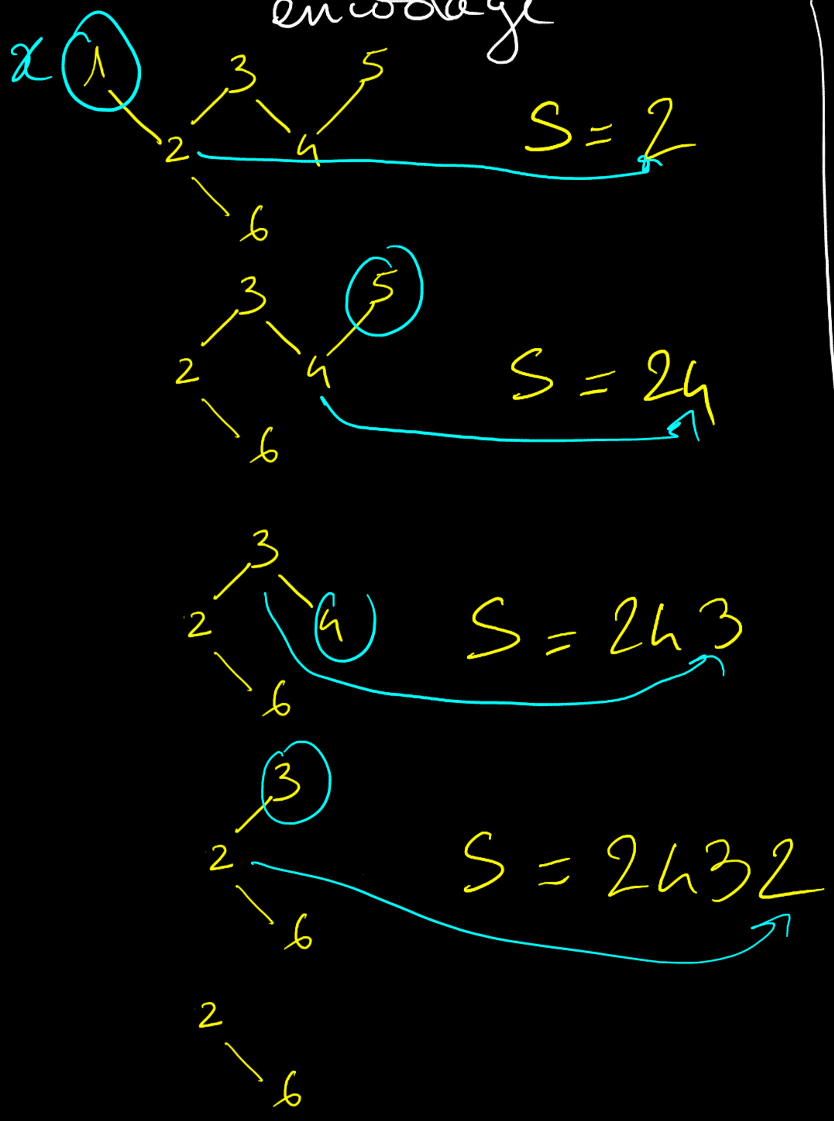
Encodage

$S \leftarrow []$

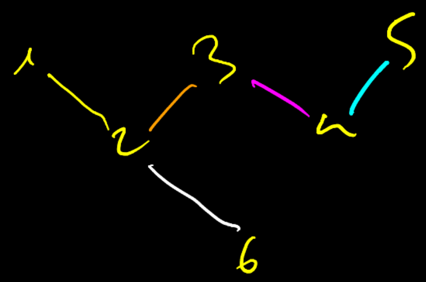
tant que l'arbre a plus de 2 sommets :

- repérer le sommet x de degré 1 le plus petit
- ajouter à S le numéro du sommet adjacent à x
- retirer x et son arête

encodage



décodage



$I = \{\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, 6\}$

$S = \cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}$

Décodage de S

Poser $I = \{1, 2, \dots n\}$

Tant que S non vide :

- trouver le plus petit $i \in I$ absent de S et le retirer de I
- relier i au premier sommet de S et retirer ce sommet de S

relier les deux derniers sommets de I

La formule de Cayley :

Le nombre d'arbres que l'on peut construire pour relier $n \geq 2$ sommets numérotés est n^{n-2}.

(il existe beaucoup de preuves de cela, l'encodage/décodage ci-dessus en est une)

Cela permet aussi d'énumérer les arbres (en énumérant les chaînes de $n-2$ entiers de $\{1, \dots, n\}$).

P.ex pour $n=4$ $\quad n^{n-2} = 16$