# 南京工业大学高等数学 A-2 试题 （A）卷

## 试 题 标 准 答 案

2016--2017 学年第 2 学期 使用班级 江浦大一学生

**一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）**

1、$(A)$ 2 、$(C)$ 3、$(B)$ 4、$(C)$ 5、$(D)$

**二、填空题 （本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）**

1 、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2、$\dfrac{1}{2}(dx-dy)$ 3、$4x+2y-z-6=0$ 4、 $2\pi R$

5、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},(-1\le x\le 1)$；$2016!$

**三、解答下列各题（本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤）**

**1**、求经过点 $A(-1,2,3)$，且垂直于直线 $L:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，又与平面 $\pi:7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程.

**解**：设所求直线的方向向量为 $\vec{s}$，则 $\vec{s}\perp(4,5,6)$，$\vec{s}\perp(7,8,9)$ ......2 分

所以取 $\vec{s}=(4,5,6)\times(7,8,9)=(-3,6,-3)\,/\!/\,(1,-2,1)$； ......5 分

故所求直线方程为 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. ......7 分

**2**、已知函数 $z=f(x+y,xy)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$ ......3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[f_1'+yf_2'\right]=f_{11}''+xf_{12}''+y(f_{21}''+xf_{22}'')$$
$$=f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''$$ ......7 分

3、计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left[y+x\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy$，其中积分区域 $D$ 由曲线 $y=x^2$ 与 $y=1$ 围成.

**解**：$I=\iint\limits_D ydxdy+\iint\limits_D x\left(x^2+y^2\right)dxdy$ ......3 分

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}ydy+0=\frac{4}{5}$$ ......7 分

**4**、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛半径、收敛域及和函数.

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$，又当 $x=3$ 时，

级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；当 $x=-3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛，

故该幂级数的收敛域为 $[-3,3)$；　　……3 分

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$（$-3\le x<3$），则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x},(|x|<3)$$

于是 $s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\dfrac{dx}{3-x}=-\ln(3-x)\Big|_0^x=\ln 3-\ln(3-x)$，（$-3\le x<3$）.

**四、解答下列各题（本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤）**

**1**、设 $f(x,y,z)=x^4-xy+z^2$，求：

(1) 梯度 $gragf(1,1,1)$；(2) $f(x,y,z)$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿该点到点 $(1,4,5)$ 方向的方向导数；

(3) $f(x,y,z)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值.

**解**：(1) $gradf=(4x^3-y,-x,2z)$，　$gradf\big|_{(1,1,1)}=(3,-1,2)$　　……2 分

(2) 方向 $\vec{l}=(0,3,4)$，$\vec{l}^0=(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，故 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}=(3,-1,2)\cdot(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})=1$；　　……5 分

(3) $\left|gradf\right|_{(1,1,1)}=\sqrt{14}$，即 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值 $\sqrt{14}$ .　**……7 分**

2、计算 $I=\int_L(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$，其中 $L$ 为曲线弧 $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$.

**解**：$P=e^y+x,Q=xe^y-2y$；

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^y$，即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径无关　　……3 分

$I=\int_L(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^1(e^y-2y)dy=e-\dfrac{1}{2}$.　　……7 分

3、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^4dydz+2y^2dzdx+2(z^2-1)dxdy$，其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧.

**解**：取 $\Sigma_1$ 为 $z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，记 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 所围成的空间闭区域为 $\Omega$，则由高斯公式，

$$I_2=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^4dydz+2y^2dzdx+2(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}4\left(x^3+y+z\right)dv$$　　……3 分

$$=4\iiint_{\Omega} z dv=\frac{2\pi}{3},$$ ……5 分

$$I_1=\iint_{\Sigma_1} x^4dydz+2y^2dzdx+2\left(z^2-1\right)dxdy=\iint_{\Sigma_1}2\left(z^2-1\right)dxdy=2\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\pi$$

$$\therefore\quad I=I_2-I_1=\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{4\pi}{3}.$$ ……7 分

4、设 $f(x)=\begin{cases}2 & ,0\le x\le \pi\\ 0 & ,-\pi\le x<0\end{cases}$，将其展开成傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

**解：** $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足收敛定理的条件，作周期延拓，延拓后的函数在 $x=\pm\pi,0$ 处不连续，因此其傅立叶级数在 $x=\pm\pi,0$ 收敛到 $\frac{2+0}{2}=1$, 在 $(-\pi,0),(0,\pi)$ 上收敛到 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}dx=2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=0$$ ……3 分

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2\cos nx}{n\pi}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi},n=2k-1\\ 0,n=2k\end{cases},(k=1,2,3,\cdots)$$ ……5 分

所以，$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x,-\pi<x<\pi,x\ne 0$， ……6 分

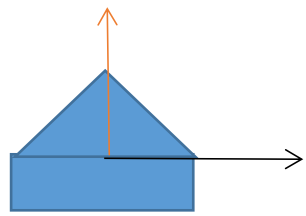
令 $x=\frac{\pi}{2},\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{k-1}\Rightarrow 2=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$. ……7 分

**五、应用题（本题 8 分）**

设某种玩具的零件是由边长为 1 的正三角形均匀薄片与矩形均匀薄片（同种材料）拼接而成的，且正三角形的一边恰为矩形的一边，要使整个零件的质心落在正三角形的一边上，求矩形的另一边长.

**解：** 如图，建立坐标系，质心为原点；$\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$

，



设矩形的另一边长为$a$，则$\iint\limits_D ydxdy=0$ ……4 分

即$2\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{-a}^{-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}}ydy=0$

解得$a=\dfrac{1}{2}$.即矩形的另一边长为$\dfrac{1}{2}$. ……8 分

**六、证明题（本题 6 分）**

设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$条件收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$（$l$为常数），指出$|l|$的值，并证明你的结论.

证明：$|l|$的值为1 ……2 分

若$|l|>1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$发散，与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$条件收敛矛盾； ……4 分

若$|l|<1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$收敛，与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$条件收敛矛盾； ……6 分