

质点力学小结提纲

一. 质点力学线索框图（见第4页）

理清各规律的**内容**、**来源**、**适用对象**、**成立条件**、**对参考系的依赖关系**。

二. 解题的基本方法与步骤

1. 用牛顿定律解题

2. 用功能、动量、角动量及**守恒定律**解题

三. 总结自己在哪些方面、哪些问题上较中学有所提高

四. 专题小结（例如角动量、质心...）

描述运动的量

质点 { 位矢、位移、位置角、角位移
速度、角速度
加速度、角加速度
质量、动量、角动量
机械能
相对运动

质点系 { 质心的位矢及计算
质心的速度、加速度
质心的动量

研究运动状态的变化

力、力矩（动量、角动量、加速度、角加速度）

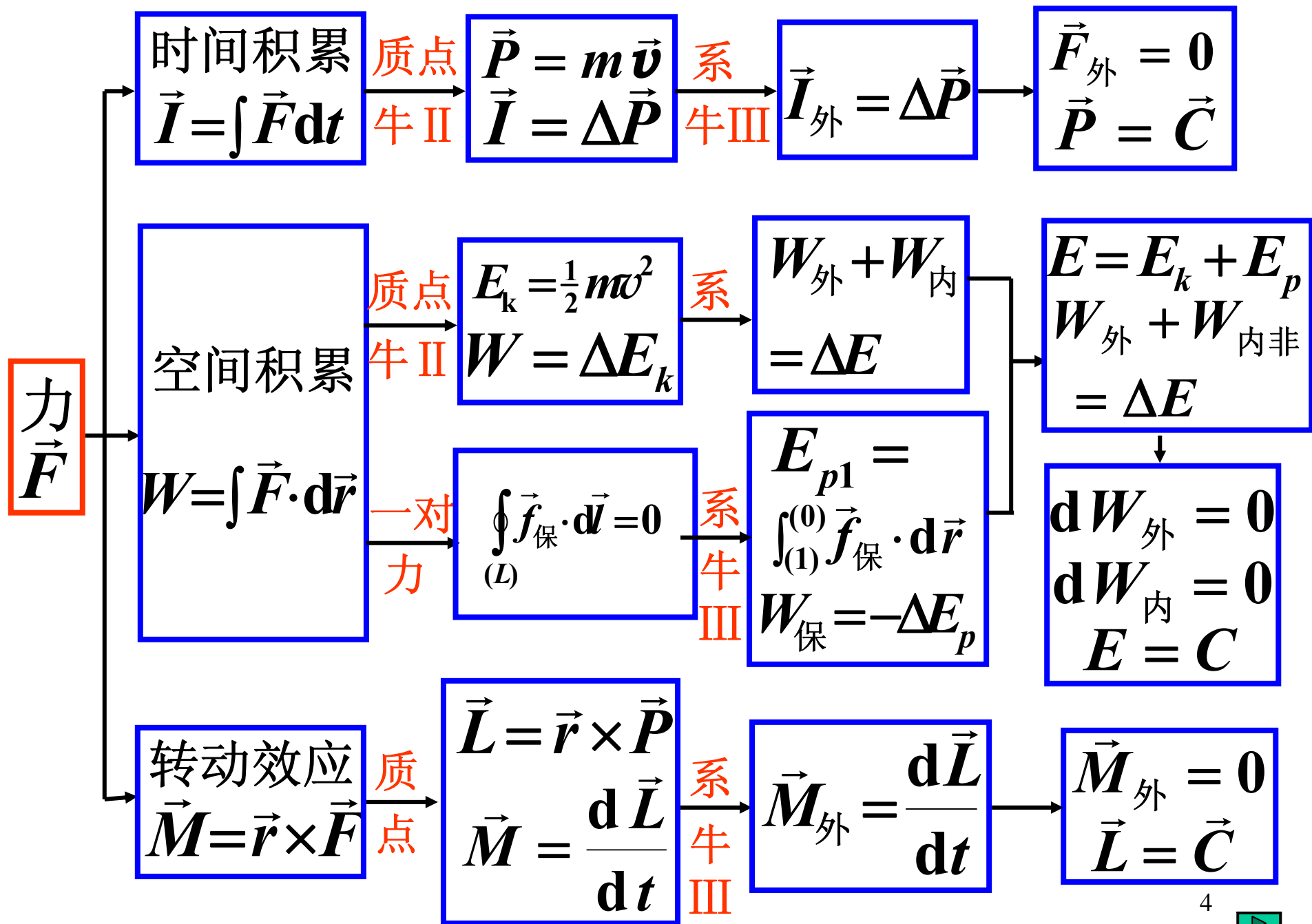
冲量（动量的变化）

功（能量、动能、势能、机械能）

对于质点 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

对于质点系 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_c$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

三个守恒定律（动量、角动量、机械能）



定轴转动的刚体

描述运动的物理量

- 位置角、角位移
- 角速度、角加速度（大小、方向）
- 转动惯量（轴、平行轴定理）
- 角动量（大小、方向）
- 转动动能

研究运动状态变化用到的物理量

力、力矩（角动量）

力矩的功

平动与转动

Analogy between translational and rotational motion

平动

刚体定轴转动

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

m

$$J = \int_V r^2 dm$$

Analogy between translational and rotational motion

平动	刚体定轴转动
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\vec{\beta}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$
动量守恒 合外力为零，动量守恒	角动量守恒 合外力矩为零，角动量守恒

Analogy between translational and rotational motion

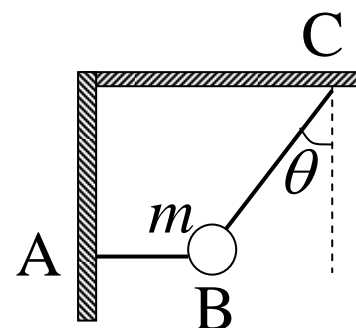
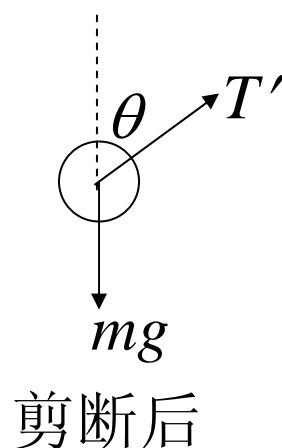
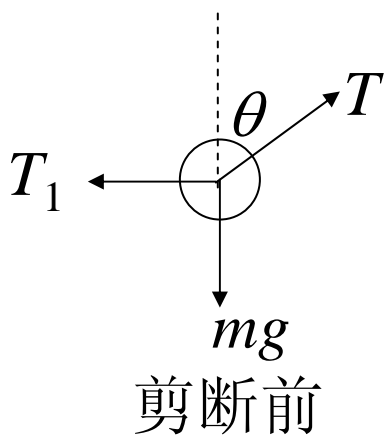
平动	刚体定轴转动
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$dW = M d\theta$
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$
$W_{\text{内}} + W_{\text{外}} = E_{K2} - E_{K1}$	$W_{\text{外}} = E_{K2} - E_{K1}$

力学测验题

一、填空题

1. 质量为 m 的小球，用轻绳AB、BC连接如图。剪断AB前后，BC绳中的张力 $T: T' =$ _____。

解：



剪断BC前 $T = \frac{mg}{\cos \theta}$

计算得

剪断BC后 $T' - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l}$

$T: T' = 1: \cos^2 \theta$

$v = 0$ $T' = mg \cos \theta$

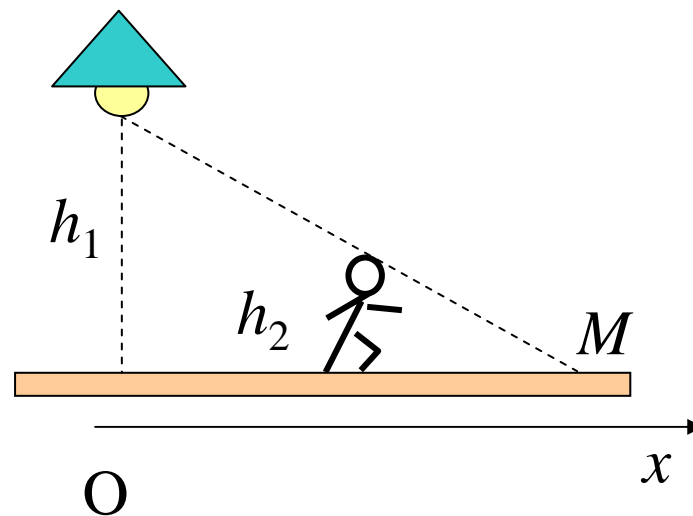
2. 灯距地面的高度为 h_1 ，人的身高为 h_2 ，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走, 如图。求：他的头顶在地面上的影子 M 点沿地面移动的速率。

解：如图建立坐标系。设人的坐标为 x ， M 点的坐标为 x_M 。

$$\frac{x_M - x}{x_M} = \frac{h_2}{h_1} \quad x_M = \frac{h_1}{h_1 - h_2} x$$

$$\begin{aligned} v_M &= \frac{dx_M}{dt} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{h_1}{h_1 - h_2} v \end{aligned}$$

$$v_M > v$$



3. 设质点的运动函数为 $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{i} + 2t\hat{j}$ (m) ,

求: $t=3$ s 时质点的速度, 速率和加速度。

$$\text{解: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 6t\hat{i} + 2\hat{j} \qquad \vec{v}(3) = 18\hat{i} + 2\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6\hat{i} \qquad v(3) = 18.1 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(3) = 6\hat{i} \text{ m/s}^2$$

4. 某物体做直线运动，其速度随时间变化的关系为 $\frac{dv}{dt} = -kv^2t$ ，式中 k 为大于零的常量。当 $t = 0$ 时，初速为 v_0 。求：该物体的速度与时间 t 的函数关系。

解：

$$\frac{dv}{v^2} = -ktdt \qquad \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t ktdt$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{1}{2}kt^2$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{2}kt^2$$

5. 一物体做半径为 $R=80\text{m}$ 的圆周运动，速率为 $v = 30+2t$ (m/s)。 $t = 5\text{ s}$ 时物体的法向加速度大小和方向为_____、切向加速度大小和方向为_____，加速度的大小和方向为_____。

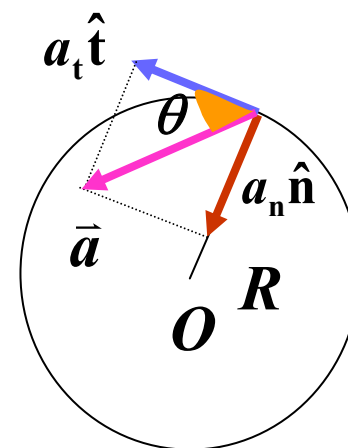
解： $a_t = \frac{dv}{dt} = 2\text{ m/s}^2$ 方向：沿圆的切线，与速度方向一致。

$$v(5) = 30 + 2 \cdot 5 = 40\text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{40^2}{80} = 20\text{ m/s}^2 \quad \text{方向：沿半径指向圆心。}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 20.1\text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta = a_n / a_t = 10, \quad \theta = 84.2^\circ$$



6. 一个力 F 作用在质量为 1.0 kg 的质点上，使之沿 x 轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x = 3t - 4t^2 + t^3$ (SI)。在0到4 s的时间间隔内，

(1)力 F 的冲量大小 $I =$ _____。

(2)力 F 对质点所作的功 $W =$ _____。

解： $v(t) = dx/dt = 3 - 8t + 3t^2$

$$v(0) = 3\text{m/s} \quad v(4) = 19\text{m/s}$$

$$(1) \quad I = mv(4) - mv(0) = 16\text{ N}\cdot\text{s}$$

$$(2) \quad W = \frac{1}{2}mv(4)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = 176\text{ J}$$

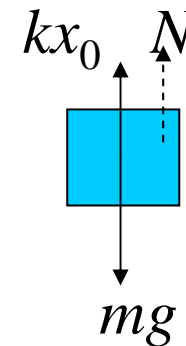
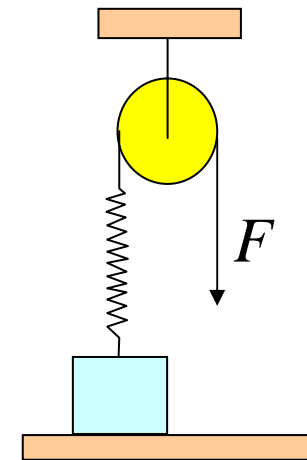
7. 如图所示系统中，外力 F 通过不可伸长的绳子和一弹性系数为 $k = 200\text{N/m}$ 的轻弹簧缓慢地拉起了地面上的物体，物体质量 $m = 2\text{kg}$ 。初始时弹簧为自然伸长，在把绳子拉下 20cm 的过程中，力 F 所做的功。（ $g = 10\text{m/s}^2$ ）

解：支持力为零时，物体开始离开地面。

$$kx_0 = mg \quad \text{解得：} x_0 = 0.1\text{m}$$

对于轻滑轮，力 F 的大小与弹簧的弹力相等。

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{x_0} kx dx + \int_{x_0}^{0.2} mg dx \\ &= \frac{1}{2} kx_0^2 + mg(0.2 - x_0) = 3 \text{ (J)} \end{aligned}$$

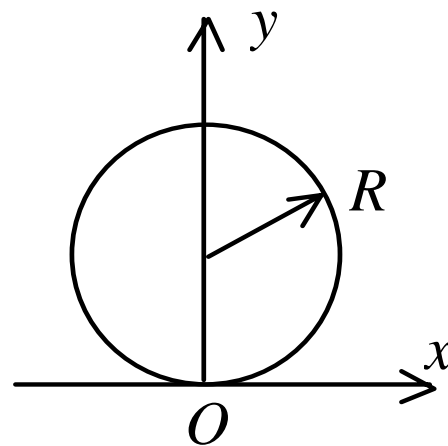


8. 一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力

$$\vec{F} = F_0(x\hat{i} + y\hat{j})$$

作用在质点上。在该质点从坐标原点运动到 $(0, 2R)$ 位置过程中，力对它所作的功。

$$\begin{aligned}\text{解: } W &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy) \\ &= F_0 \int_1^2 (x dx + y dy) \\ &= \frac{F_0}{2} (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2) \\ &= 2F_0 R^2\end{aligned}$$



9. 一长为 l 、重 W 的均匀梯子，靠墙放置，如图。梯子下端连一劲度系数为 k 的弹簧。当梯子靠墙竖直放置时，弹簧处于自然长度。墙和地面都是光滑的。当梯子依墙而与地面成 θ 角且处于平衡状态时，

- (1) 地面对梯子的作用力的大小为 _____，
- (2) 墙对梯子的作用力的大小为 _____，
- (3) W 、 k 、 l 、 θ 应满足的关系式为 _____。

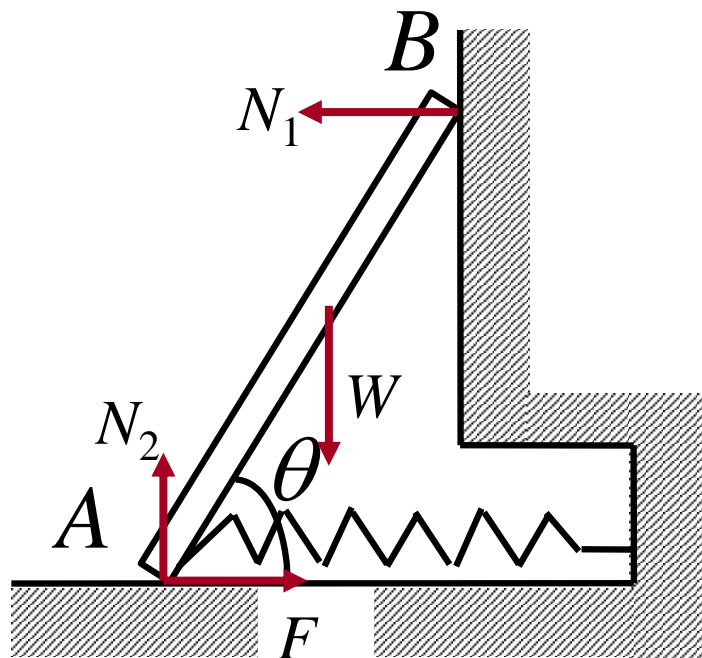
解： (1) $N_2 = W$

$$(2) \quad N_1 l \sin \theta = W \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$N_1 = \frac{W}{2} \cot \theta$$

$$(3) \quad N_1 = kl \cos \theta$$

$$W = 2kl \sin \theta$$

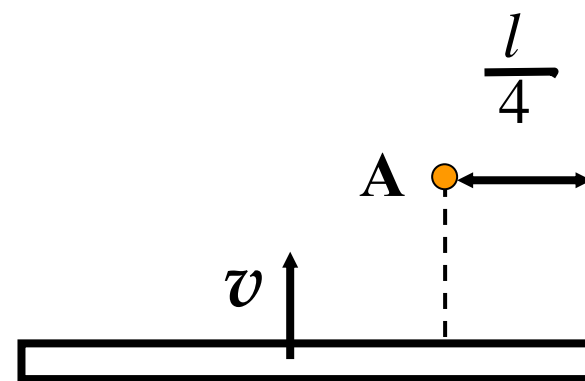


10. 光滑平面上，有一长为 l 、质量为 m 的均匀细棒，以速度 v 平动，之后与固定在桌面上的钉子 A 发生碰撞，碰后绕 A 点转动。求该细棒转动的角速度 ω 。

解：碰撞前后，杆对 A 的角动量守恒。

$$mv \frac{l}{4} = \left[\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right] \omega$$

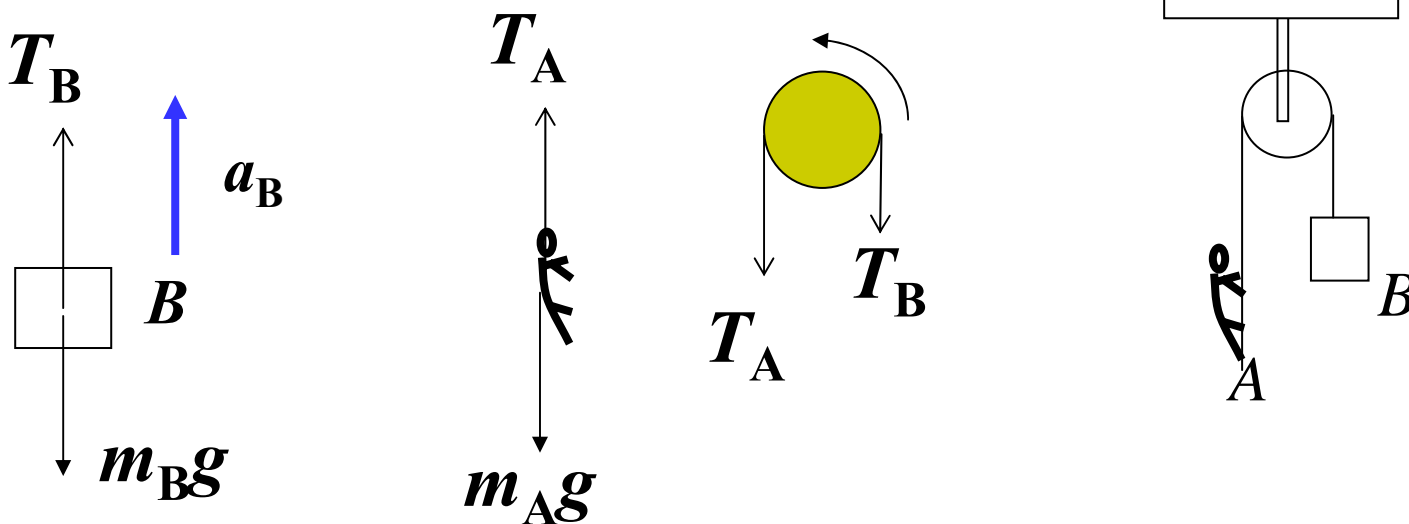
$$\omega = \frac{12v}{7l}$$



计算题

1. 一轻绳绕过定滑轮。滑轮质量为 $M/4$ ，均匀分布在滑轮的边缘上。质量为 M 的人抓住绳子一端A, 绳子另一端系一重物B, 质量为 $M/2$ 。设人从静止开始上爬，当人相对于绳子以匀速 u 上爬时, (1) 求B端重物上升的加速度多大？ (2) 若 B 端重物质量为 M ，它上升的速度多大？

解：



$$m_A g - T_A = m_A a_A \quad a_A = a_{A\text{绳}} + a_{\text{绳地}} = 0 + a_B = a$$

$$T_B - m_B g = m_B a_B \quad a = a_t = R\beta$$

$$T_A R - T_B R = J\beta \quad J = \frac{1}{4}MR^2 \quad m_A = M, m_B = M/2,$$

$$a = 2g/7$$

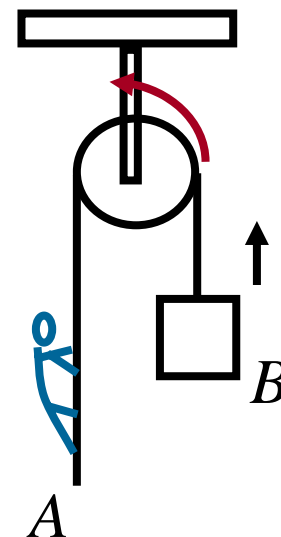
(2) $m_B = M$, 角动量守恒. 设B的速率为 v

$$v_A = v_{A\text{绳}} + v_{\text{绳地}} = u - v$$

以垂直屏幕向外为正

$$\begin{cases} \frac{1}{4}MR^2\omega + MvR - MR(u - v) = 0 \\ v = R\omega \end{cases}$$

$$\text{解得: } v = \frac{4}{9}u$$



2. 如图，两圆轮的半径分别为 R_1 和 R_2 （ $R_1 < R_2$ ），质量分别为 M_1 和 M_2 ，皆可视作均匀圆柱体且同轴固结在一起，二盘边缘绕有细绳，绳子下端挂两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，求在重力作用下， m_2 下落时轮的角加速度。

解： $m_1 : T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

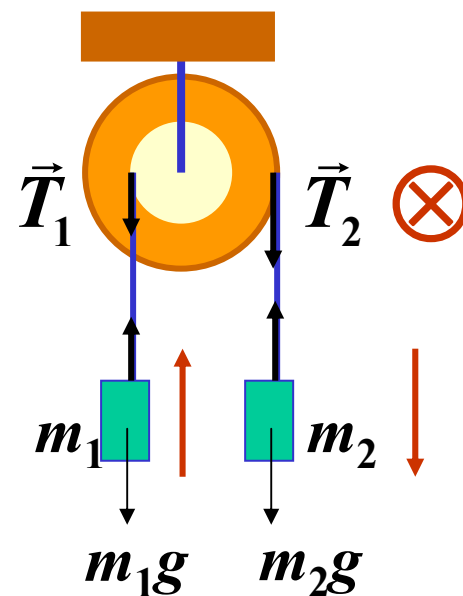
$m_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a_2$

对整个轮，由转动定律

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = \left(\frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \right) \beta$$

由运动学关系 $\beta = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}$

联立解得
$$\beta = \frac{(m_2 R_2 - m_1 R_1)g}{\left(\frac{M_1}{2} + m_1 \right) R_1^2 + \left(\frac{M_2}{2} + m_2 \right) R_2^2}$$



3.一刚体由长为 L ，质量为 m 的匀质细杆和一个质量为 m 的小球牢固地连接在杆的一端而成，可绕过杆另一端 O 的水平轴转动，如图所示。先将杆拉至水平，然后让其自由转动，轴处的摩擦忽略，求：（1）刚体绕 O 轴的转动惯量，（2）杆与竖直轴成 θ 角时，刚体的角速度，（3）杆与竖直线成 θ 角时，该刚体质心的法向和切向加速度。

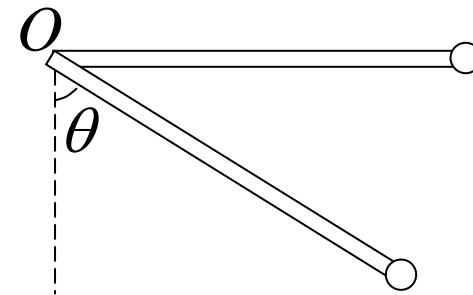
解：（1） $J = mL^2/3 + mL^2 = 4 mL^2/3$

（2）杆与地球组成的系统，机械能守恒

$$0 = \frac{1}{2} J \omega^2 - mg \frac{1}{2} L \cos \theta - mgL \cos \theta \quad J = \frac{4}{3} mL^2$$

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \cos \theta}{L}}$$

（3）质心位置 $l_c = \frac{m \frac{L}{2} + mL}{m + m} = \frac{3L}{4}$



$$a_{\text{cn}} = r\omega^2 = \frac{3}{4}L \cdot \frac{9}{4} \frac{g \cos \theta}{L} = \frac{27g \cos \theta}{16}$$

根据转动定律

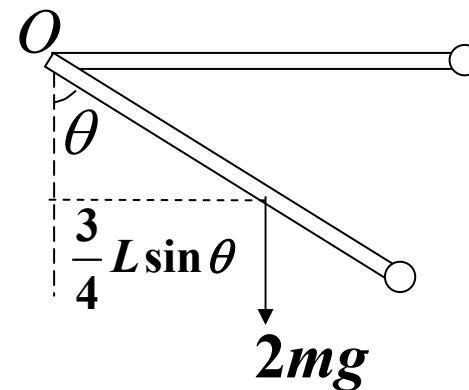
$$2mg \frac{3}{4}L \sin \theta = J\beta = \frac{4}{3}mL^2 \beta$$

$$\beta = \frac{9g \sin \theta}{8L}$$

$$a_{\text{ct}} = r\beta = \frac{3}{4}L \frac{9g \sin \theta}{8L} = \frac{27g \sin \theta}{32}$$

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \cos \theta}{L}}$$

$$J = 4 mL^2/3$$



4. 一均匀圆盘，质量为 M ，半径为 R ，盘面与粗糙的水平面接触。圆盘可绕过其中心的竖直轴转动。质量为 m ，速度为 v_0 的子弹垂直打入圆盘边缘并镶嵌在盘边上。设圆盘与水平面间的摩擦系数为 μ ，求（1）子弹击中圆盘后，盘的角速度；（2）经过多少时间，圆盘停转？（3）圆盘转过的角度为多少？

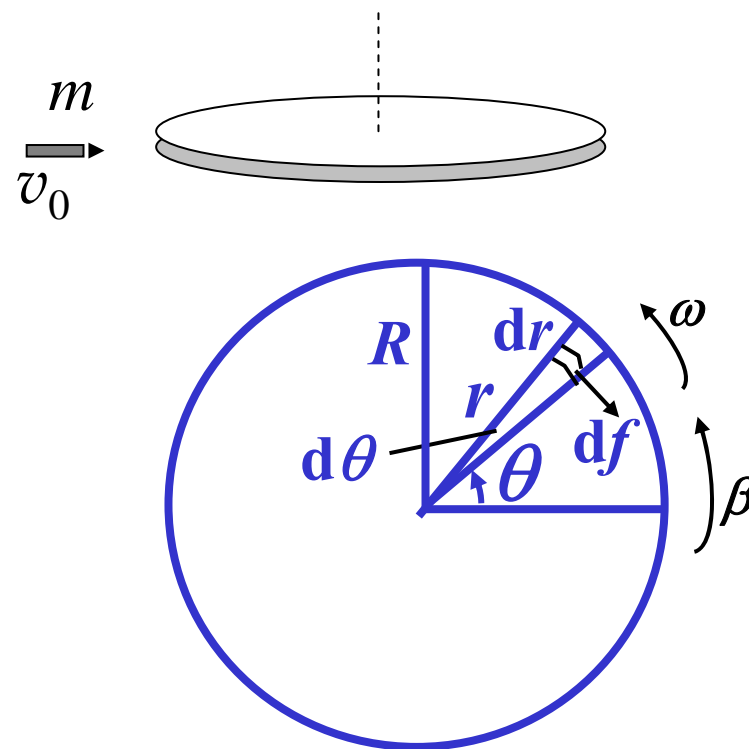
解：（1）子弹与圆盘组成的系统，角动量守恒

$$mv_0R = mR^2\omega_0 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{mv_0}{(m + \frac{1}{2}M)R}$$

（2）摩擦力矩

$$\begin{aligned} M_f &= \int_0^R -\mu \cdot dm \cdot gr + (-\mu \cdot mgR) \\ &= -\int_0^R \mu gr \sigma 2\pi r dr - \mu \cdot mgR = -\frac{\mu g R}{3} \cdot (3m + 2M) \end{aligned}$$



以垂直屏幕向₂₆
外为正方向

$$\beta = \frac{M_f}{J} = -\frac{\mu g R}{3J} \cdot (3m + 2M)$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

$$\beta = -\frac{2\mu g}{3R} \cdot \frac{(3m + 2M)}{(2m + M)}$$

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\omega = 0$$

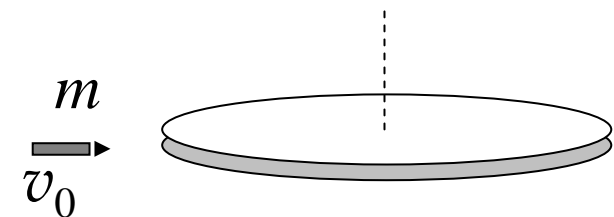
$$t = \frac{\omega_0}{-\beta} = \frac{3mv_0}{\mu g(2M + 3m)}$$

$$(3) \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta \theta$$

$$\theta = \frac{\omega_0^2}{-2\beta} = \frac{3m^2v_0^2}{\mu g R(2M + 3m)(M + 2m)}$$

$$M_f = -\frac{\mu g R}{3} \cdot (3m + 2M)$$

$$\omega_0 = \frac{mv_0}{(m + \frac{1}{2}M)R}$$



5. 一圆环质量为 m , 半径为 R , 可在竖直面内绕过A 点的固定水平轴转动。现将圆环拉起, 使其圆心与转轴位于同一水平高度, 之后放手, 求 (1) 放手的瞬间转轴对环的作用力;
(2) 圆心位于转轴正下方时转轴对环的作用力。

解: (1) 由转动定律, 角加速度为

$$\beta = \frac{M}{J} \quad M = mgR$$

根据平行轴定理 $J = mR^2 + mR^2 = 2 mR^2$

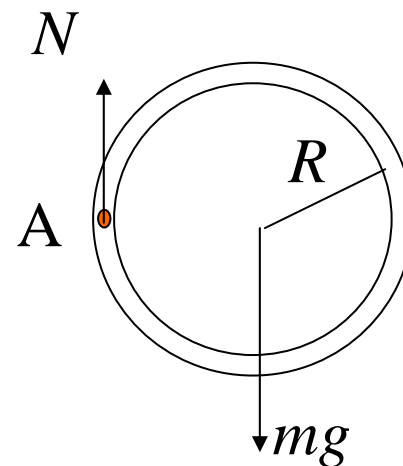
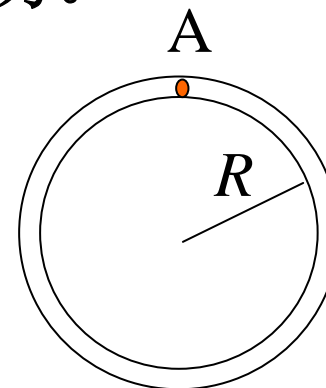
$$\beta = \frac{g}{2R}$$

质心的加速度为 $a_{\text{ct}} = R\beta = g/2$

$$a_{\text{cn}} = 0$$

根据质心运动定理

$$mg - N = m a_{\text{ct}} \quad N = mg/2$$



(2) 机械能守恒

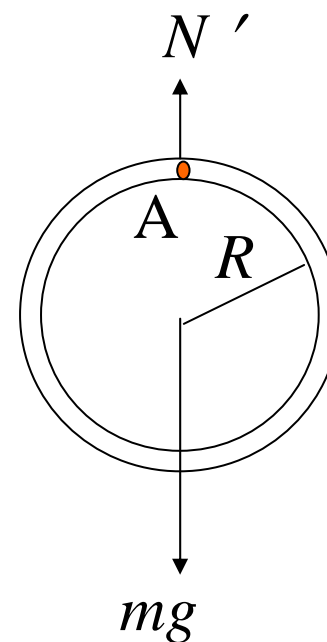
$$\frac{1}{2} J \omega^2 - mgR = 0 \quad J = 2mR^2$$

$$\omega^2 = g/R$$

$$a_{\text{cn}} = R \omega^2 = g \quad a_{\text{ct}} = 0$$

$$N' - mg = m a_{\text{cn}} = mg$$

$$N' = 2mg$$



6. 一个高为 h , 底部半径为 R 的圆锥体可绕竖直对称轴转动, 锥体表面沿母线刻有一条细槽。设锥体以角速度 ω_0 旋转时, 有一质量为 m 的小滑块从槽的顶端从静止开始滑下。已知锥体对其对称轴的转动惯量为 J , 且不计摩擦。求: (1) 当滑块到达底部时, 圆锥体的角速度; (2) 当滑块到达底部时, 滑块运动速度的大小。

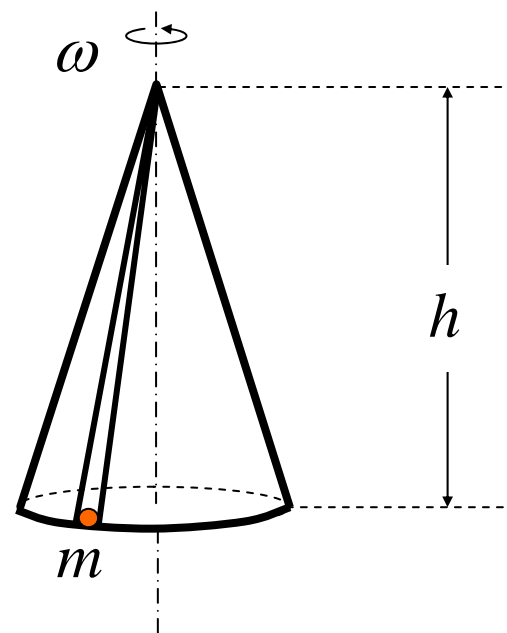
解: (1) 角动量守恒

$$J\omega_0 = (J + mR^2)\omega \quad \omega = \frac{J\omega_0}{J + mR^2}$$

(2) 机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

$$V = \sqrt{2gh + \frac{J\omega_0^2 R^2 (2J + mR^2)}{(J + mR^2)^2}}$$

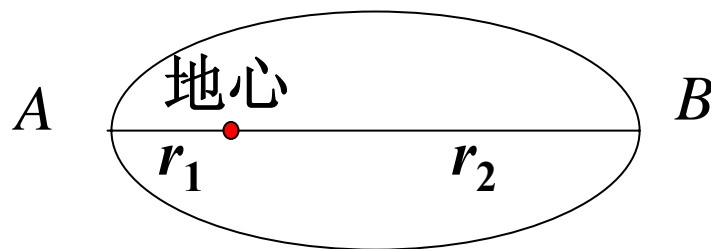


其 它 典 型 题

1. 一人造地球卫星绕地球作椭圆运动， A 、 B 分别为近地点和远地点， A 、 B 距地心的距离分别为 r_1 、 r_2 。设卫星的质量为 m ，地球的质量为 M ，万有引力常量为 G ，则卫星在 A 、 B 两点处的万有引力势能的差为多少？卫星在 A 、 B 两点处的动能差为多少？

解：由万有引力势能公式得

$$\begin{aligned} E_{pB} - E_{pA} &= -G \frac{Mm}{r_2} - \left(-G \frac{Mm}{r_1} \right) \\ &= GMm \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \end{aligned}$$



由机械能守恒

$$E_{kB} - E_{kA} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -GMm \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

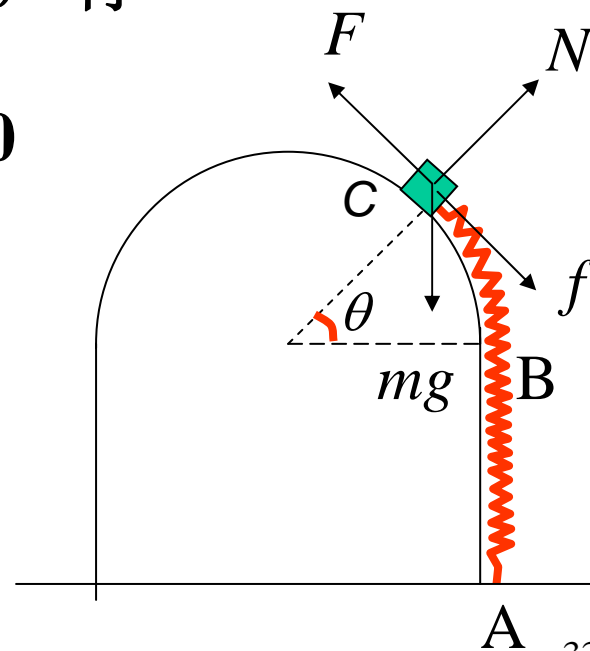
2. 弹簧原长为AB，劲度系数为 k ，下端固定在点A，上端与一质量为 m 的木块相连，木块总靠在一半径为 a 的半圆柱的光滑表面上。今沿半圆的切向用力 F 拉木块使其极缓慢地移过角度 θ 。求在这一过程中力 F 的功。

解：以 m 为研究对象，根据动能原理，
且保守力的功等于势能增量的负值，有

$$K_c - K_B = W_F - mgh_c - \frac{1}{2}ks^2 = 0$$

$$h_c = a \sin \theta, s = a\theta$$

$$W_F = mga \sin \theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$



3. 一质量为 M ，长度为 L 的均匀细杆，放在光滑的水平桌面上，可绕通过其中点 O 的光滑固定竖直轴转动，开始时静止。一质量为 m ($m < M$) 的子弹以速度 v_0 垂直击中杆的一端，撞击后从杆的一端打下质量也为 m 的一段（可视为质点），与子弹结合在一起以 $v_0/8$ 的速度沿垂直于杆的方向飞出，如图。求：(1) 撞击后瞬间杆转动的角速度；(2) 撞击过程中的机械能损失。

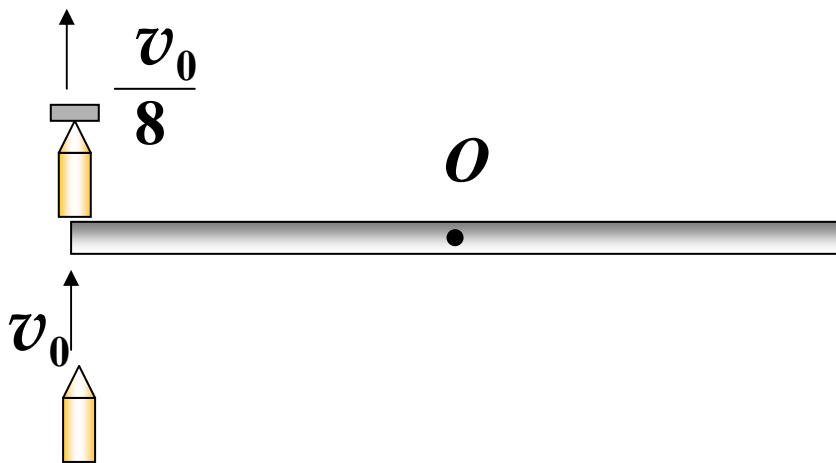
解：由角动量守恒

$$\frac{1}{2}mv_0l = \frac{1}{2}(2m)\frac{v_0}{8}l + J\omega$$

$$J = \frac{1}{12}Ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(M - 3m)l^2$$

$$\omega = \frac{9}{2} \frac{mv_0}{(M - 3m)l}$$



(2) 损失的机械能

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 - \left[\frac{1}{2}2m\left(\frac{v_0}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{64}mv_0^2 - \frac{1}{12}(M-3m)l^2 \frac{81mv_0^2}{4(M-3m)l^2}$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{31}{32} - \frac{27}{16} \frac{m}{M-3m} \right)$$

