对称多项式基本概念和性质

黄思霖

1 定义

1.1 基本概念

设 F 是一个数域, 记 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为 F 上以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元的 n 元多项式的全体的集合.

对 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 里的每一个多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 说它是**对称多项式** (Symmetric polynomial), 当且仅当任意交换其中两个变元 x_i, x_j 后, 仍得到该多项式本身.

1.2 准确定义

$\{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个双射 σ 称为一个**置换**.

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式, 当且仅当对任意的置换 σ, 都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}).$$

1.3 示例

一元对称多项式 一元置换只有 $\sigma(1) = 1$, 显然任何一元多项式都是对称多项式.

n $(n \geqslant 2)$ **元对称多项式** 由加法和乘法的交换律,

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 1$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2y_2^2y_3^2$$

$$h(a,b,c,d) = abcd - a(b+c+d) - b(a+c+d) - c(a+b+d) - d(a+b+c)$$

都是对称多项式. 而

$$p(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

不是对称多项式, 因为 $p(x_2, x_1) = x_2 - x_1 \neq p(x_1, x_2)$.

2 基本对称多项式

2.1 由单项式生成的对称多项式

项数为 1 的多项式称为**单项式**. 对任何一个单项式, 对每个变元施行所有可能的置换, 然后将所有得到的新单项式求和就得到一个对称多项式.

例如, 给定单项式 $3x_1x_2^2$, 则

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} 3x_ix_j^2 = 3x_1x_2^2 + 3x_2x_1^2$$

就是一个对称多项式.

一般地, 单项式 $cx_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$ (c 是非零常数) 可以生成对称多项式

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n} cx_{i_1}^{r_1}x_{i_2}^{r_2}\cdots x_{i_n}^{r_n}.$$

特别地, $r_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 这样生成的对称多项式叫做**基本对称多项式**, 不妨把 n 元基本对称多项式记作 σ_n.

2.2 基本对称多项式与 Vieta 定理

法国数学家 Vieta (韦达, 1540-1603) 给出了一元多项式的根与系数的关系.

Vieta 定理 (多项式的根与系数的关系) 若一元 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个复数根是

$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 即

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

则有

$$\begin{cases} a_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\ a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ \cdots \\ a_k = (-1)^k \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}, \\ \cdots \\ a_n = (-1)^n x_1x_2\cdots x_n. \end{cases}$$

不难发现, 若把上式右边看成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式, 则每个右侧的多项式都是基本对称多项式, 从而我们可以将 Vieta 定理表示成如下简洁的形式.

$$a_k = (-1)^k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

3 对称多项式基本定理

3.1 定理叙述

3.2 定理证明