

# 嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略的优化模型

杜剑平<sup>1</sup>, 韩中庚<sup>2</sup>

(1. 解放军信息工程大学 一院, 河南 郑州 450001;

2. 解放军信息工程大学 数学工程与先进计算国家重点实验室, 河南 郑州 450001)

**摘 要:**针对嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略问题,在合理假设的前提下,建立动力学模型,求解得到了嫦娥三号着陆准备轨道近月点和远月点的速度。针对软着陆过程的6个阶段,通过受力分析,建立了嫦娥三号运动的微分方程模型,以燃料消耗最小为优化目标,以每个阶段的起止状态为约束条件,将软着陆轨道的优化设计问题转化为主发动机推力的泛函极值问题,并将其控制函数转化为近似的多项式函数优化问题。运用四阶 Runge-Kutta 差分迭代方法进行求解计算,从而得到各个阶段的最优控制函数和控制策略。结果表明,嫦娥三号软着陆过程耗时 695 s,消耗燃料 1 269.1 kg。

**关键词:**嫦娥三号;轨道设计;控制策略;最优控制;敏感性分析

中图分类号:O29;O232

文献标志码:A

文章编号:2095-3070(2014)04-0039-15

## 1 问题的提出

在高速飞行的情况下,嫦娥三号要保证准确地月球预定区域实现软着陆,关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。基本要求是:着陆准备轨道为近月点 15 km,远月点 100 km 的椭圆形轨道;着陆轨道为从近月点至着陆点,其软着陆过程共分为 6 个阶段,要求满足每个阶段在关键点所处的状态;尽量减少软着陆过程的燃料消耗。根据上述基本要求,要研究以下 3 个问题:

- 1) 确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置以及嫦娥三号的相应速度;
- 2) 确定嫦娥三号的着陆轨道和 6 个阶段的最优控制策略;
- 3) 针对建立的模型,对所设计的着陆轨道与控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

## 2 模型的基本假设

### 2.1 只考虑月球对嫦娥三号的引力影响

由于嫦娥三号落月阶段是在月球的附近,相距地球、太阳和其他星球甚远,故可以忽略除月球以外其他星球作用力的影响,只考虑嫦娥三号与月球的作用力,即将问题简化为一个二体问题。

事实上,地球的质量为  $M_E = 5.98 \times 10^{24}$  kg,月球的质量为  $M_M = 7.350 \times 10^{22}$  kg,太阳的质量为  $M_S = 1.989 \times 10^{30}$  kg。嫦娥三号距离地球大约为  $r_E = 3.844 \times 10^8$  m(地月平均距离),距离太阳大约为  $r_S = 1.496 \times 10^{11}$  m(太阳与月球平均距离),距月心的距离为  $r_M = 1.750 \times 10^6$  m。于是地球对嫦娥三号的引力加速度为

$$g_E = \frac{GM_E}{r_E^2} \approx 0.0027 (\text{kg/s}^2),$$

月球对嫦娥三号的引力加速度为

收稿日期:2014-11-18

通讯作者:韩中庚, E-mail:zhghan@163.com

$$g_M = \frac{GM_M}{r_M^2} \approx 1.600\ 8(\text{kg/s}^2),$$

太阳对嫦娥三号的引力加速度为

$$g_S = \frac{GM_S}{r_S^2} \approx 0.005\ 9(\text{kg/s}^2)。$$

由此可以看出,嫦娥三号主要受到月球引力的影响。同时,注意到整个着陆过程只有几分钟的时间,着陆精度要求在几十公里的范围内,所以地球和太阳等对嫦娥三号的影响可以忽略不计。

## 2.2 视月心非惯性坐标系为近似惯性坐标系

由于月球自转速度为  $\omega = 2.661\ 7 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$ ,嫦娥三号所受到的最大离心加速度为

$$\alpha = \omega^2 r \approx 1.239\ 6 \times 10^{-5}(\text{kg/s}^2)。$$

即将非惯性坐标系近似为惯性坐标系,最大可能产生  $1.239\ 6 \times 10^{-5} \text{ kg/s}^2$  的加速度误差,远小于月球引力作用所产生的加速度,因此,在软着陆过程中不考虑非惯性坐标系的影响。

## 2.3 着陆准备轨道和落月轨道在同一个平面上

由 2.1 和 2.2,在不考虑月球自转、公转以及其他天体的引力作用条件下,若着陆准备轨道和落月轨道不在一个平面上,就需要由主减速发动机提供更多的横向推力,从而使得燃料的消耗增加。所以实际中将着陆准备轨道和落月轨道设计在一个平面上是合理的。

# 3 问题 1) 的模型建立与求解

## 3.1 确定近月点和远月点的速度

由假设 2.3,嫦娥三号从近月点开始下落,且与着陆准备轨道在同一个平面上。又由假设 2.1 和 2.2 知,嫦娥三号的着陆准备轨道满足开普勒轨道定律,其着陆准备轨道如图 1 所示<sup>[1]</sup>。

设近月点至月心的距离为  $r_A$ ,远月点至月心的距离为  $r_B$ ,单位时间嫦娥三号扫过的面积为

$$S_A = \frac{1}{2} r_A v_A, S_B = \frac{1}{2} r_B v_B,$$

其中,  $v_A, v_B$  是嫦娥三号在近月点和远月点的速度。根据开普勒第二运动定律,有  $S_A = S_B$ ,因此

$$r_A v_A = r_B v_B。 \quad (1)$$

根据机械能守恒定律,则有

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - m g_A r_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g_B r_B。$$

其中:  $m$  是嫦娥三号的质量;  $g_A, g_B$  是月球引力加速度,即

$$g_A = \frac{GM_M}{r_A^2}, g_B = \frac{GM_M}{r_B^2}。$$

化简可得

$$v_A^2 - v_B^2 = 2 \frac{GM_M}{r_A} - 2 \frac{GM_M}{r_B}。$$

将式(1)代入整理得

$$v_A^2 = 2GM_M \frac{1}{r_A} \left( \frac{r_B}{r_A + r_B} \right)。$$

由  $M_M = 7.350 \times 10^{22} \text{ kg}$ ,  $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $r_A = 1\ 752\ 013 \text{ m}$ ,  $r_B = 1\ 837\ 013 \text{ m}$ ,计算可得出  $v_A = 1\ 692.7 \text{ m/s}$ 。再由式(1)得  $v_B = 1\ 614.4 \text{ m/s}$ ,其方向为垂直于月球面镜的引力方向。

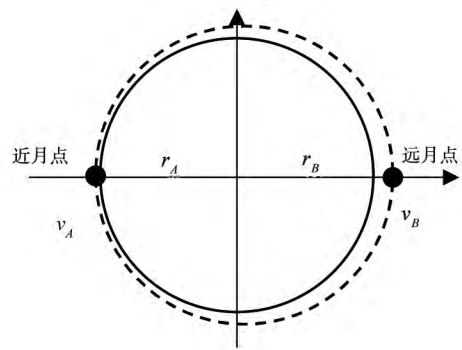


图 1 着陆准备轨道示意图

### 3.2 确定近月点和远月点的位置

根据该阶段所处的状态,可以大体估计出所需要的时间应在 410 s 左右。事实上,嫦娥三号在主减速阶段共计飞行 415 s(详见 4.2.1),其在月面投影飞行的纬度数为  $12.6397^\circ$ 。由于嫦娥三号落点为  $19.51^\circ\text{W}, 44.12^\circ\text{N}$ ,根据假设,嫦娥三号软着陆轨道为过月球自转轴的平面,且从南至北着陆,那么嫦娥三号的近月点的纬度为  $44.12^\circ - 12.6397^\circ = 31.4803^\circ$ ,即嫦娥三号近月点的经纬度为  $(19.51^\circ\text{W}, 31.4803^\circ\text{N})$ 。根据对称性,远月点的经纬度为  $(160.5^\circ\text{E}, 31.4803^\circ\text{S})$ 。

## 4 问题 2) 的模型建立与求解

### 4.1 软着陆轨道的优化设计模型

嫦娥三号从近月点处开始进入软着陆轨道,且软着陆轨道与着陆准备轨道在一个平面内,由此可知软着陆轨道在过月心和着陆点的平面上。事实上,满足这个条件的平面是不唯一的。不失一般性,这里将软着陆轨道平面约束在月球的极轴(南北极)所在平面,即将极轴和着陆点所在平面作为软着陆轨道所在平面。据此建立平面坐标系,如图 2 所示。

该坐标系以月心为原点,以月心指向近月点为坐标  $y$  轴,垂直方向为坐标  $x$  轴。在该坐标系下,将嫦娥三号软着陆过程分为 6 个阶段,分别是主减速阶段、快速调整阶段、粗避障阶段、精细避障阶段、缓速下降阶段和自由落体阶段。这 6 个阶段的受力状态和变化情况基本一致,所以,在这里先给出嫦娥三号的一般受力分析模型,之后分别讨论每个阶段的最优控制策略问题。

假设嫦娥三号软着陆过程主发动机推力分量的大小为  $u_x(t)$  和  $u_y(t)$ ,各阶段位置和速度的初始条件为  $(x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))$ ,终止条件为  $(x(t_f), y(t_f), v_x(t_f), v_y(t_f))$ ,则嫦娥三号在着陆过程中的受力情况如图 3 所示<sup>[1-2]</sup>。

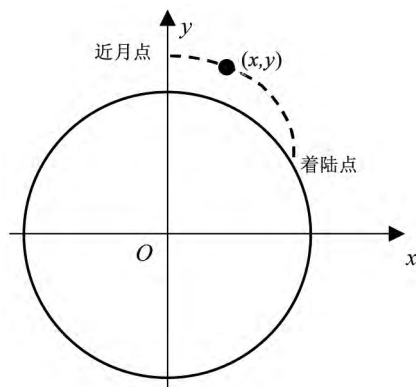


图2 软着陆轨道平面坐标系示意图

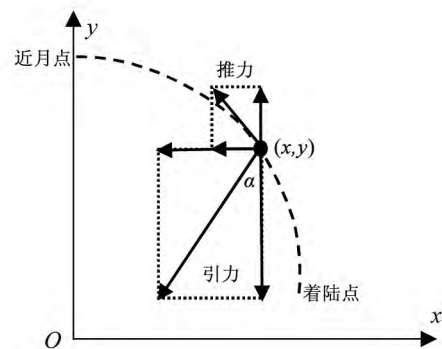


图3 嫦娥三号着陆过程受力分析图

由此建立嫦娥三号的运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \sin \alpha(t) + \frac{u_x(t)}{m(t)}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \cos \alpha(t) + \frac{u_y(t)}{m(t)}.\end{aligned}$$

其中,  $\alpha(t) = \arctan \frac{x(t)}{y(t)}$ 。根据主发动机比冲的定义,有

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e},$$

其中,  $v_e$  是发动机比冲。最优控制的目标为燃料消耗最小,即

$$\min z = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e} dt.$$

考虑到各阶段状态的约束条件,则问题归结为下面的优化模型:

$$\begin{aligned} \min z &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e} dt \\ \text{s. t. } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \sin \alpha(t) + \frac{u_x(t)}{m(t)}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \cos \alpha(t) + \frac{u_y(t)}{m(t)}, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e}, \\ m(t_0) &= m_0, x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \frac{dx}{dt}(t_0) = v_{x_0}, \frac{dy}{dt}(t_0) = v_{y_0}, \\ m(t_f) &= m_f, x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, \frac{dx}{dt}(t_f) = v_{x_f}, \frac{dy}{dt}(t_f) = v_{y_f}. \end{aligned} \quad (2)$$

注意到对于不同阶段的最优控制问题,主要就是相应的初始状态和终止状态约束条件的区别,其基本模型是类似的。

## 4.2 各阶段的优化控制模型

### 4.2.1 主减速阶段的模型

主减速阶段的初始状态为近月点的状态,位置坐标(单位:m)为 $(x(t_0), y(t_0)) = (0, 1\,752\,013)$ ,初始速度(单位:m/s)为 $(v_x(t_0), v_y(t_0)) = (1\,692.7, 0)$ 。主减速阶段的末端状态为嫦娥三号位于预定落月点上空 3 000 m 处,距离月心  $1\,737\,013 - 2\,640 + 3\,000 = 1\,737\,373$ (m),即  $\sqrt{x^2(t_f) + y^2(t_f)} = 1\,737\,373$ (m);速度要求为 57 m/s,即  $\sqrt{v_x^2(t_f) + v_y^2(t_f)} = 57$ (m/s);初始状态的质量为  $m(t_0) = 2\,400$  kg。由于主减速阶段的目的是减速,因此主发动机采用最大推力,即 7 500 N,这里只需要确定推力的方向即可。用  $\theta_1(t)$  表示主发动机的推力与速度反方向的夹角,如图 4 所示<sup>[3-4]</sup>。

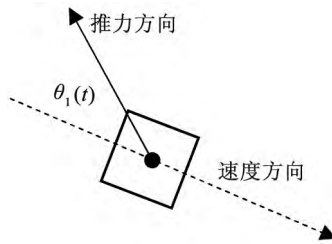


图 4 主发动机推力方向与速度方向关系示意图

对于任意的时刻  $t$ ,嫦娥三号的运行速度的方向为  $\left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right]$ ,此时主发动机推力的方向为

$$\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1(t) & \sin \theta_1(t) \\ -\sin \theta_1(t) & \cos \theta_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{dx(t)}{dt} \\ -\frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

发动机的姿态一般不会频繁发生变化,因此  $\theta_1(t)$  通常是一个光滑连续函数。为了方便,不妨设

$$\theta_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

该多项式具有比较好的光滑性,实际中也可以用傅立叶多项式表示。这样就可以将关于控制函数  $\theta_1(t)$  的优化问题转化为确定控制参数向量  $\mathbf{p} = (a_3, a_2, a_1, a_0)$  的问题。

综上所述,主减速阶段的最优控制模型为

$$\begin{aligned}
& \min z = t_f \\
& \text{s. t. } \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \sin \theta_1(t) + \frac{u_x(t)}{m(t)}, \\
& \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \cos \theta_1(t) + \frac{u_y(t)}{m(t)}, \\
& \frac{dm}{dt} = \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e}, \\
& \sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)} = 7\,500, \\
& \theta_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \\
& m(t_0) = 2\,400, x(t_0) = 0, y(t_0) = 1\,752\,013, \frac{dx(t_0)}{dt} = 1\,692.7, \frac{dy(t_0)}{dt} = 0, \\
& \sqrt{x^2(t_f) + y^2(t_f)} = 1\,737\,373, \sqrt{\left(\frac{dx(t_f)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t_f)}{dt}\right)^2} = 57.
\end{aligned}$$

该模型是一个无穷维的优化问题,很难求出精确解,实际中也不要求绝对的精确解。根据该阶段所处的状态,可以大体估计出需要的时间应在 410 s 左右,为此,将时间段在  $[0, 450]$  内进行离散化,并用四阶 Runge-Kutta 差分迭代方法<sup>[5-6]</sup>进行求解计算,最终估计出最优参数和最优时间。

问题的最优控制参数为

$$p^* = (5.8, -0.000\,755, 6.020\,7 \times 10^{-8}, 1.345\,3 \times 10^{-8}),$$

最优时间为  $t_f^* = 415$  s,即当嫦娥三号的主发动机以最大推力 7 500 N 飞行 415 s 后,到达距离预定着陆点上方 3 000 m 处。主减速阶段末端速度大小为 57.002 m/s,速度矢量为  $(39.64, -40.96)$  (m/s),其末端质量为 1 341.33 kg,即消耗燃料为 1 058.67 kg。

在最优的控制策略下,主发动机的推力方向、运行轨迹、运行速度和高度的变化曲线如图 5 所示。

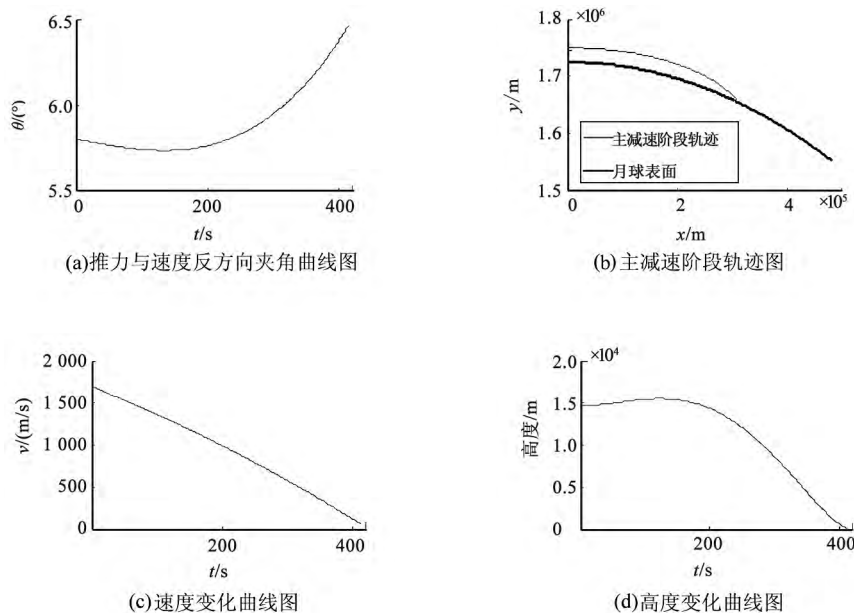


图5 主减速阶段相关变量的变化趋势图

嫦娥三号在主减速阶段共计飞行 415 s,其月面投影飞行的纬度数为  $12.639\,7^\circ$ 。由于嫦娥三号落点为  $(19.51^\circ\text{W}, 44.12^\circ\text{N})$ ,假设软着陆轨道为过月球自转轴的平面,且从南至北着陆,则嫦娥三号的近月点的纬度为  $44.12^\circ - 12.639\,7^\circ = 31.480\,3^\circ$ ,即嫦娥三号着陆准备轨道的近月点投影的经纬度为  $19.51^\circ\text{W}, 31.480\,3^\circ\text{N}$ 。

主减速阶段末端的状态为:位置(380 219.57, 1 695 251.32)(m),速度(39.64, -40.96)(m/s),质量 1 341.33 kg。

#### 4.2.2 快速调整阶段的模型

快速调整阶段的初始状态即为主减速阶段的末端状态。该阶段的末端位置要求悬停在预定落点上空 2 400 m 处,水平速度调整为 0,并将主减速发动机推力方向调整到竖直向上的状态。

由于快速调整过程的时间短,所以燃料消耗量的优化不是主要问题,主要是给出一个可行的控制策略。为了方便计算,假设在快速调整阶段末端,嫦娥三号速度为 0,即悬停于 2 400 m 的高度,发动机推力方向控制策略同主减速阶段。仍假设该阶段主减速发动机的推力大小保持不变。此时该阶段的最优控制策略模型为

$$\begin{aligned} \min z &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e} dt \\ \text{s. t. } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \sin \alpha(t) + \frac{u_x(t)}{m(t)}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{GM_M}{x^2 + y^2} \cos \alpha(t) + \frac{u_y(t)}{m(t)}, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}}{v_e}, \\ m(t_0) &= 1\,341.33, x(t_0) = 380\,219.57, y(t_0) = 1\,695\,251.32, \frac{dx(t_0)}{dt} = 39.64, \\ \frac{dy(t_0)}{dt} &= -40.96, \sqrt{x^2(t_f) + y^2(t_f)} = 1\,736\,773, \sqrt{\left(\frac{dx(t_f)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t_f)}{dt}\right)^2} = 0. \end{aligned}$$

用同样的方法近似求解模型,可以得到:主发动机最佳的推力大小为 4 280.7 N,该阶段共计耗时 31 s。其阶段末的状态:速度为(0.214, -0.573)(m/s),高度为 2 409.8 m,剩余质量为 1 297.7 kg,消耗燃料 43.63 kg。在该阶段的运行过程中,嫦娥三号的主发动机推力方向、运动轨迹、运行速度和高度的变化规律如图 6 所示。

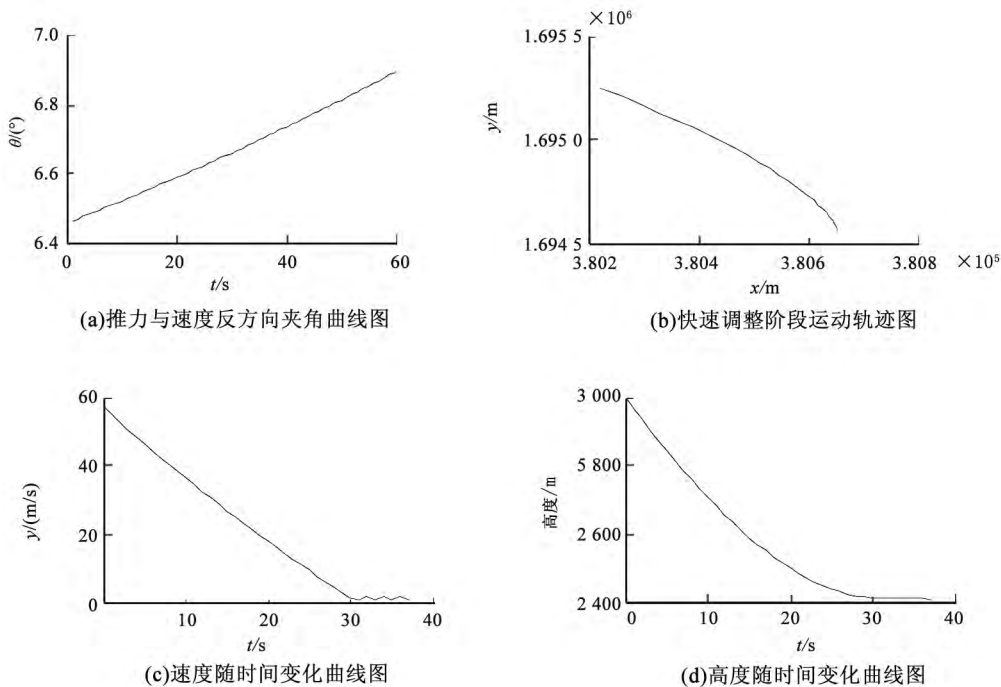


图 6 快速调整阶段各状态变量的变化规律图

快速调整阶段末端的状态: 位置为  $(380\ 653.334, 1\ 694\ 558.626)(\text{m})$ , 速度为  $(0.214, -0.573)(\text{m/s})$ , 质量为  $1\ 297.675\ \text{kg}$ 。

#### 4.2.3 粗避障阶段的模型

避障的过程主要包括两方面的工作: 一是确定最佳着陆位置; 二是确定主发动机的控制策略, 并将嫦娥三号移动到最佳位置。

##### 1) 着陆区域的评估与着陆点的选择

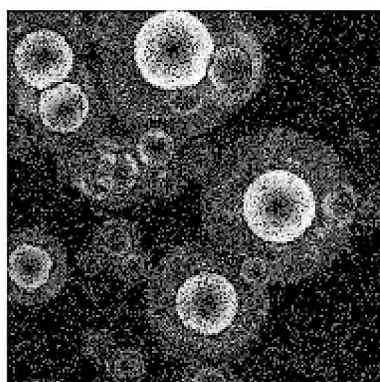
通常情况下, 一个理想的着陆点应满足如下要求:

- i) 着陆区域平整度好。若区域不够平整, 比如落在坡面上, 则着陆过程中可能发生翻滚。
- ii) 尽量日照充分。如果落入低洼区域造成阳光照射不充分, 则会导致太阳能帆板无法提供足够的电能, 甚至不能正常工作。
- iii) 尽量减少平移距离。减少平移距离, 有利于节约燃料。
- iv) 考虑可能存在的控制误差所造成的影响。

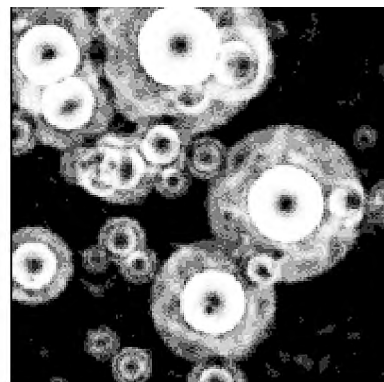
首先分别建立平整度、光照条件、平移距离的评估模型, 然后考虑可能存在控制误差的情况, 建立最优的落点评估模型。

##### ① 着陆区域的平整度指标

与着陆区域的平整度最直接相关的指标就是落点的梯度值。首先, 直接利用 Sobel 算子计算数字高程图的梯度  $S(x, y)$ , 即可以得到图 7(a)。为了避免噪声对梯度图的影响, 对图 7(a) 进行降噪处理后得到相应的图 7(b)。在图 7 中, 颜色越深, 表示越平坦。



(a) 粗避障数字高程图的梯度图



(b) 粗避障降噪后的梯度图

图7 着陆区域的粗避障阶段梯度图

##### ② 着陆区域光照条件指标

为了使嫦娥三号着陆后能够获得足够的日照, 进而产生足够的电能, 要求尽量选择日照时间长的着陆点。在嫦娥三号着陆后, 以着陆点为坐标原点, 以北向为  $y$  轴正方向, 以垂直月面方向为  $z$  轴正方向, 建立直角坐标系。记太阳在  $t$  时刻的方位角和俯仰角为  $(\varphi(t), \psi(t))$ , 过着陆点, 以  $(\varphi(t), \psi(t))$  为方向角和俯仰角作射线, 如图 8 所示。

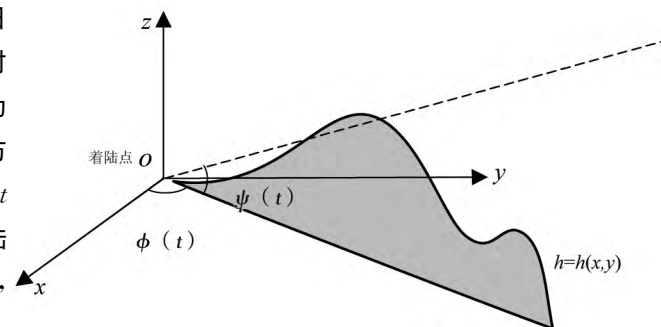


图8 着陆区域光照条件的示意图

以过  $z$  轴, 方向角为  $\varphi(t)$  作垂直于  $xy$  面的平面, 该平面交于数字高程曲面的曲线为  $h = h(x, y)$ , 在视野范围内计算  $k(x, y) = \frac{h(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 则  $\alpha(x, y) = \arctan k(x, y)$  表示曲线上一点与着陆点的夹角。若在视野范围内满足  $\alpha(x, y) < \psi(t)$ , 则说明  $t$  时

刻嫦娥三号能够被阳光照射到,否则被遮挡。将时间离散化为间隔为 1 min 的样点,即每隔一分钟判断一次是否能够获得光照,统计一个月昼的总光照时间,即可评估该点的光照条件。

为了简化问题,假设太阳自东向西运转,且始终在过着陆点竖直向上的平面上,如图 9 所示。

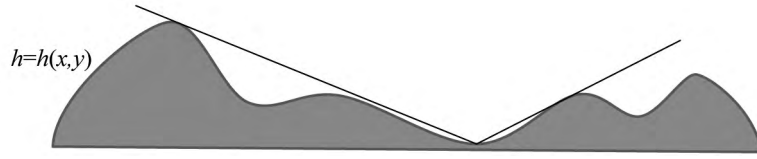


图 9 简化的光照时间的评估示意图

这里  $h(x, y)$  即为数字高程图的一行,逐次计算该行的各个点与着陆点连线的俯仰角,找出左侧最大的表示最后光照时刻,右侧最大的表示最早光照时刻,两条射线的夹角大小在一定程度上反映了该着陆点的光照时间长度。使用上述方法分别计算粗避障阶段的光照条件  $B(x, y)$ ,结果如图 10 所示。在图 10 中,灰度值越大,表示该点的光照越充分。从图中可以看出,陨石坑的上缘光照条件较好,而陨石坑内部的光照条件普遍较差。

### ③ 燃料消耗评估指标

为了简便计算,假设燃料消耗量与平移的距离成正比。计算粗避障区域各处与中心的距离,可以得到各处的燃料消耗量评估函数:

$$F_c(x, y) = f_c(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

其中:  $(x_0, y_0)$  是预定着陆点的坐标;  $f_c$  是嫦娥三号平移 1 m 的燃料消耗量。

### ④ 着陆点优劣的综合评估模型

综合考虑着陆点的平整度、日照条件和燃料消耗指标的影响,对各个指标进行标准化处理,建立综合评估模型:

$$E(x, y) = \lambda_1 S'(x, y) + \lambda_2 B'(x, y) + \lambda_3 F'_c(x, y).$$

其中:  $S'(x, y)$ 、 $B'(x, y)$  和  $F'_c(x, y)$  分别是标准化后的平整度指标、光照条件指标和燃料消耗指标;  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  分别是 3 个指标的权重,不妨设定  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ 。可得到嫦娥三号着陆区域内的综合评估结果,如图 11 所示。在图 11 中,灰度值越大,表明综合评估值越大,着陆安全性越高。

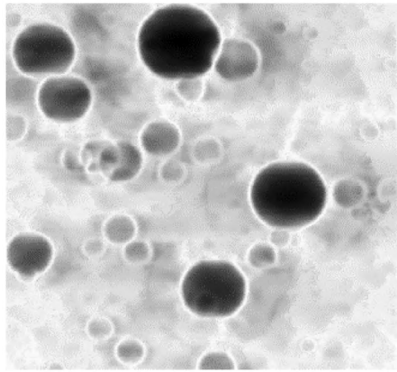


图 10 粗避障阶段区域日照时间分布图

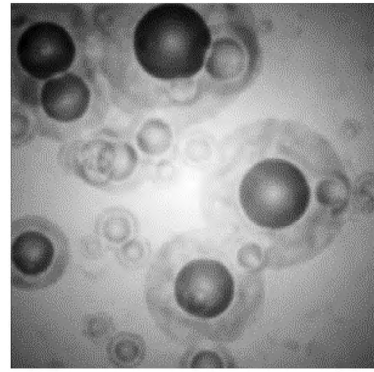


图 11 粗避障阶段着陆区域的综合评估结果

### ⑤ 考虑可能的控制误差影响

考虑到实际中可能存在控制误差,所以在选择预定着陆点时,尽可能选择大片的综合评估值高的区域。假设由于控制误差导致着陆点偏差的概率分布为二维正态分布,期望为  $(x_0, y_0)$ ,均方差为  $(\sigma^2, \sigma^2)$ ,如果概率密度函数为  $f(x, y)$ ,则在  $(x_0, y_0)$  处考虑着陆误差后的综合评估值为

$$I(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) E(x, y) dx dy. \quad (3)$$



式(3)的实际含义是:如果设定点 $(x_0, y_0)$ 为着陆点,则式(3)为落入安全区域的概率。其中, $E(x, y)$ 的取值由图11获得。

经过仿真计算,粗避障阶段的控制误差的标准差约为 $\sigma = 150$  m,精细避障阶段的控制误差标准差取 $\sigma = 6$  m。依据式(3)可以得到考虑着陆控制误差影响后,着陆区域的综合评估,结果如图12所示。

从着陆区域综合评估值中选择最大值,即可得到最佳的选择落月点。粗避障阶段的最佳落月点为 $(-34, -21)$ ,即需要在原预定点的基礎上向西南方向移动大约40 m,如图13所示。

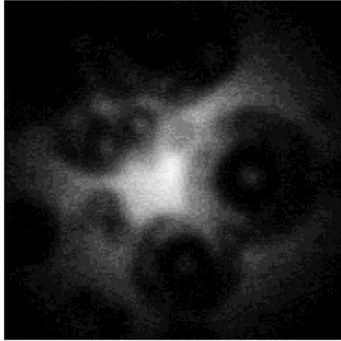


图12 考虑误差的粗避障区域综合评估结果图

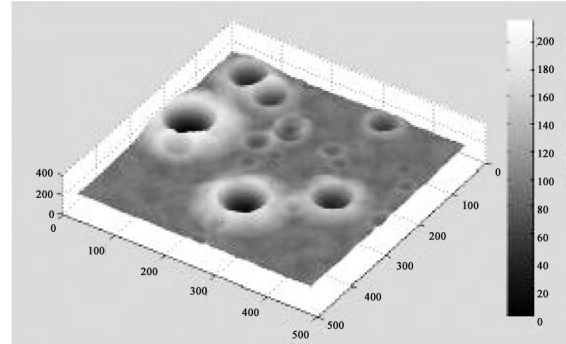


图13 粗避障阶段最佳落点的位置图

## 2) 粗避障阶段的最优控制策略

粗避障阶段的起始状态为速度 $(0, 0)$ ,高度2 400 m;终止状态为垂直速度0,高度100 m,要求水平位移40 m。为了简化,假设在粗避障阶段的运行轨迹为直线,即月球引力和主减速发动机推力的合力方向在粗避障阶段保持不变。受力情况如图14所示。

在图14中, $G_c = mg_M$ ,  $G_1 = G_c \cos \theta$ ,  $G_2 = G_c \sin \theta$ ,  $\theta = \arctan \frac{4}{230}$ 。若要使粗避障阶段的运行轨迹为直线,即 $f_2 = G_2$ ,

现在只需要优化 $f_1$ 随时间变化的曲线即可。从实际出发,该曲线一般应为抛物线,不妨假设 $f_1$ 随时间变化为 $f_1(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$ ,则嫦娥三号在运行轨迹上的合力为 $f_1 - G_1$ ,

其推力的大小为 $F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ 。以 $f_1$ 方向为 $y$ 轴,以 $f_2$ 方向为 $x$ 轴建立坐标系,则问题的最优控制模型为

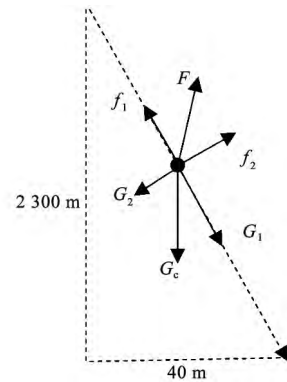


图14 粗避障阶段的受力分析示意图

$$\begin{aligned}
 \min z &= \int_0^{t_f} F(t) dt \\
 \text{s. t. } \frac{d^2 y}{dt^2} &= -g_M \cos \theta + \frac{f_1}{m}, \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{F(t)}{v_e}, \\
 F(t) &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \\
 g_M \sin \theta &= \frac{f_2}{m}, \\
 m(0) &= 1\,297.675, y(0) = 2\,300, \frac{dy}{dt}(0) = 0, \\
 y(t_f) &= 0, \frac{dy}{dt}(t_f) = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

用类似上面的方法求解该模型,则可以得到主发动机推力变化曲线的系数为  $b^* = (1\ 104.515, -0.004\ 7, 0.004\ 1, 0.003\ 8)$ ,总耗时 99.7 s,剩余质量 1 228.15 kg,末端速度  $4.491\ 4 \times 10^{-6}$  m/s。推力大小和方向随时间变化、高度变化的曲线和粗避障阶段运行轨迹变化如图 15 所示。

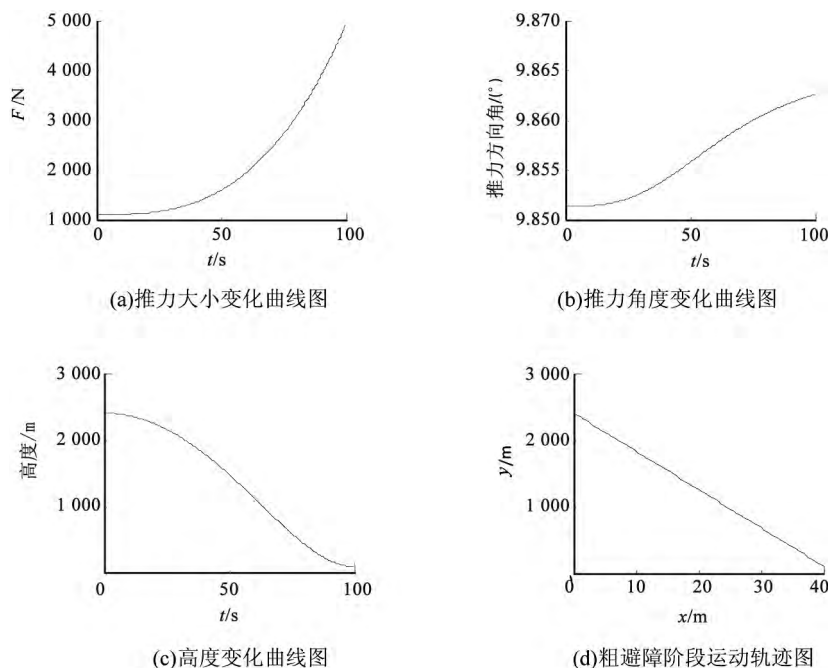


图 15 粗避障阶段各状态变量的变化规律图

由图 15 可以看出,主发动机的推力开始较小,使嫦娥三号能够逐步加速,之后推力逐步增大,以实现在高度 100 m 处悬停。其推力方向角是指推力与竖直向上方向的夹角,可由预定落点的方向确定。

#### 4.2.4 精避障阶段的模型

对于精避障,与粗避障的处理方法基本相同,没有本质区别,只是起始和终止状态不同,相应的参数和结果不同。具体的建模求解过程不详述,只给出相应的结果。

##### 1) 着陆区域的评估与着陆点的选择

i) 精避障阶段的着陆区域平整度指标评估值如图 16 所示。

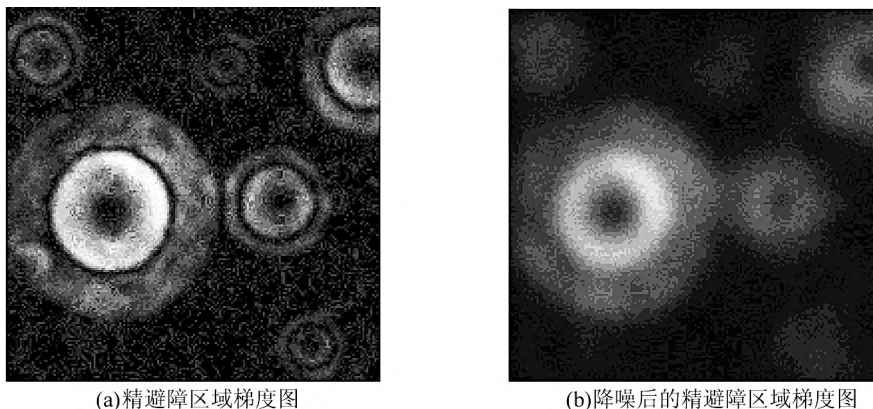


图 16 精避障阶段着陆区域平整度评估值图

ii) 精避障阶段的着陆区域光照条件指标  $B(x, y)$  评估值,其结果如图 17 所示。

iii) 精避障阶段综合平整度、日照条件和燃料消耗条件综合评估结果如图 18 所示。

iv) 在考虑可能的控制误差情况下,精避障阶段的着陆区域综合评估结果如图 19 所示。根据综合评

估结果,确定最佳的落月点为(6.5,11.5),即需要在粗避障的基础上再向东北方向移动 12.3 m,如图 20 所示。

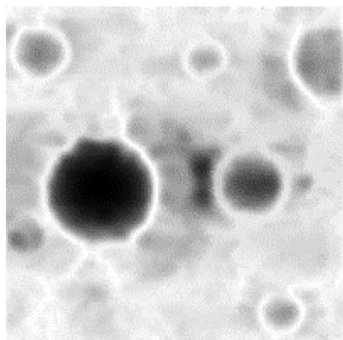


图 17 精避障阶段区域日照时间分布图

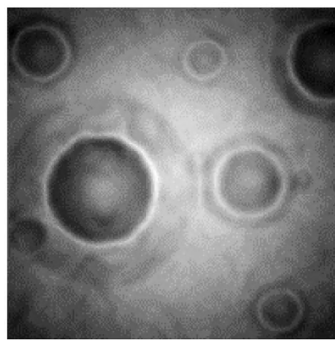


图 18 精避障阶段着陆区域的综合评估结果

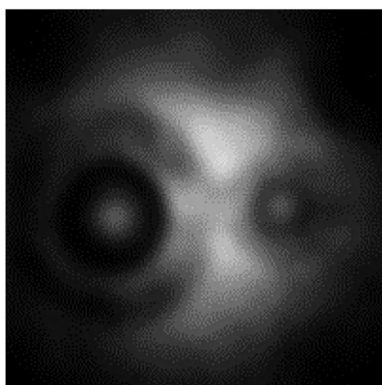


图 19 考虑误差的精避障区域综合评估结果

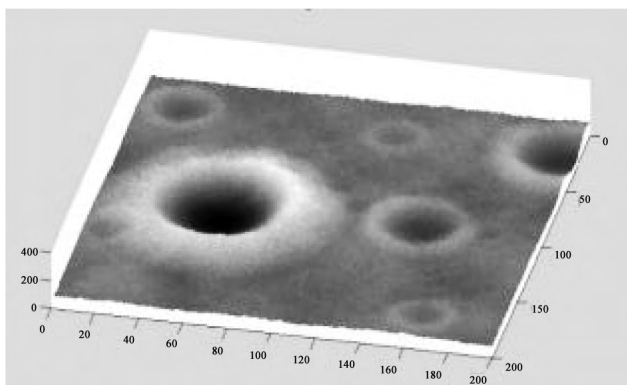


图 20 精避障阶段最佳落点位置图

## 2) 精避障阶段的最优控制策略

精避障阶段的控制策略与粗避障阶段略有不同,该阶段可以分两步完成,首先水平平移,然后再垂直下降。

① 考虑水平移动过程,则相应的优化模型为

$$\begin{aligned}
 \min z &= \int_0^{t_f} F(t) dt \\
 \text{s. t. } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{f_1}{m}, \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{F(t)}{v_e}, \\
 F(t) &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \\
 g_M &= \frac{f_2}{m}, \\
 m(0) &= 1\,228.15, x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0, \\
 x(t_f) &= 12.3, \frac{dx}{dt}(t_f) = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

用离散化搜索求解该模型,则可得到主发动机推力的水平分量系数向量为  $b^* = (123.400\,3, -0.205\,2, 0.096\,3, -0.061\,8)$ ,总耗时为 18.6 s,剩余质量 1 215.6 kg。相应的推力大小和方向随时间变化曲线、水平位移变化曲线如图 21 所示。

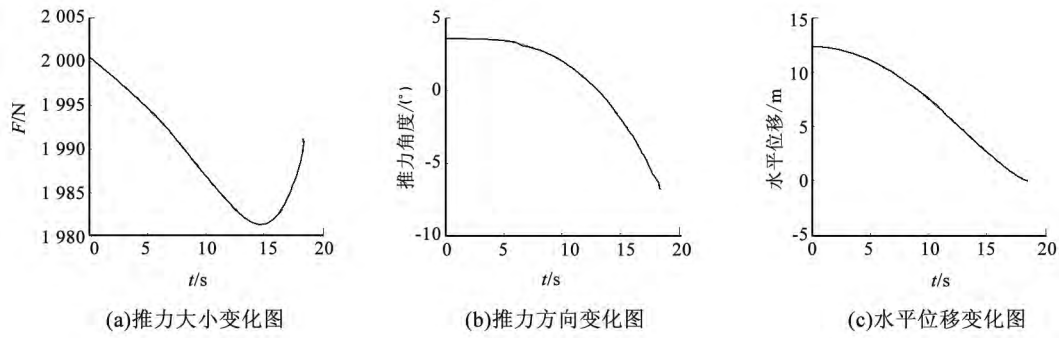


图 21 精避障阶段水平移动过程参数变化图

由图 21 可知,主发动机的推力方向首先是正方向,大约 13 s 后变为负方向,这是因为前一段时间推动平移,后一段时间使嫦娥三号制动悬停。

② 考虑竖直下降过程,则相应的优化模型为

$$\begin{aligned}
 \min z &= \int_0^{t_f} F(t) dt \\
 \text{s. t. } \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{F(t)}{m} - g_M, \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{F(t)}{v_e}, \\
 m(0) &= 1\,215.6, y(0) = 100, \frac{dy}{dt}(0) = 0, \\
 y(t_f) &= 30, \frac{dy}{dt}(t_f) = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

同样用离散化方法求解该模型,则可以得到主发动机推力的系数向量为  $b^* = (1\,908.918, 1.273 \times 10^{-5}, -0.000\,647, 0.000\,268)$ ,总耗时为 75 s,剩余质量 1 166.21 kg。相应的主发动机推力的大小、速度和垂直位移变化曲线如图 22 所示。

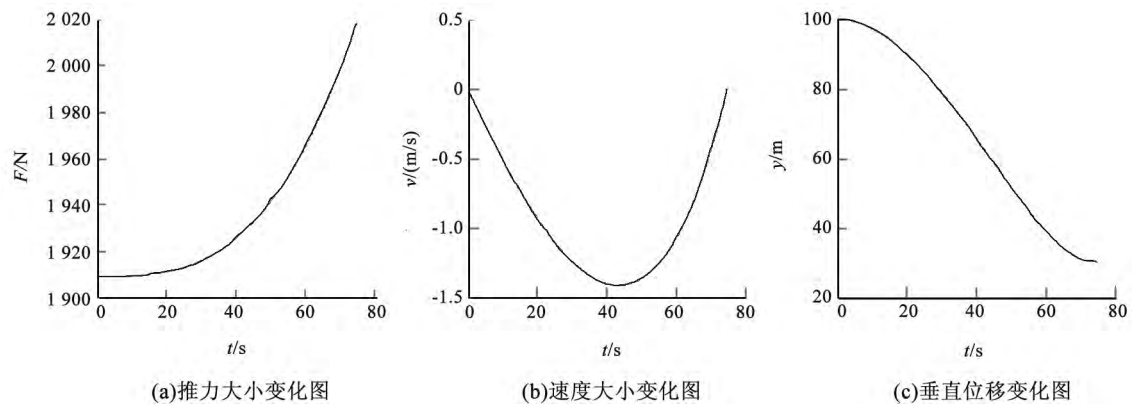


图 22 精避障阶段垂直下降过程的参数变化图

由图 22 可知,主发动机的推力是逐步增大的,从而使得下落速度先加速后减速,最终末端速度为 0,即悬停于距月面 30 m 高度。

#### 4.2.5 缓速下降阶段的优化模型

缓速下降阶段的起始状态为精避障阶段的末端状态,即距月面 30 m,速度为 0,质量为 1 166.21

kg, 发动机推力方向垂直向上。末端状态要求距离月面 4 m, 速度为 0。其控制过程和优化模型与模型(6)类似, 则有

$$\begin{aligned} \min z &= \int_0^{t_f} F(t) dt \\ \text{s. t. } \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{F(t)}{m} - g_M, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{F(t)}{v_e}, \\ m(0) &= 1\,166.21, y(0) = 30, \frac{dy}{dt}(0) = 0, \\ y(t_f) &= 4, \frac{dy}{dt}(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

类似如上的方法求解该模型, 得到主发动机推力的系数向量为  $b^* = (1\,850.99, -0.000\,24, -0.000\,47, -0.000\,387)$ , 总耗时 55.7 s, 剩余燃料质量为 1 130.9 kg。主发动机的推力大小、速度和垂直位移变化曲线如图 23 所示。

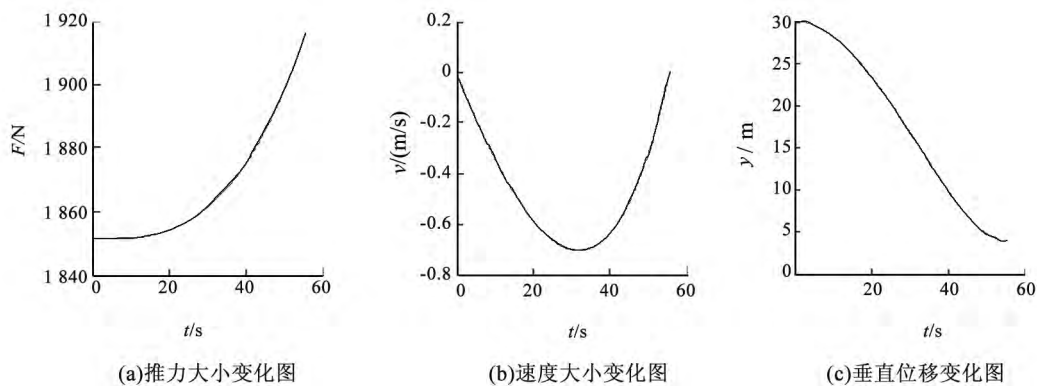


图 23 缓速下降阶段垂直下落过程状态变量的变化图

由图 23 可知, 主发动机推力逐步增大, 从而使得下落速度先加速后减速, 最终速度变为 0, 即悬停于距月面 4 m 处, 燃料消耗 24.31 kg。

#### 4.2.6 自由下降阶段的控制策略

自由下降阶段的起始状态为距月面高度 4 m, 主发动机推力为 0, 垂直自由落体运动, 整个过程耗时大约 1.568 6 s, 落月速度为 2.55 m/s。

### 5 问题的敏感性分析

嫦娥三号在实际软着陆的控制过程中, 往往客观存在一定的控制误差, 譬如着陆准备轨道参数(近月点位置和速度)的误差、发动机推力(大小和方向)的控制误差、模型的简化假设和近似求解误差等。诸如这些误差势必会对实际的轨道设计和控制结果造成或多或少的影响, 从工程应用的角度需要做相应的敏感性分析。而且涉及到的相关参数, 如坐标系的选取、变量的选择、参数的选取、约束条件、函数的简化和月面的观测等都存在一定的偏差, 那么对轨道设计和控制策略的影响程度如何, 也需要就某些情况做相应的敏感度分析。这里仅就主减速发动机推力变化的敏感性进行分析。

#### 1) 主发动机最大推力的误差影响

对于主减速阶段, 主发动机要求以 7 500 N 的最大推力运行, 但事实上发动机的推力会有一些误差, 这个误差对运行轨道、速度和高度的影响情况如图 24 所示。

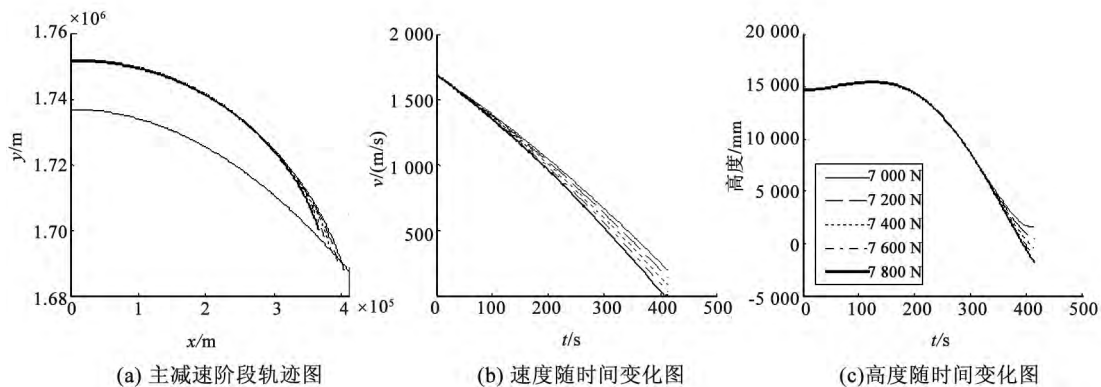


图 24 主发动机最大推力误差的影响分析图

由图 24 可以看出,主发动机的推力越大,使嫦娥三号的速度越早地变为 0;推力越小,使其飞行距离越远。当最大推力误差不太大时,对其运行轨道、速度和高度的影响都不大,只有当推力误差达到 500 N 时,会使末端速度差距 200 m/s 左右,高度差为 300 mm 左右。因此,发动机的推力误差对模型的影响是稳定的。

## 2) 主发动机推力方向角近似控制多项式系数误差的影响

主发动机推力方向角的控制函数是用三次多项式来实现的,其系数是根据各阶段的状态要求通过数值方法搜索得到的,势必也存在一定的误差,该误差对运行轨道、速度和高度的影响情况如图 25 所示。

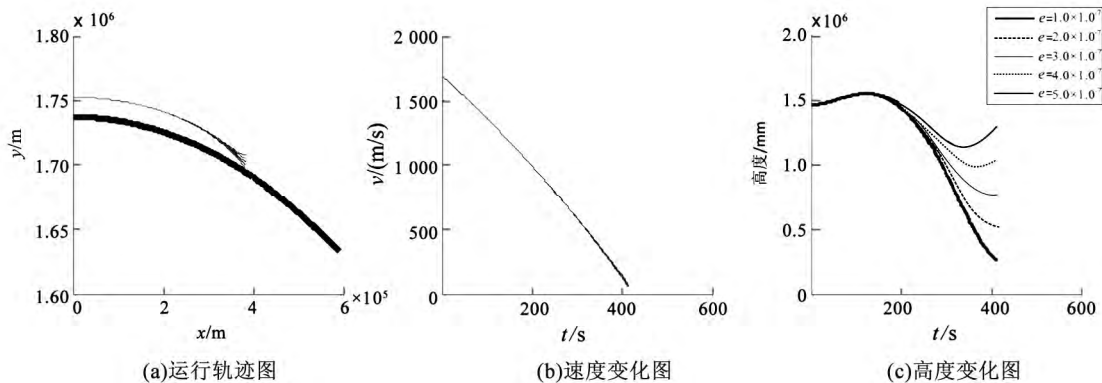


图 25 推力方向角度的控制误差分析图

由图 25 可以看出,嫦娥三号的运行状态对方向角的控制多项式系数的改变是非常敏感的,尤其是对运行轨迹和高度的影响较大,但对速度无影响。因此,在实际中需要提高该参数的传输和控制的精度,才能保证实际需求。

对于其他参数的敏感性分析,方法是类似的,这里不再赘述。

## 6 结束语

针对 2014 年全国大学生数学建模竞赛 A 题“嫦娥三号的软着陆轨道设计与控制策略”问题,给出了一种可行有效的解决方法,主要确定出了嫦娥三号着陆准备轨道和软着陆轨道、着陆准备轨道的近月点和远月点的速度与位置,通过建立优化控制模型,求解给出了软着陆 6 个阶段的运行轨道和相应的控制策略,包括主减速阶段、快速调整阶段、粗避障阶段、精避障阶段、缓速下降阶段和自由落体阶段的优化控制模型和相应的控制策略。嫦娥三号整个软着陆过程共消耗燃料 1 269.1 kg,耗时 695 s。这里没有考虑嫦娥三号在实际着陆过程中的悬停和拍照所耗费的时间,如果把这些时间综合考虑进去的话,应

该总体上与官方公布的耗时 720 s 大致相当。

该问题是一个非常实际的工程问题,在一般人看来探月工程是很神秘的,是高不可攀的高科技问题。实际上,从轨道设计和控制策略的角度看,其核心问题就是轨道的优化设计和控制策略的优化控制,也就是数学建模要解决的问题。当然,我们所建立的模型是经过简化后的结果,可能与实际工程中的问题还有一定的差别,但总体原理是一致的。就该问题而言,还有一些值得进一步分析研究的问题。譬如:关于软着陆轨道的设计和分阶段优化控制模型的建立与求解方法、表达形式等,尤其是控制函数的近似表示和确定方法;控制参数的误差分析与敏感性分析等;以及关于着陆区域的评估模型和最佳着陆点的确定方法等。希望有兴趣的读者就相关的某些问题做进一步更加深入的研究。

#### 参考文献

- [1]王大珩. 月球软着陆的制导控制研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2000.
- [2]唐琼. 月球软着陆轨道快速优化[J]. 计算机仿真,2007,24(12):24-27.
- [3]王鹏基. 月球软着陆飞行动力学和制导控制建模与仿真[J]. 中国科学:E 辑,2009,39(3):521-527.
- [4]周净扬,周荻. 月球探测器软着陆精确建模及最优轨道设计[J]. 宇航学报,2007,28(6):1462-1466.
- [5]韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2009.
- [6]韩中庚. 实用运筹学——模型、方法与计算[M]. 北京:清华大学出版社,2007.

### Optimization Model of the Trajectory Design and Control Strategies for Chang'e-3's Soft-landing

DU Jianping<sup>1</sup>, HAN Zhonggeng<sup>2</sup>

(1. Institute 1, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

2. State Key Laboratory of Mathematical Engineering and Advanced Computing, PLA Information  
Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

**Abstract:** Under reasonable assumptions, a dynamic model is established for the trajectory design and control strategies of Chang'e-3's soft-landing. The specific positions of the perilune and apolune of the elliptical orbit where Chang'e-3 orbits around the moon and gets prepared for landing are determined, as well as the magnitude of the spacecraft's velocity at both points. By force analysis for each sequence during the soft-landing, differential equation models are established, describing Chang'e-3's movements. The problem of the optimal design of the trajectory is converted into a functional optimization model concerning the thrust of the main engine, which aims at minimizing fuel consumption, subject to the starting-ending status of the spacecraft during the 6 sequences of the landing process. In order to simplify the problem, the control function in the model is deemed as a third order polynomial. The fourth order Runger-Kutta difference iterative method is applied, and the optimal control function and control strategies for each sequence are obtained. The results show that Chang'e-3's soft-landing sequence takes about 695 s, with fuel consumption about 1 269.1 kg.

**Key words:** Chang'e-3; trajectory design; control strategy; optimal control; sensitive analysis

#### 作者简介

杜剑平(1981—),男,博士,解放军信息工程大学讲师,主要从事军事运筹与军事通信、数学建模及其应用等方面的研究。

韩中庚(1958—),男,解放军信息工程大学教授,主要从事军事运筹与军事建模、数学建模及其应用等方面的研究。