概率论参考答案

一. 填空题 $(4\times4'=16')$

(1) 0.1; 0.3　　(2). $\frac{1}{56}$　　(3). $\frac{1}{3}$　　(4). -3; 19.

二. 选择题 $(4\times3'=12')$

1. A; 2. D; 3. A; 4. D

三. (8′) 解: ∵ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3P^2(A)+0$$

∴ $P^2(A)-P(A)+\frac{3}{16}=0$ ......(5′)

解得: $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$.

又∵ $A\subset A\cup B\cup C$ ∴ $P(A)\leqslant P(A\cup B\cup C)$ 即 $P(A)\leqslant\frac{9}{16}$. ......(8′)

∴ $P(A)=\frac{1}{4}$

四. (10′) 解: 设 A="任取一只产品是不合格品"

B_i="任取一只产品是第i台机器生产". $i=1,2,3$ (甲 ⟷ 第1台, 乙 ⟷ 第2台, 丙 ⟷ 第3台).

(1) $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

$=25\%\times8\%+35\%\times3\%+40\%\times5\%$ ......(5′)

$=0.0505$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{25\%\times8\%}{0.0505}\doteq0.396$ ......(10′)

五. (12′) 解: (1) $P\{X>510\}=P\left\{\dfrac{X-500}{5}>\dfrac{510-500}{5}\right\}=1-\Phi(2)=0.0228$ ......(4′)

(2) $P\{|X-500|<8\}=P\left\{\left|\dfrac{X-500}{5}\right|<\dfrac{8}{5}\right\}=\Phi(\frac{8}{5})-\Phi(-\frac{8}{5})=2\Phi(1.6)-1$ ......(8′)

$=0.8904$

(3) $P\{X<C\}=0.05$, $P\left\{\dfrac{X-500}{5}<\dfrac{C-500}{5}\right\}=0.05$.

$\Phi\left(\dfrac{C-500}{5}\right)=0.05$. 而 $\Phi(-1.645)=0.05$

$\dfrac{C-500}{5}=-1.645$ 解得: $C=491.775$ ......(12′)

六. 解: (1) $f_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & 其它\end{cases}$

(12′)

$\because$ ξ,η 独立

$\therefore f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0\le x\le 1,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$ ------(3′)

(2) $\Delta=4\xi^2-4\eta\ge 0$ 即 $\xi^2\ge\eta$

$\therefore$ 关于a的方程有实根的概率为:

$$p=p\{\Delta\ge 0\}=p\{\xi^2\ge\eta\}=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})dx=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-0.5]$$

$$\doteq 0.1445$$ ------(8′)

(3) $p\{\xi\ge\eta\}=\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1(1-e^{-\frac{x}{2}})dx$

$$=2e^{-\frac{1}{2}}-1$$ ------(12′)

七. 解: 设 X 表示1000中去甲电影院的人数, 则 $X\sim B(1000,\frac{1}{2})$.

(12′)

由中心极限定理, 近似的有: $X\sim N(500,250)$

设甲电影院应设 n 个座位, 要使 $P(X\le n)\ge 99\%$

$\therefore \Phi\left(\frac{n-500}{\sqrt{250}}\right)\ge 0.99$ ------(8′)

$\therefore \frac{n-500}{\sqrt{250}}\ge 2.33$ 解得: $n\ge 537$. ------(12′)

八. 解: (1) $1=\int_0^1dx\int_0^1c(x+y)dy=c\int_0^1(x+\frac{1}{2})dx=c$

(18′)

$\therefore c=1$. ------(4′)

(2) 当 $0<x<1$ 时. $f_X(x)=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2}$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ ------(6′)

当 $0<y<1$ 时. $f_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=y+\frac{1}{2}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}y+\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$ ------(8′)

$\because f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\therefore$ X, Y 不独立. ------(10′) (第2页)

(3) $EX = \int_0^1 dx \int_0^1 x(x+y)\,dy = \frac{7}{12}$.

$EY = \int_0^1 dx \int_0^1 y\cdot(x+y)\,dy = \frac{7}{12}$

$E(X^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 x^2\cdot(x+y)\,dy = \frac{5}{12}$

$E(Y^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 y^2\cdot(x+y)\,dy = \frac{5}{12}$

$\therefore DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{11}{144}$, $\quad DY = \frac{11}{144}$

$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 [xy\cdot(x+y)]\,dy = \frac{1}{3}$

$\therefore Cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = -\frac{11}{144}$

$\therefore \rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} = -\frac{1}{11}$. ------- (18′)